PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM HỢP

VŨ HỒNG PHONG (*GV THPT Tiên Du số 1, Tiên Du, BắcNinh*)
TRẦN VĂN LÂM(*XómTiếnBộ,thônVânTrai,xãTânPhú,TháiNguyên*)

Khi gặp một phương trình (PT) có chứa các biểu thức dạng hàm hợp $f(f(\ldots(f(x))\ldots))$ ta cần lưu ý một số hướng sau để có thể giúp giải được PT.

Trước hết ta kí hiệu:

$$f_1(x)=f(x);\ f_n(x)=f(f_{n-1}(x))\ (n\ge 2).$$

I. Hướng 1. Rút gọn $f_n(x)$ bằng phương pháp quy nạp hoặc lượng giác hóa.

Thí dụ 1. *Cho* $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. *Biết phương trình* $f_n(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+6}}{10}$ *có nghiệm* $x=\sqrt{2}$. *Tìm n và các nghiệm còn lại.*

Lời giải. Ta có $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}+1}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{2x^2+1}+1}}=\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

Bằng quy nạp (dành cho bạn đọc chứng minh) ta được $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{nx^2+1}}$. PT đã cho trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+6}}{10}.$$

PT này có $x=\sqrt{2}$ là nghiệm phương trình nên

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{8}}{10}\Leftrightarrow\sqrt{2n+1}=5\Leftrightarrow n=12.$$

PT đã cho trở thành: $\dfrac{x}{\sqrt{12x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+6}}{10}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \dfrac{x^2}{12x^2+1}=\dfrac{x^2+6}{100}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 12x^4-27x^2+6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2=2\\ x^2=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ \text{hoặc}\ x=\frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm còn lại là $x=\dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 2. *Cho* $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. *Giải phương trình:*

$$\sum_{i=1}^{5}f_i(x)=0.\qquad(1)$$

Lời giải. Ta có $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$$f_2(x)=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}.$$

Bằng quy nạp ta được $f_n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$.

PT(1) trở thành:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{3x+1}+\frac{x}{4x+1}+\frac{x}{5x+1}=0.\ (2)$$

Ta có $x=0$ là nghiệm PT(2).

Xét $x\ne 0$ thì PT(2) tương đương với

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{2+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{3+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{4+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{5+\dfrac{1}{x}}=0.\qquad(3)$$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a-3$ thì PT(3) trở thành:

$$\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a}{a^2-4}+\frac{2a}{a^2-1}+\frac{1}{a}=0\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne 0;\pm 1;\pm 2\\ 5a^4-15a^2+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0; \pm 1; \pm 2 \\ a = \pm\sqrt{\dfrac{15 \pm \sqrt{145}}{10}} \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{15 \pm \sqrt{145}}{10}}.$$

Với a tìm được thì PT(1) có 5 nghiệm là:

$$0;\ \frac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{15 \pm \sqrt{145}}{10}} - 3}.$$

Thí dụ 3. *Cho* $f(x) = 2x^2 - 1$.

Tìm số nghiệm của phương trình:

$$f_5(x) = \frac{x - \sqrt{3 - 3x^2}}{2}. \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $3 - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Đặt $x = \cos t$ với $t \in [0; \pi]$. Suy ra

$$f_1(x) = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$$

$$f_2(x) = 2\cos^2 2t - 1 = \cos 2^2 t.$$

Bằng quy nạp ta được $f_5(x) = \cos 2^5 t$.

$$\text{VP(1)} = \frac{\cos t - \sqrt{3 - 3\cos^2 t}}{2} = \frac{\cos t - \sqrt{3\sin^2 t}}{2}$$

$$= \cos t.\cos\frac{\pi}{3} - \sin t.\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

PT(1) trở thành:

$$\cos 32t = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 32t = t + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 32t = -t - \dfrac{\pi}{3} + m2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 31t = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 33t = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{93} + \dfrac{2\pi}{31}k \\ t = -\dfrac{\pi}{99} + \dfrac{2\pi}{33}m \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{\pi}{93} + \dfrac{2\pi}{31}k$ và $t \in [0; \pi]$ suy ra $k \in \{0; 1; ...; 15\}$, tương ứng có 16 nghiệm của PT(1).

Với $t = -\dfrac{\pi}{99} + \dfrac{2\pi}{33}m$ và $t \in [0; \pi]$ suy ra $m \in \{1; 2; ...; 16\}$, tương ứng có 16 nghiệm của PT(1).Xét

$$\frac{\pi}{93} + \frac{2\pi}{31}k = -\frac{\pi}{99} + \frac{2\pi}{33}m \Leftrightarrow 3(31m - 33k) = 32. \quad (2)$$

Do VT(2)$\vdots$3 và VP(2)$\not\vdots$3 nên PT(2) không có nghiệm nguyên.Vậy PT(1) có đúng 32 nghiệm.

II. Hướng 2.

Sử dụng một số kết quả sau để giải phương trình.

***Kết quả* 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D và có tập giá trị là tập con của D.

a) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên miền D thì ta có: $f_n(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

b) Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên trên miền D thì ta có:

$$f_{2k}(x) = x \Leftrightarrow f_2(x) = x \text{ (với } n \in \mathbb{N}^*).$$

$$f_{2k+1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \text{ (với } n \in \mathbb{N}).$$

Chứng minh. a)

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ suy ra

$$f_1(x_0) = f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$$

$$\Rightarrow f_2(x_0) = x_0 \Rightarrow f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) = f(x_0) = x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0) = x_0$.

Suy ra x_0 là nghiệm PT: $f_n(x) = x$.

Vậy $f(x) = x \Rightarrow f_n(x) = x$.

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$ nên có $f_n(x_0) = x_0$. Giả sử $f(x_0) > x_0$ thì do hàm số $y = f(x)$ đồng biến nên

$$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0 \Rightarrow f_2(x_0) > x_0$$

$$\Rightarrow f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) > f(x_0) > x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0) > x_0$ mâu thuẫn với giả sử $f_n(x_0) = x_0$.

Tương tự nếu $f(x_0) < x_0$ ta có $f_n(x_0) < x_0$ mâu thuẫn với $f_n(x_0) = x_0$.

Do đó chỉ xảy ra $f(x_0) = x_0$. Suy ra x_0 là nghiệm của PT: $f(x) = x$. Vậy $f_n(x) = x \Rightarrow f(x) = x$.

b)• Ta chứng minh $y = f_2(x)$ là hàm số đồng biến .Thật vậy: Giả sử $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$\Rightarrow f_2(x_1) = f(f(x_1)) > f(f(x_2)) = f_2(x_2).$$

Áp dụng kết quả câu a với $h(x) = f_2(x)$ là hàm số đồng biến ta có

$$f_{2k}(x) = x \Leftrightarrow h_k(x) = x \Leftrightarrow h(x) = f_2(x) = x.$$

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$

suy ra

$$f_1(x_0)=f(x_0)=x_0\Rightarrow f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$$

$$\Rightarrow f_2(x_0)=x_0\Rightarrow f_3(x_0)=f(f_2(x_0))=f(x_0)=x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_{2k+1}(x_0)=x_0$.

Suy ra x_0 là nghiệm PT: $f_{2k+1}(x)=x$.

Vậy $f(x)=x\Rightarrow f_{2k+1}(x)=x$.

Ta chứng minh $f_{2k+1}(x)=x\Rightarrow f(x)=x$ như sau:

Xét $f_{2k+1}(x)=x$.

Đặt $y_1=f(x);\ y_2=f(y_1)$;...; $y_{2k}=f(y_{2k-1})$.

Ta có hệ hoán vị vòng quanh:

$$\begin{cases} y_1=f(x)\\ y_2=f(y_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{2k}=f(y_{2k-1})\\ x=f(y_{2k}) \end{cases}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử

$$x=\min\{y_1;y_2;\ldots;y_{2k};x\}.$$

Có $x\le y_1\Rightarrow f(x)\ge f(y_1)\Rightarrow y_1\ge y_2$.

Suyra $f(y_1)\le f(y_2)$ hay $y_2\le y_3,\ldots$.

Tiếptụcnhưvậy ta có: $y_{2k}\le x\Rightarrow f(y_{2k})\ge f(x)$ hay $x\ge y_1$.Suyra $x\ge y_1\ge x$ suyra $x=y_1$.

Quátrìnhtrên ta cònsuyra $x=y_1=y_2=\ldots=y_{2k}$.

Vậy $x=y_1=f(x)$.

Nhậnxét. PT: $f_n(x)=x$ còn cách giải là đưa về hệ hoán vị vòng quanh.Sau đâylà các thí dụ.

Thí dụ 1.*Cho phương trình:*

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3+m\right)^3+m\right)^3+m=x.\quad(1)$$

a)*Giải phương trình khi* $m=\frac{2}{3}$.

b)*Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.*

Lờigiải.a)Với $m=\frac{2}{3}$ PT(1) trởthành:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\right)^3+\frac{2}{3}=x.\quad(2)$$

Do $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$\text{PT(2)}\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}=x$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$.

Vậy PT(2) có 2 nghiệm $x=1;\ x=-2$.

b)Do hàm số $g(x)=\frac{1}{3}x^3+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có: $\text{PT(1)}\Leftrightarrow g_3(x)=x$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3+m=x\Leftrightarrow x-\frac{1}{3}x^3=m.$$

Xét $y=x-\frac{1}{3}x^3;\ y'=1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	0	$-$	
y'	$+\infty$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra PT(1) có đúng 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Vậy m cần tìm là $m\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Thí dụ 2.*Giải phương trình:*

$$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\ldots-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}}=x.\ (1)$$

(vế trái có 100 dấu căn).

Lờigiải. Do $\text{VT(1)}\ge0$ nên $x\ge0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;1]$. Do $f(x)=\sqrt{1-x}$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$ nên

$$(1)\Leftrightarrow f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f_2(x)=x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-\sqrt{1-x}}=x\Leftrightarrow1-\sqrt{1-x}=x^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=1-x^2\Leftrightarrow1-x=(1-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0\text{ hoặc }x=1\text{ hoặc }x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Do $x\in[0;1]$ nên PT đã cho có 3 nghiệm

$$x=0;\ x=1;\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

*Cách khác.*Ta thấy $h(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

$\text{PT}(1)\Leftrightarrow h_{50}(x)=x\Leftrightarrow h(x)=x.$

Thí dụ 3.*Giải phương trình:*

$$1+\frac{1}{\sqrt{4+\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{\sqrt{1+3x}}}}}}=x. \quad (1)$$

Lời giải.

Do $\text{VT}(1)>1$ nên $x>1$.

Ta chứng minh được $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

$$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{1+3x}}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+3x}}=x-1\Leftrightarrow \frac{1}{1+3x}=(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+3x)(x-1)^2-1=0\Leftrightarrow x(3x^2-5x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}.$$

Do $x>1$ nên PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}$.

Thí dụ 4.*Giải phương trình:*

$$x^2+x=\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt{1+2x}}}}. \quad (1)$$

Lời giải.

Do $\text{VP}\geq 0$ nên ta có ĐK:

$$\begin{cases} x^2+x\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\geq 0.$$

PT(1) trở thành:

$$x^2+x=\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4(x^2+x)}}}}.$$

Đặt $x^2+x=t\geq 0$ ta có:

$$\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4t}}}}=t. \quad (2)$$

Dễ thấy hàm số $f(t)=\sqrt[4]{1+4t}$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

$$(2)\Leftrightarrow f_4(t)=t\Leftrightarrow \sqrt[4]{1+4t}=t\Leftrightarrow t^4=4t+1$$

$$\Rightarrow (x^2+x)^4=4(x^2+x)+1\Leftrightarrow ((x^2+x)^2)^2=(2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)^2=2x+1 (\text{do } x\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1=2x+1+2x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+1)^2=2(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1=\sqrt{2}(x+1) \ (\text{do } x\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2+(1-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Vậy PT đã cho có đúng 1 nghiệm

$$x=\frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Thí dụ 5.*Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x=\log_2 y & (1) \\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x+y}=\frac{8x-y}{3} & (2) \end{cases}.$$

Lời giải.Từ PT(1) suy ra $y=2^x$ thay vào PT(2) được: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2^x+x}=\frac{8x-2^x}{3}\Leftrightarrow \frac{2^{\frac{2^x+x}{3}}+\frac{2^x+x}{3}}{3}=x.$ (1)

Do $f(x)=\frac{2^x+x}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow \frac{2^x+x}{3}=x\Leftrightarrow 2^x-2x=0.$$

Xét $h(x)=2^x-2x$;

$$h'(x)=2^x\ln 2-2=0\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right).$$

Do $h'(x)=0$ có đúng 1 nghiệm suy ra $h(x)$ có Không quá 2 khoảng đơn điệu. Vì vậy $h(x)$ có tối đa 2 nghiệm. Suy ra $x=1, x=2$ là tất cả các nghiệm của $h(x)$. Với $x=1$ thì $y=2$. Với $x=2$ thì $y=4$. Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm $(x;y)$ là $(1;2),(2;4)$.

Nhận xét:Đặc điểm dễ thấy ở phương trình có chứa hàm hợp là chúng xuất hiện dưới hình thức không được gọn gàng. Nếu bạn đọc không ngại các dạng phương trình,bpt,hệPT,bất có chứa nhiều căn,lũy thừa,mũ,lôgarit,…thì có thể tiếp tục đọc phần viết thêm dưới đây với lưu ý bài viết chỉ với mục đích giới thiệu các dạng toán liên quan đến hàm hợp dạng f(f(…(f(x))…)) ***, bài viết không là tài liệu ôn cho các kỳ thi.***

Phần viết thêm

Một số dạng toán có chứa hàm hợp f(f(…(f(x))…))

VŨ HỒNG PHONG (GV THPT Tiên Du số 1, BắcNinh)

Mở rộng 1. Xét hàm f(x) có chứa cả các khoảng đồng biến và nghịch biến ta có thể sử dụng kết quả 1 trong số khoảng đơn điệu thỏa mãn điều kiện kết quả 1 hoặc hàm f(x) phức tạp.

Loại 1: Hàm hợp chưa cho dưới dạng biểu thức.

Thí dụ 1. Cho $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-1.$

Giải phương trình: $f_{1982}(x)=x.$ (1)

Lờigiải.

Ta có bảng biến thiên hàm số f(x) như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	$-\frac{17}{16}$	↗	$+\infty$

Do $f(x)\ge -\frac{17}{16}$ với mọi $x\in R$ nên $x=f_{1982}(x)\ge -\frac{17}{16}.\forall x.$

•TH1:Xét $x\in[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$

Từ bảng biến thiên có f(x) nghịch biến trên nửa khoảng $[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ và có tập giá trị là $[-\frac{103}{256};-\frac{1}{4})\subset[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$.Áp dụng kết quả 1 trên khoảng xác định $[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ ta có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$(x^2+\frac{1}{2}x-1)^2+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}x-1\right)-1=x.(2)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x+1)(2x+1)(2x^2-x-2)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\frac{1}{2}\\x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

Do $x\in[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ nên (2) có 3 nghiệm là

$x=-1;x=-\frac{1}{2};x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}.$

• TH2:Xét $x\in[-\frac{1}{4};+\infty)$

Từ bảng biến thiên hàm số f(x) suy ra tập giá trị của hàm số f(x) khi này là $[-\frac{17}{16};+\infty).$

Xét những x thỏa mãn $f_1(x)\in[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ Khi này $f_2(x)\in[-\frac{103}{256};-\frac{1}{4})\subset[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$. Suy ra $f_3(x)\in[-\frac{103}{256};-\frac{1}{4})\subset[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$. Cứ suy luận như vậy ta có $f_{1982}(x)\in[-\frac{103}{256};-\frac{1}{4})\subset[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$, mà $x\in[-\frac{1}{4};+\infty)$ vì vậy với x đang xét không là nghiệm *phươngtrình*: $f_{1982}(x)=x.$ Tổng quát những x làm cho $f_k(x)\in[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ với $1\le k\le 1982$ đều không là nghiệm *phươngtrình*: $f_{1982}(x)=x.$ Ta loại bỏ những x này.

Vì vậy còn lại là những $x\in D$ thỏa mãn tính chất:

$f_k(x)\in[-\frac{1}{4};+\infty)$ với mọi số k nguyên và $1\le k\le 1982.$

Cách 1. chứng minh $f_n(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x.$

• Giảsử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x)=x$ suy ra

$f_1(x_0)=f(x_0)=x_0 \Rightarrow f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$

$\Rightarrow f_2(x_0)=x_0 \Rightarrow f_3(x_0)=f(f_2(x_0))=f(x_0)=x_0.$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0)=x_0$.

