



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

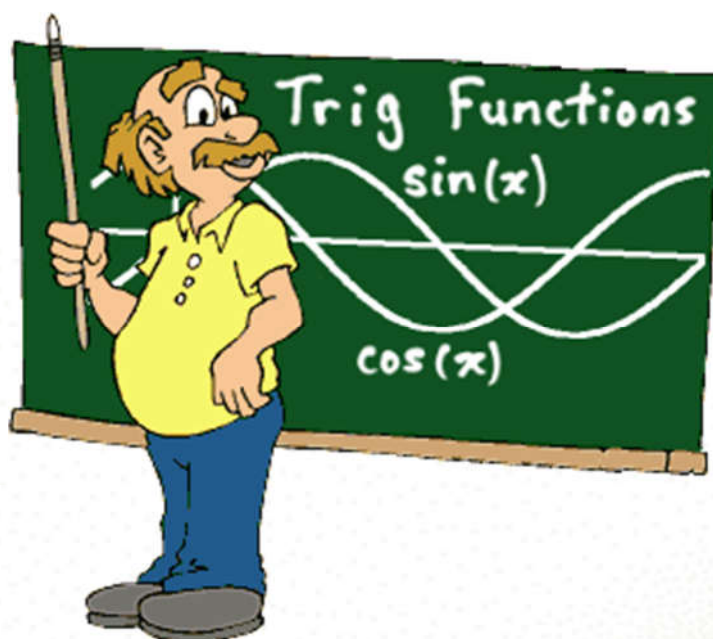
CS 2: Trung Tâm 133 Xuân 68

CS 3: Trung tâm 168 Mai Thúc Loan

CS4: Trung Tâm THPT Nguyễn Trường Tộ

BÀI GIẢNG CHƯƠNG 1

TOÁN 11 KNTT VỚI CS



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

MỤC LỤC

BÀI 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC.....	5
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	5
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....	10
Dạng 1 : Đơn vị đo độ và radian	10
1. Phương pháp	10
2. Các ví dụ minh họa.....	10
Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác	11
1. Phương pháp	11
2. Các ví dụ minh họa.....	11
Dạng 3. Độ dài của một cung tròn.....	13
1. Phương pháp giải	13
2. Các ví dụ minh họa	13
Dạng 4 : Tính giá trị của góc còn lại hoặc của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.....	14
1. Phương pháp giải.	14
2. Các ví dụ minh họa.....	14
Dạng 5: Xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác.	17
1. Phương pháp giải.	17
2. Các ví dụ minh họa.....	17
Dạng 6: Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x , đơn giản biểu thức.....	19
1. Phương pháp giải.	19
2. Các ví dụ minh họa.....	19
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	22
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	27
BÀI 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	61
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	61
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....	61
Dạng 1: Sử dụng công thức cộng	61

1. Phương pháp giải.	61
2. Các ví dụ minh họa.	62
Dạng 2: Sử dụng công thức nhân đôi và công thức hạ bậc.....	67
1. Phương pháp	67
2. Các ví dụ minh họa.	67
Dạng 3: Công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng.....	71
1. Phương pháp giải.	71
2. Các ví dụ minh họa.	71
Dạng 4: Bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.	76
1. Phương pháp giải.	76
2. Các ví dụ điển hình.	76
Dạng 5: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.....	79
1. Phương pháp giải	79
2. Các ví dụ minh họa.	79
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	86
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	91
BÀI 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	119
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	119
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....	120
Dạng 1: Sử dụng công thức cộng	120
1. Phương pháp giải.	120
2. Các ví dụ minh họa.	120
Dạng 2: Sử dụng công thức nhân đôi và công thức hạ bậc.....	125
1. Phương pháp	125
2. Các ví dụ minh họa.	126
Dạng 3: Công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng.....	130
1. Phương pháp giải.	130
2. Các ví dụ minh họa.	130
Dạng 4: Bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.	135
1. Phương pháp giải.	135

2. Các ví dụ điển hình.....	135
Dạng 5: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.....	137
1. Phương pháp giải	137
2. Các ví dụ minh họa.....	138
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	145
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	150
BÀI 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	178
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	178
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP LỜI GIẢI BÀI TẬP	181
Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số.....	181
1. Phương pháp	181
2. Các ví dụ mẫu	181
Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số.....	183
1. Phương pháp:	183
2. Các ví dụ mẫu	184
Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác.....	186
1. Phương pháp:	186
2. Ví dụ mẫu.....	187
Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó	190
1. Phương pháp	190
2. Ví dụ mẫu.....	191
Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác.....	192
1. Phương pháp	192
2. Các ví dụ mẫu	193
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	196
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	198
BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	228
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	228
B. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG	229
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	234
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	237

GIẢI BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 1 SÁCH GIÁO KHOA	247
BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 1.....	255

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

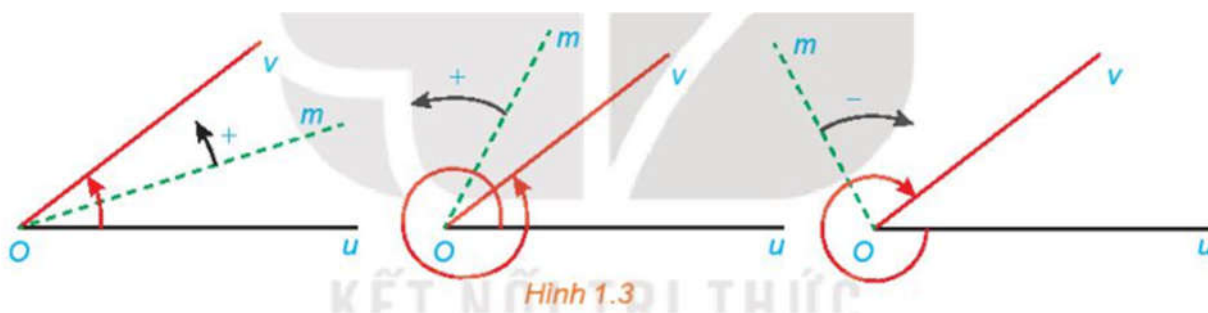
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a) Khái niệm về góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

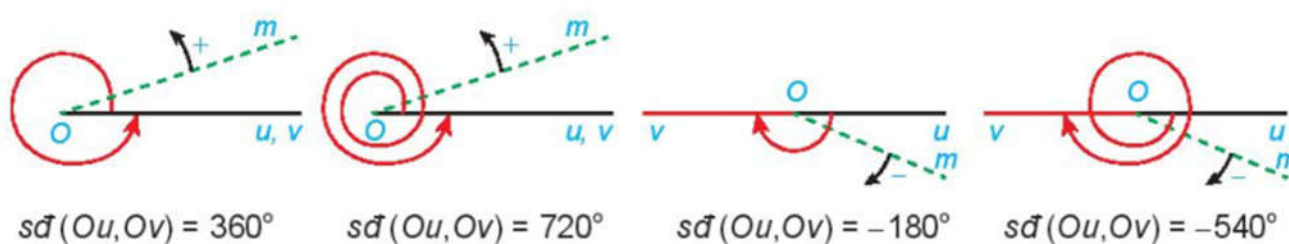
Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .

Góc lượng giác (Ou, Ov) chỉ được xác định khi ta biết được chuyển động quay của tia Om từ tia đầu Ou đến tia cuối Ov (H.1.3). Ta quy ước: Chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.



Khi đó, nếu tia Om quay theo chiều dương đúng một vòng ta nói tia Om quay góc 360° , quay đúng 2 vòng ta nói nó quay góc 720° ; quay theo chiều âm nửa vòng ta nói nó quay góc -180° , quay theo chiều âm 1,5 vòng ta nói nó quay góc $-1,5 \cdot 360^\circ = -540^\circ, \dots$

Khi tia Om quay góc α° thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α° . **Số đo của góc lượng giác** có tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $sđ(Ou, Ov)$.



Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của nó.

Chú ý. Cho hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov . Mỗi góc lượng giác như thế đều kí hiệu là (Ou, Ov) . Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của 360° .

b) Hệ thức Chasles

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có
 $sd(Ou, Ov) + sd(Ov, Ow) = sd(Ou, Ow) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Nhận xét. Từ hệ thức Chasles, ta suy ra:

Với ba tia tùy ý Ox, Ou, Ov ta có

$$sd(Ou, Ov) = sd(Ox, Ov) - sd(Ox, Ou) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Hệ thức này đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán số đo của góc lượng giác.

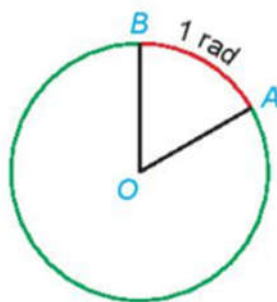
2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a) Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ: Để đo góc, ta dùng đơn vị độ. Ta đã biết: Góc 1° bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.

Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn: $1^\circ = 60'; 1' = 60''$.

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O , bán kính R và một cung AB trên (O) (H.1.6).



Hình 1.6

Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R .

Khi đó ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết: $\widehat{AOB} = 1 \text{ rad}$.

Quan hệ giữa độ và radian: Do đường tròn có độ dài là $2\pi R$ nên nó có số đo 2π rad. Mặt khác, đường tròn có số đo bằng 360° nên ta có $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$.

Do đó ta viết:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Chú ý. Khi viết số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số

đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.

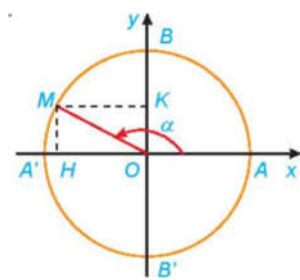
b) Độ dài cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = R\alpha$.

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

a) Đường tròn lượng giác

- Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho số $(OA, OM) = \alpha$.



b) Giá trị lượng giác của góc lượng giác

- Hoành độ x của điểm M được gọi là cosin của α , kí hiệu là $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = x.$$

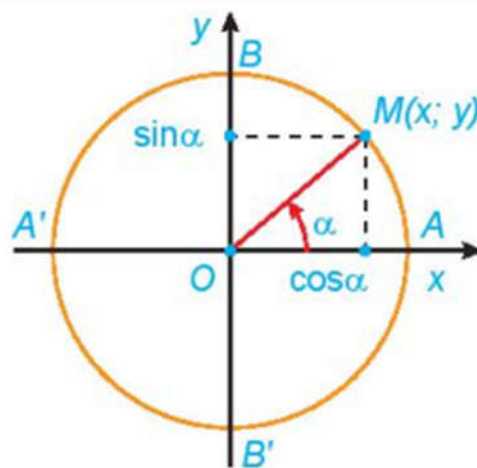
- Tung độ y của điểm M được gọi là sin của α , kí hiệu là $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = y$$

- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là cotang của α , kí hiệu là $\cot \alpha$.

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} (y \neq 0)$$

- Các giá trị $\cos \alpha, \sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của α .



Chú ý

a) Ta còn gọi trục tung là **trục sin**, trục hoành là **trục cosin**.

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

* $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:

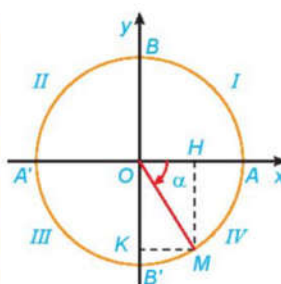
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1; \quad \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

* $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

- Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác (H.1.10).

Góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



c) Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

d) Sử dụng MTCT để đổi số đo và tìm giá trị lượng giác của góc

Tùy thuộc dòng máy tính, gv có thể hướng dẫn trực tiếp cho học sinh

4. QUAN HỆ GIỮA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

a) Các công thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$$

b) Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

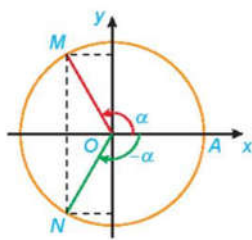
- Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



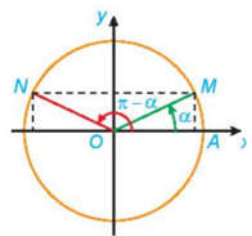
Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$



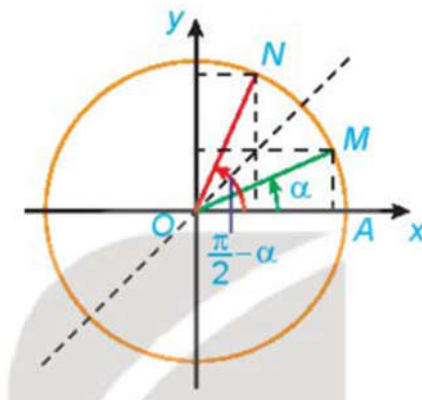
Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha.$$



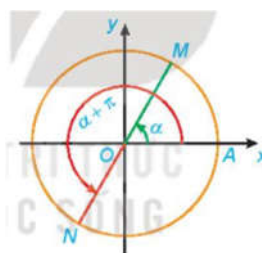
- Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha.$$



Chú ý. Nhờ các công thức trên, ta có thể đưa việc tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì về việc tính giá trị lượng giác của góc α với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1 : Đơn vị đo độ và radian

1. Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian: $180^\circ = \pi \text{ rad}$

Đổi cung a có số đo từ radian sang độ $a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

Đổi cung x° có số đo từ độ ra radian $x^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

a) Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}, 600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3},$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

b) Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ, \frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ,$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^0 = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^0 \approx -2260^0 48'.$$

Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

1. Phương pháp

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác ta thực hiện như sau:

- Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung.
- Xác định điểm cuối M của cung sao cho $\widehat{AM} = \alpha$

Lưu ý:

- + Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π là:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Ngoài ra, ta cũng có thể viết số đo bằng độ:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = x^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

- + Nếu ta có $\widehat{AM} = \alpha + k \frac{2\pi}{n}; k, n \in \mathbb{Z}$ thì sẽ có n điểm ngọn.

2. Các ví dụ minh họa.

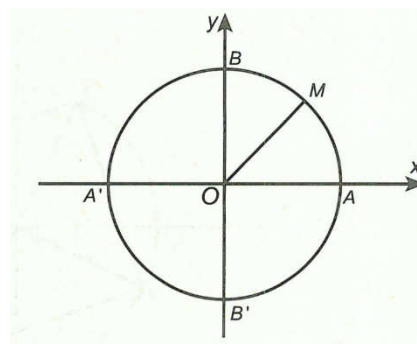
Ví dụ 1: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{25\pi}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 3\pi$$

Vậy điểm cuối M của cung $\widehat{AM}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung $\frac{\pi}{4}$. Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$.



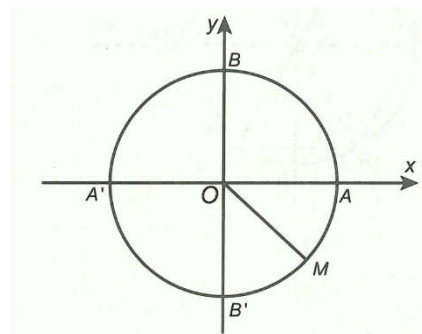
Ví dụ 2: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là -1485°

Hướng dẫn giải

Ta có $\widehat{sđ AM} = -1485^\circ = -45^\circ + (-4) \cdot 360^\circ$

Vậy điểm cuối M của cung $\widehat{AM}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung -45° .

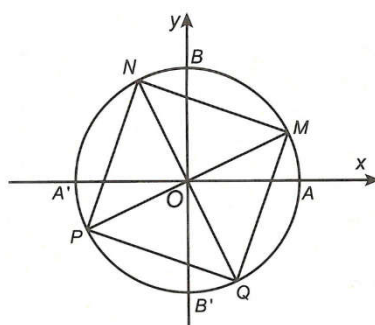
Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB'}$.



Ví dụ 3: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là

$$\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{sđ AM} = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{4}$ nên có 4 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

$k = 0 \Rightarrow \widehat{sđ AM} = \frac{\pi}{6}$ có điểm ngọn là M

$k = 1 \Rightarrow \widehat{sđ AN} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ có điểm ngọn là N

$k = 2 \Rightarrow \widehat{sđ AP} = \frac{\pi}{6} + \pi$ có điểm ngọn là P

$k = 3 \Rightarrow \widehat{sđ AQ} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$ có điểm ngọn là Q

$k = 4 \Rightarrow \widehat{sđ AR} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ có điểm ngọn là R . Lúc này điểm ngọn R trùng với M

Vậy bốn điểm M, N, P, Q tạo thành một hình vuông nội tiếp đường tròn lượng giác

Ví dụ 4: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là

$$k \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

Hướng dẫn giải

Ta có số đo $\widehat{AM} = k \frac{2\pi}{6}$ nên có 6 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

$k = 0 \Rightarrow \widehat{AM} = 0$ có điểm ngọn là M

$k = 1 \Rightarrow \widehat{AN} = \frac{\pi}{3}$ có điểm ngọn là N

$k = 2 \Rightarrow \widehat{AP} = \frac{2\pi}{3}$ có điểm ngọn là P

$k = 3 \Rightarrow \widehat{AQ} = \pi$ có điểm ngọn là Q

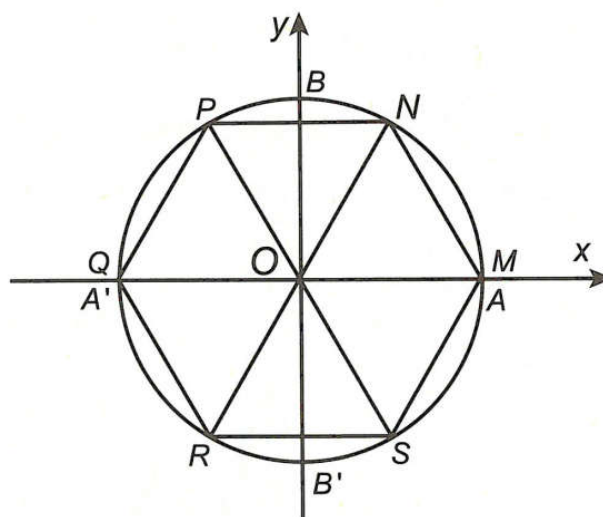
$k = 4 \Rightarrow \widehat{AR} = \frac{4\pi}{3}$ có điểm ngọn là R

$k = 5 \Rightarrow \widehat{AS} = \frac{5\pi}{3}$ có điểm ngọn là S

$k = 6 \Rightarrow \widehat{AT} = 2\pi$ có điểm ngọn là T

Lúc này điểm ngọn T trùng với M

Vậy sáu điểm $M; N; P; Q; R; S$ tạo thành một lục giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.



Dạng 3. Độ dài của một cung tròn

1. Phương pháp giải

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài là $I = R \cdot \alpha$

2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn có số đo sau đây: $\frac{\pi}{15}$ rad; 70°

Hướng dẫn giải

Gọi α, l, R lần lượt là số đo cung, độ dài cung và bán kính của đường tròn. Khi đó $R = 30$ cm

Độ dài cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ rad là:

$$l = R \cdot \alpha = 30 \cdot \frac{\pi}{15} = 2\pi \text{ (cm)}$$

Độ dài cung có số đo 70°

Chuyển từ độ sang radian: $70^\circ = 70^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{18}$

$$\text{Độ dài cung: } l = R \cdot \alpha = 30 \cdot \frac{7\pi}{18} = \frac{35\pi}{3} \text{ (cm)}$$

Ví dụ 2: Một cung lượng giác trên đường tròn định hướng có độ dài bằng một nửa bán kính. Số đo theo radian của cung đó là

- A. $\frac{1}{2}$ rad B. 1 rad C. $\frac{3}{2}$ rad D. 2 rad

Hướng dẫn giải

Gọi α, I, R lần lượt là số đo cung, độ dài cung và bán kính của đường tròn

Vì độ dài bằng nửa bán kính nên $I = \frac{1}{2}R$

$$\text{Ta có } I = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{I}{R} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}(\text{rad})$$

Dạng 4 : Tính giá trị của góc còn lại hoặc của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
- c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$ d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

Mà $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0$ suy ra $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{c) Vì } \tan \alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-2\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0 \text{ và } \tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \cos \alpha < 0$$

$$\text{Vì vậy } \cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{d) Vì } \cot \alpha = -\sqrt{2} \text{ nên } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ và } \cot \alpha = -\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \sin \alpha > 0$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

b) Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24 \text{ hay } \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

$$\text{Do đó } \cot \alpha = -2\sqrt{6}. \text{ Ta lại có } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } 3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) &= 1 \Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin^2 \alpha - 1)(2\sin^2 \alpha + 3) &= 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (Do } 2\sin^2 \alpha + 3 > 0 \text{)} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ví dụ 3: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } C &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x + \cos x = m$ nên $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ hay $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra

$$(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

Dạng 5: Xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$

$$\Rightarrow A = -\sin\frac{\pi}{6} + \cos\pi - \tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$$

b) Ta có $B = \frac{1}{\tan(8^0 + 360^0)} + \frac{2\sin(30^0 + 7.360^0)\cos(8^0 + 180^0)}{2\cos(-90^0 + 8^0 + 2.360^0) + \cos(90^0 + 8^0)}$

$$B = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2\sin 30^0(-\cos 8^0)}{2\cos(8^0 - 90^0) - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 8^0)}{2\cos(90^0 - 8^0) - \sin 8^0} =$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{2\sin 8^0 - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{\sin 8^0} = 0$$

c) Vì $25^0 + 65^0 = 90^0 \Rightarrow \sin 65^0 = \cos 25^0$ do đó

$$C = (\sin^2 25^0 + \cos^2 25^0) + \sin^2 45^0 + \sin^2 60^0 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

d) $D = -\left(\tan\frac{\pi}{8} \cdot \tan\frac{3\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)\tan\frac{5\pi}{8}\right]$

Mà $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{3\pi}{8} = \cot\frac{\pi}{8}, \tan\frac{5\pi}{8} = \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

Nên $D = -\left(\tan\frac{\pi}{8} \cdot \cot\frac{\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)\cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = -1$.

Ví dụ 2: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ b) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$ d) $\sin\frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$

Lời giải

a) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$

b) Ta có $-\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\pi \Rightarrow 0 > \frac{3\pi}{2} - \alpha > -\frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$

c) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0$

Và $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan(\pi - \alpha) > 0$

Vậy $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi + \alpha) > 0$.

d) Ta có $\frac{3\pi}{2} < \frac{14\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow \sin \frac{14\pi}{9} < 0$.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + \alpha < 2\pi$ suy ra $\cot(\pi + \alpha) < 0$.

Vậy $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha) > 0$.

Dạng 6: Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x , đơn giản biểu thức.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + (\sin^2 x)^2$

$\Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ (đúng) ĐPCM.

b) Ta có $VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

Mà $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x (\cot^2 x + 1) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP \quad \text{ĐPCM.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } VT &= \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP \quad \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } VT &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} \\ &= \sqrt{(\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} \\ &= (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 \end{aligned}$$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP \quad \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} = \tan A \cdot \cot(B+C)$$

Lời giải

Vì $A+B+C = \pi$ nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{-\sin \frac{B}{2}} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = -\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = -1$$

$$VP = \tan A \cdot \cot(\pi - A) = \tan A \cdot (-\cot A) = -1$$

Suy ra $VT = VP$. ĐPCM

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \cot(810^\circ - x)}$$

$$\text{c) } C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \quad \text{với } \pi < x < 2\pi$$

Lời giải

a) Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

Suy ra $A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0$

b) Ta có $\sin(900^\circ + x) = \sin(180^\circ + 2.360^\circ + x) = \sin(180^\circ + x) = -\sin x$

$$\cos(450^\circ - x) = \cos(90^\circ + 360^\circ - x) = \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\cot(1080^\circ - x) = \cot(3.360^\circ - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\tan(630^\circ - x) = \tan(3.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\sin(x - 630^\circ) = \sin(x - 2.360^\circ + 90^\circ) = \sin(x + 90^\circ) = \cos x$$

$$\tan(810^\circ + x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ + x) = \tan(90^\circ + x) = -\cot x$$

$$\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\text{Vậy } B = \frac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - (-\cot x) - \cot x} = \frac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}$$

c) Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$ nên

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right) \end{aligned}$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên

$$C = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

b) Ta có $B = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}}$

$$= \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

c) $C = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$

$$= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1}$$

$$= \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2}$$

$$= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1$$

$$= 3$$

Vậy C không phụ thuộc vào x .

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1.1. Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	15°	?	0°	1900°	?	?
Số đo radian	?	$\frac{3\pi}{8}$	?	?	$-\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{11\pi}{8}$

Lời giải

Để hoàn thành bảng đã cho, ta thực hiện chuyển đổi từ độ sang radian và từ radian sang độ.

$$\text{Ta có: } 15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12};$$

$$0^\circ = 0 \cdot \frac{\pi}{180} = 0$$

$$900^\circ = 900 \cdot \frac{\pi}{180} = 5\pi;$$

$$\frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 67,5^\circ;$$

$$-\frac{7\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = -105^\circ;$$

$$-\frac{11\pi}{8} = -\frac{11\pi}{8} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = -247,5^\circ.$$

Vậy ta hoàn thành được bảng như sau:

Số đo độ	$^\circ$	5°	$^\circ$	0°	105°	$67,5^\circ$
Số đo radian		$\frac{\pi}{12}$		π	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{8}$

Bài 1.2. Một đường tròn có bán kính. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) 1,5; c) 35° ; d) 315° .

Lời giải

- a) Độ dài của cung tròn có số đo $\frac{\pi}{12}$ trên đường tròn có bán kính $R = 20$ cm là

$$l_1 = 20 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{3} \text{ (cm)}.$$

- b) Độ dài của cung tròn có số đo 1,5 trên đường tròn có bán kính $R = 20$ cm là

$$l_2 = 20 \cdot 1,5 = 30 \text{ (cm)}.$$

- c) Độ dài của cung tròn có số đo 35° trên đường tròn có bán kính $R = 20$ cm là

$$l_3 = 20 \cdot \frac{7\pi}{36} = \frac{35\pi}{9} \text{ (cm)}.$$

- d) Ta có: $315^\circ = 315 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$.

Độ dài của cung tròn có số đo 315° trên đường tròn có bán kính $R = 20$ cm là

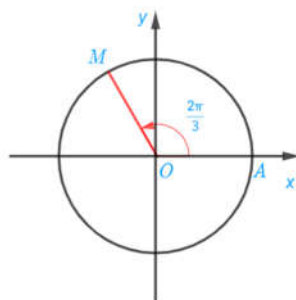
$$l_4 = 20 \cdot \frac{7\pi}{4} = 35\pi \text{ (cm)}.$$

Bài 1.3. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

- a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{11\pi}{4}$; c) 150° ; d) -225° .

