

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình: $y = 3x + 2015$.

Câu 2. (1 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos x$

b) Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = (11i + 2)(1 - i)$.

Câu 3. (0.5 điểm) Giải phương trình: $\log_3(2x-3) = -\log_3(x+7) + 2$

Câu 4. (1 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} - y = 2-x \end{cases}$$

Câu 5. (1 điểm): Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x + e^x)x dx$

Câu 6. (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\angle ABC = 120^\circ$. Biết rằng góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $SABCD$ và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ACD đến mặt phẳng (SAB) .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x - y + z - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M qua (P) .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình $x - y + 1 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$. Các đường tròn $(C_1); (C_2)$ có tâm thuộc d_1 , cùng bán kính và cắt nhau tại $A(0;2)$ và B . Đường thẳng d_2 cắt $(C_1); (C_2)$ lần lượt tại C, D khác A . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết diện tích của nó bằng 2.

Câu 9 (0.5 điểm) Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có sáu chữ số được lập từ các chữ số 1, 3, 4, 8; trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập X . Tính xác suất để số đó chia hết cho 4.

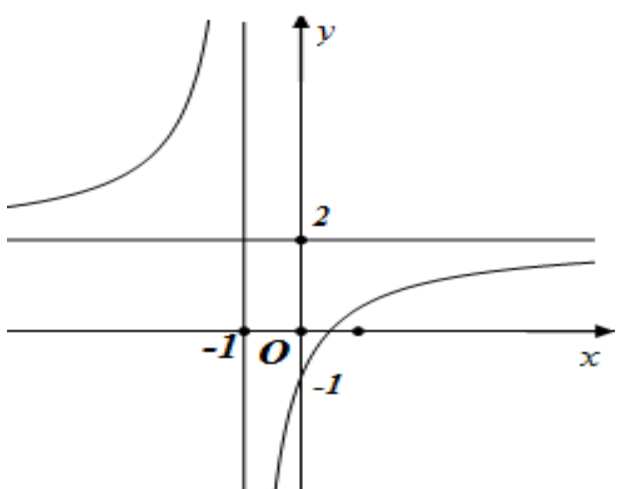
Câu 10. (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2}{(c+a)^2}.$$

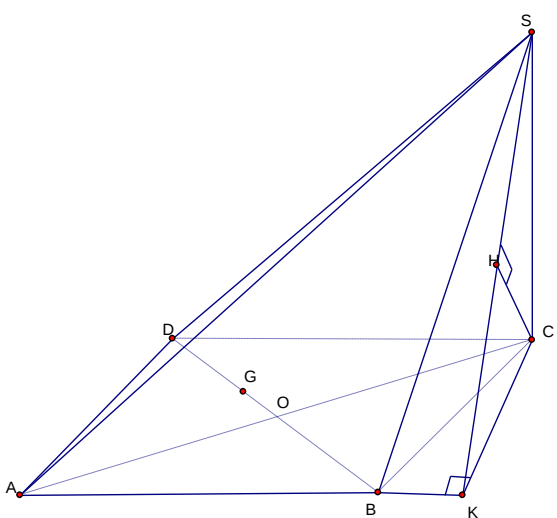
-----Hết-----

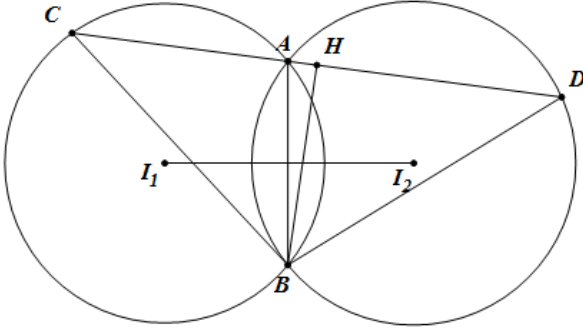
Hướng dẫn chấm môn toán

- Học sinh làm cách khác nếu đúng và ngắn gọn vẫn được điểm tối đa.