Suy ra x_0 là nghiệm PT: $f_n(x)=x.$

Vậy $f(x)=x \Rightarrow f_n(x)=x.$

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f_n(x)=x$ nên có $f_n(x_0)=x_0$. Giả sử $f(x_0)>x_0$ thì do hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-\frac{1}{4};+\infty)$ nên

$f(f(x_0))>f(x_0)>x_0 \Rightarrow f_2(x_0)>x_0$

$\Rightarrow f_3(x_0)=f(f_2(x_0))>f(x_0)>x_0.$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0)>x_0$ mâu thuẫn với giả sử $f_n(x_0)=x_0$.

Tương tự nếu $f(x_0)<x_0$ ta có $f_n(x_0)<x_0$ mâu thuẫn với $f_n(x_0)=x_0$.

Do đó chỉ xảy ra $f(x_0)=x_0$. Suy ra x_0 là nghiệm của PT: $f(x)=x$. Vậy $f_n(x)=x \Rightarrow f(x)=x.$

Nhận xét: Kết quả 1 mở rộng:

Nếu f(x) đồng biến trên miền D là tập con thực sự của $[-\frac{1}{4};+\infty)$ và f(x) là tập con $[-\frac{1}{4};+\infty)$ thì $f_n(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x.$

chứng minh tương tự việc chứng minh kết quả 1.

Do đó

$f_{1982}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x.$

$(1) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x-1=x$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{2}x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

Do $x \in D$ ta thấy $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ là nghiệm của PT(1).

Cách 2. Với $x \in D$ ta đặt ẩn phụ đưa về hệ hoán vị vòng quanh với nhận xét $-\frac{1}{4} \notin D$.. Cách này trình bày lời giải xin dành cho bạn đọc.

Cách 3. Dùng kết quả 2 (ở phần sau).

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm là

$x=-1; x=-\frac{1}{2}; x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}; x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}.$

Xin giới thiệu hướng tạo ta PT thí này như sau:

Trước hết ta chọn hàm f(x) chẳng hạn $f(x)=x^2-2ax-1.$ (ta chọn số -1 để tăng khả năng PT có nhiều nghiệm) đồ thị là Parabol tọa độ đỉnh $I(a;-a^2-1)$. Để xử li khi xét khoảng nghịch biến của f(x) chứa tập giá trị của f(x) khi này ta cho $f(-a^2-1) \le a$

$\Leftrightarrow (-a^2-1)^2-2a(-a^2-1)-1 \le a$

$\Leftrightarrow a(a+1)(a^2+a+1) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le a \le 1$

Đến đây ta chọn a thật khéo thì sẽ được PT có nhiều nghiệm chẳng hạn chọn $a=-\frac{1}{4}$.

Hoặc ta có thể chọn dạng $f(x)=x^2-2ax-b.$ ta cho $f(-a^2-b) \le a$

$\Leftrightarrow (-a^2-b)^2-2a(-a^2-b)-b \le a$

$\Leftrightarrow (a^2+b)^2+2a(a^2+b)-b \le a$

Đến đây ta chỉ cần lựa chọn bộ số (a;b) thỏa mãn bất PT trên.

Thí dụ 2. Cho $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

a) Giải phương trình: $f_{100}(x)=x$.

b) Giải phương trình: $f_{100}(x)=2x$.

c) Giải phương trình: $f_{100}(x)=2$.

d) Tìm các tiệm cận ngang của hàm số $y=f_{100}(x)$.

Lời giải.

a) Cách 1. Ta có: $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)	-1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	1
		$-\infty$			

TH1: với $x\in(0;+\infty)$ thì tập giá trị hàm số khi này là $(1;+\infty)$.

Suy ra $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}+1}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Theo kết quả 1 thì

$$f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f_2(x)=x$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=x\Leftrightarrow\frac{2x^2+1}{x^2+1}=x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-x^2-1=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

TH2: với $x\in(-\infty;0)$ thì tập giá trị hàm số khi này là $(-\infty;-1)$.

Suy ra $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}+1}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=-\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Theo kết quả 1 thì

$$f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f_2(x)=x$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=x\Leftrightarrow\frac{2x^2+1}{x^2+1}=x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-x^2-1=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm là $x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Cách 2 . Bằng quy nạp ta có:

$$f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{nx^2+n-1}{(n-1)x^2+1}} & \text{với } x>0\\ -\sqrt{\dfrac{nx^2+n-1}{(n-1)x^2+1}} & \text{với } x<0\end{cases}$$

Suy ra

$$f_{100}(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{100x^2+99}{99x^2+1}} & \text{với x}>0\\ -\sqrt{\dfrac{100x^2+99}{100x^2+1}} & \text{với x}<0\end{cases}$$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

b) Giải bằng cách 2 ta có *phương trình*:

$f_{100}(x)=2x$ có 2 nghiệm là $x=\pm\sqrt{\dfrac{8+\sqrt{1153}}{66}}$.

c) Phương trình: $f_{100}(x)=2$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{100x^2+99}{99x^2+1}}=2\text{ và }x>0\leftrightarrow x=\frac{\sqrt{\frac{95}{74}}}{2}.$$

d) Có $\lim\limits_{x\to-\infty}f_{100}(x)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{100x^2+99}{99x^2+1}}\right)=-\frac{10}{3\sqrt{3}}.$$

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}f_{100}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{100x^2+99}{99x^2+1}}\right)=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}$.

Hàm số có 2 tiệm cận ngang $y=\pm\frac{10}{3\sqrt{3}}$

Thí dụ 3. Cho $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}$

Giải phương trình: $f_{88}(x)=x.$

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
f(x)	**−1**	↘	‖	↗	**1**
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

TH1: với $x\in(0;+\infty)$ thì tập giá trị hàm số khi này là $(1;+\infty)$.

Suy ra $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}+2}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}$

Theo kết quả 1 thì

$f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}=x\Leftrightarrow\dfrac{3x^2+2}{x^2+2}=x^2$

$\Leftrightarrow x^4-x^2-2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$

TH2: với $x\in(-\infty;0)$ thì tập giá trị hàm số khi này là $(-\infty;-1)$. $f_1(x)=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}$

Suy ra $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}+2}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=-\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}$

Theo kết quả 1 thì

$f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}=x\Leftrightarrow\dfrac{3x^2+2}{x^2+2}=x^2$

$\Leftrightarrow x^4-x^2-2=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}.$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm là $x=\pm\sqrt{2}$.

Thí dụ 4. Cho $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{x}$

Giải phương trình: $f_9(x)=x.$

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
f(x)	**0**	↘	‖	↗	**2**
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

Xét trên từng khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ thì f(x) đều thỏa mãn kết quả 1. Do vậy

$f_9(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{x}=x\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1+\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$.

Thí dụ 5. Cho $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2+\sqrt{x^2+1}}$

Giải phương trình: $f_{2020}(x)=x.$

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1+2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2}.\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)^2}>0;\forall x$

Suy ra hàm số đồng biến trên R.

$f_{2020}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2+\sqrt{x^2+1}}=x\Leftrightarrow(1-x)\sqrt{x^2+1}=x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x)>0 \\ (x-1)^2(x^2+1)=x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ (x^2+1-2x)(x^2+1)=x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ \left(x+\frac{1}{x}-2\right)(x+\frac{1}{x})=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Tương tự:

1.Cho $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2+\sqrt{x^2+1}}$

Giải phương trình: $f_{2020}(x)=x.$

Đs: $x=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$

2.Cho $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+1}}$

Giải phương trình: $f_{2020}(x)=x.$

Đs: $x=\frac{9+\sqrt{17}}{8}$

Tổng quát: $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{m+\sqrt{x^2+1}}$

Giải phương trình: $f_n(x)=x.$

Đưa về giải phương trình:

$$\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=(m-1)^2$$

Để có nghiệm không quá xấu khi này ta chọn m thỏa mãn: $1+(m-1)^2$ có dạng bình phương của số hữu tỉ chẳng hạn $m=\frac{1}{4};m=\frac{7}{4};m=\frac{7}{3};....$

Loại 2: Hàm hợp cho ở dạng biểu thức.

Chẳng hạn $f_1(x)=f(x)=\sqrt{3+x}$

$$f_2(x)=\sqrt{3+\sqrt{3+x}}$$

$$f_3(x)=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}$$

$$f_4(x)=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}}$$

Đến đây nếu muốn tạo PT(ít căn ta chọn $f_2(x)$ hoặc $f_3(x)$) nhiều căn ta có thể chọn $f_4(x)$ để được PT:

Thí dụ 6. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}}=x. \quad (1)$$

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$.

Dễ thấy $f(x)=\sqrt{3+x}$ đồng biến trên khoảng

$(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $(\sqrt{3};+\infty)$là tập con của $(0;+\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$$(1)\Leftrightarrow f_4(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+x}=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Để tạo ra PT khó hơn ta chọn $f(x)=\sqrt{3+2x}$

Ta được:

Thí dụ 7. *Giải phương trình*:

$\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2x}}}=x.$ (1)

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$.

Dễ thấy $f(x)=\sqrt{3+2x}$ đồng biến trên khoảng

$(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $(\sqrt{3};+\infty)$là tập con của $(0;+\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{3+2x}=x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x^2-2x-3=0$

$\Leftrightarrow x=3.$

Nếu chọn $f(x)=1+\sqrt{2+3x}$

Ta được:

Thí dụ 8. *Giải phương trình*:

$1+\sqrt{5+3.\sqrt{5+3.\sqrt{2+3x}}}=x.$ (1)

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$.

Dễ thấy $f(x)=1+\sqrt{2+3x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $(1+\sqrt{3};+\infty)$

là tập con của $(0;+\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{2+3x}=x\Leftrightarrow\sqrt{2+3x}=x-1$

$\Leftrightarrow 2+3x=x^2-2x+1\ với\ x\geq 1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}.$

Thí dụ 9. *Giải phương trình*:

$\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+x}}}}=x.$ (1)

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$.

Dễ thấy $f(x)=\sqrt{7+\sqrt{1+x}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $(2\sqrt{2};+\infty)$

là tập con của $(0;+\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{7+\sqrt{1+x}}=x\Leftrightarrow 7+\sqrt{1+x}=x^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+x}=x^2-7$

$\Leftrightarrow 1+x=x^4-14x^2+49\ với\ x\geq\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow(x-3)(x^3+3x^2-5x-16)=0$

$\Leftrightarrow x=3$

Vì $x\geq\sqrt{7}$ nên $x^3+3x^2-5x-16$

$=(x^3-5x)+(3x^2-16)>0$

Thí dụ 10. *Giải phương trình*:

$\sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2x}}}=x.$ (1)

Lời giải. Dễ thấy $f(x)=\sqrt[3]{1+2x}$ đồng biến trên R nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\sqrt[3]{1+2x}=x\Leftrightarrow x^3-2x-1=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(x^2-x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=-1Vx=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

Thí dụ 11. *Giải phương trình*:

$\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4x}}} = x.$ (1)

Lời giải.

Do $VT(1) > 0$ nên $x > 0$.

Dễ thấy $f(x) = \sqrt[4]{1+4x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $(1;+\infty)$

là tập con của $(0;+\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{1+4x} = x \Leftrightarrow 1+4x = x^4$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2(x^2+2x+1)$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^2 = \left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1 = \sqrt{2}x+\sqrt{2}\ do\ x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}.$

Thí dụ 12. *Giải phương trình*:

$\sqrt{2+\sqrt[3]{6+\sqrt{2+\sqrt[3]{6+x}}}} = x.$ (1)

Lời giải.

Do $VT(1) > 0$ nên $x > 0$.

Dễ thấy $f(x) = \sqrt{2+\sqrt[3]{6+x}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{6}};+\infty\right)$

là tập con của $(0;+\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+\sqrt[3]{6+x}} = x \Leftrightarrow 2+\sqrt[3]{6+x} = x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6+x} = x^2 - 2 \Leftrightarrow 6+x = (x^2-2)^3$

$\Leftrightarrow (x-2)[x(x^4-2x^2+4)+2x^4-4x^2+7] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2.$

Thí dụ 13. *Giải phương trình*:

$\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-..-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-x}}}}} = x.$

(*vế trái có 100 dấu căn*).

Lời giải.

Xét $f(x) = \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên R. PT đã cho trở thành

$f_{50}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-x}} = x$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt[3]{1-x} = x^3$ (*)

Đặt $y = \sqrt[3]{1-x}$ từ (*) ta có hệ PT

$\begin{cases} 1-y = x^3 \\ 1-x = y^3 \end{cases}$

Trừ vế với vế ta được:

$(x-y)(x^2+xy+y^2-1) = 0.$ (**)

Cộng vế với vế ta được:

$(x+y)^3 - 3xy(x+y) + (x+y) - 2 = 0$

Từ (**) có $x = y$ thay vào hệ PT ta được:

$1-x = x^3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt[3]{2(9+\sqrt{93})}+\sqrt[3]{2(9-\sqrt{93})}}{\sqrt[3]{36}}$

Từ (**) có $x^2+xy+y^2-1 = 0$ ta có hệ PT

$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy - 1 = 0 \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) + x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ này ta được nghiệm(x;y) là (0;1),(1;0).

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm:

$$x=0; x=1; x=\frac{\sqrt[3]{2(9+\sqrt{93})}+\sqrt[3]{2(9-\sqrt{93})}}{\sqrt[3]{36}}$$

Thí dụ 14. *Giải phương trình:*

$\sqrt{3-\sqrt{9-5\sqrt{3-\sqrt{9-5x}}}}=x$. (1)

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{9-5x}}$ có điều kiện:

$$\begin{cases}9-5x\geq 0\\ 3-\sqrt{9-5x}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{9}{5}$$

Suy ra hàm số $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{9-5x}}$ có TXĐ là $\left[0;\frac{9}{5}\right]$ và là hàm số đồng biến có tập giá trị là $[0;\sqrt{3}]$

là tập con của$\left[0;\frac{9}{5}\right]$. Áp dụng kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{3-\sqrt{9-5x}}=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{9-5x}=3-x^2\ với\ x\leq\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 9-5x=(3-x^2)^2\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-5)=0$

$...\Leftrightarrow x=0\ hoặc\ x=1.$

Chú ý: Việc chứng minh hàm số

$f(x)=\sqrt{3-\sqrt{9-5x}}$ đồng biến trên $\left[0;\frac{9}{5}\right]$ bằng định nghĩa hoặc đạo hàm

$$f'(x)=\frac{5}{4\sqrt{3-\sqrt{9-5x}}.\sqrt{9-5x}}>0;\forall x\in\left(0;\frac{9}{5}\right)$$

Vì vậy ở thí dụ khác việc chứng minh tính đồng biến,nghịch biến của các hàm số tác giả xin không trình bày trong lời giải.

Tương tự.

Giải phương trình:

$\sqrt{3-\sqrt{9-4\sqrt{3-\sqrt{9-4x}}}}=x$. (1)

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{9-4x}}$ có đk:

$$\begin{cases}9-4x\geq 0\\ 3-\sqrt{9-4x}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{9}{4}$$

Suy ra hàm số $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{9-4x}}$ có TXD là $\left[0;\frac{9}{4}\right]$ và là hàm số đồng biến có tập giá trị là $[0;\sqrt{3}]$

là tập con của $\left[0;\frac{9}{4}\right]$. Áp dụng kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{3-\sqrt{9-4x}}=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{9-4x}=3-x^2\ với\ x\leq\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 9-4x=(3-x^2)^2\Leftrightarrow x(x-2)(x^2+2x-2)=0$

$...\Leftrightarrow x=0\ hoặc\ x=-1+\sqrt{3}.$

Giải phương trình:

$\sqrt{4-\sqrt{16-7\sqrt{4-\sqrt{16-7x}}}}=x$.

$Đs: x=0\ ;x=1.$

Thí dụ 15. *Giải phương trình:*

$\sqrt{7-2.\sqrt{10-4.\sqrt{7-2.\sqrt{10-4x}}}}=x$. (1)

Lời giải.

Do VT(1) không âm nên $x\geq 0$

Hàm số $f(x)=\sqrt{7-2.\sqrt{10-4x}}$

có đk:

$$\begin{cases}10-4x\geq 0\\ 7-2\sqrt{10-4x}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{9}{16}\leq x\leq\frac{5}{2}$$

Suy ra hàm số $f(x)=\sqrt{7-2.\sqrt{10-4x}}$ xét trên đoạn $\left[0;\frac{5}{2}\right]$ và là hàm số đồng biến có tập giá trị là $\left[\sqrt{7-2\sqrt{10}};\sqrt{7}\right]$

Xét $\sqrt{7-2.\sqrt{10-4x}}\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow..\Leftrightarrow x\le\frac{631}{256}$.

$\sqrt{7-2.\sqrt{10-4x}}>\frac{5}{2}\Leftrightarrow..\Leftrightarrow x>\frac{631}{256}$.