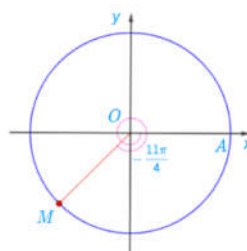
Lời giải

a) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{2\pi}{3}$ được xác định trong hình sau:

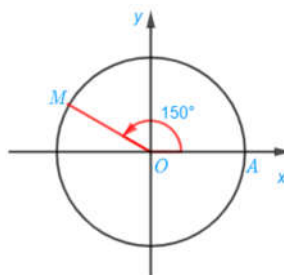


b) Ta có: $-\frac{11\pi}{4} = -\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)$.

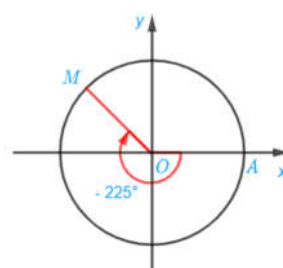
Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{11\pi}{4}$ được xác định trong hình sau:



c) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng 150° được xác định trong hình sau:



d) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng -225° được xác định trong hình sau:



Bài 1.4. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải

a) Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$. Mặt khác, từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\text{Do đó, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2 \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$. Mặt khác, từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Do đó, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

c) Ta có: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$. Mặt khác, từ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

d) Ta có: $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}.$

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\cos \alpha > 0$. Mặt khác, từ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ suy ra

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Bài 1.5. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

b) $\frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$.

Lời giải

a) Áp dụng $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, suy ra $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT &= \cos^4 a - \sin^4 a = (\cos^2 a)^2 - (\sin^2 a)^2 \\ &= (\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a) \\ &= 1 \cdot (\cos^2 a - \sin^2 a) \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2\cos^2 a - 1 = VP \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

b) Áp dụng các hệ thức lượng giác cơ bản.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT &= \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ &= \cot^2 \alpha + \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha} - (1 + \cot^2 \alpha) = \cot^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 - \cot^2 \alpha \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = (1 + \tan^2 \alpha) - 1 = \tan^2 \alpha = VP \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

Bài 1.6. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe đạp quay được $\frac{11}{5}$ vòng.

Vì một vòng ứng với góc bằng 360° nên góc mà bánh xe quay được trong 1 giây là $\frac{11}{5} \cdot 360 = 792^\circ$.

Vì một vòng ứng với góc bằng 2π nên góc mà bánh xe quay được trong 1 giây là

$$\frac{11}{5} \cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5} \text{ (rad)}.$$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \cdot \frac{11}{5} = 132$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi \text{ (mm)}$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn định hướng"?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
- B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- D. Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:

- A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
- B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
- C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
- D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Lời giải

Chọn B

Câu 3: Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác $\overset{b}{AB}$ xác định:

- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

Lời giải

Chọn D

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "góc lượng giác"?

- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
- C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Lời giải

Chọn D

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn lượng giác"?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
- B. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$ là một đường tròn lượng giác.

- C. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
- D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Lời giải

Chọn D

Câu 6: Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

- A. Cung có độ dài bằng 1. B. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
- C. Cung có độ dài bằng đường kính. D. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.

Lời giải

Chọn D

Cung có độ dài bằng bán kính (nửa đường kính) thì có số đo bằng 1 rad.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\pi \text{ rad} = 1^\circ$. B. $\pi \text{ rad} = 60^\circ$. C. $\pi \text{ rad} = 180^\circ$. D. $\pi \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải

Chọn C

$\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180° .

Câu 8: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. B. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 180^\circ$. D. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180° .

Suy ra 1 rad tương ứng với x° . Vậy $x = \frac{180.1}{\pi}$.

Câu 9: Nếu một cung tròn có số đo là a° thì số đo radian của nó là:

- A. $180\pi a$. B. $\frac{180\pi}{a}$. C. $\frac{a\pi}{180}$. D. $\frac{\pi}{180a}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Câu 10: Nếu một cung tròn có số đo là $3a^\circ$ thì số đo radian của nó là:

- A. $\frac{a\pi}{60}$. B. $\frac{a\pi}{180}$. C. $\frac{180}{a\pi}$. D. $\frac{60}{a\pi}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trong trường hợp này là $3a \longrightarrow \alpha = \frac{3a \cdot \pi}{180} = \frac{a \pi}{60}$.

Câu 11: Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{70}{\pi}$. B. $\frac{7}{18}$. C. $\frac{7\pi}{18}$. D. $\frac{7}{18\pi}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Ta có $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}$.

Câu 12: Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13: Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 0,7947. B. 0,7948. C. 0,795. D. 0,794.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $45^\circ 32' = \left(45 + \frac{32}{60}\right)^\circ$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(45 + \frac{32}{60}\right) \cdot \pi}{180} = 0,7947065861$.

Câu 14: Đổi số đo của góc $40^\circ 25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

- A. 0,705. B. 0,70. C. 0,7054. D. 0,71.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $40^\circ 25' = \left(40 + \frac{25}{60}\right)^\circ$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(40 + \frac{25}{60}\right) \cdot \pi}{180} = \frac{97\pi}{432} = 0,705403906$.

Câu 15: Đổi số đo của góc $-125^\circ 45'$ sang đơn vị radian.

A. $-\frac{503\pi}{720}$.

B. $\frac{503\pi}{720}$.

C. $\frac{251\pi}{360}$.

D. $-\frac{251\pi}{360}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 16: Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. 15° .

B. 10° .

C. 6° .

D. 5° .

Lời giải

Chọn A

công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} \longrightarrow a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = 15^\circ$.

Câu 17: Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $33^\circ 45'$.

B. $-29^\circ 30'$.

C. $-33^\circ 45'$.

D. $-32^\circ 55'$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-\frac{3\pi}{16} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(-\frac{135}{4} \right)^0 = -33^\circ 45'$.

Câu 18: Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $-286^\circ 44' 28''$.

B. $-286^\circ 28' 44''$.

C. -286° .

D. $286^\circ 28' 44''$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi} \right)^0 = -286^\circ 28' 44''$.

Câu 19: Đổi số đo của góc $\frac{3}{4}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $42^\circ 97' 18''$.

B. $42^\circ 58'$.

C. $42^\circ 97'$.

D. $42^\circ 58' 18''$.

Lời giải

Chọn D

Câu 20: Đổi số đo của góc -2 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $-114^\circ 59' 15''$.

B. $-114^\circ 35'$.

C. $-114^\circ 35' 29''$.

D. $-114^\circ 59'$.

Lời giải

Chọn C

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Số đo của cung tròn tỉ lệ với độ dài cung đó.

B. Độ dài của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.

C. Số đo của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.

D. Độ dài của cung tròn tỉ lệ nghịch với số đo của cung đó.

Lời giải

Chọn A

Từ công thức $\ell = R\alpha \longrightarrow \ell$ và α tỷ lệ nhau.

Câu 22: Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

A. $\ell = 3,93\text{cm}$.

B. $\ell = 2,94\text{cm}$.

C. $\ell = 3,39\text{cm}$.

D. $\ell = 1,49\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 3,93\text{cm}$.

Câu 23: Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm .

A. 30cm .

B. 40cm .

C. 20cm .

D. 60cm .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\ell = \alpha R = 1,5 \cdot 20 = 30\text{cm}$.

Câu 24: Một đường tròn có đường kính bằng 20cm . Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 35° (lấy 2 chữ số thập phân).

A. 6,01cm .

B. 6,11cm .

C. 6,21cm .

D. 6,31cm .

Lời giải

Chọn B

Cung có số đo 35° thì có số đó radian là $\alpha = \frac{a\pi}{180} = \frac{35\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$.

Bán kính đường tròn $R = \frac{20}{2} = 10\text{cm}$.

Suy ra $\ell = \alpha R = \frac{7\pi}{36} \cdot 10 \approx 6,11\text{cm}$.

Câu 25: Tính số đo cung có độ dài của cung bằng $\frac{40}{3}\text{cm}$ trên đường tròn có bán kính 20 cm .

A. 1,5 rad .

B. 0,67 rad .

C. 80° .

D. 88° .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{40}{3}}{20} = \frac{2}{3} \approx 0,67\text{rad}$.

Câu 26: Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó là

A. 1 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn B

$$\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{2R}{R} = 2 \text{ rad.}$$

Câu 27: Trên đường tròn bán kính R , cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{6}$ độ dài nửa đường tròn thì có số đo (tính bằng radian) là:

- A. $\pi/2$. B. $\pi/3$. C. $\pi/4$. D. $\pi/6$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{1}{6}\pi R}{R} = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 28: Một cung có độ dài 10cm , có số đo bằng radian là $2,5$ thì đường tròn của cung đó có bán kính là:

- A. $2,5\text{cm}$. B. $3,5\text{cm}$. C. 4cm . D. $4,5\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow R = \frac{l}{\alpha} = \frac{10}{2,5} = 4.$$

Câu 29: Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu?

- A. $\frac{8}{5}\pi$. B. $\frac{5}{8}\pi$. C. $\frac{3}{5}\pi$. D. $\frac{5}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\frac{2.2}{5} = \frac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là

$$l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5}\pi R.$$

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5}\pi R}{R} = \frac{8}{5}\pi.$$

Câu 30: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

- A. 30° . B. 40° . C. 50° . D. 60° .

Lời giải

Chọn C

72 răng có chiều dài là $2\pi R$ nên 10 răng có chiều dài $l = \frac{10.2\pi R}{72} = \frac{5\pi}{18}R$.

$$\text{Theo công thức } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{5}{18}\pi R}{R} = \frac{5}{18}\pi \text{ mà } a = \frac{180\alpha}{\pi} = \frac{180 \cdot \frac{5}{18}\pi}{\pi} = 50^\circ.$$

Cách khác: 72 răng tương ứng với 360° nên 10 răng tương ứng với $\frac{10.360}{72} = 50^\circ$.

Câu 31: Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc

$$(Ox, Oy) = 1822^{\circ}30'?$$

A. $k \in \emptyset$.

B. $k = 3$.

C. $k = -5$.

D. $k = 5$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Theo đề } (Ox, Oy) = 1822^{\circ}30' \longrightarrow 22^{\circ}30' + k \cdot 360^{\circ} = 1822^{\circ}30' \longrightarrow k = 5.$$

Câu 32: Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

A. $k = 4$.

B. $k = 5$.

C. $k = 6$.

D. $k = 7$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 10\pi < \alpha < 11\pi \longrightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \longrightarrow k = 5.$$

Câu 33: Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là

A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $-270^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $270^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Góc lượng giác } (OG, OP) \text{ chiếm } \frac{1}{4} \text{ đường tròn. Số đo là } \frac{1}{4} \cdot 2\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 34: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng

A. -45° .

B. 315° .

C. 45° hoặc 315° .

D.

$$-45^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải

Chọn D

Vì số đo cung AM bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^{\circ}$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^{\circ}$. Do đó số đo cung AN bằng 45° nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 35: Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là:

A. 120° .

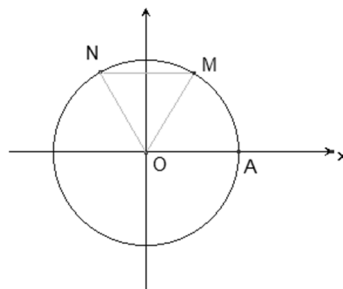
B. -240° .

C. -120° hoặc 240° .

D. $120^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{AOM} = 60^\circ$, $\widehat{MON} = 60^\circ$

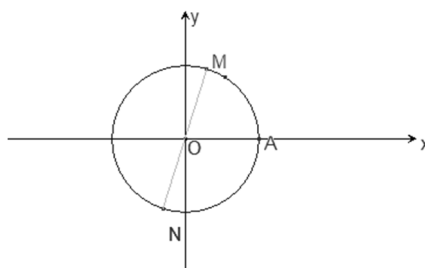
Nên $\widehat{AON} = 120^\circ$. Khi đó số đo cung AN bằng 120° .

Câu 36: Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng:

- A. 255° . B. -105° . C. -105° hoặc 255° . D. $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $\widehat{AOM} = 75^\circ$, $\widehat{MON} = 180^\circ$

Nên cung lượng giác AN có số đo bằng $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$.

Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

- A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $\delta - \alpha = 4\pi \Rightarrow$ hai cung α và δ có điểm cuối trùng nhau.

Và $\gamma - \beta = 8\pi \Rightarrow$ hai cung β và γ có điểm cuối trùng nhau.

Cách 2. Gọi A, B, C, D là điểm cuối của các cung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Biểu diễn các cung trên đường tròn lượng giác ta có $B \equiv C, A \equiv D$.

Câu 38: Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả **SAI** trong các kết quả sau đây:

- A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$. C. $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Cặp góc lượng giác a và b ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối.

Khi đó $a = b + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $k = \frac{a-b}{2\pi}$.

Để thấy, ở **đáp án B** vì $k = \frac{\frac{\pi}{10} - \frac{152\pi}{5}}{2\pi} = -\frac{303}{20} \notin \mathbb{Z}$.

Câu 39: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

A. $\frac{k2\pi}{3}$.

B. $k\pi$.

C. $\frac{k\pi}{2}$.

D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60° nên góc ở tâm là 120° tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

Câu 40: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

A. $\frac{k\pi}{2}$.

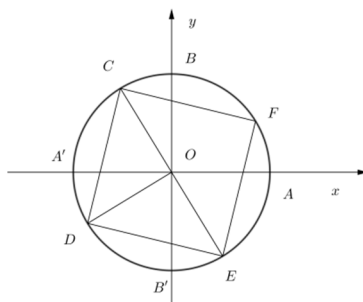
B. $k\pi$.

C. $\frac{k2\pi}{3}$.

D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45° nên góc ở tâm là 90° tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.

Câu 41: Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases}$$

Câu 42: Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0$.

B. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha < 0$.

C. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0$.

D. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn C

α thuộc góc phần tư thứ hai $\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$

Câu 43: Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha > 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn A

α thuộc góc phần tư thứ hai $\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases}$

Câu 44: Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha > 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn B

α thuộc góc phần tư thứ hai $\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases}$

Câu 45: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \cos \alpha$ cùng dấu?

A. Thứ II.

B. Thứ IV.

C. Thứ II hoặc IV.

D. Thứ I hoặc III.

Lời giải

Chọn D

Câu 46: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \tan \alpha$ trái dấu?

A. Thứ I.

B. Thứ II hoặc IV.

C. Thứ II hoặc III.

D. Thứ I hoặc IV.

Lời giải

Chọn C

Câu 47: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

A. Thứ II.

B. Thứ I hoặc II.

C. Thứ II hoặc III.

D. Thứ I hoặc IV.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha$.

Đẳng thức $|\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha \longrightarrow \cos \alpha \geq 0 \longrightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc IV.

Câu 48: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.

A. Thứ III.

B. Thứ I hoặc III.

C. Thứ I hoặc II.

D. Thứ III hoặc IV.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha$.

Đẳng thức $|\sin \alpha| = \sin \alpha \longrightarrow \sin \alpha \geq 0 \longrightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc II.

Câu 49: Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$.B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$.C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$.D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2} \longrightarrow$ điểm cuối cùng $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ I

$$\longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases}.$$

Câu 50: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$.B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$.C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.D. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ điểm cuối cùng $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ III $\longrightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$.

Câu 51: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$.

C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$.

D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \longrightarrow \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \tan(\alpha + \pi) > 0 \end{cases}.$$

Câu 52: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

A. $\sin(\pi + \alpha)$.

B. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

C. $\cos(-\alpha)$.

D. $\tan(\pi + \alpha)$.

Lời giải

Chọn B

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha < 0 \end{cases}$$

Câu 53: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$.

B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$.

C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0$.

D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \end{cases} \longrightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$$

Câu 54: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$.

A. $M \geq 0$.

B. $M > 0$.

C. $M \leq 0$.

D. $M < 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan(\pi - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow M > 0.$$

Câu 55: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

- A. $M \geq 0$. B. $M > 0$. C. $M \leq 0$. D. $M < 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\alpha < -\pi \rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi < \pi + \alpha < \frac{5\pi}{2} \rightarrow \cot(\pi + \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow M < 0.$$

Câu 56: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.

- A. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$. D. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 57: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

- A. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{1}{2}$.
C. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$. D. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 58: Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 4$. D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn C

Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng giác tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được

$$P = (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Câu 59: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$.

Câu 60: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$.

Câu 61: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
C. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$. D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B

Câu 62: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin 2\alpha^2 + \cos^2 2\alpha = 1$. B.
 $\sin(\alpha^2) + \cos(\alpha^2) = 1$.
C. $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$. D. $\sin^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \longrightarrow \cos^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha$.

Do đó $\sin^2 \alpha + \cos^2 (180^\circ - \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 63: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
 B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$.
 C. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$.
 D. $\sin^2 (2018\alpha) + \cos^2 (2018\alpha) = 2018$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin^2 (2018\alpha) + \cos^2 (2018\alpha) = 1$.

Câu 64: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.
 B. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
 C. $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$.
 D. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 65: Để $\tan x$ có nghĩa khi

- A. $x = \pm \frac{\pi}{2}$.
 B. $x = 0$.
 C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 D. $x \neq k\pi$.

Lời giải

Chọn C

Câu 66: Điều kiện trong đẳng thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ là

- A. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn D

$\cot \left(x - \frac{\pi}{2018} \right)$ có nghĩa khi $x - \frac{\pi}{2018} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2018} + k\pi$.

Câu 67: Điều kiện để biểu thức $P = \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \cot \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$ xác định là

- A. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$

Đẳng thức xác định khi $\begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 68: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ.$

B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ.$

C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ.$

D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ.$

Lời giải

Chọn C

Biểu thức xác định khi $\begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 69: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan 45^\circ > \tan 46^\circ.$

B. $\cos 142^\circ > \cos 143^\circ.$

C. $\sin 90^\circ 13' < \sin 90^\circ 14'.$

D. $\cot 128^\circ > \cot 126^\circ.$

Lời giải

Chọn C

Dùng MTCT kiểm tra từng đáp án.

Câu 70: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$

B. $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha.$

C. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha.$

D. $\tan(\pi + 2\alpha) = \cot(2\alpha).$

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng giá trị từ 90° đến 180° , khi giá trị góc tăng thì giá trị cos của góc tương ứng giảm.

Câu 71: Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

A. $-\sin \alpha.$

B. $\cos \alpha.$

C. $\sin \alpha.$

D. $-\cos \alpha.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha.$

Câu 72: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Câu 73: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A. $-\tan \alpha$. B. $\cot \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $-\cot \alpha$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \tan(2017\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

Câu 74: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. B. $A = 2 \sin \alpha$. C. $A = \sin \alpha \cos \alpha$. D. $A = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0.$$

Câu 75: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(\pi - x)$ ta được

- A. $S = 0$. B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$. C. $S = 2 \sin x \cos x$. D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x) \\ &= \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

Câu 76: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $P + Q = 0$. B. $P + Q = -1$. C. $P + Q = 1$. D. $P + Q = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Và } Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Khi đó } P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0.$$

Câu 77: Biểu thức lượng giác $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x) \right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x) \right]^2$ có giá trị bằng?

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \sin(10\pi + x) = \sin x.$$

$$\text{Và } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x; \quad \cos(8\pi - x) = \cos x.$$

$$\text{Khi đó } \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x) \right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x) \right]^2$$

$$= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$$

$$= \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 2.$$

Câu 78: Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x) \right]^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 x}$. B. $\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $\frac{2}{\sin^2 x}$. D. $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \tan \frac{17\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{và} \quad \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \cot x.$$

$$\text{Và } \cot \frac{13\pi}{4} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1; \quad \cot(7\pi - x) = -\cot x.$$

$$\text{Suy ra } P = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2 \cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

Câu 79: Biết rằng $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

- A. 1. B. -1. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ và $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Kết hợp với giá trị $\sin\frac{13\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Suy ra $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

Câu 80: Nếu $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0$ thì $\tan x$ bằng

- A. 1. B. -1. C. 0. D. Một giá trị khác.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan(4\pi + 1,25) = \tan 1,25$ suy ra $\cot 1,25 \cdot \tan 1,25 = 1$

Và $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$; $\cos(6\pi - x) = \cos(x - 6\pi) = \cos x$.

Khi đó $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 1 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$.

Mặt khác $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = 0$.

Câu 81: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng:

- A. $\sin(A + C) = -\sin B$. B. $\cos(A + C) = -\cos B$.
C. $\tan(A + C) = \tan B$. D. $\cot(A + C) = \cot B$.

Lời giải

Chọn B

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A + C = \pi - B$.

Khi đó $\sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$; $\cos(A + C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$.

$\tan(A + C) = \tan(\pi - B) = -\tan B$; $\cot(A + C) = \cot(\pi - B) = -\cot B$.

Câu 82: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó

- A. $\sin C = -\sin(A + B)$. B. $\cos C = \cos(A + B)$.
C. $\tan C = \tan(A + B)$. D. $\cot C = \cot(A + B)$.

Lời giải

Chọn D

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $C = 180^\circ - (A + B)$.

Do đó C và $A + B$ là 2 góc bù nhau $\Rightarrow \sin C = \sin(A + B)$; $\cos C = -\cos(A + B)$.

Và $\tan C = -\tan(A+B)$; $\cot C = \cot(A+B)$.

Câu 83: Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $A+B+C = \pi \Leftrightarrow A+B = \pi - C$

Do đó $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$.

Câu 84: A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức **sai**:

A. $\sin A = -\sin(2A+B+C)$.

B. $\sin A = -\cos \frac{3A+B+C}{2}$.

C. $\cos C = \sin \frac{A+B+3C}{2}$.

D. $\sin C = \sin(A+B+2C)$.

Lời giải

Chọn D

A, B, C là ba góc của một tam giác $\Rightarrow A+B+C = 180^\circ \Leftrightarrow A+B = 180^\circ - C$.

Ta có $\sin(A+B+2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$.

Câu 85: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$.

B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

Câu 86: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$.

D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{3} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 87: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504.2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504.2\pi \end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 88: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$. B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Câu 89: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $P = \cos \alpha + \sin \alpha$.

- A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $P = 1 - \sqrt{5}$. C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\longrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Do đó, } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 90: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Câu 91: Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 92: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

A. $P = -3$. B. $P = \frac{3}{7}$. C. $P = \frac{12}{25}$. D. $P = -\frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Thay } \tan \alpha = -\frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{12}{25}.$$

Câu 93: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $P = \frac{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha + 1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

A. $P = \frac{19 + 2\sqrt{2}}{9}$. B. $P = \frac{19 - 2\sqrt{2}}{9}$. C. $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$. D. $P = \frac{26 + 2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{26-2\sqrt{2}}{9}.$$

Câu 94: Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

- A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = -2\sqrt{2}$. C. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow P = -2\sqrt{2}.$$

Câu 95: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5+3\tan \alpha} + \sqrt{6-4\cot \alpha}$.

- A. $P = 4$. B. $P = -4$. C. $P = 6$. D. $P = -6$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 4.$$

Câu 96: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2\tan \alpha + 1}$.

- A. $P = -\frac{1}{3}$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = \frac{7}{3}$. D. $P = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \sqrt{(\tan \alpha - 1)^2} = |\tan \alpha - 1|. \text{ Vì } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan \alpha > 1 \longrightarrow P = \tan \alpha - 1.$$

Theo giả thiết:
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} \longrightarrow P = \frac{1}{3}.$$

Câu 97: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $P = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4}$. C. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $P = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \\ \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow \alpha = \pi.$$

Thay $\alpha = \pi$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 98: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \\ \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \longrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Thay $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 99: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{30}{11}$. B. $P = \frac{31}{11}$. C. $P = \frac{32}{11}$. D. $P = \frac{34}{11}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{31}{11}.$$

Câu 100: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

A. $P = -\frac{4}{9}$. B. $P = \frac{4}{9}$. C. $P = -\frac{4}{19}$. D. $P = \frac{4}{19}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos \alpha \text{ ta được } P = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 7 \tan \alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}.$$

Câu 101: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{15}{13}$. B. $P = \frac{15}{13}$. C. $P = -13$. D. $P = 13$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \sin \alpha \text{ ta được } P = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13.$$

Câu 102: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{9}{13}$. B. $P = \frac{9}{65}$. C. $P = -\frac{9}{65}$. D. $P = \frac{24}{29}$.

Lời giải

Chọn A

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 4}{5 \tan^2 \alpha + 6} = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 + 6} = \frac{9}{13}.$$

Câu 103: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = -\frac{8}{13}$. B. $P = \frac{2}{19}$. C. $P = -\frac{2}{19}$. D. $P = -\frac{8}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{8}{19}.$$

Câu 104: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 5$. Tính $P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

A. $P = \frac{9}{13}$.

B. $P = \frac{10}{13}$.

C. $P = \frac{11}{13}$.

D. $P = \frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$. (*)

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 \alpha$ ta được $\frac{P}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1$

$$\Leftrightarrow P(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow P = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{5^2 - 1}{1 + 5^2} = \frac{12}{13}.$$

Câu 105: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

A. $P = \frac{9}{16}$.

B. $P = \frac{9}{32}$.

C. $P = \frac{9}{8}$.

D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{25}{16}$

$$\longrightarrow P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{9}{32}.$$

Câu 106: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$.

B. $P = \frac{49}{25}$.

C. $P = \frac{7}{5}$.

D. $P = \frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có

$$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}.$$

Vì $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ nên ta chọn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$.

$$\text{Thay } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125}.$$

Câu 107: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2.$$

$$\text{Suy ra } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ suy ra } \sin \alpha < \cos \alpha \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha < 0. \text{ Vậy } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 108: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

- A. $P = 2 - m$. B. $P = 2 - m^2$. C. $P = m^2 - 2$. D. $P = \sqrt{2 - m^2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2.$$

$$\text{Suy ra } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - m^2 \longrightarrow P = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sqrt{2 - m^2}.$$

Câu 109: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Câu 110: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

- A. $P = 100$. B. $P = 110$. C. $P = 112$. D. $P = 115$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110.$$

Câu 111: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P=12$. B. $P=14$. C. $P=16$. D. $P=18$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14. \end{aligned}$$

Câu 112: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

- A. $P=1$. B. $P=-1$. C. $P=-\sqrt{5}$. D. $P=\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \tan \alpha < 0 \text{ nên } \tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}.$$

$$\text{Thay } \tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = -\sqrt{5}.$$

Câu 113: Cho góc α thỏa mãn $3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$. B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}$. C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}$. D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2 \Leftrightarrow (3\cos \alpha + 2\sin \alpha)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9\cos^2 \alpha + 12\cos \alpha \cdot \sin \alpha + 4\sin^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow 5\cos^2 \alpha + 12\cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (5\cos \alpha + 12\sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 5\cos \alpha + 12\sin \alpha = 0 \end{cases}$$

- $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 1$: loại (vì $\sin \alpha < 0$).

• $5\cos\alpha + 12\sin\alpha = 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5\cos\alpha + 12\sin\alpha = 0 \\ 3\cos\alpha + 2\sin\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos\alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$.

Câu 114: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin\alpha - 2\cos\alpha = 1$. Tính $P = 2\tan\alpha - \cot\alpha$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = \frac{1}{4}$.