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM												
Câu 1 (2,0 điểm)	a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)													
	+Tập xác định $D=\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ • Giới hạn tại vô cực và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$,đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng	0,25												
	+Sự biến thiên • Chiều biến thiên: $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \neq -1$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ Cực trị : Hàm số không có cực trị.	0,25												
	• Bảng biến thiên : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'	+		+	y	2	$+\infty$	$-\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-1	$+\infty$										
	y'	+		+										
y	2	$+\infty$	$-\infty$											
+Đồ thị:														
	0,25													
b, Viết phương trình tiếp tuyến		0,25												
	Ta có hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.	0,25												

	$f'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}; \frac{3}{(x_0+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$	0,25
	Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$, phương trình tiếp tuyến của (C) là: $y = 3x - 1$	0,25
Câu 2 (1,0 điểm)	a) (0,5 điểm)	
	$pt \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = \cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,25
	b) (0,5 điểm)	
	Giả sử $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ $(1) \Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) = (11 + 2i)(1 - i)$ $\Leftrightarrow a + bi + 2a - 2bi = (11i + 2)(1 - i)$ $\Leftrightarrow 3a - bi = 11i - 11i^2 + 2 - 2i = 13 + 9i$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 13 \\ -b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{3} \\ b = -9 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{13}{3} - 9i$	0,25
Câu 3 (0,5 điểm)	Điều kiện: $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. Với ĐK đó $\log_3(2x - 3) = -\log_3(x + 7) + 2 \Leftrightarrow \log_3(2x - 3)(x + 7) = 2$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2 + 11x - 21 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 + 11x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{15}{2} \end{cases}$	0,25
	Đối chiếu đk suy ra phương trình có một nghiệm là $x = 2; x = \frac{15}{2}$	
Câu 4 (1,0 điểm)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} (1) \\ \sqrt{2y^2 + 1} - y = 2 - x (2) \end{cases}$	0,25
	Điều kiện: $x \leq 1$. Với điều kiện đó, ta có $(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$ $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$	
	Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $(1) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$	0,25
	Thế vào (2) ta được: $\sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x} = 2-x \Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x}} = 2-x$	0,25

	$\Leftrightarrow (2-x)\left(\frac{1}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=1(x \leq 1 \Rightarrow 2-x \neq 0)$ $\Leftrightarrow x=1. \text{ Suy ra nghiệm của hệ là } (x; y)=(1; 0)$	
	Với $y = x + 2$ thay vào (2) ta được: $\sqrt{x+2} + \sqrt{10-3x} = x^2 + 8$ Với $x \in \left[-2; \frac{10}{3}\right] \Rightarrow \sqrt{x+2} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}; \sqrt{10-3x} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{10-3x} < 8$ Suy ra phương trình vô nghiệm KL: HPT có 2 nghiệm (2;0), (-1;-3)	0,25
Câu 5 (1,0 điểm)	$I = \int_0^1 (x + e^x)x dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 x^2 dx$	0,25
	$I_1 = \int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1$ $I_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	0,25
	Vậy $I = \frac{4}{3}$	0,25
Câu 6 (1,0 điểm)	Nhận thấy tam giác BCD đều nên có $AC = 3a$ Từ góc giữa SA và mặt phẳng (ABCD) bằng 45°, nên tìm được $SC = 3a$ $S_{ABCD} = AB \cdot BC \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \quad (2)$ $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SC \cdot S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ 	0,5
	Kẻ $CK \perp AB$. Kẻ $CH \perp SK$, suy ra CH là khoảng cách từ C đến (SAB). Tính được $CH = \frac{3a}{\sqrt{5}}$ Vì $SC = 3a$, $CK = \frac{3a}{2}$ do $\angle ABC = 120^\circ \Rightarrow \angle CBK = 60^\circ \Rightarrow CK = CB \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$ Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có: $d(G, (SAB)) = \frac{4}{3} d(O, (SAB)) = \frac{2}{3} d(C, (SAB)) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Vậy $d(G, (SAB)) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.	0,5
Câu 7 (1,0	Đường thẳng d đi qua M vuông góc với (P) nhận véc tơ $\vec{n}(1;-1;1)$ làm véc tơ chỉ phương	0,5