PT đã cho có dạng:$f_2(x)=x$

Với $x>\frac{631}{256}$

thì do f(x) đồng biến nên

$f(x)>f\left(\frac{631}{256}\right)=\frac{5}{2}$

Khi này $f_2(x)$ không tồn tại.

+Với $0\le x\le\frac{631}{256}$ thì tập giá trị của f(x) là tập con của $\left[0;\frac{5}{2}\right]$

Áp dụng kết quả 1 mở rộng có

$f_n(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

Thật vậy

• Giảsử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x)=x$ suy ra

$f_1(x_0)=f(x_0)=x_0\Rightarrow f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$

$\Rightarrow f_2(x_0)=x_0\Rightarrow f_3(x_0)=f(f_2(x_0))=f(x_0)=x_0$.

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0)=x_0$.

Suy ra x_0 là nghiệm PT: $f_n(x)=x$.

Vậy $f(x)=x\Rightarrow f_n(x)=x$.

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f_n(x)=x$ nên có $f_n(x_0)=x_0$. Giả sử $f(x_0)>x_0$ thì do hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{5}{2}\right]$ nên

$f(f(x_0))>f(x_0)>x_0\Rightarrow f_2(x_0)>x_0$

$\Rightarrow f_3(x_0)=f(f_2(x_0))>f(x_0)>x_0$.

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0)>x_0$ mâu thuẫn với giả sử $f_n(x_0)=x_0$.

Do đó chỉ xảy ra $f(x_0)=x_0$. Suy ra x_0 là nghiệm của PT: $f(x)=x$. Vậy $f_n(x)=x\Rightarrow f(x)=x$.

$(1)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow\sqrt{7-2.\sqrt{10-4x}}=x$

$\Leftrightarrow 7-2.\sqrt{10-4x}=x^2$

$\Leftrightarrow 2.\sqrt{10-4x}=7-x^2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}7-x^2\ge 0\\4(10-4x)=(7-x^2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}7-x^2\ge 0\\(x^2-2x-9)(x^2-2x-9)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ....

PT đã cho có 2 nghiệm

$x=1+\sqrt{2};x=-1+\sqrt{10}$

Tương tự.

Giải phương trình:

$\sqrt{8-2.\sqrt{11-4.\sqrt{8-2.\sqrt{11-4x}}}}=x$.

ĐS: PT đã cho có 2 nghiệm

$x=1+\sqrt{3};x=-1+\sqrt{11}$

Thí dụ 16. Cho $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a)Giải phương trình: $f_9(x)=x$.

b)Giải phương trình:

$1+\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+x^2+1}}=x$

Lời giải.

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}>0$

Suy ra hàm số đồng biến trên R.

a) $f_9(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=x\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+1}=x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)>0 \\ (x-1)^2(x^2+1)=x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>1 \end{array}\right. \\ \left(x^2+1-2x\right)(x^2+1)=x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>1 \end{array}\right. \\ \left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

b) $1+\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+x^2+1}}=x$

(Chia Tử và mẫu cho $\sqrt{x^2+1}$)

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2+1}}=x$$

$$\Leftrightarrow f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=x \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+1}=x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)>0 \\ (x-1)^2(x^2+1)=x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>1 \end{array}\right. \\ \left(x^2+1-2x\right)(x^2+1)=x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>1 \end{array}\right. \\ \left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Câu b) có thể để ở dạng khó nhìn ra dạng hàm hợp là

Giải phương trình:

$$1+\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3x^2+2+2x\sqrt{x^2+1}}}=x.$$

Thí dụ 17. *Giải phương trình*:

$$1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-...-\sqrt{1-\sqrt{x}}}}}=x. \quad (1)$$

(vế trái có 100 dấu căn).

Lời giải. PT xác định trên đoạn $[0;1]$.

Do $f(x)=1-\sqrt{1-\sqrt{x}}$

đồng biến trên đoạn $[0;1]$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f_{50}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-\sqrt{x}}=x \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^2-2x+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1-\sqrt{5})\left(2\sqrt{x}+1+\sqrt{5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=1 \text{ hoặc } x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Thí dụ 18. *Giải phương trình:*

$$1+\sqrt{-1+4.\sqrt{-1+4.\sqrt{-5+4x}}}=x \ . \quad (1)$$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=1+\sqrt{-5+4x}$ có TXĐ là $\left[\frac{5}{4};+\infty\right)$ và là hàm số đồng biến có tập giá trị là $[1;+\infty)$.

Có $1+\sqrt{-5+4x}<\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \le x<\frac{81}{64}$

$$1+\sqrt{-5+4x} \ge \frac{5}{4} \Leftrightarrow x \ge \frac{81}{64}$$

PT(1) có ĐK là

$$-1+4.\sqrt{-1+4.\sqrt{-5+4x}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x \ge \frac{20769}{16384}>\frac{81}{64}$$

Suy ra với $x \geq \frac{20769}{16384}$ thì $f(x) = 1 + \sqrt{-5+4x}$ là hàm số đồng biến có tập giá trị là tập con của $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Áp dụng kết quả 1 mở rộng có

$(1) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

Thật vậy

• Giảsử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ suy ra

$$f_1(x_0) = f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$$
$$\Rightarrow f_2(x_0) = x_0 \Rightarrow f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) = f(x_0) = x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0) = x_0$.

Suy ra x_0 là nghiệm PT: $f_n(x) = x$.

Vậy $f(x) = x \Rightarrow f_n(x) = x$.

• Giả sử $x_0 \geq \frac{20769}{16384}$ là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$

nên có $f_n(x_0) = x_0$. Giả sử $f(x_0) > x_0 > \frac{5}{4}$ thì do hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$ nên

$$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0 \Rightarrow f_2(x_0) > x_0$$
$$\Rightarrow f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) > f(x_0) > x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0) > x_0$ mâu thuẫn với giả sử $f_n(x_0) = x_0$.

Tương tự nếu $\frac{5}{4} < f(x_0) < x_0$ ta có $f_n(x_0) < x_0$ mâu thuẫn với $f_n(x_0) = x_0$.

Do đó chỉ xảy ra $f(x_0) = x_0$. Suy ra x_0 là nghiệm của PT: $f(x) = x$. Vậy $f_n(x) = x \Rightarrow f(x) = x$.

Như vậy

$(1) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{-5+4x} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{-5+4x} = x - 1$

$\Leftrightarrow -5 + 4x = (x-1)^2 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$.

Thí dụ 19. *Giải phương trình*:

$$\frac{x^5+12}{14x^2+78} + \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^5+12}{14x^2+78}\right)^5+12}{7\left(\frac{x}{2}+\frac{x^5+12}{14x^2+78}\right)^2+39} = \frac{3x}{2} \quad (1)$$

Lời giải.

PT(1) tương đương

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^5+12}{14x^2+78}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^5+12}{14x^2+78}\right)^5+12}{14\left(\frac{x}{2}+\frac{x^5+12}{14x^2+78}\right)^2+78} = x \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^5+12}{14x^2+78}$ có

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x(7x^5+65x^3-56)}{2(7x^2+39)^2}$$
$$= \frac{21x^6+244x^4+(546x^2-168x+1521)}{2(7x^2+39)^2} > 0$$

$(546x^2 - 168x + 1521 > 0$ *do có* $\Delta < 0)$

Suy ra f(x) đồng biến trên R. Theo kết quả 1 có:

$(2) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x^5+12}{14x^2+78} = x$$

$\Leftrightarrow x^5 - 7x^3 - 39x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-1)(x^3-3x^2+3x-12) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-1)((x-1)^3-11) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ *V* $x = 1 + \sqrt[3]{11}$

Thí dụ 20. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+\sqrt{x+\sqrt{2+x}}}} = x \quad (1)$$

Lời giải. Do $VT(1) > 0$ nên $x > 0$.

Dễ thấy $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{2+x}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và có tập giá trị là $(\sqrt{2}; +\infty)$

là tập con của $(0; +\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{2+x}} = x \Leftrightarrow x + \sqrt{2+x} = x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} = x^2 - x$

$\Leftrightarrow 2 + x = x^4 - 2x^3 + x^2$ với $x > 1$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^3+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Thí dụ 21. *Giải phương trình:*

$$\frac{1}{2+\sqrt{2-\frac{1}{2+\sqrt{2-\frac{1}{2+\sqrt{2-x}}}}}}=x \quad (1)$$

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$. PT(1) xác định trên nửa khoảng $(0;2]$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{2+\sqrt{2-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;2]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right]$

nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2+\sqrt{2-x}}=x\Leftrightarrow 2x+x\sqrt{2-x}=1$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2-x}=1-2x$

$\Leftrightarrow 2x^2-x^3=(1-2x)^2 \quad với\ x\le\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-1)=0\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

Tổng quát:

Với $f(x)=\frac{a}{b+c\sqrt{d-x}}$ ta có

Giải phương trình:

$$\frac{a}{b+c.\sqrt{d-\frac{a}{b+c.\sqrt{d-\frac{a}{b+c.\sqrt{d-x}}}}}}=x$$

Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b}\le d$.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$\frac{5}{3+2\sqrt{3-\frac{5}{3+2\sqrt{3-x}}}}=x$$

HD: Do $VT(1)>0$ nên $x>0$.

Dễ thấy $f(x)=\frac{5}{3+2\sqrt{3-x}}$ đồng biến trên $(0;3]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{5}{3+2\sqrt{3}};\frac{5}{3}\right]$

nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{5}{3+2\sqrt{3-x}}=x\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=1.$

Thí dụ 22. *Giải phương trình:*

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}}}=x \quad (1)$$

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$. PT(1) xác định trên nửa khoảng $(0;1]$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{1}{2};1\right]$

nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=x\Leftrightarrow x+x\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow x\sqrt{1-x}=1-x$

$\Leftrightarrow x^2-x^3=(1-x)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=1\ V\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Giải phương trình:

$$\frac{1}{1+2.\sqrt{1-\frac{1}{1+2.\sqrt{1-\frac{1}{1+2.\sqrt{1-x}}}}}}=x$$

Đs:

$x=1\ V\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}$.

Thí dụ 23. *Giải phương trình:*

$$\frac{1}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-2x}}}}}}=x \quad (1)$$

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$. PT(1) xác định trên nửa khoảng $(0;1]$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{2-2x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}};1\right]$

nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{2-2x}}=x\Leftrightarrow x+x\sqrt{2-2x}=1$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2-2x}=1-x$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x^3=(1-x)^2$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(2x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=1\ V\ x=\frac{1}{2}$

Giải phương trình:

$$\frac{1}{1+2.\sqrt{3-\frac{3}{1+2.\sqrt{3-\frac{3}{1+2.\sqrt{3-3x}}}}}}=x$$

đs: $x=1\ V\ x=\frac{1}{4}$.

Giải phương trình:

$$\frac{2}{2+3.\sqrt{5-\frac{10}{2+3.\sqrt{5-\frac{10}{2+3.\sqrt{5-5x}}}}}}=x$$

đs: $x=1\ V\ x=\frac{-2+2\sqrt{46}}{45}$.

Thí dụ 24. *Giải phương trình:*

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}}}=x\ (1)$$

Lời giải.

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$. PT(1) xác định trên nửa khoảng $(0;1]$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};1\right]$

nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2+\sqrt{1-x}}=x^2$

Đặt $\sqrt{1-x}=a\in[0;1)$

$\rightarrow (1-a^2)^2(2+a)=1$

$\Leftrightarrow (a^3+a^2-2a-1)(a^2+a-1)=0$

$\Leftrightarrow a^2+a-1=0\Leftrightarrow a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(do $a^3+a^2-2a-1=(a^3-1)+a(a-2)<0$)

$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy PT đã cho có 1 nghiệm $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Thí dụ 25. *Giải phương trình:*

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{2}\right)^x}}=x\ (1)$$

Lời giải.

Dễ thấy $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$ đồng biến trên R

nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x=x\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x-x=0\ (2)$

Xét $h(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x-x$

$h'(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x ln\left(\sqrt{2}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow x=log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{ln\left(\sqrt{2}\right)}\right)=x_0$

Bbt

x	$-\infty$	2	x_0	4	$+\infty$
h(x)	$+\infty$	0	$h(x_0)$	0	$+\infty$

Từ bbt suy ra $(2)\Leftrightarrow x=2\ V\ x=4$.

Thí dụ 26. *Giải phương trình*:

$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\left(\sqrt[3]{3}\right)^x}} = x$ (1)

Lời giải.

Dễ thấy $f(x) = \left(\sqrt[3]{3}\right)^x$ đồng biến trên R

nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3}\right)^x = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3}\right)^x - x = 0$ (2)

Xét $h(x) = \left(\sqrt[3]{3}\right)^x - x$

$h'(x) = \left(\sqrt[3]{3}\right)^x ln\left(\sqrt[3]{3}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = log_{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{ln\left(\sqrt[3]{3}\right)}\right) = x_0$

Bbt

x	$-\infty$	3	x_0	27	$+\infty$
h(x)	$+\infty$	0	$h(x_0)$	0	$+\infty$

Từ bbt suy ra $(2) \Leftrightarrow x = 3\ V\ x = 27$.

Mở rộng 2. Do các nghiệm (nếu có) tương ứng với mỗi n sẽ làm xuất hiện dãy số gồm các nghiệm của PT hàm hợp.Sau đây là một số hàm số mà ta thu gọn được hàm hợp bằng quy nạp. Đặc biệt ta có các bài toán liên qua tới dãy số cũng khá đa dạng.Sau đây là một số thí dụ

Thí dụ 1. Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}$ *với* $-1 < a < 1$ .Biết

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \sqrt{\frac{3}{11}}.$

a)Giải phương trình : $f_{2019}(x) = \frac{1}{2}.$

b)Giải sử phương trình : $f_n(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ có nghiệm là x_n. Chứng minh x_n là hằng số.

c)Giải sử phương trình : $f_n(x) = \frac{1}{2}$ có nghiệm là x_n , chứng minh $\frac{2}{11} \le x_n < 1$. Tìm n để $x_n \le \frac{32}{761}$

Lời giải.

Ta có: $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+a} + a}} = \frac{x}{\sqrt{(1+a)x^2 + a^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\frac{a^2-1}{a-1}x^2 + a^2}}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{\frac{a^2-1}{a-1}x^2 + a}}}{\sqrt{\frac{x^2}{\frac{a^2-1}{a-1}x^2 + a} + a}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{a^3-1}{a-1}x^2 + a^3}}.$$

Bằng quy nạp và áp dụng tính chất của cấp số nhân ta được:

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{a^n-1}{a-1}x^2 + a^n}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1-a^n}{1-a}x^2 + a^n}}.$$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \sqrt{3}.$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-a^n}{1-a} + a^n}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-a}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

a)Giải phương trình : $f_{2019}(x) = \frac{1}{2}$ xin dành cho bạn đọc.

b)Với $a = \frac{2}{3}$ phương trình : $f_n(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^n}}=-\frac{\sqrt{3}}{3};(x<0)$$

$$\Leftrightarrow -3.\left(\frac{2}{3}\right)^n x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3}.\ (\text{đpcm}).$$

c)Với $a=\frac{2}{3}$ phương trình : $f_n(x)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^n}}=\frac{1}{2};(x>0)$$

$$\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow x=x_n=\frac{1}{1+3.\left(\frac{3}{2}\right)^n}.$$

Do $1<1+3.\left(\frac{3}{2}\right)^n\le\frac{11}{2};\forall n\ge 1$

Suy ra $\frac{2}{11}\le x_n<1.$

Xét $x_n\le\frac{32}{275}\Leftrightarrow\frac{1}{1+3.\left(\frac{3}{2}\right)^n}\le\frac{32}{761}.$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^n\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5\leftrightarrow n\ge 5.$$

Thí dụ 2. Cho $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$ .Biết

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(9)=\frac{1}{5}$

a)Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1).$

b) Chứng minh với mọi n phương trình : $f_n(x)=\frac{3}{5}$ luôn có nghiệm duy nhất là x_n và x_n là hằng số.

c) Giải sử phương trình : $f_n(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ có nghiệm là x_n. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+100}}{x_n}$.

Lời giải.