C. $P = \frac{1}{6}$.

D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases} \sin\alpha < 0 \\ \cos\alpha < 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \sin\alpha - 2\cos\alpha = 1 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha + 4\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ (do $\sin\alpha < 0$) $\longrightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$

và $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}$.

Thay $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ và $\cot\alpha = \frac{4}{3}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{6}$.

Câu 115: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

A. $M = 1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = 4\sin x \cdot \cos x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1 + 2\sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - 2\sin x \cdot \cos x \end{cases}$

Suy ra $M = 2$.

Câu 116: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 4x$.

B. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.

D. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + 2.\sin^2 x.\cos^2 x + (\cos^2 x)^2 - 2.\sin^2 x.\cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}(2.\sin x.\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x. \end{aligned}$$

Câu 117: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$. B. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.
C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x$. D. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\cos^2 x - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x - \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x. \end{aligned}$$

Câu 118: Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A. $M = 1 + 3\sin^2 x \cos^2 x$. B. $M = 1 - 3\sin^2 x$.
C. $M = 1 - \frac{3}{2}\sin^2 2x$. D. $M = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M = \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Câu 119: Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x$.

- A. $M = \tan^2 x$. B. $M = \sin^2 x$. C. $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$. D. $M = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$$

Câu 120: Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x$.

- A. $M = \cot^2 x$. B. $M = \cos^2 x$.
C. $M = 1$. D. $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } M = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$$

Câu 121: Rút gọn biểu thức $M = (1\sin^2 x)\cot^2 x + (1\cot^2 x)$.

- A. $M = \sin^2 x$. B. $M = \cos^2 x$. C. $M = \sin^2 x$. D. $M = \cos^2 x$.

Lời giải

Chọn A

Ta biến đổi: $M = (\cot^2 x - \cos^2 x) + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

Câu 122: Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$.

- A. $M = 1 + \sin^2 \alpha$. B. $M = \sin \alpha$. C. $M = 2 \sin \alpha$. D. $M = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \tan^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\ &= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\ &= -\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3. \end{aligned}$$

Câu 123: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

- A. $M = -4$. B. $M = -2$. C. $M = 2$. D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1) \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right) \\ &= (-2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2. \end{aligned}$$

Câu 124: Đơn giản biểu thức $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

- A. $P = |\sin \alpha|$. B. $P = \sin \alpha$. C. $P = \cos \alpha$. D. $P = |\cos \alpha|$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha|.$$

Câu 125: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

- A. $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$. B. $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$.
C. $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$. D. $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \alpha.$$

Câu 126: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$. B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$. C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$. D. $P = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Câu 127: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

- A. $P = \tan^2 \alpha$. B. $P = 1$. C. $P = -\cos^2 \alpha$. D. $P = \cot^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha.$$

Câu 128: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

- A. $P = \cos x + \sin x$. B. $P = \cos x - \sin x$.
C. $P = \cos 2x - \sin 2x$. D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{2 \cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

Câu 129: Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$.

- A. $P = 2 \tan^2 \alpha$. B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$. C. $P = 2 \cot^2 \alpha$. D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

Câu 130: Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$.

- A. $P=2$. B. $P=1+\tan \alpha$. C. $P=\frac{1}{\cos^2 \alpha}$. D. $P=\frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} &= \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha. \\ \text{Suy ra } P &= \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Câu 131: Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$.

- A. $P=2$. B. $P=2 \cos \alpha$. C. $P=2 \tan \alpha$. D. $P=2 \sin \alpha$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Câu 132: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$.

- A. $P=1$. B. $P=-1$. C. $P=\frac{1}{2}$. D. $P=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x.$$

$$\text{Và } \frac{\sin x \cos x}{\cot x} = \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x. \text{ Suy ra } P = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

BÀI 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Sử dụng công thức cộng

1. Phương pháp giải.

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biết $\sin x = \frac{1}{2}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính giá trị lượng giác $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên điểm ngọn cung thuộc góc phần tư thứ I $\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 2: Biết $\cos x = -\frac{12}{13}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị lượng giác $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Lời giải

Vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên điểm ngọn cung thuộc góc phần tư thứ III $\Rightarrow \sin x < 0$

$$\Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}.$$

$$\text{Ta có } \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $A = \sin(x+14^\circ)\sin(x+74^\circ) + \sin(x-76^\circ)\sin(x-16^\circ)$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } A = \sin(14^\circ + x)\cos(16^\circ - x) + \sin(76^\circ - x)\sin(16^\circ - x)$$

$$= \sin(14^\circ + x)\cos(16^\circ - x) + \cos(14^\circ + x)\sin(16^\circ - x)$$

$$= \sin(14^\circ + 16^\circ + x - x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos c}{\cos c \cdot \cos a} \\ &= \frac{\cancel{\sin a} \cdot \cancel{\cos b} - \cancel{\sin b} \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}} + \frac{\cancel{\sin b} \cdot \cancel{\cos c} - \cancel{\sin c} \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos b} \cdot \cancel{\cos c}} + \frac{\cancel{\sin c} \cdot \cancel{\cos a} - \cancel{\sin a} \cdot \cancel{\cos c}}{\cancel{\cos c} \cdot \cancel{\cos a}} \\ &= \cancel{\tan a} - \cancel{\tan b} + \cancel{\tan b} - \cancel{\tan c} + \cancel{\tan c} - \cancel{\tan a} = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Không dùng MTCT, tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ, \tan \frac{7\pi}{12}$.

Lời giải

* Tính $\cos 795^\circ$

Vì $795^\circ = 75^\circ + 2.360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2.360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

* Tính $\tan \frac{7\pi}{12}$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

Ví dụ 6: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

b) $B = 4 \sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

Lời giải

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

Cách 1: Ta có $\cos 202^\circ 30' = \cos(180^\circ + 22^\circ 30') = -\cos 22^\circ 30'$

Do đó $A = -\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Cách 2: $A = \frac{1}{2} [\sin(22^\circ 30' + 202^\circ 30') + \sin(22^\circ 30' - 202^\circ 30')] = \frac{1}{2} [\sin 225^\circ + \sin(-180^\circ)]$

$= \frac{1}{2} [\sin(180^\circ + 45^\circ) - \sin 180^\circ] = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{16}\right)^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8} = \left[1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{16}\right)\right]^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8} \\ &= 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = 1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$\text{a) } A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$$

$$\text{b) } B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$$

$$\text{c) } C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$\text{d) } D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cos 290^\circ = \cos(180^\circ + 90^\circ + 20^\circ) = -\cos(90^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\sin 250^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ - 20^\circ) = -\sin(90^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = 4 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} \\ &= 4 \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Cách 1: Ta có } B &= \left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\right) \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}\right) = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 45^\circ + \cos 20^\circ \sin 45^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cos 45^\circ + \cos 25^\circ \sin 45^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= 2 \frac{\sin 65^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: Ta có } \tan 45^\circ = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$$

$$\text{Suy ra } 1 = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Leftrightarrow \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = 2.$$

Vậy $B = 2$

$$\text{c) } C = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \sin 81^\circ \cos 9^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \sin 63^\circ \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\ &= \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} \end{aligned}$$

$$= \frac{4 \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} \right)^2 - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \\ &= \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) \\ &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{3} \right)$
- $\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{6} \right)$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right)$

Ví dụ 8: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\text{b) } B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$$

$$\text{c) } C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$$

$$\text{d) } D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \text{ do đó}$$

$$\begin{aligned} 16 \sin 20^\circ \cdot B &= 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{c) Ta có } C = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}. \text{ Vì } \sin \frac{\pi}{5} \neq 0 \text{ nên}$$

$$2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$

$$c) D = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$$

Xét $T = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$, vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} T &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \\ &= \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left(\sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \right) \text{ Suy ra } T = -\frac{1}{2} \\ &= -\sin \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

Vậy $D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}$.

Ví dụ 9: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

• Ta có $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$ (1)

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = \frac{3}{2}$$
 (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) &= 2 \Leftrightarrow 2 \cos(\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

Vậy $\cos(\alpha - \beta) = 0$

• Từ giả thiết ta có $(\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \alpha + \cos \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0$ (Do $\cos(\alpha - \beta) = 0$)

Suy ra $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dạng 2: Sử dụng công thức nhân đôi và công thức hạ bậc

1. Phương pháp

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Không dùng máy tính. Hãy tính $\tan \frac{\pi}{8}$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \text{ suy ra } 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Do } \tan \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

Nhận xét: Bài này có thể yêu cầu tính $\cot \frac{5\pi}{8}$. Lúc đó: $\cot \frac{5\pi}{8} = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = -\tan \frac{\pi}{8}$

Ví dụ 2: Chứng minh các biểu thức sau :

$$\text{a) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

$$\text{b) } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= \left(\sin^2 \alpha \right)^3 + \left(\cos^2 \alpha \right)^3 \\ &+ 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right) - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right) \\ &= \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < 2\alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Mặt khác $\cos 2\alpha > 0$ do đó $\tan 2\alpha < 0$

$$\text{Vậy } \tan 2\alpha = -\sqrt{3}$$

Ví dụ 4: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + 2\tan \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \tan^3 \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1\right)^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \pm 1$$

Vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ do đó $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ nên $\tan \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = 1$

$$\text{Ta có } \tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + 2006\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -1$$

$$\text{Vậy } \tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right) = -1$$

Lưu ý: Ta có thể biểu diễn $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ qua $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ như sau:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \cot \alpha = \frac{1-t^2}{2t} \text{ với } \alpha \text{ làm các biểu thức có nghĩa.}$$

Ví dụ 5: Tính $A = \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$A = \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 6 *: Không dùng máy tính. Hãy tính $\sin 18^\circ$

Lời giải

Vì $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

Mà $\cos 36^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ$

$$\sin 54^\circ = \sin(18^\circ + 36^\circ) = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ$$

$$= \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ)$$

$$= 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$$

Do đó, đồng nhất thức ta được

$$3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Vì $0 < \sin 18^\circ < 1$ nên $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ví dụ 7: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0, \cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{10}}{20}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ví dụ 8: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 = 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 8 = 9 (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow 8 = 9 \sin^2 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 16 = 9 (1 - \cos 4\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$$

$$\text{Vậy } \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$$

Ví dụ 9: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\tan \alpha = -2 \tan \beta$.

$$\text{Tính } A = \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) \sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right).$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = -2 \tan \beta \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta = -2 \sin \beta \cos \alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{cases} \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{3} \\ \sin \alpha \cos \beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \beta - \frac{1}{3}) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{3}$$

Do đó $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ta có $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2+3\sqrt{2}}{12}$$

$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[-\cos 2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + 2\sin^2 \beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2+3\sqrt{2}}{12}$$

Do đó $A = -\frac{2+3\sqrt{2}}{12} + \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} = -\frac{1}{3}$

Dạng 3: Công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng

1. Phương pháp giải.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$

b) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

Hướng dẫn giải

$$a) C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)}{-2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$b) D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng

$$a) \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$b) \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \text{ với } \sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin(\alpha + \beta), \alpha + \beta \neq k2\pi$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} [\cos 2\alpha - \cos 2\beta] \\ = -\frac{1}{2} [(1 - 2\sin^2 \alpha) - (1 - 2\sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$b) \text{ Từ giả thiết ta có } 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 6 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{Do } \alpha + \beta \neq k2\pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \text{ suy ra } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

$$c) \text{ Ta có } VT = \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2} [\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2} \right) [\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)} \\ = \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cos(-\beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{\left[\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2} = \frac{2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} = \cot^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Lời giải

$$\text{a) Do } 0 < \alpha < \pi \text{ nên } \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0, \sin \alpha > 0$$

Đẳng thức tương đương với

$$\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \left[1 - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right] \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (luôn)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$$

đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM.

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \frac{\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)^2}{\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha} \right) \left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2 \cos \alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1 + |\sin \alpha|}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Vì $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$ do đó

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$a) A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$b) B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có: } A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Vì } \alpha + \frac{\pi}{6} = \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \text{ và } \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) = -\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Đơn giản biểu thức sau:

$$a) A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$$

$$b) B = \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$c) C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lời giải

$$a) A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$$

$$b) \text{ Ta có } \cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a \text{ và}$$

$$\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{a}{2} - a \right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}.$$

$$c) \text{ Ta có } C \cdot 2 \sin \frac{b}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \cos a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+nb)$$

$$= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right) \\ + \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right)$$

$$\sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) = 2 \sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)$$

$$\text{Suy ra } C = \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}$$

Ví dụ 7: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$

không phụ thuộc vào a, b .

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{(2 - \sin 2a)(2 - \sin 2b)} = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{4 - 2(\sin 2a + \sin 2b) + \sin 2a \sin 2b}$$

$$\text{Ta có } \sin 2a + \sin 2b = 2 \sin(a+b) \cos(a-b)$$

$$\text{Mà } \sin(a+b) = 2 \cos(a-b) \Rightarrow \sin^2(a+b) = 4 \cos^2(a-b) \text{ nên}$$

$$\cos 2(a+b) - \cos 2(a-b) = 1 - 2 \sin^2(a+b) - [2 \cos^2(a-b) - 1] \\ = 2 - 2[\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b)] = 2 - 10 \cos^2(a-b)$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{4 - 8 \cos^2(a-b) - \frac{1}{2} [2 - 10 \cos^2(a-b)]} = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{3 - 3 \cos^2(a-b)} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng

$$a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$b) \sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right).$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\
 &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\
 &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mặt khác } 4 \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= -4 \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos(-2\alpha) \right) \\
 &= -2 \sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} - \cos 2\alpha \right) = 2 \sin \alpha \left(\frac{1}{2} + 1 - 2 \sin^2 \alpha \right) \\
 &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

$$b) \text{ Theo câu a) ta có } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$\text{Do đó } \sin^3 \frac{\alpha}{3} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4}, \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4}, \dots, \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Suy ra } VT &= \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4} + 3 \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4} + \dots + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4} \\
 &= -\frac{\sin \alpha}{4} + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM}.
 \end{aligned}$$

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

Dạng 4: Bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1, |\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$

b) $\cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1\right) \geq 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow (\sin^2 \alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \geq 0$$

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (*)$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \text{ nên}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right)\left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right)\left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) = \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha \cos \alpha > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \geq 2 \sqrt{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha}} = 1$$

$$\text{Suy ra } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right)\left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2 \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$(2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > (\sqrt{2 \sin \alpha} - 2)(3 - 2 \cos 2\alpha).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow (2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 2 \left[1 - \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2(3 - 2 \cos 2\alpha) > \sqrt{2 \sin \alpha} [3 - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)]$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 2\alpha - 8 \cos 2\alpha + 5 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2\alpha)^2 + 1 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^4 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2 \sin \alpha} = t, \text{ vì } 0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } t^8 + t^2 + 1 > t(t^4 + 1) \Leftrightarrow t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 > 0 \quad (*)$$

+ Nếu $0 \leq t < 1$: $(*) \Leftrightarrow t^8 + t^2(1-t^3) + 1 - t > 0$ đúng vì $1-t > 0, 1-t^3 > 0, t^2 \geq 0$ và $t^8 \geq 0$.

+ Nếu $1 \leq t \leq \sqrt{2}$: $(*) \Leftrightarrow t^5(t^3-1) + t(t-1) + 1 > 0$ đúng vì $t^5(t^3-1) \geq 0, t(t-1) \geq 0$

Vậy bất đẳng thức $(*)$ đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sin x + \cos x$

b) $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

Vì $\sin 2x \leq 1$ nên $A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2$ suy ra $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = \sqrt{2}$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $A = -\sqrt{2}$

Do đó $\max A = \sqrt{2}$ và $\min A = -\sqrt{2}$.

b) Ta có $B = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} + \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$

$$= \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{2+1+\cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x$$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2\sin x - \cos 2x$

Lời giải

Ta có $A = 2 - 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$

Đặt $t = \sin x, |t| \leq 1$ khi đó biểu thức trở thành $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$
	1	
y	5	1
		$\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = -1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

Dạng 5: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.

1. Phương pháp giải

Trong tam giác ta cần lưu ý:

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \begin{cases} A = \pi - (B + C) \\ B = \pi - (A + C) \\ C = \pi - (A + B) \end{cases}$$

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$b) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$c) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

Lời giải

$$a) VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC \text{ ta có } A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$b) VT = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$\text{Vì } A + B + C = \pi \Rightarrow \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} VT &= 2 + \cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B) = 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

c)

$$VT = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$\text{Vì } A + B + C = \pi \Rightarrow \cos C = -\cos(A+B), \sin(A+B) = \sin C$$

nên

$$\begin{aligned} VT &= 2 \sin C \cos(A - B) - 2 \sin C \cos(A + B) = 2 \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \\ &= 2 \sin C \cdot [-2 \sin A \sin(-B)] = 4 \sin A \sin B \sin C = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

- a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$
 b) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A + \tan B = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C - \tan C$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A \tan B - 1) (*)$$

Do tam giác ABC không vuông nên $A + B \neq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan A \tan B - 1 = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = -\frac{\cos(A + B)}{\cos A \cos B} \neq 0$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A + B) = -\tan C$$

Đẳng thức cuối đúng vì $A + B + C = \pi \Rightarrow \text{ĐPCM.}$

b) Vì $A + B + C = \pi \Rightarrow \cot(A + B) = -\cot C$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot(A + B) = \frac{1}{\tan(A + B)} = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1 - \frac{1}{\cot A \cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C \Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot C (\cot A + \cot B)$$

Hay $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

- a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$
 b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 c) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$\text{Vì } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \text{ nên } \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

Mặt khác $\cos C = 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}$ do đó

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} = -2\left(\sin^2 \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -2\left(\sin^2 \frac{C}{2} - 2\sin \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{A-B}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} \\ &= -2\left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

Vì $\left|\cos \frac{A-B}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1$ nên

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ thì $\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$.

Thật vậy, do $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin \frac{x+y}{2} > 0$ và $\cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ nên

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$$

Áp dụng bổ đề ta có: $\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}, \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}$

$$\text{Suy ra } \frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \leq 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3}$$

Do đó $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3}$ hay $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ĐPCM.

c) Vì ABC là tam giác nhọn nên $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$

Theo ví dụ 2 ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ nên

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \left(\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} - 3 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \geq 3 \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$b) \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$c) \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ Với tam giác } ABC \text{ không vuông.}$$

Lời giải

$$a) \text{ Vì } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} > 0 \text{ và } \cos \frac{A-B}{2} \leq 1 \text{ nên } \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta có } \sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}, \sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}. \text{ ĐPCM.}$$

$$b) + \text{TH1: Nếu tam giác } ABC \text{ tù: không mất tính tổng quát giả sử } A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow B < \frac{\pi}{2}, C < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra}$$

$$\cos A < 0, \cos B > 0, \cos C > 0$$

$$\cos A \cos B \cos C < 0. \text{ Mà } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0 \text{ do đó bất đẳng thức luôn đúng.}$$

$$+ \text{TH2: Nếu tam giác } ABC \text{ nhọn: } \cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

$$\text{Vì } \cos(A+B) = -\cos C \text{ và } \cos(A-B) \leq 1 \text{ nên } \cos A \cos B \leq \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \cos B \cos C \leq \sin^2 \frac{A}{2}, \cos C \cos A \leq \sin^2 \frac{B}{2}.$$

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(\cos A \cos B)(\cos B \cos C)(\cos C \cos A) \leq \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

$$c) \text{ Ta có } \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$$

$$\text{Mà } \sin(A+B) = \sin C, \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$\tan A + \tan B = \frac{2 \sin C}{-\cos C + \cos(A-B)} \geq \frac{2 \sin C}{1 - \cos C} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \tan B + \tan C \geq 2 \cot \frac{A}{2}, \tan C + \tan A \geq 2 \cot \frac{B}{2}$$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \quad \text{ĐPCM.}$$

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x + y + z \geq a + b + c$ ta có thể đi chứng minh $x + y \geq 2a$ (hoặc $2b, 2c$) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.

+ Để chứng minh $xyz \geq abc$ với x, y, z, a, b, c không âm ta đi chứng minh $xy \geq a^2$ (hoặc b^2, c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ với mọi x, y không âm ta có

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq \sqrt{2(\sin A + \sin B)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\text{Cộng vế với vế ta được } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\left(\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

$$\text{Mà } \sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} \leq 2\sqrt{\sin \left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]} = 2\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 4\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Hay } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{ĐPCM.}$$

$$b) \text{ Ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) = 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin A \sin B}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với mọi x, y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{4}{\sin A + \sin B} = \frac{4}{2\sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}}$$

$$\text{Do đó } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}} + \frac{1}{\sin A \sin B} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin A \sin B}}\right)^2$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ &\geq \frac{\cos(A+B) + 1}{2} = \sin^2 \frac{A+B}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Nên } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 \quad (2)$$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

$$\text{Ta lại có } \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$\text{Hay } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \text{ĐPCM.}$$

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A) + f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A) + f(B) + f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2 \left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \right] \geq 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- Để chứng minh $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A)f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)f(B)f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \geq f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B-C) + \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cos \frac{A}{2} \left(2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) + \cos \frac{B-C}{2} \left(2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{A}{2} \right) - \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{B-C}{2} > 0 \quad \text{và} \quad \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$$

$$\text{nên } (1) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 1$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ suy ra } \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{(\sin B + \sin C)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Do đó $\cos 2y + \cos 2z = 2 - 2(\sin^2 y + \sin^2 z) \leq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ĐPCM.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

Do A, B, C bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử $A \geq B \geq C \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \geq \frac{C}{2} > 0$

Suy ra $\sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2} > 0, \cos \frac{A}{2} \geq \cos \frac{B}{2} \geq \cos \frac{C}{2} > 0$

$$\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

Do đó $\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$

$$\text{Mà } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4} \cos^2 \frac{B}{2}} = \sqrt{3} \cos \frac{B}{2}, \quad 3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \geq 2\sqrt{3\sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2}} = 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Suy ra } 2\left(\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) \geq 2\sqrt{3} \cos \frac{B}{2} + 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Hay } 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right) \leq \frac{3}{2} + 3 \left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ĐPCM.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1.7. Sử dụng $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 15° .

Lời giải

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Bài 1.8. Tính:

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$, biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác, từ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra

$$\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos a \cos \frac{\pi}{6} - \sin a \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

b) Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin a < 0$, do đó $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} > 0$.

Mặt khác từ $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

$$\text{Suy ra } \tan a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có: } \tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan a - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan a \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{1 + 2\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}.$$

Bài 1.9. Tính $\sin 2a, \cos 2a, \tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác, từ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra

$$\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

b) Ta có: $(\sin a + \cos a)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a \cos a = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2a = -\frac{3}{4}.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$ nên $\pi < 2a < \frac{3\pi}{2}$, do đó $\cos 2a < 0$. Mặt khác từ $\sin^2(2a) + \cos^2(2a) = 1$

$$\text{Suy ra } \cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2(2a)} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Do đó, } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Bài 1.10. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{\pi}{5}};$

b) $B = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}.$

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{15} \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{10} \right)}{\cos \left(\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{5} \right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

b) Ta có:

$$B = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{32} \right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

Bài 1.11. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin(a+b)\sin(a-b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) - \cos(a+b+a-b)]$$

$$= \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a] = \frac{1}{2} [(2\cos^2 b - 1) - (2\cos^2 a - 1)] = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

$$\text{Vậy } \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a (1).$$

$$\text{Lại có, } \cos 2b - \cos 2a = (1 - 2\sin^2 b) - (1 - 2\sin^2 a) = 2(\sin^2 a - \sin^2 b)$$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a] = \frac{1}{2} \cdot 2(\sin^2 a - \sin^2 b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

$$\text{Vậy } \sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } \sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$

(đpcm).

Bài 1.12. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 75^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$ và $a = BC = 12$ cm.

a) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ và định lí sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC

cho bởi công thức

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

b) Sử dụng kết quả ở câu a và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC .

Lời giải

a) Định lý sin trong tam giác ABC với $BC=a, AC=b$ và $AB=c$ là: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Từ đó suy ra $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin B}{\sin A} \cdot \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$.

Vậy $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ (đpcm).

b) Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong tam giác ABC).

$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$.

Ta có: $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{12^2 \sin 75^\circ \sin 45^\circ}{2 \sin 60^\circ}$
 $= \frac{144 \cdot \frac{1}{2} [\cos(75^\circ - 45^\circ) - \cos(75^\circ + 45^\circ)]}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$
 $= \frac{72(\cos 30^\circ - \cos 120^\circ)}{\sqrt{3}} = \frac{72\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}} = 36 + 12\sqrt{3}$.

Vậy diện tích của tam giác ABC là $S = 36 + 12\sqrt{3}$ (đvdt).

Bài 1.13. Trong Vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}),$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}).$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

Dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Suy ra $x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm).

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\
 &= 2.2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\
 &= 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos\frac{\pi}{4} = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right).
 \end{aligned}$$

Vậy dao động tổng hợp có phương trình là $x(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right)$ với biên độ $A = 2\sqrt{2}$ và pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 \\
 &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\
 &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

- A. $M = \sqrt{3}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\
 &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\
 &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned}\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot \left[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \right] \\ &= \cos 2\alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 4: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \begin{cases} \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 6: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\frac{\tan 225^0 - \cot 81^0 \cdot \cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0} = \frac{\tan(180^0 + 45^0) - \tan 9^0 \cdot \cot 69^0}{\cot(180^0 + 81^0) + \tan(180^0 + 21^0)}$$

$$= \frac{1 - \tan 9^0 \cdot \tan 21^0}{\tan 9^0 + \tan 21^0} = \frac{1}{\tan(9^0 + 21^0)} = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}.$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}$.

Do đó $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right)$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}.$$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

- A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 9: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0$.

- A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^0$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^0$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^0$. D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^0$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin 10^0 \neq 0$ nên suy ra

$$M = \frac{16 \sin 10^0 \cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0}{16 \sin 10^0} = \frac{8 \sin 20^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0}{16 \sin 10^0}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 10^\circ}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cos 10^\circ.$$

Câu 10: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

- A. $M = 0$. B. $M = -\frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} M &= 2 \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{6\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị biểu thức $M = -\frac{1}{2}$.

Câu 11: Công thức nào sau đây sai?

- A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$. B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(2018a) = 2018 \sin a \cos a$.
B. $\sin(2018a) = 2018 \sin(1009a) \cos(1009a)$.
C. $\sin(2018a) = 2 \sin a \cos a$.
D. $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cos(1009a)$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ta được
 $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cos(1009a)$.

Câu 13: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. B. $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.

C. $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$.

D. $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$, ta được
 $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2\cos^2 3a - 1 = 1 - 2\sin^2 3a$.

Câu 14: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

C. $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Câu 15: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. 2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Câu 17: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 3a = 3\cos a - 4\cos^3 a$.