điểm)	Phương trình của d: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases}$ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P) suy ra $H = d \cap (P) \Rightarrow H(1+t; 2-t; 1+t) \in (P) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 1; 2);$ Điểm M' đối xứng của M qua (P) nên H là trung điểm của đoạn MM' suy ra M'(3; 0; 3)	0,25 0,25 0,25
Câu 8 (1,0 điểm)	Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn $(C_1), (C_2)$. I_1, I_2 nằm trên d_1 nên A, B đối xứng nhau qua d_1. Tìm được B(1;1). Nhận thấy A nằm trên d_2.  Do hai đường tròn có bán kính bằng nhau nên tam giác BCD có $\angle BCD = \angle BDC$ (cùng chắn cung AB) nên tam giác BCD cân tại B. Gọi H là hình chiếu của B trên d_2. Tìm được $H\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$. H là trung điểm CD. Do $C; D \in d_2$ nên $C(6-3c; c); D(6-3d; d) \Rightarrow c+d = \frac{16}{5}$ (1) $d(B; d_2) = BH = \frac{2}{\sqrt{10}}; S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot BH = 2 \Rightarrow CD = 2\sqrt{10} \Rightarrow CD^2 = 40$ $\Leftrightarrow (c-d)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} c-d = 2 \\ c-d = -2 \end{cases}$ (2) Kết hợp (1) và (2) tìm được $c = \frac{13}{5}; d = \frac{3}{5}$ hoặc $c = \frac{3}{5}; d = \frac{13}{5}$. Tìm được $C(-\frac{9}{5}; \frac{13}{5}); D(\frac{21}{5}; \frac{3}{5})$ hoặc $C(\frac{21}{5}; \frac{3}{5}); D(-\frac{9}{5}; \frac{13}{5})$. Kết luận:	0,25 0,5 0,25
Câu 9 (1,0 điểm)	Gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$ với $a, b, c, d, e, f \in \{1, 3, 4, 8\}$ Sắp xếp chữ số 3 vào 3 trong 6 vị trí, có C_6^3 cách. Sắp xếp 3 chữ số 1; 4; 8 vào 3 vị trí còn lại có 3! Cách. Vậy có tất cả $C_6^3 \cdot 3! = 120$ số. Một số chia hết cho 4 khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng tạo thành 1 số chia hết cho 4. Trong các số trên, số lấy chia hết cho 4 có tận cùng là 48, 84. Trong mỗi trường hợp có $C_4^3 = 4$ cách sắp xếp chữ số 3 và 1 vào 4 vị trí còn lại, suy ra có 8 số chia hết cho 4. Gọi A là biến cố: “Số lấy ra chia hết cho 4” Vậy số các kết quả thuận lợi cho A là $\Omega_A = 8$ Số phần tử của không gian mẫu là $\Omega = 120$	0,25 0,25

	Xác suất của biến cố A là $P_A = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$	
Câu 10 (1,0 điểm)	Ta có $P = \frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2} + \frac{1}{(1+\frac{c}{b})^2} + \frac{1}{(1+\frac{a}{c})^2}$ $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz=1 \end{cases}$ $\Rightarrow P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2}$	0,25
	Ta chứng minh : $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \forall y, z > 0$ $\Leftrightarrow (1+zy)(2+2z+2y+z^2+y^2) \geq (1+zy+z+y)^2$ $\Leftrightarrow 2(z+y)(1+zy) + 2+2zy + (1+zy)(y-z)^2 + 2zy(1+yz) \geq$ $\geq (1+zy)^2 + 2(z+y)(1+zy) + (z+y)^2$ $\Leftrightarrow (1+zy)(y-z)^2 + 2+4yz+2y^2z^2 - (1+yz)^2 - (y-z)^2 - 4yz \geq 0$ $\Leftrightarrow yz(y-z)^2 + (1-yz)^2 \geq 0$ dấu “=” xảy ra khi $z=y=1$	0,25
	$\Rightarrow P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+zy} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x+1}{(1+x)^2}$ Giả sử $x = \max\{x; y; z\} \Rightarrow 1 = xyz \leq x^3 \Rightarrow x \geq 1$ Xét $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(1+x)^2} \quad (x \in [1; +\infty)); f'(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^4} \geq 0 \forall x \geq 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [1; +\infty) \Rightarrow$ $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \frac{3}{4} \forall x \geq 1$	0,25
	$\Rightarrow P \geq f(x) \geq \frac{3}{4}$ khi $a=b=c$ thì $P = \frac{3}{4}$ nên GTNN của P bằng $\frac{3}{4}$	0,25