TH1. $a=1$.Bằng quy nạp ta được:

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(9)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{81n+1}}=0=\frac{3}{5}.$$

Vậy a=1 loại

TH2. $a\ne 1$

Bằng quy nạp ta được:

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1-a^n}{1-a}x^2+a^n}}.$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(9)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-a^n}{1-a}.9+a^n}}=\frac{1}{5}$

nên a là số thực thỏa mãn $-1<a<1$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(9)=\frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-a^n}{1-a}.9+a^n}}=\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-a}.9}}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow a=\frac{16}{25}.$$

Đến đây giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

Tổng quát:

$$1)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}$$

$$\to f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{1-b^n}{1-b}x^2+b^n}}\ \text{khi}\ b\ne 1$$

$\rightarrow f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{nax^2+1}}$ khi $b=1$

2) $f(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{ax^2+b}}$

$\rightarrow f_n(x)=\dfrac{(-1)^n x}{\sqrt{a.\dfrac{1-b^n}{1-b}x^2+b^n}}$ khi $b\neq 1$

$\rightarrow f_n(x)=\dfrac{(-1)^n x}{\sqrt{nax^2+b^n}}$ khi $b=1$

3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[k]{ax^k+b}}$

$\rightarrow f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt[k]{a.\dfrac{b^n-1}{b-1}x^k+b^n}}$ khi $b\neq 1$

$\rightarrow f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt[k]{nax^k+1}}$ khi $b=1$

4) $f(x)=\dfrac{mx}{\sqrt{ax^2+b}}=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{a}{m^2}x^2+\dfrac{b}{m^2}}};m>0\\ \dfrac{-x}{\sqrt{\dfrac{a}{m^2}x^2+\dfrac{b}{m^2}}};m<0\end{cases}$

Tìm hàm $f_n(x)$ dành cho bạn đọc.

Thí dụ 3. Cho $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$ biết $f_7(x)=\dfrac{x}{129x-128}$.

a)Giải phương trình : $f_2(x)=1$.

b)Tìm $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_6(x)$.

c) Giải sử phương trình : $f_n(x)=-2$ có nghiệm là x_n. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của x_n.Tìm giới các giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

Lời giải.

TH1. $b=1$

Bằng quy nạp ta được: $f_n(x)=\dfrac{x}{nax+1}$

Suy ra $f_7(x)=\dfrac{x}{7ax+1}$ không thỏa mãn giả thiết $f_7(x)=\dfrac{x}{129x-128}$

TH2. $b\neq 1$

$f_1(x)=\dfrac{x}{ax+b}$

$f_2(x)=\dfrac{\dfrac{x}{ax+b}}{a.\dfrac{x}{ax+b}+b}=\dfrac{x}{a(b+1)x+b^2}$

$=\dfrac{x}{a\dfrac{b^2-1}{b-1}x+b^2}$

$f_3(x)=\dfrac{\dfrac{x}{a.\dfrac{b^2-1}{b-1}x+b}}{a.\dfrac{x}{a.\dfrac{b^2-1}{b-1}x+b^2}+b}=\dfrac{x}{a\dfrac{b^3-1}{b-1}x+b^3}$

Bằng quy nạp được: $f_n(x)=\dfrac{x}{a.\dfrac{b^n-1}{b-1}x+b^n}$.

Do $f_7(x)=\dfrac{x}{129x-128}$ hay

$\dfrac{x}{a.\dfrac{b^7-1}{b-1}x+b^7}=\dfrac{x}{129x-128}$.

nên ta có hệ

$\begin{cases}a.\dfrac{b^7-1}{b-1}=129\\ b^7=-128\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$

Đến đây câu a và b xin dành cho bạn đọc.

c) Phương trình : $f_n(x) = -2$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3.\frac{(-2)^n - 1}{-3}x + (-2)^n} = -2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\left(1+(-2)^n\right)x + (-2)^n} = -2$$

$$\Leftrightarrow \left(3+(-2)^{n+1}\right)x = -(-2)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow x = x_n = -\frac{(-2)^{n+1}}{3+(-2)^{n+1}} = \frac{2}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2}$$

$$\rightarrow x_{n+1} = -\frac{(-2)^{n+2}}{3+(-2)^{n+2}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = -2.\frac{3+(-2)^{n+1}}{3+(-2)^{n+2}} = -2.\frac{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$$

Như vậy

$$x_n = \frac{2}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2}$$

+Với $n = 2k$ ta được:

$$x_n = \frac{2}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} - 2}$$

$$\rightarrow -\frac{8}{5} \le x_n < -1$$

+Với $n = 2k-1$ ta được:

$$x_n = \frac{2}{-3.\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} - 2}$$

$$\rightarrow -1 < x_n \le -\frac{4}{7}$$

Vậy $-\frac{8}{5} \le x_n \le -\frac{4}{7}$

$$\max x_n = -\frac{4}{7}$$

$$\min x_n = -\frac{8}{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to=\infty} \frac{2}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2} = -1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim(-2.\frac{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}) = 1.$$

Tổng quát dạng này là hàm số:

$$f(x) = \frac{mx}{ax+b} = \frac{x}{\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}}; m \neq 0$$

Thí dụ 4. Cho biết $f(x) = (x-1)^3 + 1$

1)Tìm n để phương trình $f_n(x) = \frac{3}{2}$ có nghiệm $x = 1 + \frac{1}{\sqrt[9]{2}}$.

2)Biết phương trình $f_n(x) = \frac{3}{2}$ có nghiệm x_n.Tìm $\lim x_n$.

Lời giải.

Ta có

$$f_1(x) = (x-1)^3 + 1$$

$$f_2(x) = ((x-1)^3 + 1 - 1)^3 + 1 = (x-1)^9 + 1$$

$$f_3(x) = ((x-1)^9 + 1 - 1)^3 + 1 = (x-1)^{27} + 1$$

Bằng quy nạp ta được

$$f_n(x) = (x-1)^{3^n} + 1$$

$$1)\ f_n(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-1)^{3^n} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^{3^n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3^n]{\frac{1}{2}}$$

1)Phương trình $f_n(x) = \frac{3}{2}$ có nghiệm

$x = 1 + \frac{1}{\sqrt[9]{2^9}}$.

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt[3^n]{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[9]{2^9}}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3^n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{9^9} = \frac{1}{3^{18}} \Leftrightarrow n = 18$

2) $f_n(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-1)^{3^n} + 1 = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^{3^n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3^n]{\frac{1}{2}} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3^n}}$

suy ra

$limx_n = lim\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3^n}}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2.$

Thí dụ 5. Cho biết $f(x) = (x-1)^3 + 1$

1)Biết phương trình $f_n(x) = 4$ có nghiệm x_n Tìm n biết $\frac{1-x_n}{1-x_{n+1}} = \sqrt[33]{9}$.

2) Biết phương trình $f_n(x) = 4$ có nghiệm x_n Tìm n biết $x_{n+120} = x_{7n}$

3)Biết phương trình $f_n(x) = 4$ có nghiệm x_n Tìm n biết $\left(log_3(x_n - 1)\right)^9 = \left(log_3(x_{3n+42} - 1)\right)^2$

4) Biết phương trình $f_n(x) = 4$ có nghiệm x_n Tìm n biết $x_n \geq 1 + \sqrt[8888]{3^{2^n}}$

Lời giải. Ta có

$f_1(x) = (x-1)^3 + 1$

$f_2(x) = ((x-1)^3 + 1 - 1)^3 + 1 = (x-1)^9 + 1$

$f_3(x) = ((x-1)^9 + 1 - 1)^3 + 1 = (x-1)^{27} + 1$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x) = (x-1)^{3^n} + 1$

1) $f_n(x) = 4 \Leftrightarrow (x-1)^{3^n} + 1 = 4$

$\Leftrightarrow (x-1)^{3^n} = 3$

$\Rightarrow x = x_n = 1 + \sqrt[3^n]{3} = 1 + 3^{\frac{1}{3^n}}$

Suy ra $x_{n+1} = 1 + 3^{\frac{1}{3^{n+1}}}$

$\frac{1-x_n}{1-x_{n+1}} = \sqrt[33]{9}$

$\Leftrightarrow \frac{3^{\frac{1}{3^n}}}{3^{\frac{1}{3^{n+1}}}} = 3^{\frac{2}{33}} \Leftrightarrow 3^{\frac{2}{3^{n+1}}} = 3^{\frac{2}{33}}$

$\Leftrightarrow n + 1 = 33 \Leftrightarrow n = 32$

2)$x_{n+1982} = 1 + 3^{\frac{1}{3^{n+1982}}}$

$x_{7n} = 1 + 3^{\frac{1}{3^{7n}}}$

$x_{n+120} = x_{7n} \Leftrightarrow 1 + 3^{\frac{1}{3^{n+1982}}} = 1 + 3^{\frac{1}{3^{7n}}}$

$\Leftrightarrow n + 120 = 7n \Leftrightarrow n = 20$

3)$x_{3n+42} = 1 + 3^{\frac{1}{3^{3n+42}}}$

$\left(log_3(x_n - 1)\right)^9 = \left(log_3(x_{3n+42} - 1)\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(log_3 3^{\frac{1}{3^n}}\right)^9 = \left(log_3 3^{\frac{1}{3^{3n+42}}}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^n}\right)^9 = \left(\frac{1}{3^{3n+42}}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3^{9n}} = \frac{1}{3^{3n+84}} \Leftrightarrow 9n = 3n + 84$

$\Leftrightarrow n = 14$

4) $x_n \geq 1 + \sqrt[8888]{3^{2^n}}$

$\Leftrightarrow 1 + 3^{\frac{1}{3^n}} \geq 1 + \sqrt[8888]{3^{2^n}}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{3^n}} \geq 3^{\frac{2^n}{8888}} \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \geq \frac{2^n}{8888}$

$\Leftrightarrow 6^n \leq 2020 \Leftrightarrow n \leq log_6 8888 \approx 5{,}07$

$\Leftrightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Thí dụ 6. Cho biết $f(x) = (x-2)^3 + 2$.

a)Biết phương trình $f_4(x) = m$ có nghiệm $x = 5$.Tìm m .

b)Biết phương trình $f_n(x) = m$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm n biết $x_3 - x_4 = 6$.

Lời giải.

Ta có

$f_1(x) = (x-2)^3 + 2$

$f_2(x) = ((x-2)^3 + 2 - 2)^3 + 2 = (x-2)^9 + 2$

$f_3(x) = ((x-2)^9 + 2 - 2)^3 + 2 = (x-2)^{27} + 2$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x) = (x-2)^{3^n} + 2$

a)Phương trình $f_4(x) = m$ có nghiệm $x = 5$

$\Leftrightarrow (5-2)^{3^4} + 2 = m$

$\Leftrightarrow m = 2 + 3^{81}$

b)Xét phương trình

$f_{100}(x) = m$

$\Leftrightarrow (x-2)^{3^n} + 2 = m$

$\Leftrightarrow (x-2)^{3^n} + 2 = m$

$\Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{x_n} = 2 + \sqrt[3^n]{\mathrm{m}-2}$

$x_3 = 2 + \sqrt[27]{m-2}$

$x_4 = 2 + \sqrt[81]{m-2}$

$Có\ x_3 - x_4 = 6$

$\Leftrightarrow 2 + \sqrt[27]{m-2} - 2 - \sqrt[81]{m-2} = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt[27]{m-2} - \sqrt[81]{m-2} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[81]{m-2}\right)^3 - \sqrt[54]{m-2} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[81]{m-2} = 2$

$\Leftrightarrow m = 2 + 2^{81}$

Thí dụ 7. Cho biết $f(x) = (x-2)^2 + 2$

a)Giải phương trình $f_5(x) = 18$.
b)Biết phương trình $f_n(x) = 18$ có nghiệm $x = 2 + \sqrt[64]{2}$ .Tìm n.
c)Biết phương trình $f_{100}(x) = a$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6$ .Tìm a.
d)Biết phương trình $f_4(x) = a$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt thỏa mãn $|x_1 - 1| + |x_2 - 1| = 2$ .Tìm a.
e)Biết phương trình $f_4(x) = a$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt thỏa mãn $|x_1 - 1| + |x_2 - 1| = 6$.

Lời giải.

Ta có

$f_1(x) = (x-2)^2 + 2$

$f_2(x) = ((x-2)^2 + 2 - 2)^2 + 2 = (x-2)^4 + 2$

$f_3(x) = ((x-2)^4 + 2 - 2)^2 + 2 = (x-2)^8 + 2$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x) = (x-2)^{2^n} + 2$

a) $f_5(x) = 18$

$\Leftrightarrow (x-2)^{32} + 2 = 18 \Leftrightarrow (x-2)^{32} = 16$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt[32]{16} = 2 \pm \sqrt[8]{2}$

b) Phương trình $f_n(x) = 18$ có nghiệm $x = 2 + \sqrt[64]{2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^{2^n} + 2 = 18$ có nghiệm $x = 2 + \sqrt[64]{2}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{2^n}{64}} = 2^4 \Leftrightarrow \frac{2^n}{64} = 4 \Leftrightarrow n = 8$

c) Xét phương trình

$f_{100}(x) = a$

$\Leftrightarrow (x-2)^{200} + 2 = a$

$\Leftrightarrow (x-2)^{200} = a - 2$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt[200]{a-2}\ với\ a \geq 2$

Suy ra $|x_1 - x_2| = 6$

$\Leftrightarrow \left|2 + \sqrt[200]{a-2} - 2 + \sqrt[200]{a-2}\right| = 6$

$\Leftrightarrow \left|2\sqrt[200]{a-2}\right| = 6 \Leftrightarrow \sqrt[200]{a-2} = 3$

$\Leftrightarrow x = 2 + 3^{200}$

d) Xét phương trình

$f_4(x) = a$

$\Leftrightarrow (x-2)^{16} + 2 = a$

$\Leftrightarrow (x-2)^{16} = a-2$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt[16]{a-2}$ *với* $a \geq 2$

$f_8(x) = a$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt $\Leftrightarrow a > 2$

$|x_1 - 1| + |x_2 - 1| = 2$

$\Leftrightarrow \left|2 + \sqrt[16]{a-2} - 1\right| + \left|2 - \sqrt[16]{a-2} - 1\right| = 2$

$\Leftrightarrow \left|1 + \sqrt[16]{a-2}\right| + \left|1 - \sqrt[16]{a-2}\right| = 2$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt[16]{a-2} + \left|1 - \sqrt[16]{a-2}\right| = 2 \quad (*)$

TH1: $1 - \sqrt[16]{a-2} \geq 0 \Leftrightarrow 2 < a \leq 3$

$(*) \Leftrightarrow 1 + \sqrt[16]{a-2} + 1 - \sqrt[16]{a-2} = 2$

(*luôn đúng*)

TH2: $1 - \sqrt[16]{a-2} < 0 \Leftrightarrow a > 3$

$(*) \Leftrightarrow 1 + \sqrt[16]{a-2} - 1 + \sqrt[16]{a-2} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt[16]{a-2} = 0$ (*vô nghiệm*).

Vậy các giá trị a cần tìm là $2 < a \leq 3$.

e) Xét phương trình

$f_8(x) = a$

$\Leftrightarrow (x-2)^{16} + 2 = a$

$\Leftrightarrow (x-2)^{16} = a-2$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt[16]{a-2}$ *với* $a \geq 2$

$f_8(x) = a$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt $\Leftrightarrow a > 2$

$|x_1 - 1| + |x_2 - 1| = 6$

$\Leftrightarrow \left|2 + \sqrt[16]{a-2} - 1\right| + \left|2 - \sqrt[16]{a-2} - 1\right| = 6$

$\Leftrightarrow \left|1 + \sqrt[16]{a-2}\right| + \left|1 - \sqrt[16]{a-2}\right| = 6$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt[16]{a-2} + \left|1 - \sqrt[16]{a-2}\right| = 6 \quad (*)$

TH1: $1 - \sqrt[16]{a-2} \geq 0 \Leftrightarrow 2 < a \leq 3$

$(*) \Leftrightarrow 1 + \sqrt[16]{a-2} + 1 - \sqrt[16]{a-2} = 6$

(*vô nghiệm*)

TH2: $1 - \sqrt[16]{a-2} < 0 \Leftrightarrow a > 3$

$(*) \Leftrightarrow 1 + \sqrt[16]{a-2} - 1 + \sqrt[16]{a-2} = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt[16]{a-2} = 3 \Leftrightarrow a = 2 + 3^{16}$.

$Vậy\ a = 2 + 3^{16}$

Thí dụ 8. Cho biết $f(x) = (x-a)^3 + a$.

1)Biết phương trình $f_n(x) = m$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm a và m biết $limx_n = 8$ *và* $x_3 = 3$

2)Biết phương trình $f_n(x) = m$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm a và m biết $limx_n = 4$ *và* $x_2 = x_3 + 24$

Lời giải.