B. $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

C. $\cos 3a = 3\cos^3 a - 4\cos a$.

D. $\cos 3a = 4\cos a - 3\cos^3 a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 18: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$.

B. $\sin 3a = 4 \sin^3 a - 3 \sin a$.

C. $\sin 3a = 3 \sin^3 a - 4 \sin a$.

D. $\sin 3a = 4 \sin a - 3 \sin^3 a$.

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Nếu $\cos(a+b)=0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a+2b)| = |\sin a|$.

B. $|\sin(a+2b)| = |\sin b|$.

C. $|\sin(a+2b)| = |\cos a|$.

D. $|\sin(a+2b)| = |\cos b|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\cos(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi \rightarrow a=-b+\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$\Rightarrow |\sin(a+2b)| = \left| \sin\left(-b+2b+\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \right| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|$.

Câu 20: Nếu $\sin(a+b)=0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\cos(a+2b)| = |\sin a|$.

B.

$|\cos(a+2b)| = |\sin b|$.

C. $|\cos(a+2b)| = |\cos a|$.

D.

$|\cos(a+2b)| = |\cos b|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=k\pi \rightarrow a=-b+k\pi$.

$\Rightarrow |\cos(a+2b)| = |\cos(-b+2b+k\pi)| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|$.

Câu 21: Rút gọn $M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y$.

A. $M = \cos x$.

B. $M = \sin x$.

C. $M = \sin x \cos 2y$.

D. $M = \cos x \cos 2y$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = \sin[(x-y)+y] = \sin x$.

Câu 22: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$.

A. $M = 1 - 2 \cos^2 a$.

B. $M = 1 - 2 \sin^2 a$.

C. $M = \cos 4a$.

D. $M = \sin 4a$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$, ta được

$$M = \cos(a + b) \cos(a - b) - \sin(a + b) \sin(a - b) = \cos(a + b + a - b) = \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a.$$

Câu 23: Rút gọn $M = \cos(a + b) \cos(a - b) + \sin(a + b) \sin(a - b)$.

- A. $M = 1 - 2 \sin^2 b$. B. $M = 1 + 2 \sin^2 b$. C. $M = \cos 4b$. D. $M = \sin 4b$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos(a + b) \cos(a - b) + \sin(a + b) \sin(a - b) \\ &= \cos(a + b - (a - b)) = \cos 2b = 1 - 2 \sin^2 b. \end{aligned}$$

Câu 24: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

- A. 18° . B. 30° . C. 36° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b)$, ta được

$$\begin{aligned} \sin 2x \cdot \sin 3x &= \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0 \\ \Leftrightarrow \cos 5x &= 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Câu 25: Đẳng thức nào sau đây đúng:

- A. $\cot a + \cot b = \frac{\sin(b - a)}{\sin a \cdot \sin b}$. B. $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$.
C. $\sin(a + b) = \frac{1}{2} \sin 2(a + b)$. D. $\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cdot \cos b}$.

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

- Đáp án A.

$$\text{Ta có } \cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin(a + b)}{\sin a \cdot \sin b}.$$

- Đáp án B.

$$\text{Ta có } \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$$

Câu 26: Chọn công thức đúng trong các công thức sau:

A. $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$. B. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.

C. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$. D. $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 27: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2} \sin x$. B. $M = -\sqrt{2} \sin x$. C. $M = \sqrt{2} \cos x$. D. $M = -\sqrt{2} \cos x$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \\ &= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x. \end{aligned}$$

Câu 28: Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

A. $\frac{56}{65}$. B. $-\frac{56}{65}$. C. $\frac{16}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{cases} \cos A = \frac{4}{5} \\ \cos B = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{3}{5} \\ \sin B = \frac{12}{13} \end{cases}. \text{ Mà } A + B + C = 180^\circ, \text{ do đó}$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \cos[180^\circ - (A + B)] = -\cos(A + B) \\ &= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = -\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}. \end{aligned}$$

Câu 29: Cho A, B, C là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{5}$, $\tan C = \frac{1}{8}$. Tổng $A + B + C$ bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \tan(A+B+C) = \frac{\tan(A+B) + \tan C}{1 - \tan(A+B) \cdot \tan C} = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1$$

$$\Rightarrow A+B+C = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 30: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin A + \sin B + \sin C$ tương đương với:

A. $P = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

B. $P = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

C. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

D. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \end{cases}.$$

Áp dụng, ta được

$$P = (\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

Câu 31: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC .

Khi đó $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$ tương đương với:

A. $P = 1.$

B. $P = -1.$

C. $P = \left(\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \right)^2.$

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{C+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{C+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}=1$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1.$$

Câu 32: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C}=2\cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

- A. Cân tại B. B. Cân tại A. C. Cân tại C. D. Vuông tại B.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{\sin B}{\sin C}=2\cos A \Rightarrow \sin B=2\sin C\cdot\cos A=\sin(C+A)+\sin(C-A)$$

$$\text{Mặt khác } A+B+C=\pi \Rightarrow B=\pi-(A+C) \Rightarrow \sin B=\sin(A+C).$$

$$\text{Do đó, ta được } \sin(C-A)=0 \Rightarrow A=C.$$

Câu 33: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\tan A}{\tan C}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì $\triangle ABC$ là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều. D. Tam giác vuông hoặc cân.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{\tan A}{\tan C}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \sin 2C=\sin 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C=2A \\ 2C=\pi-2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=A \\ A+C=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 34: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Tính $P=\sin 2(\alpha+\pi)$.

- A. $P=-\frac{24}{25}$. B. $P=\frac{24}{25}$. C. $P=-\frac{12}{25}$. D. $P=\frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P=\sin 2(\alpha+\pi)=\sin(2\alpha+2\pi)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Câu 35: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 36: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = -\frac{3}{5}$. B. $P = \frac{3}{5}$. C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$. D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 37: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = \frac{11}{100}$. B. $P = -\frac{11}{100}$. C. $P = \frac{7}{25}$. D. $P = \frac{10}{11}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, ta được

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \right).$$

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$.

Thay vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25} \right) = \frac{11}{100}$.

Câu 38: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$. B. $P = -\frac{527}{625}$. C. $P = \frac{524}{625}$. D. $P = -\frac{524}{625}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.

Suy ra $P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625}$.

Câu 39: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$. Suy ra $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Do $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Vậy $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 40: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

A. $P = 1$. B. $P = \frac{17}{81}$. C. $P = \frac{7}{9}$. D. $P = \frac{9}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$.

Ta có $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}$.

Câu 41: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

- A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Câu 42: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3 \sin^2 \alpha)(1 - 4 \cos^2 \alpha)$.

- A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Câu 43: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

- A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$. B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.
C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$. D. $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3-\sqrt{21}}{8}$.

Câu 44: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = -\frac{1}{7}$. B. $P = \frac{1}{7}$. C. $P = -7$. D. $P = 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{1}{7}$.

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}$. B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. C. $P = -\frac{1}{5}$. D. $P = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$.

Từ hệ thức $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$, suy ra $\sin 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ nên ta chọn $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Câu 46: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$.

- A. $P = -\frac{39}{50}$. B. $P = \frac{49}{50}$. C. $P = -\frac{49}{50}$. D. $P = \frac{39}{50}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{39}{50}$.

Câu 47: Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -\frac{1}{2}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$.

Từ giả thiết $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2$.

Thay $\tan \alpha = 2$ vào P , ta được $P = -3$.

Câu 48: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{11}{113}$.

B. $P = \frac{13}{113}$.

C. $P = \frac{15}{113}$.

D. $P = \frac{17}{113}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cot \alpha = 15 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 15 \Leftrightarrow \cos \alpha = 15 \sin \alpha$.

Suy ra $P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 30 \sin^2 \alpha = \frac{30}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{30}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}$.

Câu 49: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$.

A. $P = 2\sqrt{19}$.

B. $P = -2\sqrt{19}$.

C. $P = \sqrt{19}$.

D. $P = -\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}$.

Từ hệ thức $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \sin \alpha > 0$ nên ta chọn $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}} \rightarrow P = 2\sqrt{19}$.

Câu 50: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P^2 = 1 + \sin \alpha$. Với $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

Khi đó $\begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, suy ra $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25}$.

Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P^2 , ta được $P^2 = \frac{1}{5}$. Suy ra $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 51: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

- A. $P = \frac{10}{9}$. B. $P = \frac{9}{10}$. C. $P = -\frac{10}{9}$. D. $P = -\frac{9}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}$.

Nhắc lại công thức: Nếu đặt $t = \tan \alpha$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Do đó $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{10}{9}$.

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$.

B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 25 \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 24 \Rightarrow \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$.

Vì $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.

Do đó ta chọn $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$. Suy ra $\cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{24}{25}$.

B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

C. $P = -\frac{24}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 - 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha > 0$).

Vậy $P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Câu 54: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

A. $\frac{56}{65}$.

B. $\frac{63}{65}$.

C. $-\frac{33}{65}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ mà $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, ta có $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ mà $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}$.

Khi đó $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}$.

Câu 55: Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

- A. $\frac{16}{65}$. B. $-\frac{16}{65}$. C. $\frac{18}{65}$. D. $-\frac{18}{65}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, có $\cos \beta = \frac{3}{5}$ với $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$.

Câu 56: Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)$

$= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b)$.

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}$.

Câu 57: Nếu a, b là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}$; $\sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a+b)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{7-2\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{7+2\sqrt{6}}{18}$. C. $\frac{7+4\sqrt{6}}{18}$. D. $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên suy ra } \begin{cases} \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1+2\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos 2(a+b) = 2\cos^2(a+b) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7-4\sqrt{6}}{18}.$$

Câu 58: Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1 \text{ suy ra } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 59: Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1.$$

$$\text{Mặt khác } 0 < x, y < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } 0 < x + y < \pi. \text{ Do đó } x + y = \frac{3\pi}{4}.$$

Câu 60: Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.

C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma.$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Vậy tổng ba góc $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (vì α, β, γ là ba góc nhọn).

Câu 61: Biết rằng $\tan a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 90^\circ$) và $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì biểu thức $\cos(2a - b)$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ suy ra } \sin 2a = \sqrt{1 - \cos^2 2a} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Lại có } 1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ vì } 90^\circ < b < 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \sin b = \tan b \cdot \cos b = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Khi đó } \cos(2a - b) = \cos 2a \cdot \cos b + \sin 2a \cdot \sin b = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 62: Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

- A. $-\frac{20}{7}$. B. $\frac{20}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $-\frac{24}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\sin a - \cos a)^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Khi đó } \cos 2a = \sqrt{1 - \sin^2 2a} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \text{ vì } 270^\circ < 2a < 360^\circ.$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{24}{7}.$$

Câu 63: Nếu $\tan(a + b) = 7$, $\tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

- A. $-\frac{11}{27}$. B. $\frac{11}{27}$. C. $-\frac{13}{27}$. D. $\frac{13}{27}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 + \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)} = \frac{7+4}{1-7 \cdot 4} = -\frac{11}{27}.$$

Câu 64: Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì

A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$.

B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$.

C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$.

D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha].$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha.$$

Câu 65: Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $-\sqrt{3}$.

C. 3.

D. -3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma).$$

$$\text{Suy ra } \cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta = 2 \cdot \cot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma) \right] = 2 \cdot \tan(\alpha + \gamma) = 2 \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \gamma}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha} \cdot \frac{1}{\cot \gamma}} = \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \text{ nên suy ra}$$

$$\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1 = 2 \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma = 3.$$

Câu 66: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

A. $\frac{p}{q-1}$.

B. $-\frac{p}{q-1}$.

C. $\frac{2p}{1-q}$.

D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\tan \alpha$, $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases} \text{ Khi đó } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-p}{1 - q}.$$

Câu 67: Nếu $\tan \alpha$; $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($p, q \neq 0$). Và $\cot \alpha$; $\cot \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì tích $P = rs$ bằng

- A. pq . B. $\frac{p}{q^2}$. C. $\frac{1}{pq}$. D. $\frac{q}{p^2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$ và $\begin{cases} \cot \alpha + \cot \beta = r \\ \cot \alpha \cdot \cot \beta = s \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P = r \cdot s &= (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta = \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{(\tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} = \frac{p}{q^2}. \text{ Vậy } P = r \cdot s = \frac{p}{q^2}. \end{aligned}$$

Câu 68: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

- A. p . B. q . C. 1. D. $\frac{p}{q}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\tan \alpha$, $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ nên theo định lí Viet, ta

$$\text{có } \begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases} \longrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{p}{1 - q}.$$

$$\text{Khi đó } P = \cos^2(\alpha + \beta) \cdot [1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)].$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{1 + p \cdot \frac{p}{1 - q} + q \cdot \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2}{1 + \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2} \\ &= \frac{(1 - q)^2 + p^2(1 - q) + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = \frac{(1 - q)^2 + p^2 - p^2 \cdot q + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 69: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

- A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 70: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

- A. $M = \sin 2\alpha$. B. $M = \cos 2\alpha$. C. $M = -\cos 2\alpha$. D. $M = -\sin 2\alpha$.

Lời giải

Chọn D

Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } M &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 71: Chọn đẳng thức đúng.

- A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$. B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$.
C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$. D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 72: Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

- A. $M = \tan x - \tan y$. B. $M = \cot x - \cot y$
C. $M = \cot y - \cot x$. D. $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} - \frac{\cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y \end{aligned}$$

Câu 73: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1).$

B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x \right).$

C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1).$

D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1).$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$
 $= 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1).$

Câu 74: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}.$

A. $\tan 2x$

B. $\sin x.$

C. $2 \tan x.$

D. $2 \sin x.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$

Câu 75: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}.$

A. $\cos x.$

B. $2 \cos x - 1.$

C. $2 \cos x.$

D. $\cos x - 1.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A = \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x}$
 $= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x.$

Câu 76: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha.$

A. 0.

B. $2 \cos^2 x.$

C. 2.

D. $\cos 2x.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

Do đó $A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0.$

Câu 77: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}.$

A. $\sin 2\alpha$.

B. $\cos 2\alpha$.

C. $\tan 2\alpha$.

D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$A = \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\ = \frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha$$

Câu 78: Biểu thức $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

A. $-\tan^4 \alpha$.

B. $\tan^4 \alpha$.

C. $-\cot^4 \alpha$.

D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$; $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1$. Do đó:

$$A = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 79: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \\ = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $\alpha = \frac{\pi}{6}$ là $\tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = \frac{1}{9}$.

Câu 80: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

A. $\tan \alpha$.

B. $2 \tan \alpha$.

C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$.

D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2\cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

Câu 81: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2 \sin^2 a - 1}{2 \sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2 \sin a - 1)}{\cos a (2 \sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Câu 82: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

- A. $\tan \frac{x}{2}$. B. $\cot x$. C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. D. $\sin x$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)}{\cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)} = \tan \frac{x}{2}.$$

Câu 83: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$. C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$. D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha.$$

Câu 84: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2$.

- A. $M = 1, m = -5$. B. $M = 3, m = 1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1$

$$\Rightarrow -5 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Câu 85: Cho biểu thức $P = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 2 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -2$

$$\Rightarrow 4 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq P \geq 0.$$

Câu 86: Biểu thức $P = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1 \xrightarrow{P \in \mathbb{Z}} P \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 87: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

A. $M = 3, m = 0$.

B. $M = 2, m = 0$.

C. $M = 2, m = 1$.

D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 88: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$

. Tính $T = 2M - m^2$.

A. $T = 1$.

B. $T = 2$.

C. $T = 112$.

D. $T = 130$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = 8\sin^2 x + 3\cos 2x = 8\sin^2 x + 3(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + 3$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2\sin^2 x + 3 \leq 5$

$$\Rightarrow 3 \leq P \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 2M - m^2 = 1.$$

Câu 89: Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $P \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq P \leq 1.$$

Câu 90: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$.

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.

C. $M = 1, m = -1$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$.

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 91: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \Rightarrow 1 \geq P \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 92: Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $M = \sqrt{2}$. B. $M = \sqrt{2} - 1$. C. $M = \sqrt{2} + 1$. D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

BÀI 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Sử dụng công thức cộng

1. Phương pháp giải.

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biết $\sin x = \frac{1}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính giá trị lượng giác $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên điểm ngọn cung thuộc góc phần tư thứ I $\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 2: Biết $\cos x = -\frac{12}{13}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị lượng giác $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Lời giải

Vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên điểm ngọn cung thuộc góc phần tư thứ III $\Rightarrow \sin x < 0$

$$\Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}.$$

$$\text{Ta có } \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $A = \sin(x + 14^\circ) \sin(x + 74^\circ) + \sin(x - 76^\circ) \sin(x - 16^\circ)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \sin(14^\circ + x) \cos(16^\circ - x) + \sin(76^\circ - x) \sin(16^\circ - x) \\ &= \sin(14^\circ + x) \cos(16^\circ - x) + \cos(14^\circ + x) \sin(16^\circ - x) \\ &= \sin(14^\circ + 16^\circ + x - x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos c}{\cos c \cdot \cos a} \\ &= \frac{\cancel{\sin a} \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}} - \frac{\cancel{\sin b} \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}} + \frac{\cancel{\sin b} \cdot \cancel{\cos c}}{\cancel{\cos b} \cdot \cancel{\cos c}} - \frac{\cancel{\sin c} \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos b} \cdot \cancel{\cos c}} + \frac{\cancel{\sin c} \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos c} \cdot \cancel{\cos a}} - \frac{\cancel{\sin a} \cdot \cancel{\cos c}}{\cancel{\cos c} \cdot \cancel{\cos a}} \\ &= \cancel{\tan a} - \cancel{\tan b} + \cancel{\tan b} - \cancel{\tan c} + \cancel{\tan c} - \cancel{\tan a} = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Không dùng MTCT, tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ, \tan \frac{7\pi}{12}$.

Lời giải

* Tính $\cos 795^\circ$

Vì $795^\circ = 75^\circ + 2.360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2.360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

* Tính $\tan \frac{7\pi}{12}$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

Ví dụ 6: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

b) $B = 4 \sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

Lời giải

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

Cách 1: Ta có $\cos 202^\circ 30' = \cos(180^\circ + 22^\circ 30') = -\cos 22^\circ 30'$

Do đó $A = -\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Cách 2: $A = \frac{1}{2} [\sin(22^\circ 30' + 202^\circ 30') + \sin(22^\circ 30' - 202^\circ 30')] = \frac{1}{2} [\sin 225^\circ + \sin(-180^\circ)]$

$= \frac{1}{2} [\sin(180^\circ + 45^\circ) - \sin 180^\circ] = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $B = \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{16} \right)^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8} = \left[1 - \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{16} \right) \right]^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

$$= 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = 1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 7: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$

b) $B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$

c) $C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$

Lời giải

a) Ta có $\cos 290^\circ = \cos(180^\circ + 90^\circ + 20^\circ) = -\cos(90^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ$

$$\sin 250^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ - 20^\circ) = -\sin(90^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = 4 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} \\ &= 4 \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

b) **Cách 1:** Ta có $B = \left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\right) \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}\right) = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 45^\circ + \cos 20^\circ \sin 45^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cos 45^\circ + \cos 25^\circ \sin 45^\circ}{\cos 25^\circ}$$

$$= 2 \frac{\sin 65^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ} = 2$$

Cách 2: Ta có $\tan 45^\circ = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$

Suy ra $1 = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Leftrightarrow \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$

$$\Leftrightarrow (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = 2.$$

Vậy $B = 2$

c) $C = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ)$

$$= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \sin 81^\circ \cos 9^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \sin 63^\circ \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}$$

$$= \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}$$

$$= \frac{4 \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4$$

d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9}\right)^2 - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9}\right) = \frac{3}{4}$$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{3}\right)$

- $\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin(x \pm \frac{\pi}{6})$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin(x \pm \frac{\pi}{4})$.

Ví dụ 8: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$

b) $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

c) $C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$

d) $D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$

Lời giải

a) $A = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$

b) Ta có $B = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ do đó

$$\begin{aligned} 16 \sin 20^\circ \cdot B &= 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ \end{aligned}$$

Suy ra $B = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}$.

c) Ta có $C = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$. Vì $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ nên

$$2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$

c) $D = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$

Xét $T = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$, vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned}
 2\sin\frac{\pi}{7}T &= 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} \\
 &= \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right) \text{ Suy ra } T = -\frac{1}{2}. \\
 &= -\sin\frac{\pi}{7}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 9: Cho α, β thỏa mãn $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

- Ta có $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$ (1)

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned}
 \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cos\beta &= 2 \\
 \Leftrightarrow 2 + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) &= 2 \Leftrightarrow 2\cos(\alpha - \beta) = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos(\alpha - \beta) = 0$$

- Từ giả thiết ta có $(\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0 \quad (\text{Do } \cos(\alpha - \beta) = 0)$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dạng 2: Sử dụng công thức nhân đôi và công thức hạ bậc

1. Phương pháp

- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Không dùng máy tính. Hãy tính $\tan \frac{\pi}{8}$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \text{ suy ra } 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Do } \tan \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

Nhận xét: Bài này có thể yêu cầu tính $\cot \frac{5\pi}{8}$. Lúc đó: $\cot \frac{5\pi}{8} = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = -\tan \frac{\pi}{8}$

Ví dụ 2: Chứng minh các biểu thức sau :

$$\text{a) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

$$\text{b) } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

b) Ta có

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3$$

$$+ 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha)$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

Ví dụ 3: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < 2\alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Mặt khác $\cos 2\alpha > 0$ do đó $\tan 2\alpha < 0$

$$\text{Vậy } \tan 2\alpha = -\sqrt{3}$$

Ví dụ 4: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + 2 \tan \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \tan^3 \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \pm 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ do đó } \tan \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\text{Ta có } \tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + 2006\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -1$$

$$\text{Vậy } \tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right) = -1$$

Lưu ý: Ta có thể biểu diễn $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ qua $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ như sau:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \cot \alpha = \frac{1-t^2}{2t} \text{ với } \alpha \text{ làm các biểu thức có nghĩa.}$$

Ví dụ 5: Tính $A = \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$A = \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 6 *: Không dùng máy tính. Hãy tính $\sin 18^\circ$

Lời giải

Vì $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

Mà $\cos 36^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$

$$\sin 54^\circ = \sin(18^\circ + 36^\circ) = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ$$

$$= \sin 18^\circ \cdot (1 - 2 \sin^2 18^\circ) + 2 \sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sin 18^\circ \cdot (1 - 2 \sin^2 18^\circ) + 2 \sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ)$$

$$= 3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ$$

Do đó, đồng nhất thức ta được

$$3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Vì $0 < \sin 18^\circ < 1$ nên $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ví dụ 7: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0, \cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{10}}{20}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ví dụ 8: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & 2 = 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & 8 = 9 (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow & 8 = 9 \sin^2 2\alpha \\ \Leftrightarrow & 16 = 9 (1 - \cos 4\alpha) \\ \Leftrightarrow & \cos 4\alpha = -\frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$$

Ví dụ 9: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\tan \alpha = -2 \tan \beta$.

$$\text{Tính } A = \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) \sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right).$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = -2 \tan \beta \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta = -2 \sin \beta \cos \alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{cases} \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{3} \\ \sin \alpha \cos \beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \beta - \frac{1}{3}) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2+3\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[-\cos 2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + 2\sin^2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2+3\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A = -\frac{2+3\sqrt{2}}{12} + \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} = -\frac{1}{3}$$

Dạng 3: Công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng

1. Phương pháp giải.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$$

$$\text{b) } D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15}\right) \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15}\right)}{-2 \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15}\right) \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15}\right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$b) D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng

$$a) \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$b) \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \text{ với } \sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin(\alpha + \beta), \alpha + \beta \neq k2\pi$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= -\frac{1}{2} [\cos 2\alpha - \cos 2\beta] \\ &= -\frac{1}{2} [(1 - 2\sin^2 \alpha) - (1 - 2\sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

$$b) \text{ Từ giả thiết ta có } 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 6 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{Do } \alpha + \beta \neq k2\pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \text{ suy ra } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ Ta có } VT &= \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2} [\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2}\right) [\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)} \\ &= \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cos(-\beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

Lời giải

$$c) \text{ Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right]^2} = \frac{2 \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{2 \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \cot^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ví dụ 4: Cho $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Do $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0, \sin \alpha > 0$

Đẳng thức tương đương với

$$\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}\right)^2 = 4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \left[1 - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right] \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$$

đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM.

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \frac{\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}\right)\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}\right)} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2 \cos \alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1 + |\sin \alpha|}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Vì $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$ do đó

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \cos^2 \alpha + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$

$$b) B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } A = \cos^2 \alpha + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2}$$

$$b) \text{ Vì } \alpha + \frac{\pi}{6} = \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \text{ và } \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \text{ nên}$$

$$B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Ví dụ 6: Đơn giản biểu thức sau:

$$a) A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$$

$$b) B = \frac{\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$c) C = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots + \cos(a + nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lời giải

$$a) A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$$

$$b) \text{ Ta có } \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a \text{ và}$$

$$\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2} - a\right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Ta có } C \cdot 2 \sin \frac{b}{2} &= 2 \sin \frac{b}{2} \cos a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+nb) \\
 &= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right) \\
 &+ \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right) \\
 \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) &= 2 \sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right) \\
 \text{Suy ra } C &= \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$ không phụ thuộc vào a, b .

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{(2 - \sin 2a)(2 - \sin 2b)} = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{4 - 2(\sin 2a + \sin 2b) + \sin 2a \sin 2b}$$

$$\text{Ta có } \sin 2a + \sin 2b = 2 \sin(a+b) \cos(a-b)$$

$$\text{Mà } \sin(a+b) = 2 \cos(a-b) \Rightarrow \sin^2(a+b) = 4 \cos^2(a-b) \text{ nên}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2(a+b) - \cos 2(a-b) &= 1 - 2 \sin^2(a+b) - [2 \cos^2(a-b) - 1] \\
 &= 2 - 2[\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b)] = 2 - 10 \cos^2(a-b)
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{4 - 8 \cos^2(a-b) - \frac{1}{2} \cdot [2 - 10 \cos^2(a-b)]} = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{3 - 3 \cos^2(a-b)} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng

$$\text{a) } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$\text{b) } \sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right).$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } 4 \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= -4 \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos(-2\alpha) \right) \\ &= -2 \sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} - \cos 2\alpha \right) = 2 \sin \alpha \left(\frac{1}{2} + 1 - 2 \sin^2 \alpha \right) \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

$$\text{b) Theo câu a) ta có } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$\text{Do đó } \sin^3 \frac{\alpha}{3} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4}, \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4}, \dots, \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } VT &= \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4} + 3 \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4} + \dots + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4} \\ &= -\frac{\sin \alpha}{4} + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

Dạng 4: Bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1$, $|\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$

b) $\cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) &\geq 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha - 1)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng}) \text{ ĐPCM.} \end{aligned}$$

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (*)$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \text{ nên}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha \quad (\text{đúng}) \quad \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) = \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha \cos \alpha > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \geq 2 \sqrt{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha}} = 1$$

$$\text{Suy ra } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2 \quad \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$(2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > (\sqrt{2 \sin \alpha} - 2)(3 - 2 \cos 2\alpha).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow (2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 2 \left[1 - \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2(3 - 2 \cos 2\alpha) > \sqrt{2 \sin \alpha} [3 - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)]$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 2\alpha - 8 \cos 2\alpha + 5 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2\alpha)^2 + 1 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^4 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2 \sin \alpha} = t, \text{ vì } 0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } t^8 + t^2 + 1 > t(t^4 + 1) \Leftrightarrow t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 > 0 \quad (*)$$

$$+ \text{ Nếu } 0 \leq t < 1: (*) \Leftrightarrow t^8 + t^2(1 - t^3) + 1 - t > 0 \text{ đúng vì } 1 - t > 0, 1 - t^3 > 0, t^2 \geq 0 \text{ và } t^8 \geq 0.$$

$$+ \text{ Nếu } 1 \leq t \leq \sqrt{2}: (*) \Leftrightarrow t^5(t^3 - 1) + t(t - 1) + 1 > 0 \text{ đúng vì } t^5(t^3 - 1) \geq 0, t(t - 1) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sin x + \cos x$

b) $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

Vì $\sin 2x \leq 1$ nên $A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2$ suy ra $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = \sqrt{2}$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $A = -\sqrt{2}$

Do đó $\max A = \sqrt{2}$ và $\min A = -\sqrt{2}$.

b) Ta có $B = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4}$
 $= \frac{2 + 2 \cos^2 2x}{4} = \frac{2 + 1 + \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2 \sin x - \cos 2x$

Lời giải

Ta có $A = 2 - 2 \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1$

Đặt $t = \sin x, |t| \leq 1$ khi đó biểu thức trở thành $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$
	1	
y	5	1
		$\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = -1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

Dạng 5: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.

1. Phương pháp giải

Trong tam giác ta cần lưu ý:

$$A+B+C=\pi \Rightarrow \begin{cases} A=\pi-(B+C) \\ B=\pi-(A+C) \\ C=\pi-(A+B) \end{cases}$$

$$A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$b) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$c) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

Lời giải

$$a) VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC \text{ ta có } A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$b) VT = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$\text{Vì } A+B+C=\pi \Rightarrow \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$VT = 2 + \cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B) = 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

c)

$$VT = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$\text{Vì } A+B+C=\pi \Rightarrow \cos C = -\cos(A+B), \sin(A+B) = \sin C$$

nên

$$VT = 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) = 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 2 \sin C \cdot [-2 \sin A \sin(-B)] = 4 \sin A \sin B \sin C = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

b) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A + \tan B = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C - \tan C$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A \tan B - 1) (*)$

Do tam giác ABC không vuông nên $A + B \neq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan A \tan B - 1 = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = -\frac{\cos(A+B)}{\cos A \cos B} \neq 0$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A+B) = -\tan C$

Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C = \pi \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

b) Vì $A+B+C = \pi \Rightarrow \cot(A+B) = -\cot C$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1 - \frac{1}{\cot A \cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

Suy ra $\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C \Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot C (\cot A + \cot B)$

Hay $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

a) Ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$

Vì $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ nên $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$

Mặt khác $\cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$ do đó

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$= -2 \left(\sin \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Vì } \left| \cos \frac{A-B}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1 \text{ nên}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

$$\text{Nếu } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi \text{ thì } \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}.$$

Thật vậy, do $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin \frac{x+y}{2} > 0$ và $\cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ nên

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Áp dụng bổ đề ta có: } \frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}, \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \leq 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Do đó } \sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} \text{ hay } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ĐPCM.}$$

c) Vì ABC là tam giác nhọn nên $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } \tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$$

Theo ví dụ 2 ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ nên

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3 \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \left(\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} - 3 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \geq 3 \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{b) } \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{c) } \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ Với tam giác } ABC \text{ không vuông.}$$

Lời giải

a) Vì $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} > 0$ và $\cos \frac{A-B}{2} \leq 1$ nên $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{C}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}, \sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}. \text{ ĐPCM.}$$

b) +TH1: Nếu tam giác ABC tù: không mất tính tổng quát giả sử $A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow B < \frac{\pi}{2}, C < \frac{\pi}{2}$ suy ra

$$\cos A < 0, \cos B > 0, \cos C > 0$$

$$\cos A \cos B \cos C < 0. \text{ Mà } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0 \text{ do đó bất đẳng thức luôn đúng.}$$

+ TH2: Nếu tam giác ABC nhọn: $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$.

$$\text{Vì } \cos(A+B) = -\cos C \text{ và } \cos(A-B) \leq 1 \text{ nên } \cos A \cos B \leq \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \cos B \cos C \leq \sin^2 \frac{A}{2}, \cos C \cos A \leq \sin^2 \frac{B}{2}.$$

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(\cos A \cos B)(\cos B \cos C)(\cos C \cos A) \leq \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

c) Ta có $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$

$$\text{Mà } \sin(A+B) = \sin C, \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$\tan A + \tan B = \frac{2 \sin C}{-\cos C + \cos(A-B)} \geq \frac{2 \sin C}{1 - \cos C} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \tan B + \tan C \geq 2 \cot \frac{A}{2}, \tan C + \tan A \geq 2 \cot \frac{B}{2}$$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x + y + z \geq a + b + c$ ta có thể đi chứng minh $x + y \geq 2a$ (hoặc $2b, 2c$) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.

+ Để chứng minh $xyz \geq abc$ với x, y, z, a, b, c không âm ta đi chứng minh $xy \geq a^2$ (hoặc b^2, c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ với mọi x, y không âm ta có

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq \sqrt{2(\sin A + \sin B)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\text{Cộng vế với vế ta được } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\left(\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

$$\text{Mà } \sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} \leq 2\sqrt{\sin \left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]} = 2\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 4\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Hay } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ ĐPCM.}$$

$$b) \text{ Ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) = 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin A \sin B}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với mọi x, y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{4}{\sin A + \sin B} = \frac{4}{2\sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}}$$

$$\text{Do đó } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}} + \frac{1}{\sin A \sin B} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin A \sin B}}\right)^2$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ &\geq \frac{\cos(A+B) + 1}{2} = \sin^2 \frac{A+B}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Nên } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 \quad (2)$$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

$$\text{Ta lại có } \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$\text{Hay } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \text{ĐPCM.}$$

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A) + f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$$\text{khi đó } f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \text{ từ đó suy ra}$$

$$f(A) + f(B) + f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2 \left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \right] \geq 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

• Để chứng minh $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A)f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)f(B)f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right) \geq f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B-C) + \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cos \frac{A}{2} \left(2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) + \cos \frac{B-C}{2} \left(2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{A}{2} \right) - \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{B-C}{2} > 0 \quad \text{và} \quad \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$$

$$\text{nên } (1) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 1$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ suy ra } \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{(\sin B + \sin C)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } \cos 2B + \cos 2C = 2 - 2(\sin^2 B + \sin^2 C) \leq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

$$\text{Do } A, B, C \text{ bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử } A \geq B \geq C \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \geq \frac{C}{2} > 0$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2} > 0, \cos \frac{A}{2} \geq \cos \frac{B}{2} \geq \cos \frac{C}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Do đó } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Mà } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \geq 2 \sqrt{\frac{3}{4} \cos^2 \frac{B}{2}} = \sqrt{3} \cos \frac{B}{2}, \quad 3 \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \geq 2 \sqrt{3 \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2}} = 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Suy ra } 2 \left(\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \right) + \left(3 \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) \geq 2\sqrt{3} \cos \frac{B}{2} + 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Hay } 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right) \leq \frac{3}{2} + 3 \left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ĐPCM.}$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1.7. Sử dụng $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 15° .

Lời giải

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Bài 1.8. Tính:

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$, biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác, từ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra

$$\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos a \cos \frac{\pi}{6} - \sin a \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

b) Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin a < 0$, do đó $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} > 0$.

Mặt khác từ $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

$$\text{Suy ra } \tan a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có: } \tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan a - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan a \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{1 + 2\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}.$$

Bài 1.9. Tính $\sin 2a, \cos 2a, \tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác, từ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra

$$\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

$$\text{b) Ta có: } (\sin a + \cos a)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a \cos a = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2a = -\frac{3}{4}.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$ nên $\pi < 2a < \frac{3\pi}{2}$, do đó $\cos 2a < 0$. Mặt khác từ $\sin^2(2a) + \cos^2(2a) = 1$

$$\text{Suy ra } \cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2(2a)} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Do đó, } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Bài 1.10. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}};$$

$$\text{b) } B = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{15} \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{10} \right)}{\cos \left(\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{5} \right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \\
 &= \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{32} \right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \\
 &= \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16}
 \end{aligned}$$

Bài 1.11. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } \sin(a+b)\sin(a-b) &= \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) - \cos(a+b+a-b)] \\
 &= \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a] = \frac{1}{2} [(2\cos^2 b - 1) - (2\cos^2 a - 1)] = \cos^2 b - \cos^2 a.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a (1).$$

$$\text{Lại có, } \cos 2b - \cos 2a = (1 - 2\sin^2 b) - (1 - 2\sin^2 a) = 2(\sin^2 a - \sin^2 b)$$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a] = \frac{1}{2} \cdot 2(\sin^2 a - \sin^2 b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

$$\text{Vậy } \sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$ (đpcm).

Bài 1.12. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 75^\circ; \hat{C} = 45^\circ$ và $a = BC = 12 \text{ cm}$.

a) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ và định lí sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC cho bởi công thức

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

b) Sử dụng kết quả ở câu a và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC .

Lời giải

b) Định lí sin trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b$ và $AB = c$ là: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{Từ đó suy ra } b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a \sin B}{\sin A} \cdot \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Vậy $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ (đpcm).

b) Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong tam giác ABC).

$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{12^2 \sin 75^\circ \sin 45^\circ}{2 \sin 60^\circ} \\ &= \frac{144 \cdot \frac{1}{2} [\cos(75^\circ - 45^\circ) - \cos(75^\circ + 45^\circ)]}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{72(\cos 30^\circ - \cos 120^\circ)}{\sqrt{3}} = \frac{72\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}} = 36 + 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy diện tích của tam giác ABC là $S = 36 + 12\sqrt{3}$ (đvdt).

Bài 1.13. Trong Vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}),$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}).$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

Dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\text{Suy ra } x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= 2 \cdot 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\ &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos \frac{\pi}{4} = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Vậy đạo động tổng hợp có phương trình là $x(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right)$ với biên độ $A = 2\sqrt{2}$ và pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 93: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 94: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

- A. $M = \sqrt{3}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 95: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot \left[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right] \\ &= \cos 2\alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 96: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 97: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \begin{cases} \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 98: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ} &= \frac{\tan(180^\circ + 45^\circ) - \tan 9^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot(180^\circ + 81^\circ) + \tan(180^\circ + 21^\circ)} \\ &= \frac{1 - \tan 9^\circ \cdot \tan 21^\circ}{\tan 9^\circ + \tan 21^\circ} = \frac{1}{\tan(9^\circ + 21^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 99: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } M &= \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 100: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

- A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}. \end{aligned}$$

Câu 101: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

- A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$. D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin 10^\circ \neq 0$ nên suy ra

$$\begin{aligned} M &= \frac{16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} \\ \Rightarrow M &= \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 10^\circ} \\ \Rightarrow M &= \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cos 10^\circ. \end{aligned}$$

Câu 102: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

- A. $M = 0$. B. $M = -\frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot M &= 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị biểu thức $M = -\frac{1}{2}$.

Câu 103: Công thức nào sau đây sai?

- A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$. B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Câu 104: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(2018a) = 2018 \sin a \cdot \cos a$.
B. $\sin(2018a) = 2018 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.
C. $\sin(2018a) = 2 \sin a \cos a$.
D. $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ta được
 $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Câu 105: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. B. $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.
C. $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$. D. $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, ta được
 $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2 \cos^2 3a - 1 = 1 - 2 \sin^2 3a$.

Câu 106: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

C. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Câu 107: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} \right)$.

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$.

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} \right)$.

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 108: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. 2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$. 4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$.

Câu 109: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 3a = 3 \cos a - 4 \cos^3 a$.

B. $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$.

C. $\cos 3a = 3 \cos^3 a - 4 \cos a$.

D. $\cos 3a = 4 \cos a - 3 \cos^3 a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 110: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$.

B. $\sin 3a = 4 \sin^3 a - 3 \sin a$.

C. $\sin 3a = 3 \sin^3 a - 4 \sin a$.

D. $\sin 3a = 4 \sin a - 3 \sin^3 a$.

Lời giải

Chọn A

Câu 111: Nếu $\cos(a+b)=0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a+2b)| = |\sin a|$.

B. $|\sin(a+2b)| = |\sin b|$.

C. $|\sin(a+2b)| = |\cos a|$.

D. $|\sin(a+2b)| = |\cos b|$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } \cos(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi \rightarrow a=-b+\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

$$\Rightarrow |\sin(a+2b)| = \left| \sin\left(-b+2b+\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \right| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|.$$

Câu 112: Nếu $\sin(a+b)=0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\cos(a+2b)| = |\sin a|.$

B.

$|\cos(a+2b)| = |\sin b|.$

C. $|\cos(a+2b)| = |\cos a|.$

D.

$|\cos(a+2b)| = |\cos b|.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=k\pi \rightarrow a=-b+k\pi.$$

$$\Rightarrow |\cos(a+2b)| = |\cos(-b+2b+k\pi)| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|.$$

Câu 113: Rút gọn $M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y.$

A. $M = \cos x.$

B. $M = \sin x.$

C. $M = \sin x \cos 2y.$

D. $M = \cos x \cos 2y.$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$$M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = \sin[(x-y)+y] = \sin x.$$

Câu 114: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b).$

A. $M = 1 - 2\cos^2 a.$

B. $M = 1 - 2\sin^2 a.$

C. $M = \cos 4a.$

D. $M = \sin 4a.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$, ta được

$$M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos(a+b+a-b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$$

Câu 115: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b).$

A. $M = 1 - 2\sin^2 b.$

B. $M = 1 + 2\sin^2 b.$

C. $M = \cos 4b.$

D. $M = \sin 4b.$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b) \\ &= \cos(a+b-(a-b)) = \cos 2b = 1 - 2\sin^2 b. \end{aligned}$$

Câu 116: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

- A. 18° . B. 30° . C. 36° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a+b)$, ta được

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Câu 117: Đẳng thức nào sau đây đúng:

- A. $\cot a + \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$. B. $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$.
C. $\sin(a+b) = \frac{1}{2} \sin 2(a+b)$. D. $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$.

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

- Đáp án A.

$$\text{Ta có } \cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}.$$

- Đáp án B.

$$\text{Ta có } \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$$

Câu 118: Chọn công thức đúng trong các công thức sau:

- A. $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$. B. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.
C. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan a}$. D. $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 119: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $M = \sqrt{2} \sin x$. B. $M = -\sqrt{2} \sin x$. C. $M = \sqrt{2} \cos x$. D. $M = -\sqrt{2} \cos x$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \\ &= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x. \end{aligned}$$

Câu 120: Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

- A. $\frac{56}{65}$. B. $-\frac{56}{65}$. C. $\frac{16}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{cases} \cos A = \frac{4}{5} \\ \cos B = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{3}{5} \\ \sin B = \frac{12}{13} \end{cases}. \text{ Mà } A+B+C=180^\circ, \text{ do đó}$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \cos[180^\circ - (A+B)] = -\cos(A+B) \\ &= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = -\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}. \end{aligned}$$

Câu 121: Cho A, B, C là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{5}$, $\tan C = \frac{1}{8}$. Tổng $A+B+C$ bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \tan(A+B+C) = \frac{\tan(A+B) + \tan C}{1 - \tan(A+B) \cdot \tan C} = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1$$

$$\Rightarrow A+B+C = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 122: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin A + \sin B + \sin C$ tương đương với:

A. $P = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

B. $P = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

C. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

D. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \end{cases}$$

Áp dụng, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Câu 123: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC .

Khi đó $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$ tương đương với:

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = \left(\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \right)^2$.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Do } A+B+C &= \pi \Rightarrow \frac{C+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \\ \Rightarrow \tan \left(\frac{C+B}{2} \right) &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \Rightarrow \frac{\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} \\ \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) &+ \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = 1 \\ \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} &+ \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 124: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

- A. Cân tại B. B. Cân tại A. C. Cân tại C. D. Vuông tại B.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A \Rightarrow \sin B = 2 \sin C \cdot \cos A = \sin(C+A) + \sin(C-A)$$

$$\text{Mặt khác } A+B+C=\pi \Rightarrow B=\pi-(A+C) \Rightarrow \sin B = \sin(A+C).$$

$$\text{Do đó, ta được } \sin(C-A)=0 \Rightarrow A=C.$$

Câu 125: Trong ΔABC , nếu $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì ΔABC là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều. D. Tam giác vuông hoặc cân.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C = 2A \\ 2C = \pi - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A \\ A + C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 126: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

- A. $P = -\frac{24}{25}$. B. $P = \frac{24}{25}$. C. $P = -\frac{12}{25}$. D. $P = \frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên ta chọn } \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Câu 127: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 2\cos\alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ suy ra } \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên ta chọn } \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \longrightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 128: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = -\frac{3}{5}$.

B. $P = \frac{3}{5}$.

C. $P = \frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$.

D. $P = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } -\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ suy ra } \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{4}{5}.$$

$$\text{Do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ nên ta chọn } \cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Suy ra } P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4-3\sqrt{3}}{10}.$$

Câu 129: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = \frac{11}{100}$.

B. $P = -\frac{11}{100}$.

C. $P = \frac{7}{25}$.

D. $P = \frac{10}{11}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)], \text{ ta được}$$

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha\right).$$

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}.$$

$$\text{Thay vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25}\right) = \frac{11}{100}.$$

Câu 130: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$.

B. $P = -\frac{527}{625}$.

C. $P = \frac{524}{625}$.

D. $P = -\frac{524}{625}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}.$$

$$\text{Suy ra } P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625}.$$

Câu 131: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha > 0.$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}. \text{ Suy ra } \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } \sin \alpha - \cos \alpha > 0 \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Câu 132: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

A. $P = 1$. B. $P = \frac{17}{81}$. C. $P = \frac{7}{9}$. D. $P = \frac{9}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Áp dụng } a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2.$$

$$\text{Ta có } P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}.$$

Câu 133: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}.$$

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Câu 134: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

- A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Câu 135: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

- A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$. B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.
C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$. D. $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.

Câu 136: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = -\frac{1}{7}$. B. $P = \frac{1}{7}$. C. $P = -7$. D. $P = 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{1}{7}$.

Câu 137: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}$. B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. C. $P = -\frac{1}{5}$. D. $P = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$.

Từ hệ thức $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$, suy ra $\sin 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ nên ta chọn $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Câu 138: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$.

- A. $P = -\frac{39}{50}$. B. $P = \frac{49}{50}$. C. $P = -\frac{49}{50}$. D. $P = \frac{39}{50}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{39}{50}$.

Câu 139: Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}.$$

$$\text{Từ giả thiết } \cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2.$$

Thay $\tan \alpha = 2$ vào P , ta được $P = -3$.

Câu 140: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{11}{113}$. B. $P = \frac{13}{113}$. C. $P = \frac{15}{113}$. D. $P = \frac{17}{113}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cot \alpha = 15 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 15 \Leftrightarrow \cos \alpha = 15 \sin \alpha.$$

$$\text{Suy ra } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 30 \sin^2 \alpha = \frac{30}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{30}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}.$$

Câu 141: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$.

A. $P = 2\sqrt{19}$. B. $P = -2\sqrt{19}$. C. $P = \sqrt{19}$. D. $P = -\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Từ hệ thức } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \longrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \longrightarrow \sin \alpha > 0 \text{ nên ta chọn } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}} \longrightarrow P = 2\sqrt{19}.$$

Câu 142: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P^2 = 1 + \sin \alpha. \text{ Với } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right).$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ suy ra } P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25}$.

Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P^2 , ta được $P^2 = \frac{1}{5}$. Suy ra $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 143: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

A. $P = \frac{10}{9}$.

B. $P = \frac{9}{10}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = -\frac{9}{10}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}.$$

Nhắc lại công thức: Nếu đặt $t = \tan \alpha$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\text{Do đó } \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{10}{9}$.

Câu 144: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$.

B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } A = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 25 \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 24 \Rightarrow \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}.$$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$.

$$\text{Do đó ta chọn } \cot \alpha = -2\sqrt{6}. \text{ Suy ra } \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = \frac{1}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

Câu 145: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{24}{25}$. B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. C. $P = -\frac{24}{25}$. D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 - 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha > 0$).

$$\text{Vậy } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Câu 146: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{65}$. C. $-\frac{33}{65}$. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \text{ mà } a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \text{ mà } b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Khi đó } \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}.$$

Câu 147: Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

- A. $\frac{16}{65}$. B. $-\frac{16}{65}$. C. $\frac{18}{65}$. D. $-\frac{18}{65}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, có $\cos \beta = \frac{3}{5}$ với $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$.

Câu 148: Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b).$$

A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \\ &= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}. \end{aligned}$$

Câu 149: Nếu a, b là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}$; $\sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a+b)$ có giá trị bằng

A. $\frac{7-2\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{7+2\sqrt{6}}{18}$. C. $\frac{7+4\sqrt{6}}{18}$. D. $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên suy ra
$$\begin{cases} \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Khi đó $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1+2\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\cos 2(a+b) = 2\cos^2(a+b) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Câu 150: Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1 \text{ suy ra } a + b = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 151: Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1.$$

Mặt khác $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $0 < x + y < \pi$. Do đó $x + y = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 152: Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

- A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.
C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma$.

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Vậy tổng ba góc $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (vì α, β, γ là ba góc nhọn).

Câu 153: Biết rằng $\tan a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 90^\circ$) và $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì biểu thức $\cos(2a - b)$

có giá trị bằng

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ suy ra } \sin 2a = \sqrt{1 - \cos^2 2a} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Lại có } 1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ vì } 90^\circ < b < 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \sin b = \tan b \cdot \cos b = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Khi đó } \cos(2a - b) = \cos 2a \cdot \cos b + \sin 2a \cdot \sin b = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 154: Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

- A. $-\frac{20}{7}$. B. $\frac{20}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $-\frac{24}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\sin a - \cos a)^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Khi đó } \cos 2a = \sqrt{1 - \sin^2 2a} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \text{ vì } 270^\circ < 2a < 360^\circ.$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{24}{7}.$$

Câu 155: Nếu $\tan(a + b) = 7$, $\tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

- A. $-\frac{11}{27}$. B. $\frac{11}{27}$. C. $-\frac{13}{27}$. D. $\frac{13}{27}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \tan 2a = \tan[(a + b) + (a - b)] = \frac{\tan(a + b) + \tan(a - b)}{1 + \tan(a + b) \cdot \tan(a - b)} = \frac{7 + 4}{1 - 7 \cdot 4} = -\frac{11}{27}.$$

Câu 156: Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì

- A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$. B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$.
C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$. D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha].$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha.$$

Câu 157: Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $-\sqrt{3}$. C. 3. D. -3.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$.

Suy ra $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta = 2 \cdot \cot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma) \right] = 2 \cdot \tan(\alpha + \gamma) = 2 \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma}$

Mặt khác $\frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \gamma}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha} \cdot \frac{1}{\cot \gamma}} = \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1}$ nên suy ra

$$\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1 = 2 \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma = 3.$$

Câu 158: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\tan \alpha$, $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta

có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$. Khi đó $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-p}{1 - q} = \frac{p}{q-1}$.

Câu 159: Nếu $\tan \alpha$; $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($p, q \neq 0$). Và $\cot \alpha$; $\cot \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì tích $P = rs$ bằng

- A. pq . B. $\frac{p}{q^2}$. C. $\frac{1}{pq}$. D. $\frac{q}{p^2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$ và $\begin{cases} \cot \alpha + \cot \beta = r \\ \cot \alpha \cdot \cot \beta = s \end{cases}$.

Khi đó $P = r \cdot s = (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta = \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta}$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{(\tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} = \frac{p}{q^2}. \text{ Vậy } P = r \cdot s = \frac{p}{q^2}.$$

Câu 160: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

- A. p . B. q . C. 1. D. $\frac{p}{q}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\tan \alpha$, $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ nên theo định lí Viet, ta có

$$\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases} \longrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{p}{1 - q}.$$

Khi đó $P = \cos^2(\alpha + \beta) \cdot [1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)]$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{1 + p \cdot \frac{p}{1 - q} + q \cdot \left(\frac{p}{1 - q}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{1 - q}\right)^2} \\ &= \frac{(1 - q)^2 + p^2(1 - q) + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = \frac{(1 - q)^2 + p^2 - p^2 \cdot q + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 161: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

- A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 162: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

- A. $M = \sin 2\alpha$. B. $M = \cos 2\alpha$. C. $M = -\cos 2\alpha$. D. $M = -\sin 2\alpha$.

Lời giải

Chọn D

Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

$$\text{Suy ra } M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha.$$

Câu 163: Chọn đẳng thức đúng.

A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}.$

B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}.$

C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}.$

D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 164: Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

A. $M = \tan x - \tan y.$ **B.** $M = \cot x - \cot y$

C. $M = \cot y - \cot x.$ **D.** $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} - \frac{\cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y \end{aligned}$$

Câu 165: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1).$

B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x\right).$

C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1).$

D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1).$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x \\ &= 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Câu 166: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}.$

A. $\tan 2x$

B. $\sin x.$

C. $2 \tan x.$

D. $2 \sin x.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Câu 167: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.

A. $\cos x$.

B. $2 \cos x - 1$.

C. $2 \cos x$.

D. $\cos x - 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} \\ &= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x. \end{aligned}$$

Câu 168: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

A. 0.

B. $2 \cos^2 x$.

C. 2.

D. $\cos 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

Do đó $A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$.

Câu 169: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

A. $\sin 2\alpha$.

B. $\cos 2\alpha$.

C. $\tan 2\alpha$.

D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha \end{aligned}$$

Câu 170: Biểu thức $A = \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

A. $-\tan^4 \alpha$.

B. $\tan^4 \alpha$.

C. $-\cot^4 \alpha$.

D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$; $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1$. Do đó:

$$A = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 171: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $\alpha = \frac{\pi}{6}$ là $\tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = \frac{1}{9}$.

Câu 172: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A. $\tan \alpha$. B. $2 \tan \alpha$. C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2\cos \alpha + 1)} = \tan \alpha$.

Câu 173: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = \frac{1 - \sin a + 2\sin^2 a - 1}{2\sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2\sin a - 1)}{\cos a (2\sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$.