Ta có

$f_1(x) = (x-a)^3 + a$

$f_2(x) = ((x-a)^3 + a - a)^3 + 2 = (x-a)^9 + a$

$f_3(x) = ((x-a)^9 + a - a)^3 + a = (x-a)^{27} + a$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x) = (x-a)^{3^n} + a$

$Có: f_n(x) = m \Leftrightarrow (x-a)^{3^n} + a = m$

$\Leftrightarrow \mathrm{x = x_n = a + \sqrt[3^n]{m-a}}$

$\Leftrightarrow \mathrm{x = x_n = a + (m-a)^{\frac{1}{3^n}}}$

$1) Có\ limx_n = 8$

$\Leftrightarrow \lim\left(\mathrm{a + (m-a)^{\frac{1}{3^n}}}\right) = 8$

$\Leftrightarrow \mathrm{a + (m-a)^0 = 8 \Leftrightarrow a = 7}$

Với $\mathrm{a = 7}$ thì $\mathrm{x_3 = 7 + \sqrt[27]{m-7} = 3}$

$\Leftrightarrow \sqrt[27]{m-7} = -4$

$\Leftrightarrow m - 7 = (-4)^{27} = -2^{54}$

$\Leftrightarrow m = 7 - 2^{54}$

$2) Có\ limx_n = 4$

$\Leftrightarrow \lim\left(a+(m-a)^{\frac{1}{3^n}}\right)=4$

$\Leftrightarrow a+(m-a)^0=3\Leftrightarrow a=3$

Với $a=3$ thì $x_2=3+\sqrt[9]{m-3}$

$x_3=3+\sqrt[27]{m-3}$

$x_2=x_3+24$

$\Leftrightarrow 3+\sqrt[9]{m-3}=3+\sqrt[27]{m-3}+24$

$\Leftrightarrow \sqrt[9]{m-3}-\sqrt[27]{m-3}-24=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[27]{m-3}\right)^3-\sqrt[27]{m-3}-24=0$

$\Leftrightarrow \sqrt[27]{m-3}=3\Leftrightarrow m=3+3^{27}$

Thí dụ 9. Cho biết $f(x)=\sqrt[3]{x+9}-9$.

1)Biết phương trình $f_n(x)=-\frac{19}{2}$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm $limx_n$

2)Biết phương trình $f_n(x)=\frac{1}{2}$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm $limx_n$.

Lờigiải.

Ta có

$f_1(x)=\sqrt[3]{x+9}-9$

$f_2(x)=\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+9}-9+9}-9=\sqrt[9]{x+9}-9$

$f_3(x)=\sqrt[3]{\sqrt[9]{x+9}-9+9}-9=\sqrt[27]{x+9}-9$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x)=\sqrt[3^n]{x+9}-9$

1) có $f_n(x)=-\frac{19}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x+9}-9=-\frac{19}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x+9}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=x_n=-9+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3^n}$

$limx_n=lim\left(-9+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3^n}\right)=-9$

2) có $f_n(x)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x+9}-9=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x+9}=\frac{19}{2}$

$\Leftrightarrow x=x_n=-9+\left(\frac{19}{2}\right)^{3^n}$

$limx_n=lim\left(-9+\left(\frac{19}{2}\right)^{3^n}\right)=+\infty$

Thí dụ 10. Cho biết $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+2$.

1)Biết phương trình $f_n(x)=\frac{5}{2}$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm $limx_n$

2)Biết phương trình $f_n(x)=\frac{9}{4}$ có nghiệm x_n với mọi n.Tính $P_n=(x_1-2)(x_2-2)\ldots.(x_n-2)$.

3)Biết phương trình $f_n(x)=6$ có nghiệm x_n với mọi n.Tính $P_n=(x_1-2)(x_2-2)\ldots.(x_n-2)$.
Tìm n biết $log_2P_n=9^8-3$

Lờigiải.

Ta có

$f_1(x)=\sqrt[3]{x-2}+2$

$f_2(x)=\sqrt[3]{\sqrt[3]{x-2}+2-2}+2=\sqrt[9]{x-2}+2$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x)=\sqrt[3^n]{x-2}+2$

1) có $f_n(x)=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x-2}+2=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x-2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=x_n=2+\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}$

$limx_n=lim\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}\right)=2$

2) có $f_n(x)=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x-2}+2=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x-2} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = x_n = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{3^n}$

$P_n = (x_1 - 2)(x_2 - 2) \ldots . (x_n - 2)$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{3^1} . \left(\frac{1}{4}\right)^{3^2} \ldots . . \left(\frac{1}{4}\right)^{3^n}$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{3^1+3^2+\cdots+3^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3.\frac{3^n-1}{2}}$

$= \left(\frac{1}{8}\right)^{3^n-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{3^n-1} = 2^{3-3^{n+1}}$

3) *có* $f_n(x) = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x-2} + 2 = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt[3^n]{x-2} = 4$

$\Leftrightarrow x = x_n = 2 + 4^{3^n}$

$P_n = (x_1 - 2)(x_2 - 2) \ldots . (x_n - 2)$

$= 4^{3^1} . 4^{3^2} \ldots . . 4^{3^n}$

$= 4^{3^1+3^2+\cdots+3^n} = 4^{3.\frac{3^n-1}{2}} = 2^{3^{n+1}-3}$

$log_2 P_n = 9^8 - 3 \Leftrightarrow log_2 2^{3^{n+1}-3} = 9^8 - 3$

$\Leftrightarrow 3^{n+1} - 3 = 9^8 - 3 \Leftrightarrow n = 15$

Thí dụ 11. Cho biết $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$.

.

1)Biết phương trình $f_n(x) = 3$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm n biết $x_n = 129$

2)Biết phương trình $f_n(x) = 3$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm n biết $\frac{1-x_{n+1}}{1-x_n} < 2^{888}$

3)Biết phương trình $f_n(x) = 3$ có nghiệm x_n với mọi n.Tìm n biết $x_{n+1} + 2^{32} \leq 2^{17}(x_n - 1) + 5$

4)Biết phương trình $f_n(x) = 3$ có nghiệm x_n với mọi n.Tính $P_n = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \ldots . (x_n - 1)$. Tìm n để $P_n > 3^{2^{2n}-2^{n+6}+63}$

5)Cho biết phương trình $f_n(x) = 11$ có nghiệm x_n là số nguyên có bao nhiêu chữ số và chứng minh tổng các chữ số của x_n không phụ thuộc vào n.Tìm n để phương trình $f_n(x) = 11$ có nghiệm có 65 chữ số.

6)Biết phương trình $f_n(x) = 3$ có nghiệm x_n với mọi n.Chứng minh $x_n \geq 1 + 2^{\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}}$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Tác giả: Vũ Hồng Phong

Lời giải.

Ta có

$f_1(x) = \sqrt{x-1} + 1$

$f_2(x) = \sqrt{\sqrt{x-1} + 1 - 1} + 1 = \sqrt[4]{x-1} + 1$

$f_3(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x-1} + 1 - 1} + 1 = \sqrt[8]{x-1} + 1$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x) = \sqrt[2^n]{x-1} + 1$

1) $f_n(x) = 3 \Leftrightarrow \sqrt[2^n]{x-1} + 1 = 3$

$\Leftrightarrow x = x_n = 1 + 2^{2^n}$

$x_n = 257 \Leftrightarrow 1 + 2^{2^n} = 257 \Leftrightarrow 2^{2^n} = 2^8$

$\Leftrightarrow 2^n = 8 \Leftrightarrow n = 3$

2) $x_{n+1} = 1 + 2^{2^{n+1}} = 1 + 2^{2.2^n}$

$\frac{1 - x_{n+1}}{1 - x_n} < 2^{888}$

$\Leftrightarrow \frac{2^{2.2^n}}{2^{2^n}} < 2^{888} \Leftrightarrow 2^{2^n} < 2^{888}$

$\Leftrightarrow 2^n < 888 \Leftrightarrow n < log_2 888 \approx 9{,}8$

$\Leftrightarrow n \in \{1,2,3, \ldots, 9\}$

3) $x_{n+1} + 2^{21} \leq 2^{10}(x_n - 1) + 5$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{2^{n+1}} + 2^{32} \leq 2^{17}\left(1 + 2^{2^n} - 1\right) + 5$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{2.2^n} + 2^{32} \leq 2^{17} . 2^{2^n} + 5$

$\Leftrightarrow \left(2^{2^n}\right)^2 - (2^{16} - 2 + 2^{16} + 2)2^{2^n}$

$+ (2^{16} - 2)(2^{16} + 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow 2^{16} - 2 \leq 2^{2^n} \leq 2^{16} + 2 \Leftrightarrow 2^{2^n} = 2^{16}$

$\Leftrightarrow 2^n = 16 \Leftrightarrow n = 4.$

Chú ý: $2^8 < 2^{16} - 2 < 2^{16} < 2^{16} + 2 < 2^{32}$

Suy ra các số hạng liên tiếp của dãy số 2^{2^n} *là* $2^8; 2^{16}; 2^{32}$

4) $P_n = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \ldots . (x_n - 1).$

$= 2^{2^1} . 2^{2^2} \ldots . . 2^{2^n}$

$= 2^{2^1+2^2+\cdots+2^n} = 2^{2^n-1}$

$P_n > 3^{2^{2n}-2^{n+6}+15}$

$\Leftrightarrow 2^{2^n-1} > 3^{2^{2n}-2^{n+6}+15}$

$\Leftrightarrow 2^n-1>(2^{2n}-64.2^n+63)log_2 3$ *(lấy looga cơ số 2 hai vế)*

$\Leftrightarrow 2^n-1>(2^n-1)(2^n-63)log_2 3$

$\Leftrightarrow 1>(2^n-63)log_2 3$

$\Leftrightarrow 2^n<63+\dfrac{1}{log_2 3}=63+log_3 2<63+1$

$\Leftrightarrow n\le 5.$

5) $f_n(x)=11\Leftrightarrow \sqrt[2^n]{x-1}+1=11$

$\Leftrightarrow x=x_n=1+10^{2^n}$

$x_n=1+10^{2^n}$ *là số có* 2^n+1 *chữ số có dạng* $100\ldots 001$ *trong đó có* 2^n-1 *số 0. Tổng các chữ số bằng 2.*

Nghiệm $x_n=1+10^{2^n}$ *có 65 chữ số* $2^n+1=65$

$\Leftrightarrow n=6$

6)Biết phương trình $f_n(x)=3$ có nghiệm x_n với mọi n.Chứng minh $x_n\ge\left(\sqrt[6]{2}\right)^{(n+3)(n^2+3)}$

$f_n(x)=3\Leftrightarrow \sqrt[2^n]{x-1}+1=3$

$\Leftrightarrow x=x_n=1+2^{2^n}$

Ta chứng minh $2^n\ge\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ $(*)$

+Với n=1 thì (*): $2^1\ge\frac{(1+1)(1^2-1+6)}{6}$ $(luôn\ đúng)$

+Với n=2 thì (*): $2^2\ge\frac{(2+1)(2^2-2+6)}{6}$ $(luôn\ đúng)$

+Với $n\ge 3$ *thì*

Ta có $2^n=(1+1)^n$

$=C_n^0+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n\ge C_n^0+C_n^2+C_n^3$

Ta có

$C_n^0+C_n^2+C_n^3=1+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$

$=\dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$

Vậy $2^n\ge\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow n=1\ V\ n=2\ V\ n=3$

Suy ra

$1+2^{2^n}\ge 1+2^{\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow n=1\ V\ n=2\ V\ n=3$

Thí dụ 12. Cho a là số thực dương và $f(x)=\sqrt{x+a}-a.$

1)Với $a=1$ biết phương trình $f_n(x)=9$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có không quá 2048 chữ số. Tìm n.

2)Với $a=1$ biết phương trình $f_n(x)=9$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 288. Tìm n.

3)Với $a=1$ biết phương trình $f_n(x)=9$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có tổng các chữ số nằm trong khoảng (288;2323). Tìm n.

4)Với $a=222$ biết phương trình $f_n(x)=-212$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 4387. Tìm n.

5) Tìm a biết biết phương trình $f_4(x)=10-a$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có 14 chữ số.

Lời giải.

Ta có

$f_1(x)=\sqrt{x+a}-a$

$f_2(x)=\sqrt{\sqrt{x+a}-a+a}-a=\sqrt[4]{x+a}-a$

$f_3(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x+a}-a+a}-a=\sqrt[8]{x+a}-a$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x)=\sqrt[2^n]{x+a}-a$

*1)*Với $a=1$ biết phương trình $f_n(x)=9$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có không quá 2048 chữ số. Tìm n.

$f_n(x)=9\Leftrightarrow\sqrt[2^n]{x+1}-1=9$

$\Leftrightarrow x=x_n=-1+10^{2^n}$ *là số tự nhiên có* 2^n *chữ số gồm toàn số 9 tức* $x_n=99\ldots 99$

Theo đề bài có $2^n\le 2048=2^{11}\Leftrightarrow n\le 11$

2) Với $a=1$ biết phương trình $f_n(x)=9$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 288. Tìm n.

Do $x=x_n=-1+10^{2^n}$ *là số tự nhiên có* 2^n *chữ số gồm toàn số 9 tức* $x_n=99\ldots 99$

Nên tổng các chữ số của x_n *bằng* 9.2^n

Theo đề bài có $9.2^n=288\Leftrightarrow 2^n=32\Leftrightarrow n=5$

3)Với $a=1$ *biết phương trình* $f_n(x)=9$ *có nghiệm* x_n *là số tự nhiên có tổng các chữ số nằm trong khoảng (288;2323). Tìm n.*

Do $x=x_n=-1+10^{2^n}$ *là số tự nhiên có* 2^n *chữ số gồm toàn số 9 tức* $x_n=99\ldots 99$

Nên tổng các chữ số của x_n *bằng* 9.2^n

Theo đề bài ta có

$288<9.2^n<2323\Leftrightarrow 32<2^n<\dfrac{2323}{9}$

$\Leftrightarrow 5 < n < log_2 \frac{2323}{9} \approx 8{,}01 \Leftrightarrow n \in \{6;7;8\}$

4)Với $a = 222$ biết phương trình $f_n(x) = -212$ có nghiệm x_n là số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 4387. Tìm n.

$f_n(x) = -212 \Leftrightarrow \sqrt[2^n]{x+222} - 222 = -212$

$\Leftrightarrow x = x_n = -222 + 10^{2^n} = -1 + 10^{2^n} - 221$

Nên tổng các chữ số của x_n *bằng* $9.2^n - 221$

Theo đề bài ta có

$9.2^n - 221 = 4387 \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow n = 9$

5) Tìm a biết biết phương trình $f_4(x) = 10 - a$ có nghiệmx_n là số tự nhiên có 14 chữ số.

$f_4(x) = 10 - a \Leftrightarrow \sqrt[16]{x+a} - a = 10 - a$

$\Leftrightarrow x = x_n = -a + 10^{16}$

Do nghiệm $x_n = -a + 10^{16}$ có 14 chữ số nên có

$10^{13} \le -a + 10^{16} \le 10^{14} - 1$

$\Leftrightarrow 10^{16} - 10^{14} + 1 \le a \le 10^{16} - 10^{13}$

Thí dụ 13. Cho a là số thực khác 0 và $f(x) = a(x-1)^3 + 1$.

1)Tìm a biết $f_4(x) = 0$ *có nghiệm* $x = -2$

2)Tìm a biết $f_5(x) = 0$ *có nghiệm* $x = \frac{1}{2}$

3)Tìm a biết $f_2(x) = 0$ *có nghiệm* $x = \frac{15}{16}$

Lời giải.

Ta có

$f_1(x) = a(x-1)^3 + 1$

$f_2(x) = a(a(x-1)^3 + 1 - 1)^3 + 1$

$= a^{1+3}(x-1)^9 + 1$

$f_3(x) = a(a^{1+3}(x-1)^3 + 1 - 1)^3 + 1$

$= a^{1+3+3^2}(x-1)^{27} + 1$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x) = a^{\frac{3^n-1}{2}}(x-1)^{3^n} + 1$

1)Tìm a biết $f_4(x) = 0$ *có nghiệm* $x = -2$

$f_4(x) = 0 \Leftrightarrow a^{\frac{3^4-1}{2}}(x-1)^{3^4} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a^{40}(x-1)^{81} = -1$

$f_4(x) = 0$ *có nghiệm* $x = -2$

$\Leftrightarrow a^{40}(-3)^{81} = -1$

$\Leftrightarrow a^{40} = \frac{1}{3^{81}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[40]{3^{81}}}$

2)Tìm a biết $f_5(x) = 0$ *có nghiệm* $x = \frac{1}{2}$

$f_5(x) = 0 \Leftrightarrow a^{\frac{3^5-1}{2}}(x-1)^{3^5} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a^{121}(x-1)^{243} = -1$

$f_5(x) = 0$ *có nghiệm* $x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a^{121}\left(-\frac{1}{2}\right)^{243} = -1$

$\Leftrightarrow a^{121} = 2^{243} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt[121]{2^{243}}$

3)Tìm a biết $f_2(x) = 0$ *có nghiệm* $x = \frac{15}{16}$

$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow a^4(x-1)^9 = -1$

$f_2(x) = 0$ *có nghiệm* $x = \frac{15}{16}$

$\Leftrightarrow a^4\left(-\frac{1}{16}\right)^9 = -1$

$\Leftrightarrow a^4 = 2^{36} \Leftrightarrow a = \pm 2^9$

Thí dụ 14. Cho biết $f(x) = (x+a)^2 - a$

.

a)Tìm a biết phương trình $f_5(x) = 0$ có nghiệm $x = 0$.

b)Tìm a để phương trình $f_6(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 8$

c)Tìm a để phương trình $f_6(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ đều âm.