Câu 174: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

A. $\tan \frac{x}{2}$.

B. $\cot x$.

C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$.

D. $\sin x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$,

$$1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)}{\cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)} = \tan \frac{x}{2}.$$

Câu 175: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$.

C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$.

D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha.$$

Câu 176: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2$.

A. $M = 1, m = -5$.

B. $M = 3, m = 1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1$

$$\Rightarrow -5 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Câu 177: Cho biểu thức $P = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 &\Rightarrow 2 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -2 \\ &\Rightarrow 4 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq P \geq 0. \end{aligned}$$

Câu 178: Biểu thức $P = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1 \xrightarrow{P \in \mathbb{Z}} P \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 179: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

- A. $M = 3, m = 0$. B. $M = 2, m = 0$. C. $M = 2, m = 1$. D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 180: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$. Tính $T = 2M - m^2$.

- A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 112$. D. $T = 130$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5$$

$$\Rightarrow 3 \leq P \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 2M - m^2 = 1.$$

Câu 181: Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $P \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq P \leq 1.$$

Câu 182: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$.

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.

C. $M = 1, m = -1$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 183: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \Rightarrow 1 \geq P \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 184: Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{2} - 1$.

C. $M = \sqrt{2} + 1$.

D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

BÀI 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$ được gọi là hàm số cosin, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của hàm số cosin là $\mathbb{R}$.

- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$.

Tập xác định của hàm số tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số cotang, kí hiệu là $y = \cot x$. Tập xác định của hàm số cotang là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D .

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.

Nhận xét. Để vẽ đồ thị của một hàm số chẵn (tương ứng, lẻ), ta chỉ cần vẽ phần đồ thị của hàm số với những x dương, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung (tương ứng, qua gốc toạ độ), ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

b) Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

i) $x + T \in D$ và $x - T \in D$;

ii) $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

Nhận xét

a) Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π . Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

b) Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kì T , ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a + T]$, sau đó dịch chuyển song song với trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là $T, 2T, 3T, \dots$ ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

3. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $Y = \sin x$

Hàm số $y = \sin x$:

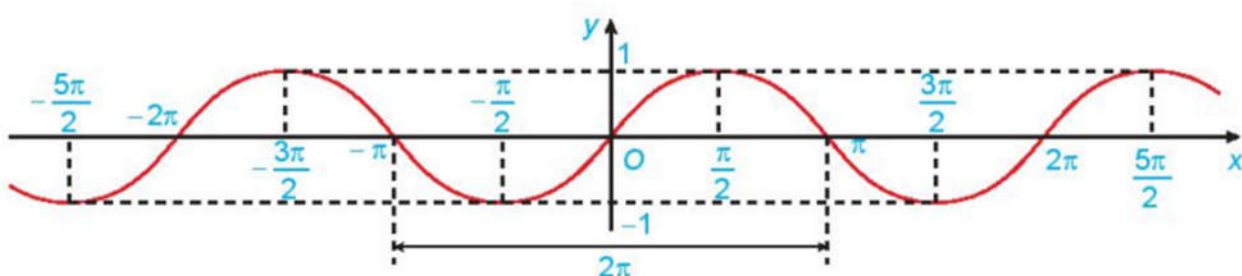
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1; 1]$;

- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π ;

- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng

$\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

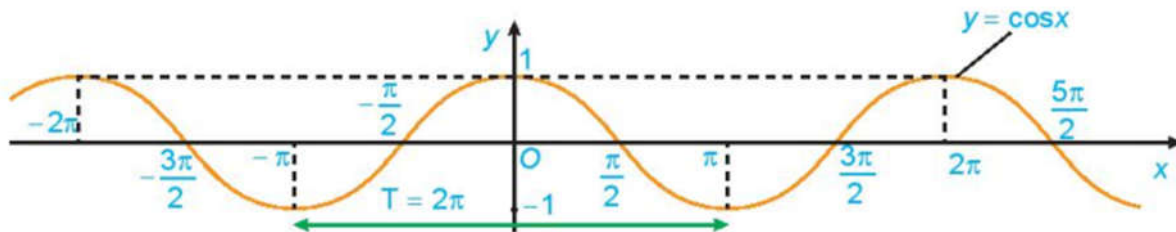
- Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ và gọi là một đường hình sin.



4. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = \cos x$

Hàm số $y = \cos x$:

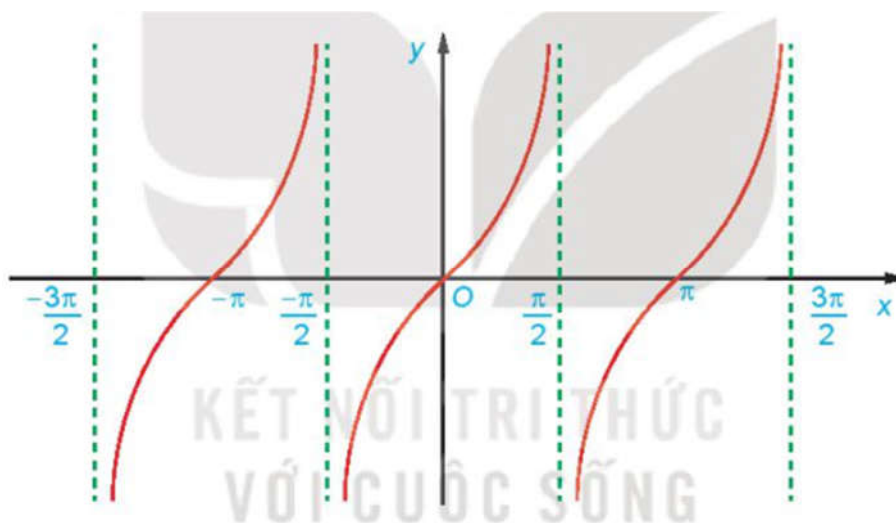
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1;1]$;
- Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π ;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$
- Có đồ thị là một đường hình sin đối xứng qua trục tung.



5. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π ;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

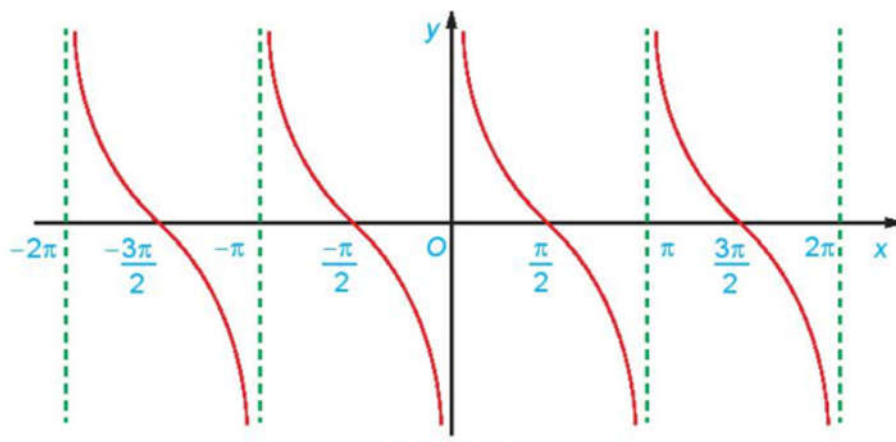


6. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;

- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π ;
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP LỜI GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y = \sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \geq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) \neq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) > 0$.
- Hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là:
 $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Như vậy, $y = \sin[u(x)]$, $y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

- $y = \tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $y = \cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$; b) $y = \cos\sqrt{4 - x^2}$; c) $y = \sqrt{\sin x}$; d) $y = \sqrt{2 - \sin x}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2-1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y = \cos\sqrt{x^2-4}$ xác định $\Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

c) Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0$.

Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; c) $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$; d) $y = \frac{1}{\tan x - 1}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$ xác định $\Leftrightarrow \cos(x - \pi) \neq 0 \Leftrightarrow x - \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y = \frac{1}{\tan x - 1}$ xác định $\tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$; b) $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$ xác định $\Leftrightarrow$

$$\sin 3x \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 6x \neq 0 \Leftrightarrow 6x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$: $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m - 3\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1 \leq \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp:

Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số; kiểm chứng D là tập đối xứng qua số 0 tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)
- Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$
 - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên D (2)
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên D (3)

Chú ý:

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D ;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên D .

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao

$$\text{cho } \begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \tan|x|$; c) $y = \sin^4 x$.

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \tan x + \cot x$; b) $y = \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + 3$; b) $y = \sin x + \cos x$.

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 1; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\text{Ta có: } y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}; \quad \text{b) } y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}.$$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cot x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin^2 x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ Suy ra } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \frac{\sin(-x) - \tan(-x)}{\sin(-x) + \cot(-x)} = \frac{-\sin x + \tan x}{-\sin x - \cot x} = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x} = f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:
$$f(-x) = \frac{\cos^3(-x) + 1}{\sin^3(-x)} = \frac{\cos^3 x + 1}{-\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x} = -f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f(-x) = 3m \sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m \sin 4x + \cos 2x = -3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow 6m \sin 4x = 0 \Leftrightarrow m = 0 \end{aligned}$$

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad M &= \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \\ \blacksquare \quad m &= \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \end{aligned}$$

Lưu ý:

- $-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1.$
- $0 \leq \sin^2 x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1.$
- $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1; 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1.$
- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình cơ bản
 - Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
 - Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$
 - Nếu hàm số có dạng: $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$

Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình $a \sin x + b \cos x = c$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$a) y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \quad ; \quad b) y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 3$$

Hay $-1 \leq y \leq 3$. Suy ra:

$$\text{Max}y = 3 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -1 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x + 1} \leq \sqrt{2} \\ \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} \leq 2\sqrt{2} &\Rightarrow -3 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

Hay $-3 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 3$ Suy ra

$$\text{Max}y = 2\sqrt{2} - 3 \text{ khi } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -3 \text{ khi } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$a) y = \sin x + \cos x \quad ; \quad b) y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}.$$

Suy ra:

$$\text{Max}y = \sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$b) \text{ Ta có: } y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x\right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Suy ra: $-2 \leq y \leq 2$. Do đó:

$$\text{Max}y = 2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$; b) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 x + 2\sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2\sin x + 2 \\ &= -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4$$

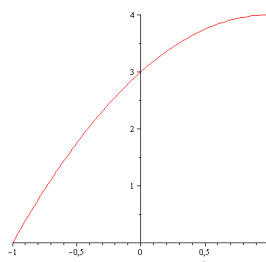
$$\text{Hay } 0 \leq y \leq 4$$

Do đó:

$$\text{Max}y = 4 \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = 0 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

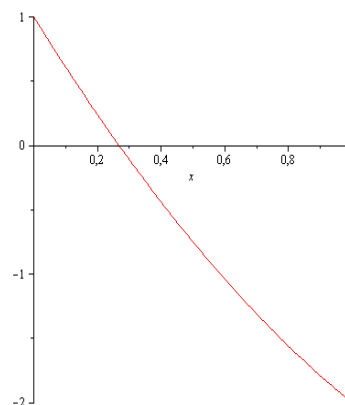


Nếu đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Ta có (P): $y = f(t) = -t^2 + 2t + 3$ xác định với mọi $t \in [-1; 1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 1$ và trên đoạn $[-1; 1]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1$ hay $\sin x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 1$ hay $\sin x = 1$.

b) Ta có

$$y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1$$

$$= \cos^4 x - 4\cos^2 x + 2 = (\cos^2 x - 2)^2 - 2$$



$$\text{Vì } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2 x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq (\cos^2 x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \geq -1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq -1$$

Do đó:

Max y = 2 khi

$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Min y = -1 khi

$$\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

Nếu đặt $t = \cos^2 x, t \in [0; 1]$. Ta có (P): $y = f(t) = t^2 - 4t + 2$ xác định với mọi $t \in [0; 1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 2 \notin [0; 1]$ và trên đoạn $[0; 1]$ hàm số nghịch biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$$

$$\text{Vì } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \leq \sqrt{2} - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Biến đổi } y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$$

$$\Leftrightarrow y \sin x + y \cos x - 2y = 2\sin x - \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)\sin x + (y + 1)\cos x = 2y + 1 \quad (*)$$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 + (y+1)^2 \geq (2y+1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \leq y \leq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

Kết luận: $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \min_{\mathbb{R}} y = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó

1. Phương pháp

Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn $f(x)$ tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:

- Xét hàm số $y=f(x)$, tập xác định là D
- Với mọi $x \in D$, ta có $x-T_0 \in D$ và $x+T_0 \in D$ (1). Chỉ ra $f(x+T_0)=f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y=f(x)$ tuần hoàn

Chứng minh hàm số tuần hoàn với chu kỳ T_0

Tiếp tục, ta đi chứng minh T_0 là chu kỳ của hàm số tức chứng minh T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có T sao cho $0 < T < T_0$ thỏa mãn tính chất (2) $\Leftrightarrow \dots \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

Một số nhận xét:

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π . Từ đó $y = \sin(ax+b), y = \cos(ax+b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$
- Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn chu kỳ π . Từ đó $y = \tan(ax+b), y = \cot(ax+b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

Chú ý:

$y=f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ; $y=f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn

Hàm số $y=f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn
- Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$
- Phương trình $f(x)=k$ có vô số nghiệm hữu hạn

- Phương trình $f(x)=k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $\dots < x_m < x_{m+1} < \dots$ mà $|x_m - x_{m+1}| \rightarrow 0$ hay ∞

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

a) $f(x) = \sin x, T_0 = 2\pi;$ b) $f(x) = \tan 2x, T_0 = \frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn Lời giải

a) Ta có : $f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Giả sử có số thực dương $T < 2\pi$ thỏa $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \sin(x+T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$

Cho $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow VT(*) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T < 1;$ $VP(*) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow (*)$ không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$

b) Ta có : $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x), \forall x \in D.$

Giả sử có số thực dương $T < \frac{\pi}{2}$ thỏa $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \tan(2x+2T) = \tan 2x, \forall x \in D \quad (**)$

Cho $x = 0 \Rightarrow VT(**) = \tan 2T \neq 0;$ $VP(**) = 0$

$B \Rightarrow (**)$ không xảy ra với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x) = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2};$ b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x);$ c) $f(x) = \sin(x^2);$ d) $y = \tan \sqrt{x}.$

Lời giải

c) Hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

d) Hàm số $f(x) = \tan \sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$

$$(k+1)^2 \pi^2 - k^2 \pi \rightarrow \infty \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác

1. Phương pháp

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

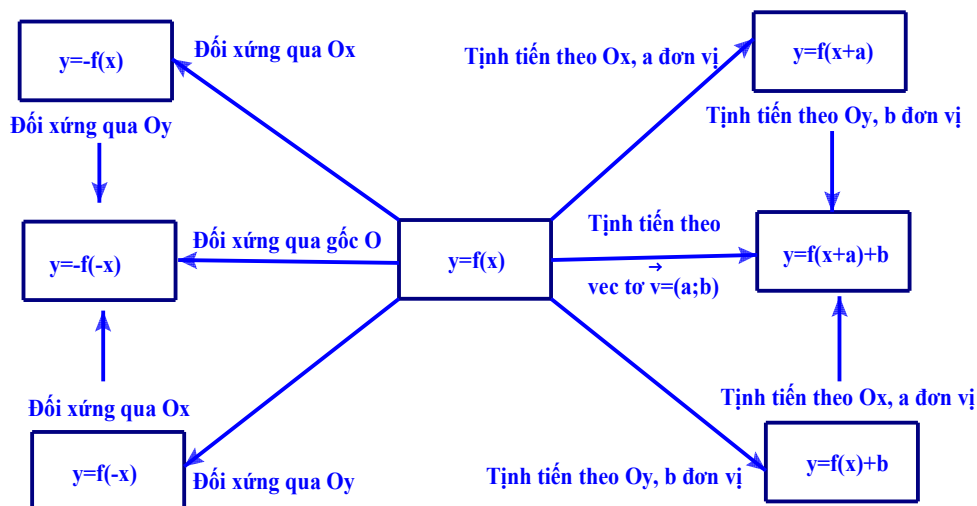
$$x \in [0, T_0] \text{ hoặc } x \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + a$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên trên trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang phải trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra đồ thị $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành.
- Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ nên suy ra đồ thị $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ phía trên trục hoành và lấy đối xứng $y = -f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành

Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số



2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \sin 4x$

Lời giải

a) Hàm số $y = \sin 4x$.

Miền xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

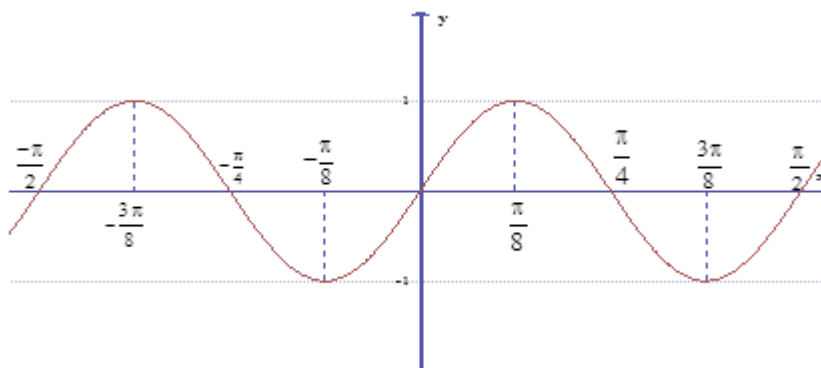
(Do chu kì tuần hoàn $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$)

Bảng giá trị của hàm số $y = \sin 4x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$						
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0						

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin 4x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: $..., \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \dots$



Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$.

Lời giải

Hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$.

Miền xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $[0;6\pi]$

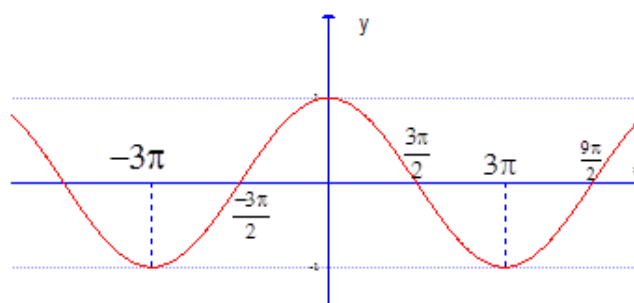
(Do chu kì tuần hoàn $T=\frac{2\pi}{1/3}=6\pi$)

Bảng giá trị của hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$ trên đoạn $[0;6\pi]$ là:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{6}$	3π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{2}$
	$\frac{33\pi}{6}$	6π					
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1					

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$ trên đoạn $[0;6\pi]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: ..., $[-6\pi, 0]$, $[6\pi, 12\pi]$,

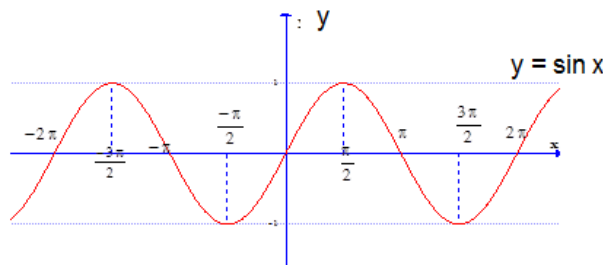


Ví dụ 3. Cho đồ thị của hàm số $y = \sin x$, (C) . Hãy vẽ các đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ b) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$.

Lời giải

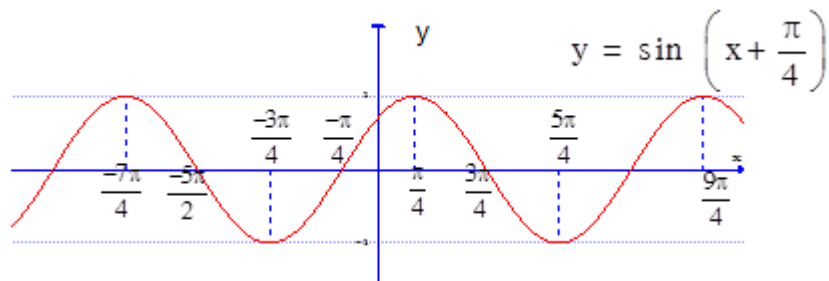
Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, (C) như sau:



a) Từ đồ thị (C), ta có đồ thị $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái

một đoạn là $\frac{\pi}{4}$ đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, (C') như (hình 8)

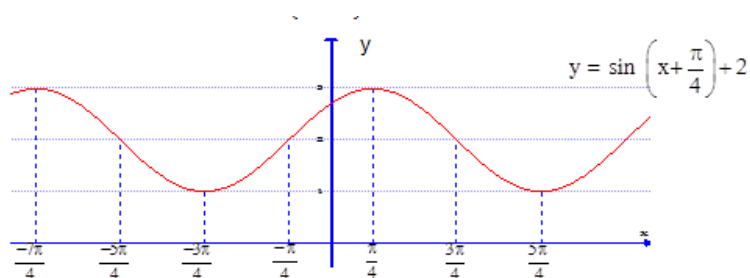
sau:



b) Từ đồ thị (C') của hàm số $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, ta có đồ thị hàm số

$y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$ bằng cách tịnh tiến (C') lên trên một đoạn là 2 đơn vị, ta được đồ thị

hàm số $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$, (C'') như sau:



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1.15. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$;

b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$.

Lời giải

a) Biểu thức $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có nghĩa khi $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} \frac{1 + \cos x}{2 - \cos x} \geq 0 \\ 2 - \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1 + \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $2 - \cos x \geq 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $2 - \cos x \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ là $D = \mathbb{R}$.

Bài 1.16. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \tan 2x$;

b) $y = \cos x + \sin^2 x$;

c) $y = \sin x \cos 2x$;

d) $y = \sin x + \cos x$.

Lời giải

a) Biểu thức $\sin 2x + \tan 2x$ có nghĩa khi $\cos 2x \neq 0$ (do $\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$), tức là

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin 2x + \tan 2x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có:

$$f(-x) = \sin(-2x) + \tan(-2x) = -\sin 2x - \tan 2x = -(\sin 2x + \tan 2x) = -f(x), \forall x \in D.$$

Vậy $y = \sin 2x + \tan 2x$ là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$ là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

$$\text{Ta có: } f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos x + (-\sin x)^2 = \cos x + \sin^2 x = f(x), \forall x \in D$$

Vậy $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

c) Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin x \cos 2x$ là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có: $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-2x) = -\sin x \cdot \cos 2x = -f(x), \forall x \in D$.

Vậy $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số lẻ.

d) Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin x + \cos x$ là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có: $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq -f(x)$.

Vậy $y = \sin x + \cos x$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Bài 1.17. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$; b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$.

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -2 - 1 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ là $[-3; 1]$.

b) Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $0 \leq \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-2 \leq \sqrt{1 + \cos x} - 2 \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

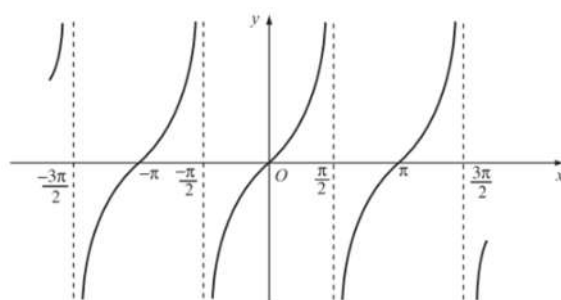
Hay $-2 \leq y \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$ là $[-2; \sqrt{2} - 2]$.

Bài 1.18. Từ đồ thị của hàm số $y = \tan x$, hãy tìm các giá trị x sao cho $\tan x = 0$.

Lời giải

Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ như hình vẽ dưới đây.



Ta có $\tan x = 0$ khi hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0 ứng với các điểm x mà đồ thị giao với trục hoành. Từ đồ thị ở hình trên ta suy ra $y = 0$ hay $\tan x = 0$ khi $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 1.19. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

- Tìm chu kì của sóng.
- Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 20\right) = 90$ (cm).

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x - \cos x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \emptyset$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = 3\tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin^2 x \neq 0$ và $\tan x$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2}.$

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = [-2; +\infty).$

C. $D = [0; 2\pi].$

D. $D = \emptyset.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó luôn tồn tại căn bậc hai của $\sin x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}.$

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 2}.$

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = [-1; 1].$

D. $D = \emptyset.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó không tồn tại căn bậc hai của $\sin x - 2.$

Vậy tập xác định $D = \emptyset$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1$. (*)

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên (*) $\Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$.

A. $D = \emptyset$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

D. $D = \left[\frac{5\pi}{6} + k2\pi; \frac{13\pi}{6} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x \geq 0 \\ 1 - \sin 2x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{\pi}{2} \cdot \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k$. (*)

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên (*) $\Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 13: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = \cot x$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Vậy B là đáp án đúng.

Câu 14: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = -\sin x$. B. $y = \cos x - \sin x$. C. $y = \cos x + \sin^2 x$. D. $y = \cos x \sin x$.

Lời giải

Chọn C

Tất cả các hàm số đều có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Bây giờ ta kiểm tra $f(-x) = f(x)$ hoặc $f(-x) = -f(x)$.

- Với $y = f(x) = -\sin x$. Ta có $f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -(-\sin x)$
 $\longrightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = -\sin x$ là hàm số lẻ.
- Với $y = f(x) = \cos x - \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x + \sin x$
 $\longrightarrow f(-x) \neq \{-f(x), f(x)\}$. Suy ra hàm số $y = \cos x - \sin x$ không chẵn không lẻ.
- Với $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$
 $= \cos(-x) + [\sin(-x)]^2 = \cos x + [-\sin x]^2 = \cos x + \sin^2 x$
 $\longrightarrow f(-x) = f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.
- Với $y = f(x) = \cos x \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \sin(-x) = -\cos x \sin x$
 $\longrightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x \sin x$ là hàm số lẻ.

Câu 15: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$. B. $y = x \cos x$. C. $y = \cos x \cdot \cot x$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn D

- Xét hàm số $y = f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y = f(x) = x \cos x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cos x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y = f(x) = \cos x \cot x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \cot(-x) = -\cos x \cot x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\tan x}{-\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} = f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 16: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = |\sin x|$.

B. $y = x^2 \sin x$.

C. $y = \frac{x}{\cos x}$.

D. $y = x + \sin x$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ.

Câu 17: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y = \sin x \cos 2x$.

B. $y = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$.

D. $y = \cos x \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ dàng kiểm tra được A, C, D là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .

Xét đáp án B, ta có $y = f(x) = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^3 x \cdot \sin x = \sin^4 x$. Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Câu 18: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \cos x + \sin^2 x$.

B. $y = \sin x + \cos x$.

C. $y = -\cos x$.

D. $y = \sin x \cdot \cos 3x$.

Lời giải

Chọn D

Ta kiểm tra được đáp án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ.

Câu 19: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A. $y = \cot 4x$. B. $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$. C. $y = \tan^2 x$. D. $y = |\cot x|$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

Câu 20: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. B. $y = \sin^2 x$. C. $y = \frac{\cot x}{\cos x}$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn C

Viết lại đáp án A là $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 21: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = 1 - \sin^2 x$. B. $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$. C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x$. D. $y = 1 + |\cot x + \tan x|$.

Lời giải

Chọn C

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
 B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
 C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.
 D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

- Xét hàm số $f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $g(x) = \tan^2 x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = [\tan(-x)]^2 = (-\tan x)^2 = \tan^2 x = g(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 23: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. B. $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.
C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. D. $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Lời giải

Chọn B

- Xét hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1 + \sin^2(-3x)} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x} = f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

- Xét hàm số $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = \frac{|\sin(-2x)| - \cos(-3x)}{2 + \tan^2(-x)} = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x} = g(x) \longrightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

Câu 24: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A. $y = \frac{1}{\sin^3 x}$. B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. C. $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. D. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại đáp án B là $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$.

Viết lại đáp án C là $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$.

Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.

Xét đáp án D.

$$\bullet \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow \sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \in [k2\pi; \pi + k2\pi] \Leftrightarrow x \in \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$$

$$\longrightarrow D = \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \text{ Chọn } x = \frac{\pi}{4} \in D \text{ nhưng } -x = -\frac{\pi}{4} \notin D. \text{ Vậy } y = \sqrt{\sin 2x} \text{ không chẵn, không lẻ.}$$

Câu 25: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O .
- B. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đối xứng qua trục Oy .
- C. Đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ đối xứng qua trục Oy .
- D. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được hàm số $y = |\sin x|$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục Oy .
Do đó đáp án A sai.

Câu 26: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3\sin x - 2$.

- A. $M = 1, m = -5$.
- B. $M = 3, m = 1$.
- C. $M = 2, m = -2$.
- D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3 \longrightarrow -5 \leq 3\sin x - 2 \leq 1$$

$$\longrightarrow -5 \leq y \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Câu 27: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3\cos 2x + 5$.

- A. $T = [-1; 1]$.
- B. $T = [-1; 11]$.
- C. $T = [2; 8]$.
- D. $T = [5; 8]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq 3\cos 2x \leq 3 \longrightarrow 2 \leq 3\cos 2x + 5 \leq 8$$

$$\longrightarrow 2 \leq y \leq 8 \longrightarrow T = [2; 8].$$

Câu 28: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3\sin x$.

A. $T = [-1; 1]$.

B. $T = [-3; 3]$.

C. $T = [2; 8]$.

D. $T = [5; 8]$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 &\longrightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \longrightarrow 3 \geq -3\sin x \geq -3 \\ &\longrightarrow 8 \geq 5 - 3\sin x \geq 2 \longrightarrow 2 \leq y \leq 8 \longrightarrow T = [2; 8]. \end{aligned}$$

Câu 29: Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } -1 \leq \sin 4x \leq 1 &\longrightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \longrightarrow 3 \leq 5 + 2\sin 4x \leq 7 \\ &\longrightarrow 3 \leq y \leq 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3; 4; 5; 6; 7\} \text{ nên } y \text{ có 5 giá trị nguyên.} \end{aligned}$$

Câu 30: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -\sqrt{2} \sin(2016x + 2017)$.

A. $m = -2016\sqrt{2}$.

B. $m = -\sqrt{2}$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2017\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \sin(2016x + 2017) \leq 1 \longrightarrow \sqrt{2} \geq -\sqrt{2} \sin(2016x + 2017) \geq -\sqrt{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}$.

Câu 31: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $m = 1$.

D. $m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Ta có $\frac{1}{\cos x + 1}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos x = 1$.

Khi $\cos x = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}$.

Câu 32: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tính

$P = M - m$.

A. $P = 4$.

B. $P = 2\sqrt{2}$.

C. $P = \sqrt{2}$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} M = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow P = M - m = 2\sqrt{2}.$$

Câu 33: Tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2017x - \cos 2017x$.

A. $T = [-2; 2]$. B. $T = [-4034; 4034]$. C. $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. D. $T = [0; \sqrt{2}]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sin 2017x - \cos 2017x = \sqrt{2} \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\longrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \longrightarrow T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

Câu 34: Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Áp dụng công thức } \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \text{ ta có}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 35: Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \longrightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq 1 \longrightarrow -1 \geq y \geq 1.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 .

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 36: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2|\cos 3x|$.

- A. $M = 3, m = -1$. B. $M = 1, m = -1$. C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \longrightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$

$$\longrightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \longrightarrow 1 \geq y \geq -1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 37: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $M = \sqrt{2}$. B. $M = \sqrt{2} - 1$. C. $M = \sqrt{2} + 1$. D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

Câu 38: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A. $T = [0; 2]$. B. $T = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. C. $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. D. $T = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \longrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \leq 1 \longrightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq 1.$$

Câu 39: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$.

- A. $M = 3, m = 0$. B. $M = 2, m = 0$. C. $M = 2, m = 1$. D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$

Do $-1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \longrightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}$.

Câu 40: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$.

A. $M = \frac{1}{2}$.

B. $M = \frac{2}{3}$.

C. $M = 1$.

D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \frac{2}{1 + \tan^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \cos^2 x$.

Do $0 \leq \cos^2 x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq y \leq 2 \longrightarrow M = 2$.

Câu 41: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$.

Tính $P = 2M - m^2$.

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 112$.

D. $P = 130$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \longrightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5$

$\longrightarrow 3 \leq y \leq 5 \longrightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \longrightarrow P = 2M - m^2 = 1$.

Câu 42: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x$.

A. $m = 2 - \sqrt{3}$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$

$= \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 1$

$= 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) + 1 = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 1$.

Mà $-1 \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq 1 + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 3 \longrightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 .

Câu 43: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 12\sin x - 5\cos x$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-7; 7]$. C. $T = [-13; 13]$. D. $T = [-17; 17]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = 12\sin x - 5\cos x = 13\left(\frac{12}{13}\sin x - \frac{5}{13}\cos x\right).$$

$$\text{Đặt } \frac{12}{13} = \cos \alpha \longrightarrow \frac{5}{13} = \sin \alpha. \text{ Khi đó } y = 13(\sin x \cos \alpha - \sin \alpha \cos x) = 13\sin(x - \alpha)$$

$$\longrightarrow -13 \leq y \leq 13 \longrightarrow T = [-13; 13].$$

Câu 44: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$.

- A. $M = 3$. B. $M = 1$. C. $M = 5$. D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = 4\sin 2x - 3\cos 2x = 5\left(\frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x\right).$$

$$\text{Đặt } \frac{4}{5} = \cos \alpha \longrightarrow \frac{3}{5} = \sin \alpha. \text{ Khi đó } y = 5(\cos \alpha \sin 2x - \sin \alpha \cos 2x) = 5\sin(2x - \alpha)$$

$$\longrightarrow -5 \leq y \leq 5 \longrightarrow M = 5.$$

Câu 45: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 5$. Tính $P = M - 2m^2$.

- A. $P = 1$. B. $P = 7$. C. $P = 8$. D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \sin^2 x - 4\sin x + 5 = (\sin x - 2)^2 + 1.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \longrightarrow 1 \leq (\sin x - 2)^2 \leq 9$$

$$\longrightarrow 2 \leq (\sin x - 2)^2 + 1 \leq 10 \longrightarrow \begin{cases} M = 10 \\ m = 2 \end{cases} P = M - 2m^2 = 2.$$

Câu 46: Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \cos^2 x - \cos x = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow -\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow 0 \leq \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{4} \leq \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2 \longrightarrow -\frac{1}{4} \leq y \leq 2 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{0; 1; 2\} \text{ nên có 3 giá trị thỏa mãn.}$$

Câu 47: Hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x_0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = 1 - \sin^2 x + 2 \sin x + 2$

$$= -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \longrightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4$$

$$\longrightarrow 0 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq -4 \longrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 + 4 \geq 0.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 48: Tìm giá trị lớn nhất M và nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = 1, m = 0$.

C. $M = 4, m = -1$.

D. $M = 2, m = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 x) + 1 = (\sin^2 x + 1)^2 - 2.$$

$$\text{Do } 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2 \longrightarrow 1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 4$$

$$\longrightarrow -1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 - 2 \leq 2 \longrightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 49: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 4 \sin^4 x - \cos 4x$.

A. $m = -3$.

B. $m = -1$.

C. $m = 3$.

D. $m = -5$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = 4 \sin^4 x - \cos 4x = 4 \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 - (2 \cos^2 2x - 1)$$

$$= -\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 2 = -(\cos 2x + 1)^2 + 3 \leq 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 &\longrightarrow 0 \leq \cos 2x + 1 \leq 2 \longrightarrow 0 \leq (\cos 2x + 1)^2 \leq 4 \\ &\longrightarrow -1 \leq -(\cos 2x + 1)^2 + 3 \leq 3 \longrightarrow m = -1. \end{aligned}$$

Câu 50: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{7 - 3\cos^2 x}$.

A. $M = \sqrt{10}, m = 2$. B. $M = \sqrt{7}, m = 2$. C. $M = \sqrt{10}, m = \sqrt{7}$. D. $M = 0, m = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \cos x \leq 1 &\longrightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \\ &\longrightarrow 4 \leq 7 - 3\cos^2 x \leq 7 \longrightarrow 2 \leq \sqrt{7 - 3\cos^2 x} \leq \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Câu 51: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y = 4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 28 tháng 5. B. 29 tháng 5. C. 30 tháng 5. D. 31 tháng 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vì } \sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] \leq 1 \longrightarrow y = 4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] + 10 \leq 14.$$

$$\text{Ngày có ánh sáng mặt trời nhiều nhất } \Leftrightarrow y = 14 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t - 60) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 149 + 356k.$$

$$\text{Do } 0 < t \leq 365 \longrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356} < k \leq \frac{54}{89} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0.$$

Với $k = 0 \longrightarrow t = 149$ rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0 < t \leq 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

Câu 52: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t = 13$ (giờ). B. $t = 14$ (giờ). C. $t = 15$ (giờ). D. $t = 16$ (giờ).

Lời giải

. Chọn B

Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \text{ với } 0 < t \leq 24 \text{ và } k \in \mathbb{Z}.$$

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn

Vì với $t = 14 \longrightarrow \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = 2\pi$ (đúng với $k = 1 \in \mathbb{Z}$).

Câu 53: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 54: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin x$
- B. $y = x + \sin x$
- C. $y = x \cos x$.
- D. $y = \frac{\sin x}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x + \sin x$ không tuần hoàn. Thật vậy:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Giả sử $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow (x+T) + \sin(x+T) = x + \sin x, \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow T + \sin(x+T) = \sin x, \forall x \in D. (*)$

Cho $x = 0$ và $x = \pi$, ta được $\begin{cases} T + \sin x = \sin 0 = 0 \\ T + \sin(\pi + T) = \sin \pi = 0 \end{cases}$

$\longrightarrow 2T + \sin T + \sin(\pi + T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$. Điều này trái với định nghĩa là $T > 0$.

Vậy hàm số $y = x + \sin x$ không phải là hàm số tuần hoàn.

Tương tự chứng minh cho các hàm số $y = x \cos x$ và $y = \frac{\sin x}{x}$ không tuần hoàn.

Câu 55: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không tuần hoàn?

- A. $y = \cos x$.
- B. $y = \cos 2x$.
- C. $y = x^2 \cos x$.
- D. $y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 56: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $T = \frac{2\pi}{5}$.

B. $T = \frac{5\pi}{2}$.

C. $T = \frac{\pi}{2}$.

D. $T = \frac{\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{5}$.

Câu 57: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = -2\pi$.

D. $T = \pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu 58: Tìm chu kì T của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$.

A. $T = \frac{1}{50}$.

B. $T = \frac{1}{100}$.

C. $T = \frac{\pi}{50}$.

D. $T = 200\pi^2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$.

Câu 59: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi$.

Nhận xét. T là của T_1 và T_2 .

Câu 60: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$.

- A. $T = \pi$. B. $T = 3\pi$. C. $T = 2\pi$. D. $T = 5\pi$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Câu 61: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

- A. $T = 2\pi$. B. $T = 4\pi$ C. $T = 6\pi$ D. $T = \pi$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = 3\cos(2x+1)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = -2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi$.

Câu 62: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \pi$. C. $T = 3\pi$. D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Suy ra hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Câu 63: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.

A. $T = \frac{\pi}{3}$.

B. $T = \frac{4}{3}$.

C. $T = \frac{2\pi}{3}$.

D. $T = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{1}{3}$.

Câu 64: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x + \cot x$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \tan 3x + \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Câu 65: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cot \frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 3\pi$.

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = 3\pi$.

Câu 66: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 4\pi$.

Hàm số $y = -\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu 67: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\cos^2 x + 2017$.

A. $T = 3\pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = \pi$.

D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 2\cos^2 x + 2017 = \cos 2x + 2018$.

Suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 68: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\cos^2 3x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \cdot \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1}{2}(3\cos 6x - 2\cos 2x + 5)$.

Hàm số $y = 3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 69: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x - \cos^2 2x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = \frac{\pi}{3}$.

C. $T = \frac{\pi}{2}$.

D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \tan 3x - \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2}(2\tan 3x - \cos 4x - 1)$.

Hàm số $y = 2\tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -\cos 4x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 70: Hàm số nào sau đây có chu kì khác π ?

- A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$. B. $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. C. $y = \tan(-2x + 1)$. D. $y = \cos x \sin x$.

Lời giải

Chọn C

Vì $y = \tan(-2x + 1)$ có chu kì $T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét. Hàm số $y = \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ có chu kỳ là π .

Câu 71: Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π ?

- A. $y = \cos^3 x$. B. $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. C. $y = \sin^2(x + 2)$. D. $y = \cos^2\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin^2(x + 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x + 4)$ có chu kì là π .

Hàm số $y = \cos^2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(x + 2)$ có chu kì là 2π .

Câu 72: Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

- A. $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$. B. $y = \sin x$ và $y = \tan 2x$.
C. $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$. D. $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$.

Lời giải

Chọn B

Hai hàm số $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 2π .

Hai hàm số $y = \sin x$ có chu kì là 2π , hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Hai hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 4π .

Hai hàm số $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$ có cùng chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Câu 73: Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại lý thuyết

Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $p > 0$, ta có:

- + Tịnh tiến (C) lên trên p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + p$.
- + Tịnh tiến (C) xuống dưới p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - p$.
- + Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.
- + Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị.

Câu 74: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 75: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x + 1$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.
- C. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.
- D. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

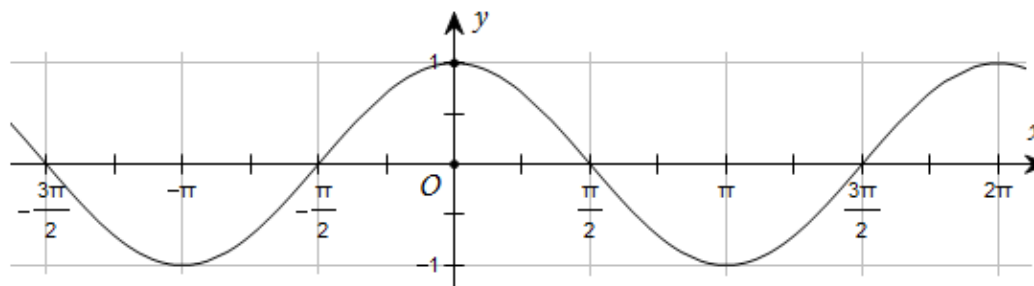
Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

- Tịnh tiến đồ thị $y = \cos x + 1$ sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.
- Tiếp theo tịnh tiến đồ thị $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ xuống dưới 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 76: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin 2x$. B. $y = \cos x$. C. $y = -\sin x$. D. $y = -\cos x$.

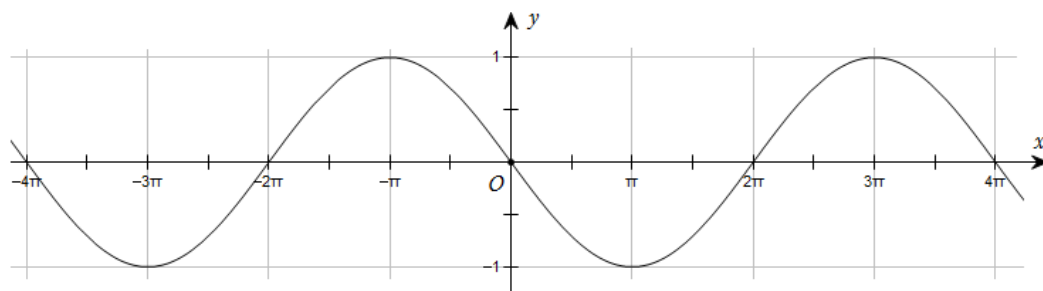
Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Do đó loại đáp án C và D

Tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = 0$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 77: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \sin \frac{x}{2}$.

B. $y = \cos \frac{x}{2}$.

C. $y = -\cos \frac{x}{4}$.

D. $y = \sin \left(-\frac{x}{2} \right)$.

Lời giải

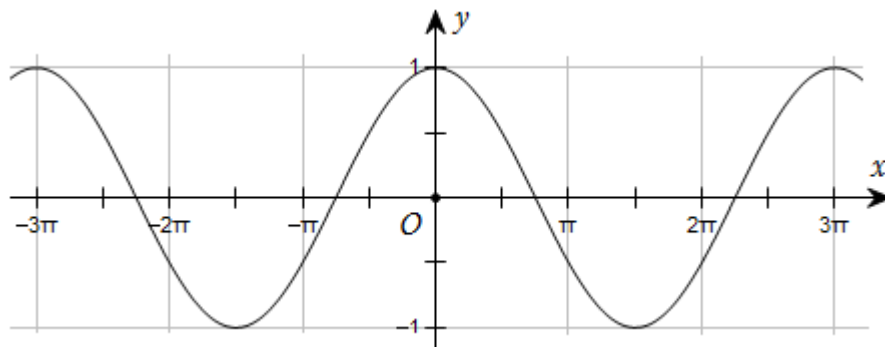
Chọn D

Ta thấy:

Tại $x=0$ thì $y=0$. Do đó loại B và C

Tại $x=\pi$ thì $y=-1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có D thỏa.

Câu 78: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \cos \frac{2x}{3}$.

B. $y = \sin \frac{2x}{3}$.

C. $y = \cos \frac{3x}{2}$.

D. $y = \sin \frac{3x}{2}$.

Lời giải

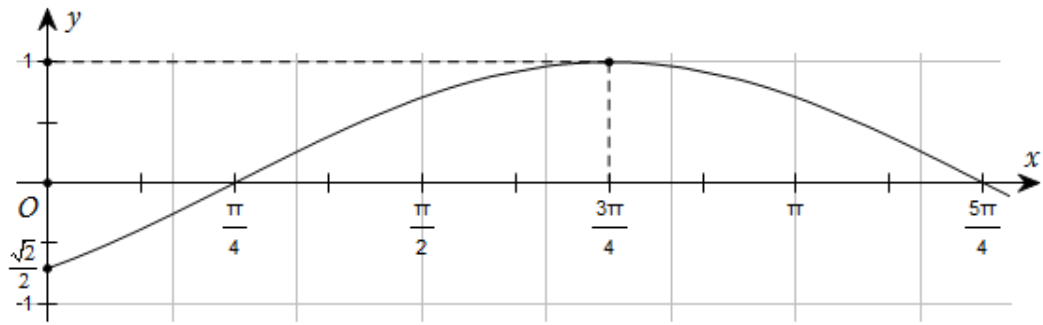
Chọn A

Ta thấy:

Tại $x=0$ thì $y=1$. Do đó ta loại đáp án B và D

Tại $x=3\pi$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án A và C thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 79: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. B. $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. C. $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. D. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

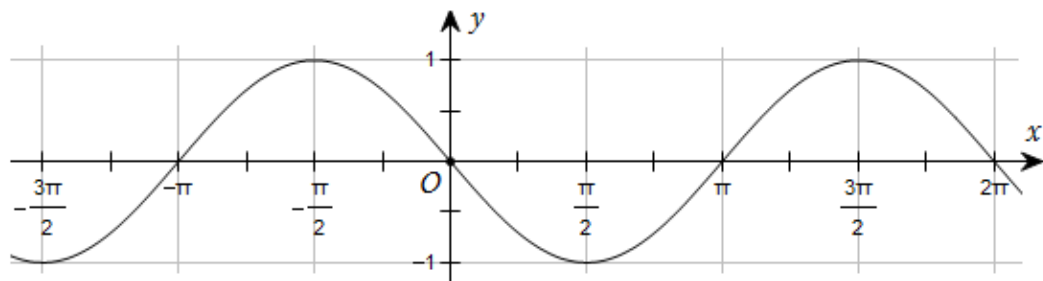
Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 1 và GTNN bằng -1. Do đó loại đáp án C

Tại $x = 0$ thì $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó loại đáp án D

Tại $x = \frac{3\pi}{4}$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 80: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin x$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = \sin|x|$. D. $y = -\sin x$.

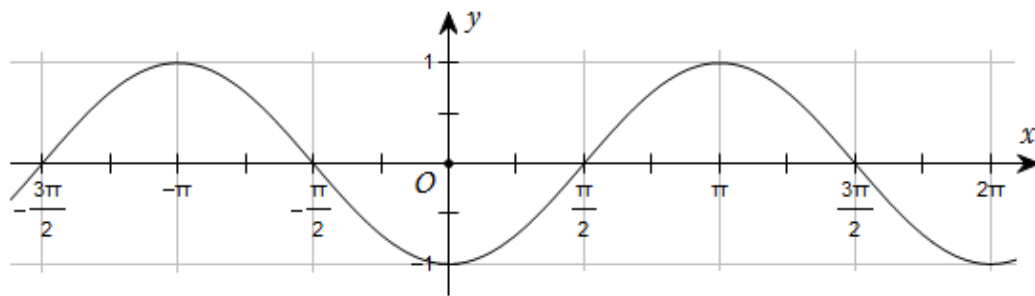
Lời giải

Chọn D

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 0$. Cả 4 đáp án đều thỏa.

Tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = -1$. Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Câu 81: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

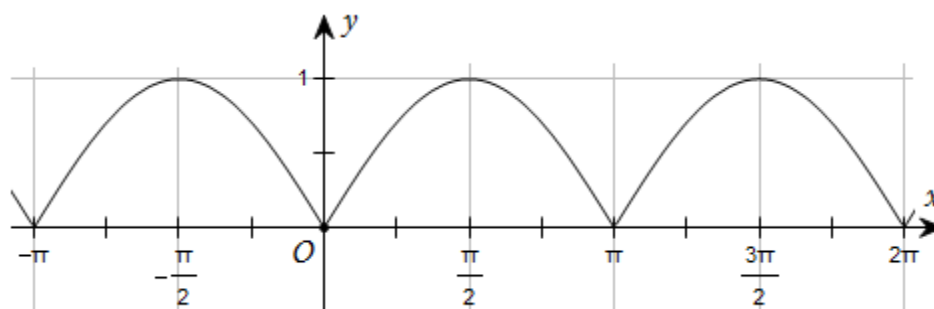
- A. $y = \cos x$. B. $y = -\cos x$ C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=-1$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 82: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B,C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = \sin|x|$. C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

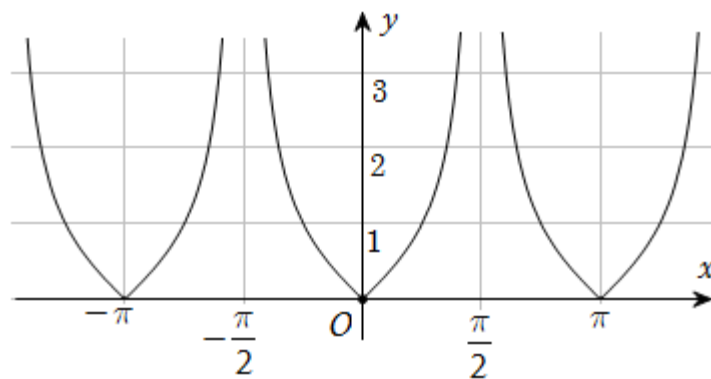
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó chỉ có A hoặc D thỏa mãn.

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=0$. Thay vào hai đáp án A và D chỉ có duy nhất A thỏa mãn.

Câu 83: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \tan x$. B. $y = \cot x$. C. $y = |\tan x|$. D. $y = |\cot x|$.

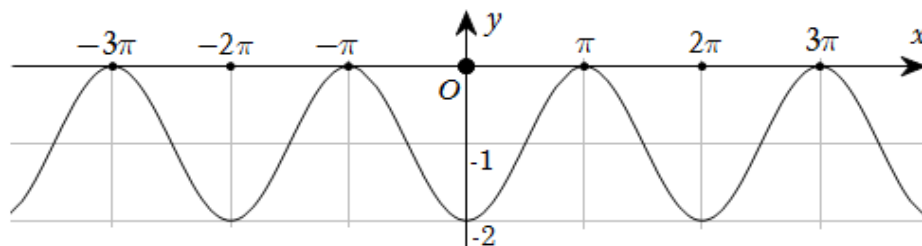
Lời giải

Chọn C

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó ta loại đáp án A và B

Hàm số xác định tại $x = \pi$ và tại $x = \pi$ thì $y = 0$. Do đó chỉ có C thỏa mãn.

Câu 84: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. B. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Lời giải

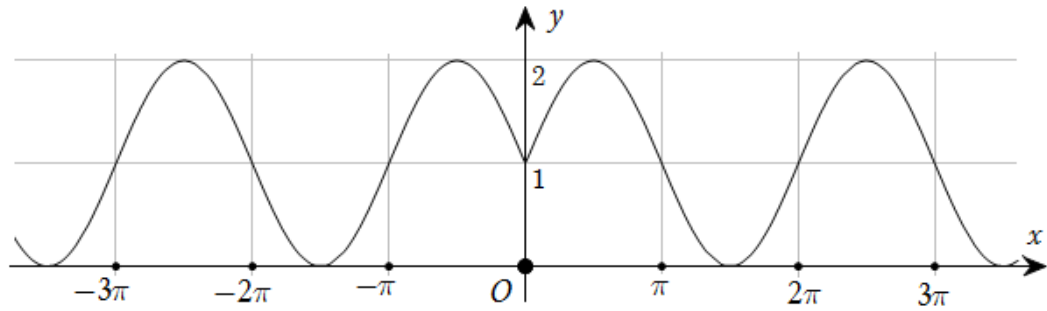
Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 0, GTNN bằng -2. Do đó ta loại đáp án B vì

$$y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \in [-2; 2].$$

Tại $x = 0$ thì $y = -2$. Thử vào các đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 85: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

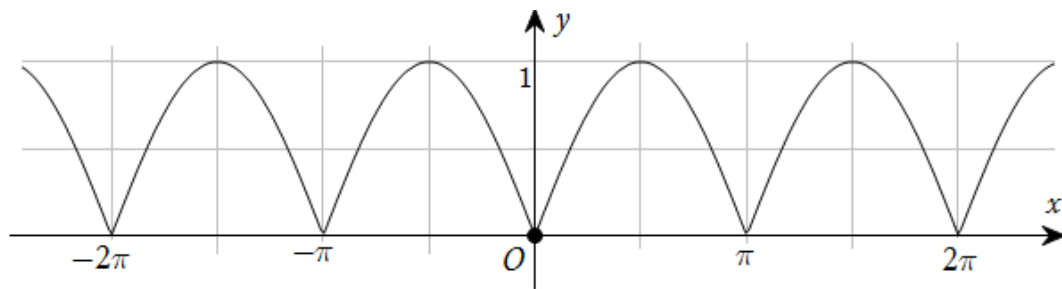
Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại C và D

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 86: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại C và D

Ta thấy tại $x = \pi$ thì $y = 0$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có B thỏa.