Lời giải.

Ta có

$f_1(x) = (x+a)^2 - a$

$f_2(x) = ((x+a)^2 - a + a)^2 - a$

$= (x+a)^4 - a$

$f_3(x) = ((x+a)^4 - a + a)^2 - a$

$= (x+a)^8 - a$

Bằng quy nạp ta được

$f_n(x) = (x+a)^{2^n} - a$

a)Tìm a biết phương trình $f_5(x) = 0$ có nghiệm $x = 0$.

$f_5(x)=0 \Leftrightarrow (x+a)^{32}-a=0$

phương trình $f_5(x)=0$ có nghiệm $x=0$

$\Leftrightarrow a^{32}-a=0 \Leftrightarrow a(a^{31}-1)=0$

$\Leftrightarrow a=0\ V\ a=1$

b)Tìm a để phương trình $f_6(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|=8$

$f_6(x)=0 \Leftrightarrow (x+a)^{64}-a=0$

$\Leftrightarrow (x+a)^{64}=a\geq 0$

$\Leftrightarrow x+a=\pm\sqrt[64]{a}$

$\Leftrightarrow x=-a\pm\sqrt[64]{a}$

$|x_1-x_2|=8$

$\Leftrightarrow 2\sqrt[64]{a}=8 \Leftrightarrow \sqrt[64]{a}=4 \Leftrightarrow a=4^{64}=2^{128}$

c)Tìm a để phương trình $f_6(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$ đều âm

$f_6(x)=0 \Leftrightarrow x=-a\pm\sqrt[64]{a}$ với $a\geq 0$

PT đã cho có 2 nghiệm âm

$\Leftrightarrow -a\pm\sqrt[64]{a}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \sqrt[64]{a}>a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a>a^{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a(1-a^{63})>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0<a<1$

Thí dụ 15. Cho a là số thực khác 0 và $f(x)=2^{ax}$.

1)Khi $a=1$ giải phương trình: $f_2(x)=3^{3^x}$.

2)Tìm a biết phương trình $f_2(x)=2^{128}$ có nghiệm $x=3$.

3)Tìm a biết phương trình $f_2(x)=2019^{2019^{2020}}$ có nghiệm $x=1$.

Lời giải.

1)Với $a=1$ ta có

$f_1(x)=2^x$

$f_2(x)=2^{2^x}$

$f_2(x)=3^{3^x} \Leftrightarrow 2^{2^x}=3^{3^x}$

$\Leftrightarrow log_2(2^{2^x})=log_2(3^{3^x})$

$\Leftrightarrow 2^x=3^x log_2 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=log_2 3$

$\Leftrightarrow x=log_{\frac{2}{3}}(log_2 3)$

2)ta có

$f_1(x)=2^{ax}$

$f_2(x)=2^{a.2^{ax}}$

$f_2(x)=2^{128} \Leftrightarrow 2^{a.2^{ax}}=2^{128} \Leftrightarrow a.2^{ax}=128$

$f_2(x)=2^{128}$ có nghiệm $x=3$

$\Leftrightarrow a.2^{3a}=128\ \ (*)$

Do VP(*)>0 nên $a.2^{3a}>0 \rightarrow a>0$

Xét $f(a)=a.2^{3a}$

$f'(a)=2^{3a}+a.2^{3a}ln8>0$

Suy ra f(a) là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó a=2 là nghiệm duy nhất của (*).

Vậy a=2

3) $f_2(x)=2019^{2019^{2020}}$

$\Leftrightarrow 2^{a.2^{ax}}=2019^{2019^{2020}}$

Phương trình

$f_2(x)=2019^{2019^{2020}}$ có nghiệm $x=1$

$\Leftrightarrow 2^{a.2^a}=2019^{2019^{2020}}$

$\Leftrightarrow ln\left(2^{a.2^a}\right)=ln\left(2019^{2019^{2020}}\right)$

$\Leftrightarrow 2^a\ ln(2^a)=ln\left(2019^{2019.2019^{2019}}\right)$

$\Leftrightarrow 2^a\ ln(2^a)=2019^{2019}ln(2019^{2019})\ \ (*)$

Do VP(*)>0 nên $ln(2^a)>0 \Leftrightarrow 2^a>1$

Xét $f(t)=tlnt$ với $t>1$

$f'(t)=lnt+1>0$

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Do đó có

$(*) \Leftrightarrow f(2^a)=f(2019^{2019})$

$\Leftrightarrow 2^a=2019^{2019} \Leftrightarrow a=log_2(2019^{2019})$

$\Leftrightarrow a=2019log_2(2019)$

**** Dạng toán: Tìm các yếu tố của hàm số f(x) khi biết hàm hợp $f_n(x)$ và các dạng khác.***

Thí dụ 1. Cho $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$. Tìm a biết

a) $f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{5x^2+1}}$

b) $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}$

c) $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}}}$

d) $f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{13}{27}x^2+\frac{16}{81}}}$

e) $f_3(1)=\frac{1}{2a}$

f) $f_4(1)=\frac{1}{4a}$

g) $f_6(1)=\frac{1}{\sqrt{\frac{127}{8}a^3}}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x)=-\frac{1}{3\sqrt{7}}$

p) $f'_5(0)=\frac{1}{32}$

q) $f'_6(0)=\frac{1}{1982}$

Lời giải.

TH1: Với $a=1$ có

$$f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}+1}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}$$

TH2: Với $a\neq 1$ có

$$f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+a}+a}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{a^2-1}{a-1}x^2+a^2}}$$

$$f_3(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{\frac{a^2-1}{a-1}x^2+a^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{\frac{a^2-1}{a-1}x^2+a^2}+a}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{a^3-1}{a-1}x^2+a^3}}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{a^n-1}{a-1}x^2+a^n}}$$

a)Do $f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{5x^2+1}}$ nên $a=1$.

b) $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}$ nên $a\neq 1$

Mà

$$f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{(a+1)x^2+a^2}}$$

Suy ra $\begin{cases}a+1=4\\ a^2=9\end{cases}\Leftrightarrow a=3$

c) $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}}}$ nên $a\neq 1$

Mà

$$f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{(a+1)x^2+a^2}}$$

Suy ra $\begin{cases}a+1=\frac{1}{2}\\ a^2=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

d) $f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{13}{27}x^2+\frac{16}{81}}}$ nên $a\neq 1$

mà

$$f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{a^4-1}{a-1}x^2+a^4}}$$

Suy ra $\begin{cases}\frac{a^4-1}{a-1}=\frac{13}{27}\\ a^4=\frac{16}{81}\end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$

e) TH1: Với $a=1$ có

$$f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

$f_3(1)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}$ (tm)

TH2: Với $a\neq 1$ có

$$f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{a^3-1}{a-1}x^2+a^3}}$$

$$f_3(1)=\frac{1}{2a}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\frac{a^3-1}{a-1}+a^3}}=\frac{1}{2a}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a^3-1}{a-1}+a^3}=2a\quad với\ 1\neq a>0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^4-1}{a-1}} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{a^3+a^2+a+1} = 2a$

$\Leftrightarrow a^3+a^2+a+1 = 4a^2$

$\Leftrightarrow a^3-3a^2+a+1 = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^2-2a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1+\sqrt{2}$

Vậy $a = 1\ V\ a = 1+\sqrt{2}$

f) TH1: Với $a = 1$ có

$f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$

$f_3(1) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4a}$ (không tm)

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{a^4-1}{a-1}x^2+a^4}}$

$f_4(1) = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{a^4-1}{a-1}+a^4}} = \frac{1}{4a}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^5-1}{a-1}} = 4a \quad với\ 1 \neq a > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^4+a^3+a^2+a+1} = 4a$

$\Leftrightarrow a^4+a^3+a^2+a+1 = 16a^2$

$\Leftrightarrow a^2+a+1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2} = 16$

Đặt $a+\frac{1}{a} = t > 2$

Suy ra

$t^2+t-17 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1+\sqrt{69}}{2}$

Suy ra $a+\frac{1}{a} = \frac{-1+\sqrt{69}}{2}$

$\Leftrightarrow..\Leftrightarrow a = \frac{-1+\sqrt{69} \pm \sqrt{54-2\sqrt{69}}}{4}$

Vậy $a = \frac{-1+\sqrt{69} \pm \sqrt{54-2\sqrt{69}}}{4}$

Chú ý: Ta có thể không cần chia 2 TH vì

$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+a+a^2+..+a^{n-1})x^2+a^n}}$

g) $f_6(1) = \frac{1}{\sqrt{7a^3}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{127}{8}a^3}}$

$\Leftrightarrow a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1 = \frac{127}{8}a^3$

$\Leftrightarrow a^3+a^2+a+1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3} = \frac{127}{8}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\ V\ a = 2$

h)) TH1: Với $a = 1$ có

$f_6(x) = \frac{x}{\sqrt{6x^2+1}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f_6(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{a^6-1}{a-1}x^2+a^6}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x) = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\frac{a^6-1}{a-1}}} = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\Leftrightarrow \frac{a^6-1}{a-1} = 63\ với\ a > 1$

$\Leftrightarrow a^5+a^4+a^3+a^2+a+1 = 63$

$\Leftrightarrow a^5+a^4+a^3+a^2+a = 62 \Leftrightarrow a = 2$

Chú ý:$h(a) = a^5+a^4+a^3+a^2+a$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

p) $f'_5(0) = \frac{1}{32}$

TH1: Với $a = 1$ có

$f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2+1}}$

$f'_5(x) = \frac{1}{(5x^2+1)\sqrt{5x^2+1}}$

$f'_5(0) = 1$ không tm

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f'_5(x) = \frac{a^5}{\left(\frac{a^5-1}{a-1}x^2+a^5\right)\sqrt{\frac{a^5-1}{a-1}x^2+a^5}}$

$\Rightarrow f'_5(0) = \frac{1}{\sqrt{a^5}} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow a^5 = 32^2 = 4^5$

$\Leftrightarrow a = 4.$

q) $f'_6(0) = \frac{1}{1982}$

TH1: Với $a = 1$ có

$f_6(x) = \dfrac{x}{\sqrt{6x^2+1}}$

$f'_6(x) = \dfrac{1}{(6x^2+1)\sqrt{6x^2+1}}$

$f'_6(0) = 1$ không tm

TH2: Với $a \neq 1$ có

$$f'_6(x) = \frac{a^6}{\left(\frac{a^6-1}{a-1}x^2 + a^6\right)\sqrt{\frac{a^6-1}{a-1}x^2 + a^6}}$$

$$\Rightarrow f'_6(0) = \frac{1}{\sqrt{a^6}} = \frac{1}{1982} \Leftrightarrow |a^3| = 1982$$

$\Leftrightarrow a^3 = \pm 1982 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt[3]{1982}.$

Thí dụ 2. Cho b là số thực dương và $f(x) = a + \sqrt{b(x-a)}$. Tìm a và b biết

a) $f_7(x) = 4 + 5\sqrt[128]{x-4}$

b) Khi $a = 1$ và $b = 2$ phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{129}{128}$. Tìm n.

Lời giải.

$f_1(x) = a + \sqrt{b(x-a)} = a + b^{\frac{1}{2}}\sqrt{x-a}$

$f_2(x) = a + \sqrt{b(a + \sqrt{b(x-a)} - a)}$

$= a + b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}}.\sqrt[2^2]{x-a}$

Bằng quy nạp có

$f_n(x) = a + b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+..+\frac{1}{2^n}}.\sqrt[2^n]{x-a}$

$= a + b^{1-\frac{1}{2^n}}.\sqrt[2^n]{x-a}$

a) $f_7(x) = 4 + 5\sqrt{x-4}$

mà

$f_7(x) = a + b^{\frac{127}{128}}.\sqrt[128]{x-a}$

suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ b^{\frac{127}{128}} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$ ra $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5^{\frac{128}{127}} = \sqrt[127]{5^{128}} \end{cases}$

b) $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow a + b^{1-\frac{1}{2^n}}.\sqrt[2^n]{x-a} = 0$

$\Leftrightarrow b^{1-\frac{1}{2^n}}.\sqrt[2^n]{x-a} = -a$ *với* $a \leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[2^n]{x-a} = \dfrac{-a}{b^{\frac{2^n-1}{2^n}}}$

$\Leftrightarrow x - a = \dfrac{a^{2^n}}{b^{2^n-1}} \Leftrightarrow x = a + \dfrac{a^{2^n}}{b^{2^n-1}}$

Khi $a = 1$ và $b = 2$ phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm $x = 1 + \dfrac{1}{2^{2^n-1}} = \dfrac{129}{128} \Leftrightarrow n = 3.$

Thí dụ 3. Cho $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{ax^2+b}}$. Tìm a và b biết

a) $f_8(x) = \dfrac{x}{\sqrt{100x^2+1}}$

b) $f_6(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9x^2+64}}$

c) $f_5(x) = \dfrac{4\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $f_6(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{3x^2+1}}$

e) $f_5(x) = \dfrac{9\sqrt{3}x}{\sqrt{27x^2+32}}$

f) $f'_5(x) = \dfrac{1}{(20x^2+1)\sqrt{20x^2+1}}$

h) $f'_4(x) = \dfrac{81}{(x^2+81)\sqrt{x^2+81}}$

k) $\int f_5(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{1}{32}} + C$

p) $\int f_5(x)dx = \sqrt{2x^2+4} + C$

q) $\int f_4(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{16}{81}} + C$

Lời giải.

TH1: Với $b = 1$ có

$f_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{ax^2+1}}$

$f_2(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{ax^2+1}}}{\sqrt{a.\frac{x^2}{ax^2+1}+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{2ax^2+1}}$

$f_3(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{2ax^2+1}}}{\sqrt{a.\frac{x^2}{2ax^2+1}+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{nax^2+1}}$

Bằng quy nạp có

$f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{nax^2+1}}$

TH2: Với $b \neq 1$ có

$f_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{ax^2+b}}$

$f_2(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}}{\sqrt{a.\frac{x^2}{ax^2+b}+b}} = \dfrac{x}{\sqrt{a.\frac{b^2-1}{b-1}x^2 + b^2}}$

$$f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^2-1}{b-1}x^2+b^2}}=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{x^2}{a.\frac{b^2-1}{b-1}x^2+b^2}+b}}=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^3-1}{b-1}x^2+b^3}}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^n-1}{b-1}x^2+b^n}}$$

a) TH1: Với $b=1$ có

$$f_8(x)=\frac{x}{\sqrt{8ax^2+1}}$$

Theo đề bài có: $f_8(x)=\frac{x}{\sqrt{100x^2+1}}$

Suy ra $8a=100\Leftrightarrow a=\frac{25}{2}$

TH2: Với $b\neq 1$ có

$$f_8(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^8-1}{b-1}x^2+b^8}}$$

Theo đề bài có: $f_8(x)=\frac{x}{\sqrt{100x^2+1}}$

Suy ra

$$\begin{cases} b^8=1 \\ a.\dfrac{b^8-1}{b-1}=100 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ a.0=100 \end{cases}\ (vô\ nghiệm)$$

Vậy $a=\frac{25}{2}$ và $b=1$.

b) TH1: Với $b=1$ có

$$f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{6ax^2+1}}$$

Theo đề bài có: $f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{9x^2+64}}$

nên khi này không có a,b.

TH2: Với $b\neq 1$ có

$$f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^6-1}{b-1}x^2+b^6}}$$

Theo đề bài có: $f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{9x^2+64}}$

Suy ra

$$\begin{cases} b^6=64 \\ a.\dfrac{b^6-1}{b-1}=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=2 \\ a.\dfrac{64-1}{2-1}=9 \end{cases}\ V\ \begin{cases} b=-2 \\ a.\dfrac{64-1}{-2-1}=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=2 \\ a=\dfrac{1}{7} \end{cases}\ V\ \begin{cases} b=-2 \\ a=-\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} b=-2 \\ a=-\frac{3}{7} \end{cases}$ thì $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-\frac{3}{7}x^2-2}}$ không tồn tại

Vậy $a=\frac{1}{7}$ và $b=2$.

c) $f_5(x)=\frac{4\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{32}x^2+\frac{1}{2^5}}}$

TH1: Với $b=1$ có

$$f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{5ax^2+1}}$$

Theo đề bài có: $f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{32}x^2+\frac{1}{2^5}}}$

nên khi này không có a,b.