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

- Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình $f(x)=0$ tương đương với phương trình $g(x)=0$ thì ta viết $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$

Chú ý. Để giải phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy gọi là các phép biến đổi tương đương.

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho:

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc một biểu thức:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x).$$

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x), (h(x) \neq 0)$

2. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

- Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 1$.
- Khi $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin \alpha = m$. Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

a) Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

3. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

- Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 1$.

- Khi $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in [0; \pi]$ thỏa mãn $\cos \alpha = m$. Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý

a) Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

- Phương trình $\tan x = m$ có nghiệm với mọi m .

- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan \alpha = m$.

Khi đó $\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý. Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

5. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

- Phương trình $\cot x = m$ có nghiệm với mọi m .

- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in (0; \pi)$ thỏa mãn $\cot \alpha = m$.

Khi đó $\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý. Nếu số đo góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

6. SỬ DỤNG MTCT

Giáo viên hướng dẫn trực tiếp ở lớp

B. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình

$$a) \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0; \quad b) \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1; \quad c) \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1;$$

$$d) \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad e) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad f) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1;$$

Lời giải

$$a) \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} - x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-4\pi}{5} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$a) \sin 3x = \frac{1}{2} \quad (1); \quad b) \cos 2x = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$c) \tan \frac{x}{3} = 2 \quad (3); \quad d) \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \quad (4)$$

Giải

a) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là: $x = \pm \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $(3) \Leftrightarrow x = 3\alpha + k3\pi, k \in \mathbb{Z}, (\tan \alpha = 2)$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = x = 3\alpha + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Ta có:

$$(4) \Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời bình: Những phương trình ch trên là những phương trình lượng giác cơ bản. Sử dụng MTCT ta có thể tìm được các giá trị đặc biệt của hàm số lượng giác

- Ở câu a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Dùng MTCT (ở chế độ rad) ta ấn **SHIF** **sin** **1** **÷** **2** **=** ta được kết quả

là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\sin 3x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

- Hoàn toàn tương tự cho câu b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Ta ấn:

SHIF **cos** **-** **1** **÷** **2** **=** ta được kết quả là $\frac{2\pi}{3}$. Do đó: $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$

- Trên MTCT không có hàm cot, tuy nhiên ta thừa biết $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$. Do đó, đối với câu d)

$\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ ta ấn máy như sau:

SHIT **tan** **1** **÷** **√3** **=** ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6}$

Ví dụ 3. Giải phương trình

a) $\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $\cot g\left(x + 30^0\right) = \cot g \frac{x}{2}.$

c) $\cos^2 x = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$; d) $\sin 2x = \cos 3x.$

Giải

a) Ta có:

$$\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}$

$$b) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x + 30^\circ \neq k.180^\circ \\ \frac{x}{2} \neq n.180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -30^\circ \\ x \neq n.360^\circ \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \cot g\left(x + 30^\circ\right) &= \cot g \frac{x}{2} \Leftrightarrow x + 30^\circ = \frac{x}{2} + k.180^\circ \Leftrightarrow 2x + 60^\circ = x + k.360^\circ \\ &\Leftrightarrow x = -60^\circ + k.360^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -60^\circ + k.360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

c) Ta có

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x) = \sqrt{3} + 2 \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét: Phương trình $\sin 2x = \cos 3x$ được chuyển thành $\cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, ta cũng có thể chuyển thành dạng sau: $\sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

$$\text{Ta có: } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{2}$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7}$; b) $\cot 3x = -2$; c) $\cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cot 3x = -2 = \cot \alpha \Leftrightarrow 3x = \alpha + k\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3}\alpha + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Vì $\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$ nên $\cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot(2x - 10^\circ) = \cot 60^\circ$

$\Leftrightarrow 2x - 10^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow 2x = 70^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ghi nhớ

Mỗi phương trình

$\sin x = a (|a| \leq 1); \cos x = a (|a| \leq 1); \tan x = a; \cot x = a$ có vô số nghiệm.

Giải các phương trình trên làm tìm tất cả các nghiệm của chúng.

Ví dụ 6. Giải phương trình

a) $\sin 2x - \sin 2x \cos x = 0$ (1); b) $\sin x \cos 2x = \sin 2x \cos 3x$ (2).

Giải

a) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin 2x(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý: Một số học sinh mắc sai lầm nghiệm trọng (lỗi rất cơ bản) là rút gọn phương trình ban đầu cho $\sin 2x$, dẫn đến thiếu nghiệm

b) **Định hướng:** Cả hai vế phương trình đều cho dưới dạng tích của hai hàm lượng giác. Thông thường ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Ta nhắc lại: $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x + k2\pi \\ 5x = \pi - 3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi; x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1.20. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};$

b) $2\cos x = -\sqrt{2};$

c) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1;$

d) $\cot(2x - 1) = \cot \frac{\pi}{5}.$

Lời giải

$$\text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{b) } 2\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{c) } \sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{d) } \cot(2x - 1) = \cot \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 1.21. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$; b) $\cos 3x = -\cos 7x$.

Lời giải

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\sin 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \\ 4x = -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{b) } \cos 3x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi + 7x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi + 7x + k2\pi \\ 3x = -(\pi + 7x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 1.22. Một quả đạn pháo được bắn khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500 \text{ m/s}$ hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha, \text{ ở đó } g = 9,8 \text{ m/s}^2 \text{ là gia tốc trọng trường.}$$

- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.
- Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

Vì $v_0 = 500 \text{ m/s}, g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2 \cdot 500^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \text{ hay } y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

a) Quả đạn chạm đất khi $y = 0$, khi đó $\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{49} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} \end{cases}$$

Loại $x = 0$ (đạn pháo chưa được bắn).

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49}$ (m).

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m thì $x = 22000$ m.

Khi đó $\frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625}$

Gọi $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là góc thỏa mãn $\sin \beta = \frac{539}{625}$. Khi đó ta có: $\sin 2\alpha = \sin \beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta + k2\pi \\ 2\alpha = \pi - \beta + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} + k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Hàm số $y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa độ đỉnh $I(x_I; y_I)$ là

$$\begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = -\frac{\tan \alpha}{2 \cdot \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha}} = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = f(x_I) = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \right)^2 + \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \tan \alpha \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} x_I = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49} \end{cases}$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là $y_{\max} = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49}$.

Bài 1.23. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hòa là vị trí vật đứng yên, khi đó $x = 0$, ta có

$$2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \leq t \leq 6$ hay $0 \leq \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \leq 6$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{90 - 2\pi}{3\pi}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2: Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải

Chọn B

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 4: Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là:

- A. $x = k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 5: Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là:

- A. $x = \pi + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = \pi + k2\pi$. D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 6: Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 8: Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{3} + 3 \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $\cot x + \sqrt{3} = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\cot x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\sin x = -\frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn B

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = \sin x$ là

- A. $S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ k2\pi; \pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 12: Nghiệm của phương trình $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{24} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi; x = \frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 13: Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn A

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 14: Giải phương trình $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 15: Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

B. $\left\{x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

D. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 16: Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có một nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{6}.$ B. $x = \frac{2\pi}{3}.$ C. $x = \frac{\pi}{3}.$ D. $x = \frac{5\pi}{6}.$

Lời giải

Chọn C

Phương trình $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 17: Biểu diễn họ nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ trên đường tròn đơn vị ta được bao nhiêu điểm?

- A. 1. B. 8. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Do đó khi biểu diễn họ nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ trên đường tròn đơn vị ta được 2 điểm.

Câu 18: Phương trình $\sin x = \sin \alpha$ có nghiệm là

- A. $x = \alpha + k\pi, x = \pi - \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$ B. $x = \alpha + k2\pi, x = -\alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
C. $x = \alpha + k2\pi, x = \pi - \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = \alpha + k\pi, x = -\alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn C

Câu 19: Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$ B. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$
C. $\left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$ D. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Chọn C

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 20: Tập nghiệm của phương trình $2\sin 2x + 1 = 0$ là

- A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2\sin 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 21: Nghiệm của phương trình $\cos^2 x = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 22: Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm là:

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 1$. D. $-2 \leq m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vậy để phương trình bài ra có nghiệm thì $-2 \leq m \leq 0$.

Câu 23: Phương trình lượng giác $3\cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. D. Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 3 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 24: Phương trình lượng giác $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2 \cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 25: Phương trình lượng giác $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sqrt{3} \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 26: Phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm khi m là:

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. B. $m > 1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$. Để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Vậy $m < -1$ và $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là.

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ D. $x = \frac{k\pi}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 28: Giá trị đặc biệt nào sau đây là đúng

A. $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

B. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

C. $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

D. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn B

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Câu 29: Phương trình lượng giác: $\cos 3x = \cos 12^\circ$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$. C. $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$. D. $x = \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\cos 3x = \cos 12^\circ \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{15} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}.$$

Câu 30: Giải phương trình lượng giác: $2\cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k4\pi$. D. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} 2\cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi &\Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi. \end{aligned}$$

Câu 31: Nghiệm đặc biệt nào sau đây là sai

A. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

B. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

C. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$.

D. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Câu 32: Phương trình lượng giác: $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Câu 33: Trong các phương trình sau phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x = 2018$ B. $\sin x = \pi$ C. $\cos x = \frac{2017}{2018}$ D. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B

* $\tan x = 2018 \Leftrightarrow x = \arctan 2018 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

* $\sin x = \pi$.

* $\cos x = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2017}{2018} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

* $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 34: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin 30^\circ$ là

A. $S = \{30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 B. $S = \{\pm 30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $S = \{\pm 30^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $S = \{30^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 30^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 150^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 35: Phương trình $\cos x = 1$ có nghiệm là

A. $x = k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

A. $m \leq 1$. B. $m \geq -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in [-1; 1]$.

D. $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

☐ Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.

☐ Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 38: Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

A. $-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 39: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng:

A. 0.

B. π .

C. 2π .

D. 3π .

Lời giải

Chọn B

Ta có $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \sin x \in [-1; 1]$

Khi đó: $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ với $-1 \leq k2\pi \leq 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Phương trình trở thành $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \ (m \in \mathbb{Z})$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng π .

GIẢI BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 1 SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1.24: Biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\frac{5\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{25\pi}{3}, \delta = \frac{17\pi}{6}$ trên đường tròn lượng giác. Các góc nào có điểm biểu diễn trùng nhau?

- A. β và γ B. α, β, γ . C. β, γ, δ . D. α và β .

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\frac{5\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{25\pi}{3}, \delta = \frac{17\pi}{6}$ trên cùng một đường tròn lượng giác, nhận thấy hai góc β và γ có điểm biểu diễn trùng nhau.

$$+ \text{Cách 2: Ta có: } \gamma = \frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 4.2\pi + \frac{\pi}{3} = \beta + 4.2\pi.$$

Do đó, hai góc β và γ có điểm biểu diễn trùng nhau.

Câu 1.25: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

- A. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. B. $\cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha$.
C. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$. D. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\pi - \alpha$ và α là hai góc bù nhau nên $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. Do đó đáp án A đúng và đáp án B sai.

Ta có góc $\pi + \alpha$ và α là hai góc hơn kém nhau 1π nên $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. Do đó đáp án C và D đều đúng.

Câu 1.26: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

- A. $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. B. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
C. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có các công thức cộng:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Vậy đáp án A sai

Câu 1.27: Rút gọn biểu thức $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$, ta được

A. $M = \sin 4a$. B. $M = 1 - 2\cos^2 a$. C. $M = 1 - 2\sin^2 a$. D. $M = \cos 4a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$

$$= \cos[(a+b)+(a-b)] \quad (\text{áp dụng công thức cộng})$$

$$= \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad (\text{áp dụng công thức nhân đôi})$$

Câu 1.28: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. B. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

C. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. D. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π .

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cos x$:

☐ Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1; 1]$;

☐ Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Câu 1.29: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm tuần hoàn?

A. $y = \tan x + x$. B. $y = x^2 + 1$. C. $y = \cot x$. D. $y = \frac{\sin x}{x}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 1.30: Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1$ do $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ta có: } -2\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{4} \leq k\pi \leq \frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow -2,25 \leq k \leq 2,25$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại 5 điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 1.31: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn B

Biểu thức $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$ có nghĩa khi $\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. TỰ LUẬN

Bài 1.32. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.
c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$; d) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0$. Mặt khác từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ suy ra

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\alpha \cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\alpha \cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha \sin\frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3 - \sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\alpha \cos\frac{\pi}{3} - \cos\alpha \sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + 3}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\alpha \cos\frac{\pi}{6} + \sin\alpha \sin\frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

Bài 1.33. Cho góc bất kì α . Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$.
b) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$.

Lời giải

a) Áp dụng hệ thức lượng giác cơ bản: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

và công thức nhân đôi: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$.

Ta có: $VT = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha = VP$ (đpcm).

b) Áp dụng hệ thức lượng giác cơ bản: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

và công thức nhân đôi: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Ta có: $VT = \cos^4 a - \sin^4 a = (\cos^2 a)^2 - (\sin^2 a)^2$
 $= (\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a) = 1 \cdot \cos 2a = \cos 2a = VP(\text{đpcm}).$

Bài 1.34. Tìm tập giá trị của các hàm sau:

a) $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$ b) $y = \sin x + \cos x.$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow -2 - 1 \leq 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ là $[-3; 1].$

b) Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4}\sin x + \sin \frac{\pi}{4}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Khi đó ta có hàm số $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

Lại có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \sin x + \cos x$ là $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$

Bài 1.35. Giải các phương trình sau:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

b) $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$

c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

Lời giải

$$\text{a) } \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow -(1 - 2\sin^2 x) + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow -\cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x + k2\pi \\ 3x = -2x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ 5x = k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{5} = x - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{30} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -\frac{11\pi}{30} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 1.36. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết

áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg. (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

- Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.
- Tìm số nhịp tim mỗi phút.
- Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Lời giải

a) Chu kì của hàm số $p(t)$ là $T = \frac{2\pi}{160\pi} = \frac{1}{80}$.

b) Thời gian giữa hai lần tim đập là $T = \frac{1}{80}$ (phút)

Số nhịp tim mỗi phút là $1 : \frac{1}{80} = 80$ nhịp.

c) Ta có: $-1 \leq \sin(160\pi t) \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -25 \leq 25\sin(160\pi t) \leq 25$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

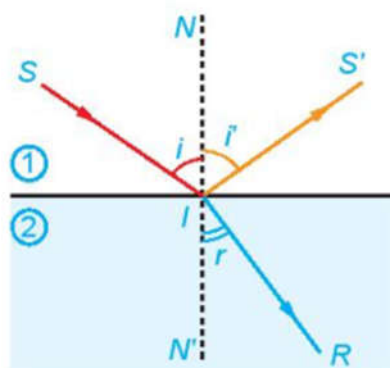
$\Leftrightarrow 115 + (-25) \leq 115 + 25\sin(160\pi t) \leq 115 + 25$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 90 \leq p(t) \leq 140$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

Do đó, chỉ số huyết áp của người này là 140/90 và chỉ số huyết áp của người này cao hơn mức bình thường.

Bài 1.37. Khi một tia sáng truyền từ ông khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình 1.26. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r

bởi Định luật khúc xạ ánh s $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.



Hình 1.26

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước).

Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $i = 50^\circ, n_1 = 1, n_2 = 1,33$, thay vào $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$$\frac{\sin 50^\circ}{\sin r} = \frac{1,33}{1} \quad (\text{đk } \sin r \neq 0)$$

$$\Rightarrow \sin r = \frac{\sin 50^\circ}{1,33}$$

$$\Leftrightarrow \sin r \approx 0,57597 \quad (\text{thỏa mãn đk})$$

$$\Leftrightarrow \sin r \approx \sin(35^\circ 10')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \\ r \approx 180^\circ - 35^\circ 10' + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $0^\circ < r < 90^\circ$ nên $r \approx 35^\circ 10'$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \\ r \approx 144^\circ 50' + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy góc khúc xạ $r \approx 35^\circ 10'$.

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 1

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cung có số đo 250° thì có số đo theo đơn vị là radian là

- A. $\frac{25\pi}{12}$. B. $\frac{25\pi}{18}$. C. $\frac{25\pi}{9}$. D. $\frac{35\pi}{18}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 250^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 250 = \frac{25\pi}{18}.$$

Câu 2: Nếu một cung tròn có số đo bằng radian là $\frac{5\pi}{4}$ thì số đo bằng độ của cung tròn đó là

- A. 172° . B. 15° . C. 225° . D. 5° .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot a = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4} = 225^\circ.$$

Câu 3: Một cung tròn có độ dài bằng bán kính. Khi đó số đo bằng radian của cung tròn đó là

- A. 1. B. π . C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa 1 radian là số đo của cung có độ dài bằng bán kính.

Câu 4: Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{16}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

$$\text{Vậy } \alpha = \frac{\pi}{8}; R = 4 \text{ thì } l = R\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 5: Trên đường tròn bán kính $R = 6$, cung 60° có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $l = \frac{\pi}{2}$. B. $l = 4\pi$. C. $l = 2\pi$. D. $l = \pi$.

Lời giải

Chọn C

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Ta có: cung có số đo α rad của đường tròn có bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

Do đó cung 60° có độ dài bằng $l = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Câu 6: Trên đường tròn lượng giác, điểm M thỏa mãn $(Ox, OM) = 500^\circ$ thì nằm ở góc phần tư thứ

- A. I. B. II. C. III. D. IV.

Lời giải

Chọn B

Điểm M thỏa mãn $(Ox, OM) = 500^\circ$ thì nằm ở góc phần tư thứ II vì $500^\circ - 360^\circ = 140^\circ \in (90^\circ; 180^\circ)$.

Câu 7: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được một góc bao nhiêu độ?

- A. 144° . B. 288° . C. 36° . D. 72° .

Lời giải

Chọn A

Ta có: trong 5 giây quay được $2 \times 360^\circ = 720^\circ$.

Vậy trong 1 giây quay được: $\frac{720^\circ}{5} = 144^\circ$.

Câu 8: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\tan \alpha < 0$. B. $\cot \alpha > 0$. C. $\sin \alpha > 0$. D. $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn A

Với $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ ta có $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha > 0$, $\cot \alpha > 0$.

Câu 9: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- A. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = 2$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2$.

Câu 10: Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây?

- A. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. B. $\cos 45^\circ \leq \sin 45^\circ$. C. $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$. D. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Khi $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ hàm $\cos \alpha$ là hàm giảm nên $\cos 35^\circ < \cos 10^\circ$ suy ra D sai.

Câu 11: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\cos a$.

- A. $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\cos a = \frac{8}{9}$. D. $\cos a = -\frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = -\frac{5}{4}$. B. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\cos \alpha = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$.

+ Mặt khác $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$.

+ Vậy $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Câu 13: Với mọi góc a và số nguyên k , chọn đẳng thức **sai**?

- A. $\sin(a + k2\pi) = \sin a$. B. $\cos(a + k\pi) = \cos a$.
C. $\tan(a + k\pi) = \tan a$. D. $\cot(a - k\pi) = \cot a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 14: Chọn khẳng định đúng?

- A. $\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$. B. $\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$. D. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

Lời giải

Chọn D

$\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$ sai vì $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ sai vì $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;
 $\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$ sai vì $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.

Câu 15: Biểu thức $A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ có giá trị bằng

- A. $A = 9$. B. $A = 3$. C. $A = 12$. D. $A = 6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \Rightarrow \cos^2(90^\circ + \alpha) = \sin^2 \alpha$.

Suy ra $A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ = (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + \dots + (\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ)$

$$\Leftrightarrow A = 1 + \dots + 1 = 9.$$

Câu 16: Trong tam giác ABC , đẳng thức nào dưới đây luôn đúng?

A. $\sin(A+B) = \cos C$.

B. $\cos A = \sin B$.

C. $\tan A = \cot\left(B + \frac{\pi}{2}\right)$.

D. $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos \frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin \frac{C}{2}$.

Câu 17: Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác. Đặt $M = \cos(2A+B+C)$ thì:

A. $M = -\cos A$.

B. $M = \cos A$.

C. $M = \sin A$.

D. $M = -\sin A$.

Lời giải

Chọn A

Ta có A, B, C là 3 góc của một tam giác $\Rightarrow A+B+C = 180^\circ \Rightarrow 2A+B+C = 180^\circ + A$.

Từ đó ta có $M = \cos(2A+B+C) \Leftrightarrow M = \cos(A+180^\circ) \Leftrightarrow M = -\cos A$.

Vậy $M = -\cos A$.

Câu 18: Biểu thức $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ được viết lại

A. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a + \frac{1}{2}$.

B. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a$.

C. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a$.

D. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos a \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a$.

Câu 19: Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\cos 2a = 2 \cos a - 1$.

B. $2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$.

C. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

D. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ nên A sai.

Và: $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \Leftrightarrow 2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$ nên B đúng.

Các đáp án C và D hiển nhiên đúng.

Câu 20: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\cos 2\alpha$ bằng

- A. $-\frac{1}{8}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}.$$

Câu 21: Biểu thức $\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$ bằng

- A. $\tan 10^\circ + \tan 20^\circ$. B. $\tan 30^\circ$. C. $\cot 10^\circ + \cot 20^\circ$. D. $\tan 15^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{2\sin 15^\circ \cos 5^\circ}{2\cos 15^\circ \cos 5^\circ} = \tan 15^\circ.$$

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định khi $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 23: Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ là

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Câu 24: Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. B. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn A

Ta có các kết quả sau:

- + Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- + Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
- + Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- + Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 25: Phương trình lượng giác $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

B. $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 26: Phương trình nào dưới đây vô nghiệm:

- A. $\sin x + 3 = 0$.
- B. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
- C. $\tan x + 3 = 0$.
- D. $3 \sin x - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên đáp án A là đáp án cần tìm vì $\sin x = -3$.

Câu 27: Cho hai phương trình $\cos 3x - 1 = 0$; $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác ta có tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 28: Tìm số đo ba góc của một tam giác cân biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

- A. $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.
 B. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}; \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.
 C. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}; \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
 D. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Do số đo một góc là nghiệm nên $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3}$ thỏa mãn.

Vậy tam giác có số đo ba góc là: $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ hoặc $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

Câu 29: Phương trình $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 30: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 31: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 32: Rút gọn biểu thức $S = \sin\left(x + \frac{2017\pi}{2}\right) + 2\sin^2(x - \pi) + \cos(x + 2019\pi) + \cos 2x$

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \sin\left(x + \frac{2017\pi}{2}\right) + 2\sin^2(x - \pi) + \cos(x + 2019\pi) + \cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin^2 x - \cos x + \cos 2x \\ &= \cos x + 1 - \cos 2x - \cos x + \cos 2x = 1. \end{aligned}$$

Câu 33: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^7 x$

Lời giải

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$, ta có: $\sin^4 x + \cos^7 x \leq \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^7 x$ là 1.

Câu 34: Nếu α là góc nhọn và $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$ thì $\tan \alpha$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $0 < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ \Rightarrow 0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{x-1}{2x}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x > 0$

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$ vì $0 < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$

$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x+1}{2x}} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Câu 35: Chứng minh biểu thức $\sin^2 x \cdot \tan x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x$ không phụ thuộc vào x

Lời giải

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x &= (\sin^2 x - 1) \tan^2 x + 4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x \\ &= -\cos^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = -\sin^2 x + 4 \sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x) = 3. \end{aligned}$$

Câu 36: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi, \sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \beta > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}.$$

$$\text{Vậy } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}.$$

Câu 37: Với giá trị nào của n thì đẳng thức sau luôn đúng $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \cos \frac{x}{n},$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos \frac{x}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4}} = \cos \frac{x}{8}$$

$$\text{Vậy } n = 8.$$

Câu 38: Cho ΔABC có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn hệ thức $\frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c}.$

Hãy nhận dạng ΔABC .

Lời giải

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos B}{1-\cos B} &= \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2.2R\sin A+2R\sin C}{2.2R\sin A-2R\sin C} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2\sin A+\sin C}{2\sin A-\sin C} \\ \Leftrightarrow 2\sin A+2\sin A\cos B-\sin C-\sin C\cos B &= 2\sin A-2\sin A\cos B+\sin C-\sin C\cos B \\ \Leftrightarrow 4\sin A\cos B &= 2\sin C \\ \Leftrightarrow 4\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} &= 2\cdot\frac{c}{2R} \\ \Leftrightarrow a^2+c^2-b^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow a &= b.\end{aligned}$$

Vậy $\triangle ABC$ cân tại C .

Câu 39: Số nghiệm của phương trình $\sin(2x-40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned}\sin(2x-40^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x-40^\circ) = \sin 60^\circ \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x-40^\circ = 180^\circ - 60^\circ + k360^\circ \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 100^\circ + k360^\circ \\ 2x = 160^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k180^\circ \\ x = 80^\circ + k180^\circ \end{cases}\end{aligned}$$

□ Xét nghiệm $x = 50^\circ + k180^\circ$.

$$\text{Ta có : } -180^\circ \leq x \leq 180^\circ \Leftrightarrow -180^\circ \leq 50^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{23}{18} \leq k \leq \frac{13}{18}.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -130^\circ \\ k = 0 \Rightarrow x = 50^\circ \end{cases}.$$

□ Xét nghiệm $x = 80^\circ + k180^\circ$.

$$\text{Ta có : } -180^\circ \leq x \leq 180^\circ \Leftrightarrow -180^\circ \leq 80^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{9} \leq k \leq \frac{5}{9}.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -100^\circ \\ k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ \end{cases}.$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Cách 2 (CASIO).

$$\text{Ta có : } -180^\circ \leq x \leq 180^\circ \Leftrightarrow -360^\circ \leq x \leq 360^\circ.$$

Chuyển máy về chế độ *DEG*, dùng chức năng *TABLE* nhập hàm $f(X) = \sin(2X - 40) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ với các thiết lập $Start = -360$, $END = 360$, $STEP = 40$. Quan sát bảng giá trị của $f(X)$ ta suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