TH2: Với $b\neq 1$ có

$$f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2+b^5}}$$

Theo đề bài có: $f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{32}x^2+\frac{1}{2^5}}}$

Suy ra

$$\begin{cases} b^5=\dfrac{1}{2^5} \\ a.\dfrac{b^5-1}{b-1}=\dfrac{1}{32} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a.\dfrac{\frac{1}{32}-1}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{32} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{1}{62} \end{cases}$$

d) $f_6(x)=\frac{8x}{\sqrt{3x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{64}x^2+\frac{1}{2^6}}}$

TH1: Với $b=1$ có

$$f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{6ax^2+1}}$$

Theo đề bài có: $f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{64}x^2+\frac{1}{2^6}}}$

nên khi này không có a,b.

TH2: Với $b\neq 1$ có

$$f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^6-1}{b-1}x^2+b^6}}$$

Theo đề bài có: $f_6(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{64}x^2+\frac{1}{2^6}}}$

Suy ra $\begin{cases} b^6=\frac{1}{2^6} \\ a.\frac{b^6-1}{b-1}=\frac{3}{64} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a.\frac{\frac{1}{64}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{64} \end{cases} V \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a.\frac{\frac{1}{64}-1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{64} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{42} \end{cases} V \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{14} \end{cases}$

e) $f_5(x)=\frac{9\sqrt{3}x}{\sqrt{27x^2+32}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{9}x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^5}}$

TH1: Với $b=1$ có

$f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{5ax^2+1}}$

Theo đề bài có: $f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{9}x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^5}}$

nên khi này không có a,b.

TH2: Với $b\neq 1$ có

$f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2+b^5}}$

Theo đề bài có: $f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{9}x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^5}}$

Suy ra

$\begin{cases} b^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5 \\ a.\frac{b^5-1}{b-1}=\frac{1}{9} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{2}{3} \\ a.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5-1}{\frac{2}{3}-1}=\frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{2}{3} \\ a=\frac{9}{211} \end{cases}$

f) $f'_5(x)=\frac{1}{(20x^2+1)\sqrt{20x^2+1}}$

TH1: Với $b=1$ có

$f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{5ax^2+1}}$

$f'_5(x)=\frac{1}{(5ax^2+1)\sqrt{5ax^2+1}}$

Theo đề bài có: $f'_5(x)=\frac{1}{(20x^2+1)\sqrt{20x^2+1}}$

Suy ra $5a=20\Leftrightarrow a=4$

TH2: Với $b\neq 1$ có

$f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2+b^5}}$

$f'_5(x)=\frac{b^5}{\left(a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2+b^5\right)\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2+b^5}}$

Theo đề bài có: $f'_5(x)=\frac{1}{(20x^2+1)\sqrt{20x^2+1}}$

Suy ra $b^5=1\Leftrightarrow b=1(loại)$

h) $f'_4(x)=\frac{1}{(x^2+81)\sqrt{x^2+81}}$

TH1: Với $b=1$ có

$f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{4ax^2+1}}$

$f'_4(x)=\frac{1}{(4ax^2+1)\sqrt{4ax^2+1}}$

Theo đề bài có: $f'_4(x)=\frac{81}{(x^2+81)\sqrt{x^2+81}}$

Suy ra

$\frac{1}{\sqrt{(4ax^2+1)^3}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2+81}{\sqrt[3]{81^2}}\right)^3}}$

Suy ra không có a.

TH2: Với $b\neq 1$ có

$f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^4-1}{b-1}x^2+b^4}}$

$f'_4(x)=\frac{b^4}{\left(a.\frac{b^4-1}{b-1}x^2+b^4\right)\sqrt{a.\frac{b^4-1}{b-1}x^2+b^4}}$

Theo đề bài có: $f'_4(x)=\frac{81}{(x^2+81)\sqrt{x^2+81}}$

Suy ra

$$\begin{cases} b^4 = 81 \\ a.\dfrac{b^4-1}{b-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm 3 \\ a.\dfrac{b^4-1}{b-1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = \dfrac{1}{40} \end{cases} V \begin{cases} b = -3 \\ a = -\dfrac{1}{20} \end{cases}$$

Với $a = -\frac{1}{20}$ và $b = -3$ thì f(x) không tồn tại

Vậy $a = \frac{1}{40}; b = 3.$

k) $\int f_5(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{1}{32}} + C$

TH1: Với $b = 1$ có

$$f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{5ax^2+1}}$$

$$\int f_5(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{5ax^2+1}}dx = \frac{\sqrt{5ax^2+1}}{5a} + C$$

Theo đề bài có: $\int f_5(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{1}{32}} + C$

nên $a > 0$ và

$$\int f_4(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5a}x^2 + \frac{1}{25a^2}}} + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5a} = 1 \\ \dfrac{1}{25a^2} = \dfrac{1}{32} \end{cases} (vô\ nghiệm)$$

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}$$

$$\int f_5(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}dx$$

$$= \frac{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}{a.\frac{b^5-1}{b-1}} + C$$

Theo đề bài có: $\int f_5(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{1}{32}} + C$

nên $a.\frac{b^5-1}{b-1} > 0$ và

$$\frac{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}{a.\frac{b^5-1}{b-1}} + C$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a.\frac{b^5-1}{b-1}}x^2 + \frac{b^5}{\left(a.\frac{b^5-1}{b-1}\right)^2}}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a.\frac{b^5-1}{b-1}} = 1 \\ \dfrac{b^5}{\left(a.\frac{b^5-1}{b-1}\right)^2} = \dfrac{1}{32} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a.\dfrac{b^5-1}{b-1} = 1 \\ b^5 = \dfrac{1}{32} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{16}{31} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

p) $\int f_5(x)dx = \sqrt{2x^2+4} + C$

TH1: Với $b = 1$ có

$$f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{5ax^2+1}}$$

$$\int f_5(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{5ax^2+1}}dx = \frac{\sqrt{5ax^2+1}}{5a} + C$$

Theo đề bài có: $\int f_5(x)dx = \sqrt{2x^2+4} + C$

nên $a > 0$ và

$$\int f_5(x)dx = \sqrt{\frac{1}{5a}x^2 + \frac{1}{25a^2}} + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5a} = 2 \\ \dfrac{1}{25a^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 10$$

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}$$

$$\int f_5(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}dx$$

$$= \frac{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}{a.\frac{b^5-1}{b-1}} + C$$

Theo đề bài có:

$$\int f_5(x)dx = \sqrt{2x^2+4} + C$$

nên $a.\frac{b^4-1}{b-1} > 0$ và

$$\frac{\sqrt{a.\frac{b^5-1}{b-1}x^2 + b^5}}{a.\frac{b^5-1}{b-1}} + C$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a.\frac{b^5-1}{b-1}}x^2 + \frac{b^5}{\left(a.\frac{b^5-1}{b-1}\right)^2}}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{a.\frac{b^5-1}{b-1}} = 2 \\ \frac{b^5}{\left(a.\frac{b^5-1}{b-1}\right)^2} = 4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a.\frac{b^5-1}{b-1} = \frac{1}{2} \\ b^5 = 1 \end{cases}$$

$(loại\ do\ b \neq 1)$

Vậy $b = 1\ và\ a = 10$

q) $\int f_4(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{16}{81}} + C$

TH1: Với $b = 1$ có

$$f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{4ax^2+1}}$$

$$\int f_4(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{4ax^2+1}}dx = \frac{\sqrt{4ax^2+1}}{4a} + C$$

Theo đề bài có: $\int f_4(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{16}{81}} + C$

nên $a > 0$ và

$$\int f_4(x)dx = \sqrt{\frac{1}{4a}x^2 + \frac{1}{16a^2}} + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4a} = 1 \\ \frac{1}{16a^2} = 81 \end{cases} (vô\ nghiệm)$$

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^4-1}{b-1}x^2 + b^4}}$$

$$\int f_4(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{a.\frac{b^4-1}{b-1}x^2 + b^4}}dx$$

$$= \frac{\sqrt{a.\frac{b^4-1}{b-1}x^2 + b^4}}{a.\frac{b^4-1}{b-1}} + C$$

Theo đề bài có: $\int f_4(x)dx = \sqrt{x^2 + \frac{16}{81}} + C$

nên $a.\frac{b^4-1}{b-1} > 0$ và $\frac{\sqrt{a.\frac{b^4-1}{b-1}x^2+b^4}}{a.\frac{b^4-1}{b-1}} + C$

$$= \sqrt{\frac{1}{a.\frac{b^4-1}{b-1}}x^2 + \frac{b^4}{\left(a.\frac{b^4-1}{b-1}\right)^2}}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{a.\frac{b^4-1}{b-1}} = 1 \\ \frac{b^4}{\left(a.\frac{b^4-1}{b-1}\right)^4} = \frac{16}{81} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a.\frac{b^4-1}{b-1} = 1 \\ b^4 = \frac{16}{81} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} a.\frac{b^4-1}{b-1} = 1 \\ b = \pm\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{27}{65} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} V \begin{cases} a = \frac{27}{13} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Thí dụ 4. Cho $f(x) = \frac{x}{ax+b}$. Tìm a và b biết

a) $f_9(x) = \frac{x}{6x+1}$

b) $f_6(x) = \frac{x}{7x+8}$

c) $f_5(2x) = \frac{x}{31x+16}$

d) $f_4\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{x}{5x+9}$

e) $f'_5(0) = 1024$ và $f_5(1) = \frac{1}{2020}$

f) $\int_1^2 \frac{1}{f_2(x)}dx = 2019 + ln16$

và a, b là các số hữu tỉ

g) $\int_1^2 \frac{1}{f_5(x)}dx = 9 + 32ln2$

và a, b là các số hữu tỉ

g) $\int_1^3 \frac{1}{f_4(x)}dx = 4 + \frac{1}{4}ln3$

và a, b là các số hữu tỉ

Lời giải.

TH1: Với $b = 1$ có

$$f_1(x) = \frac{x}{ax+1}$$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{ax+1}}{a.\frac{x}{ax+1}+1} = \frac{x}{2ax+1}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2ax+1}}{a.\frac{x}{2ax+1}+1} = \frac{x}{3ax+1}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x) = \frac{x}{nax+1}$$

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_1(x) = \frac{x}{ax+b}$$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{ax+b}}{a.\frac{x}{ax+b}+b} = \frac{x}{a.\frac{b^2-1}{b-1}x+b^2}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{a.\frac{b^2-1}{b-1}x+b}}{a.\frac{x}{a.\frac{b^2-1}{b-1}x+b}+b} = \frac{x}{a.\frac{b^3-1}{b-1}x+b^3}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x) = \frac{x}{a.\frac{b^n-1}{b-1}x+b^n}$$

a) $f_9(x) = \frac{x}{6x+1}$

TH1: Với $b = 1$ có

$$f_9(x) = \frac{x}{9ax+1} \Rightarrow 9a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

TH2: Với $b \neq 1$ có

$f_9(x) = \frac{x}{a.\frac{b^9-1}{b-1}x+b^9}$ không xảy ra.

b) $f_6(x) = \frac{x}{7x+8}$

TH1: Với $b = 1$ có

$f_6(x) = \frac{x}{6ax+1}$ không xảy ra.

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_6(x) = \frac{x}{a.\frac{b^6-1}{b-1}x+b^6}$$

Suy ra

$$\begin{cases} b^6 = 8 \\ a.\frac{b^6-1}{b-1} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm\sqrt{2} \\ a.\frac{b^6-1}{b-1} = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ a = \sqrt{2}-1 \end{cases} V \begin{cases} b = -\sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

c) $f_5(2x) = \frac{x}{31x+16}$

Đặt $2x = t \leftrightarrow x = \frac{t}{2}$

Suy ra $f_5(t) = \frac{\frac{t}{2}}{31.\frac{t}{2}+16} = \frac{t}{31t+32}$

Suy ra $f_5(x) = \frac{x}{31x+32}$

TH1: Với $b = 1$ có

$f_5(x) = \frac{x}{5ax+1}$ không xảy ra.

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_5(x) = \frac{x}{a.\frac{b^5-1}{b-1}x+b^5}$$

Suy ra

$$\begin{cases} b^5 = 32 \\ a.\frac{b^5-1}{b-1} = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

d) $f_4\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{x}{5x+9}$

Đặt $\frac{x}{6} = t \rightarrow x = 6t$

$$\rightarrow f_4(t) = \frac{6t}{30t+9} = \frac{t}{5t+\frac{3}{2}}$$

TH1: Với $b = 1$ có

$f_4(x) = \frac{x}{4ax+1}$ không xảy ra.

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_4(x) = \frac{x}{a.\frac{b^4-1}{b-1}x+b^4}$$

Suy ra

$$\begin{cases} b^4 = \frac{3}{2} \\ a.\frac{b^4-1}{b-1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\ a.\frac{b^4-1}{b-1} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\ a = 10\left(\sqrt[4]{\frac{3}{2}} - 1\right) \end{cases} V \begin{cases} b = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\ a = -10\left(\sqrt[4]{\frac{3}{2}} + 1\right) \end{cases}$$

e) $f'_5(0) = 1024$ và $f_5(1) = \frac{1}{2020}$

TH1: Với $b = 1$ có

$f_5(x) = \frac{x}{5ax+1}$.

$f'_5(x) = \frac{1}{(5ax+1)^2}$

$\Rightarrow f'_5(0) = 1$ nên không có a,b.

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_5(x) = \frac{x}{a.\frac{b^5-1}{b-1}x + b^5}$$

$$f'_5(x) = \frac{b^5}{\left(a.\frac{b^5-1}{b-1}x + b^5\right)^2}$$

do $f'_5(0) = 1024$ và $f_5(1) = \frac{1}{2020}$

Suy ra

$$\begin{cases} b^5 = 1024 = 4^5 \\ \frac{1}{a.\frac{b^5-1}{b-1} + b^5} = \frac{1}{2020} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a.\frac{b^5-1}{b-1} + b^5 = 2020 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a.\frac{1023}{3} + 1024 = 2020 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ 341a = 996 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = \frac{996}{341} \end{cases}$$

f) $\int_1^2 \frac{1}{f_2(x)}dx = 2019 + ln16$

và a, b *là các số hữu tỉ*

Ta có

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{ax+b}}{a.\frac{x}{ax+b} + b} = \frac{x}{a(b+1)x + b^2}$$

$$\frac{1}{f_2(x)} = a(b+1) + \frac{b^2}{x}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{f_2(x)}dx = \int_1^2 \left(a(b+1) + \frac{b^2}{x}\right)dx$$

$$= a(b+1) + b^2 ln2 = 2019 + 4ln2$$

Suy ra $\begin{cases} b^2 = 4 \\ a(b+1) = 2019 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm 2 \\ a(b+1) = 2019 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{2019}{3} \end{cases} V \begin{cases} b = 2 \\ a = -2019 \end{cases}$$

g) $\int_1^2 \frac{1}{f_5(x)}dx = 9 + 32ln2$

và a, b *là các số hữu tỉ*

TH1: Với $b = 1$ có

$f_5(x) = \frac{x}{5ax+1}$.

$$\frac{1}{f_5(x)} = 5a + \frac{1}{x}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{f_5(x)}dx = \int_1^2 \left(5a + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= 5a + ln2 = 9 + 32ln2$$

không có a hữu tỉ.

TH2: Với $b \neq 1$ có

$$f_5(x) = \frac{x}{a.\frac{b^5-1}{b-1}x + b^5}$$

$$\frac{1}{f_5(x)} = a.\frac{b^5-1}{b-1} + \frac{b^5}{x}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{f_5(x)}dx = \int_1^2 \left(a.\frac{b^5-1}{b-1} + \frac{b^5}{x}\right)dx$$

$= a.\frac{b^5-1}{b-1} + b^5 ln2 = 9 + 32ln2$

Suy ra $\begin{cases} a.\frac{b^5-1}{b-1} = 9 \\ b^5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{31} \\ b = 2 \end{cases}$

g) $\int_1^3 \frac{1}{f_4(x)} dx = 4 + \frac{1}{4} ln3$

và a, b là các số hữu tỉ

TH1: Với $b = 1$ có

$f_4(x) = \frac{x}{4ax+1}$.

$\frac{1}{f_4(x)} = 4a + \frac{1}{x}$

$\int_1^3 \frac{1}{f_4(x)} dx = \int_1^3 \left(4a + \frac{1}{x}\right)$

$= 8a + ln3 = 4 + \frac{1}{4} ln3$

không có a hữu tỉ.

TH2: Với $b \neq 1$ có

$f_4(x) = \frac{x}{a.\frac{b^4-1}{b-1}x + b^4}$

$\frac{1}{f_4(x)} = a.\frac{b^4-1}{b-1} + \frac{b^4}{x}$

$\int_1^3 \frac{1}{f_4(x)} dx = \int_1^3 \left(a.\frac{b^4-1}{b-1} + \frac{b^4}{x}\right) dx$

$= 2a.\frac{b^4-1}{b-1} + b^4 ln3 = 4 + \frac{1}{4} ln3$

Suy ra $\begin{cases} 2a.\frac{b^4-1}{b-1} = 4 \\ b^4 = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a.\frac{b^4-1}{b-1} = 2 \\ b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8-4\sqrt{2}}{3} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad V \quad \begin{cases} a = \frac{8+4\sqrt{2}}{3} \\ b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Thí dụ 5. Cho $f(x) = a(x-1)^2 + 1$. Tìm a biết

a) $f'_4(x) = 2^{64}(x-1)^{16}$

b) $f'_5(2) = 8$

c) $f'_6(x) = 2^{132}(x-1)^{64}$

d) $\int f_4(x)dx = \frac{32}{17}(x-1)^{17} + x + C$

e) $\int_1^2 f_5(x)dx = 2$

Lời giải.

$f_1(x) = a(x-1)^2 + 1$

$f_2(x) = a(a(x-1)^2 + 1 - 1)^2 + 1$

$= a^{1+2}(x-1)^4 + 1$

$f_3(x) = a(a^{1+2}(x-1)^4 + 1 - 1)^2 + 1$

$= a^{1+2+2^2}(x-1)^8 + 1$

Bằng quy nạp có

$f_n(x) = a^{2^n-1}(x-1)^{2^n} + 1$

a) $f'_4(x) = 2^{64}(x-1)^{16}$

Ta có

$f_4(x) = a^{15}(x-1)^{16} + 1$

$f'_4(x) = 16a^{15}(x-1)^{16}$

Mà $f'_4(x) = 2^{64}(x-1)^{16}$

Suy ra $16a^{15} = 2^{64}$

$\Leftrightarrow a^{15} = 2^{60} = 16^{15} \Leftrightarrow a = 16$

b) $f'_5(2) = 8$

có

$f_5(x) = a^{31}(x-1)^{32} + 1$

$f'_5(x) = 32a^{31}(x-1)^{31}$

$f'_5(2) = 32a^{31} = 8$

Suy ra $a = \sqrt[31]{\frac{1}{4}}$

c) $f'_6(x) = 2^{132}(x-1)^{64}$

có

$f_6(x) = a^{63}(x-1)^{64} + 1$

$f'_6(x) = 64a^{63}(x-1)^{64}$

Mà $f'_6(x) = 2^{132}(x-1)^{64}$

Suy ra $64a^{63} = 2^{132}$

$\Leftrightarrow a^{63} = 2^{126} \Leftrightarrow a = 4$

d) $\int f_4(x)dx = \frac{32}{17}(x-1)^{17} + x + C$

Ta có

$f_4(x) = a^{15}(x-1)^{16} + 1$

$\int f_4(x)dx = \frac{a^{15}}{17}(x-1)^{17} + x + C$

Mà $\int f_4(x)dx = \frac{32}{17}(x-1)^{17} + x + C$

Suy ra

$\frac{a^{15}}{17} = \frac{32}{17} \Leftrightarrow a^{15} = 32 \Leftrightarrow a^3 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2}$

e) $\int_1^2 f_5(x)dx = 2$

Có

$f_5(x) = a^{31}(x-1)^{32} + 1$

$\int_1^2 f_5(x)dx = \int_1^2 (a^{31}(x-1)^{32} + 1)dx$

$= \frac{a^{31}}{33} + 1$

Mà $\int_1^2 f_5(x)dx = 2$

Suy ra $\frac{a^{31}}{33} + 1 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt[31]{33}$

Thí dụ 6. Cho $f(x) = a(x-b)^2 + b$. Tìm a,b biết

a) $\int f_4(x)dx = \frac{32}{17}(x-b)^{17} + 3x + C$

b) $\int f_3(x)dx = 243(x-b)^9 - x + C$

Lời giải.

$f_1(x) = a(x-b)^2 + b$

$f_2(x) = a(a(x-b)^2 + b - b)^2 + b$

$= a^{1+2}(x-b)^4 + b$

$f_3(x) = a(a^{1+2}(x-b)^4 + b - b)^2 + b$

$= a^{1+2+2^2}(x-b)^8 + b$

Bằng quy nạp có

$f_n(x) = a^{2^n-1}(x-b)^{2^n} + b$

a) $\int f_4(x)dx = \frac{32}{17}(x-b)^{17} + 3x + C$

có

$f_4(x) = a^{15}(x-b)^{16} + b$

$\int f_4(x)dx = \frac{a^{15}}{17}(x-b)^{17} + bx + C$

Mà $\int f_4(x)dx = \frac{32}{17}(x-b)^{17} + 3x + C$

Suy ra

$\begin{cases} \frac{a^{15}}{17} = \frac{32}{17} \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{2} \\ b = 3 \end{cases}$

b) $\int f_3(x)dx = 243(x-b)^9 - x + C$

Ta có

$f_3(x) = a^7(x-b)^8 + b$

$\int f_3(x)dx = \frac{a^7}{9}(x-b)^9 + bx + C$

Mà $\int f_3(x)dx = 243(x-b)^9 - x + C$

Suy ra

$\begin{cases} \frac{a^7}{9} = 243 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

Thí dụ 7. *Cho* $f(x) = \frac{x}{ax+1}$. *Tìm a biết*

a) Tìm a và k biết đồ thị hàm số $y = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ *có 5 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang* $y = 1$

b) Tìm a và k biết đồ thị hàm số $y = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ *có* $y'(0) = 6$ *và 1 tiệm cận ngang* $y = \frac{1}{30}$

c) Cho $P = \sum_{i=1}^{2019} f'_i(1)$ *chứng minh* $P < \frac{2019}{2020}$

d) Tính

$lim\left(1 - f'_1(1)\right)\left(1 - f'_2(1)\right) \ldots \left(1 - f'_n(1)\right)$

e) Tìm a biết

$\lim_{x \to +\infty} f_6(x) = 2$

Lời giải.

$f_1(x) = \frac{x}{ax+1}$

$f_2(x) = \frac{\frac{x}{ax+1}}{a.\frac{x}{ax+1} + 1} = \frac{x}{2ax+1}$

$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2ax+1}}{a.\frac{x}{2ax+1} + 1} = \frac{x}{3ax+1}$

Bằng quy nạp có

$f_n(x) = \frac{x}{nax+1}$

a) Tìm a và k biết đồ thị hàm số $y = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ có 5 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang $y = 1$

do đồ thị hàm số $y = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ có 5 tiệm cận đứng nên hàm số phải có 5 biểu thức $f_i(x)$ và $a \neq 0$ suy ra $k = 5$

$y = \frac{x}{ax+1} + \frac{x}{2ax+1} + .. + \frac{x}{5ax+1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} y = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{5a} = \frac{137}{60a}$

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

$y = \frac{137}{60a}$

Theo đề bài có $\frac{137}{60a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{60}{137}$

b) Tìm a và k biết đồ thị hàm số $y=\sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ có $y'(0)=6$ và 1 tiệm cận ngang $y=\frac{1}{30}$

có

$f_n(x)=\frac{x}{nax+1}$

$f'_n(x)=\frac{1}{(nax+1)^2}$

$f'_n(0)=0$

Suy ra $y'(0)=k=6$

$y=\frac{x}{ax+1}+\frac{x}{2ax+1}+..+\frac{x}{6ax+1}$

$\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{5a}+\frac{1}{6a}=\frac{49}{20a}$

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

$y=\frac{49}{60a}$

Theo đề bài có $\frac{49}{30a}=\frac{1}{30}\Leftrightarrow a=49$

c) Cho $P=\sum_{i=1}^{2019} f_i'(1)$ chứng minh $P<\frac{2019}{2020}$

Ta có

$f_i(x)=\frac{x}{nax+1}$

$f'_i(x)=\frac{1}{(iax+1)^2}$

$f'_i(1)=\frac{1}{(i+1)^2}$

Cho $P=\sum_{i=1}^{2019} f_i'(1)$

$P=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2020^2}$

Ta có

$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

……

$\frac{1}{2020^2}<\frac{1}{2019.2020}=\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}$

Cộng vế với vế được:

$P<1-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}$

Chú ý:

Ta có

$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

……

$\frac{1}{2020^2}<\frac{1}{2019.2020}=\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}$

Cộng vế với vế được:

$P<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2020}<\frac{3}{4}$

d) Tính

$lim\left(1-f'_1(1)\right)\left(1-f'_2(1)\right)\ldots\left(1-f'_n(1)\right)$

Có

$lim\left(1-f'_1(1)\right)\left(1-f'_2(1)\right)\ldots\left(1-f'_n(1)\right)$

$=lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=lim\left(\frac{1.3}{2^2}\right)\left(\frac{2.4}{3^2}\right)\ldots\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$

$=lim\frac{n+1}{2n}=lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$

e) Tìm a biết

$\lim_{x\to+\infty} f_6(x)=2$

$f_6(x)=\frac{x}{6ax+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f_6(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{6ax+1}=\frac{1}{6a}=2$

$\Rightarrow a=\frac{1}{12}$

Thí dụ 8. Cho $f(x)=\frac{x}{ax+b}$. Tìm a và b biết

1)Đồ thị hàm số $y=f_2(x)$ có tiệm cận đứng $x=-4$ và tiệm cận ngang $y=1$

2)Đồ thị hàm số $y=f_6(x)$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{1}{12}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{12}$

3)Đồ thị hàm số $y=f_6(x)$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{32}{31}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{62}$

Lời giải.

$f_1(x)=\frac{x}{ax+b}$

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{ax+b}}{a\frac{x}{ax+b}+b}=\frac{x}{a(b+1)x+b^2}$$

1)Đồ thị hàm số $y=f_2(x)$ có tiệm cận đứng $x=-4$ và tiệm cận ngang $y=1$

Có

Đồ thị hàm số $y=\frac{x}{a(b+1)x+b^2}$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{b^2}{a(b+1)}$và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{a(b+1)}$

Do Đồ thị hàm số $y=f_2(x)$ có tiệm cận đứng $x=-4$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên ta có

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{a(b+1)}=-4\\ \frac{1}{a(b+1)}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=4\\ a(b+1)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=2\end{cases}\text{ V }\begin{cases}a=-1\\ b=-2\end{cases}$$

2)Đồ thị hàm số $y=f_6(x)$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{1}{12}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{12}$

TH1: Với $b=1$ có

$$f_1(x)=\frac{x}{ax+1}$$

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{ax+1}}{a.\frac{x}{ax+1}+1}=\frac{x}{2ax+1}$$

$$f_3(x)=\frac{\frac{x}{2ax+1}}{a.\frac{x}{2ax+1}+1}=\frac{x}{3ax+1}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x)=\frac{x}{nax+1}$$

$$suy\ ra\ f_6(x)=\frac{x}{6ax+1}$$

Đồ thị hàm số $y=\frac{x}{6ax+1}$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{1}{6a}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{6a}$

Suy ra $\begin{cases}-\frac{1}{6a}=-\frac{1}{12}\\ \frac{1}{6a}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow a=2$

TH2: Với $b\neq 1$ có

$$f_1(x)=\frac{x}{ax+b}$$

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{ax+b}}{a.\frac{x}{ax+b}+b}=\frac{x}{a.\frac{b^2-1}{b-1}x+b^2}$$

$$f_3(x)=\frac{\frac{x}{a.\frac{b^2-1}{b-1}x+b}}{a.\frac{x}{a.\frac{b^2-1}{b-1}x+b}+b}=\frac{x}{a.\frac{b^3-1}{b-1}x+b^3}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x)=\frac{x}{a.\frac{b^n-1}{b-1}x+b^n}$$

$$f_6(x)=\frac{x}{a.\frac{b^6-1}{b-1}x+b^6}$$

Đồ thị hàm số $y=\frac{x}{a.\frac{b^6-1}{b-1}x+b^6}$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{b^6}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}$

Suy ra $\begin{cases}-\frac{b^6}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=-\frac{1}{12}\\ \frac{1}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^6}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=\frac{1}{12}\\ \frac{1}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=\frac{1}{12}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^6=1\\ a.\frac{b^6-1}{b-1}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\ a.0=12\end{cases}\ (vô\ nghiệm)$$

Vậy a=2;b=1

3)Đồ thị hàm số $y=f_6(x)$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{16}{31}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{62}$

TH1: Với $b=1$ có

$$f_6(x)=\frac{x}{6ax+1}$$

Đồ thị hàm số $y=\frac{x}{6ax+1}$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{1}{6a}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{6a}$

Suy ra $\begin{cases}-\frac{1}{6a}=-\frac{32}{31}\\ \frac{1}{6a}=\frac{1}{62}\end{cases}\ (vô\ nghiệm)$

TH2: Với $b\neq 1$ có

Đồ thị hàm số $y=\frac{x}{a.\frac{b^6-1}{b-1}x+b^6}$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{b^6}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}$

Suy ra $\begin{cases}-\frac{b^6}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=-\frac{32}{31}\\ \frac{1}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=\frac{1}{62}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^6}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=\frac{32}{31}\\ \frac{1}{a.\frac{b^6-1}{b-1}}=\frac{1}{62}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^6 = 32 \\ a.\dfrac{b^6-1}{b-1} = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm 2 \\ a.\dfrac{b^6-1}{b-1} = 62 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{62}{63} \\ b = 2 \end{cases} V \begin{cases} a = -\frac{62}{21} \\ b = -2 \end{cases}$$

Thí dụ 9. Cho f(x) $= \frac{x}{x+1}$

1) Tìm a biết phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = a$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

2) Tìm a biết phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = a$ có đúng 4 nghiệm phân biệt nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$.

3) Tìm a biết phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = a$ có đúng 3 nghiệm phân biệt lớn hơn $-\frac{1}{3}$

Lời giải.

Ta có

$$f_i(x) = \frac{x}{ix+1}$$

Xét hàm số $y = \sum_{i=1}^{5} f_i(x)$

$$y = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2x+1} + .. + \frac{x}{5x+1}$$

TXĐ của hàm số $y = \sum_{i=1}^{5} f_i(x)$

$$D = (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right) \cup ...$$

$$\cup \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$$

(gồm 6 khoảng)

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} + .. + \frac{1}{(5x+1)^2} > 0$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Bbt

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
	$\frac{137}{60}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{137}{60}$

Từ bbt suy ra PT có 5 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow a \neq \frac{137}{60}$$

2) Tìm a biết phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = a$ *có đúng 4 nghiệm phân biệt nhỏ hơn* $-\frac{1}{4}$.

Từ bbt suy ra phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = a$ *có đúng 4 nghiệm phân biệt nhỏ hơn* $-\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow a > \frac{137}{60}$$

3) Tìm a biết phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = a$ có đúng 3 nghiệm phân biệt lớn hơn $-\frac{1}{3}$

Từ bbt suy ra phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = a$ *có đúng 3 nghiệm phân biệt lớn hơn* $-\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow a < \frac{137}{60}$$

Thí dụ 10. Cho f(x) $= \sqrt{ax^2+b}$

1) Tìm a,b biết $f_{12}(x) = \sqrt{x^2+8}$

2) Tìm a,b biết $f_5(x) = \sqrt{32x^2+93}$

3) Tìm a,b biết $f_6(x) = \sqrt{\frac{1}{64}x^2+1}$

4) Khi $a = 1; b = \frac{1}{4}$. Tính $\int_0^1 \frac{1}{(f_{12}(x))^2}dx$

5) Khi $a = 2; b = \frac{16}{15}$. Tính $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(f_4(x))^2}dx$

6) Khi $a = 2; b = -\frac{16}{5}$. Tính $\int_{\sqrt{3}}^{2} f_4(x)dx$

7) Khi $a = -2; b = \frac{8}{3}$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_3(x)dx$

Lời giải.

TH1: Với $a = 1$ có

$$f_1(x) = \sqrt{x^2+b}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x^2+b+b} = \sqrt{x^2+2b}$$

$$f_3(x) = \sqrt{x^2+2b+b} = \sqrt{x^2+3b}$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x) = \sqrt{x^2+nb}$$

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f_1(x) = \sqrt{ax^2 + b}$

$f_2(x) = \sqrt{a(ax^2 + b) + b}$

$= \sqrt{a^2x^2 + b(a+1)} = \sqrt{a^2x^2 + b\dfrac{a^n - 1}{a - 1}}$

Bằng quy nạp có

$f_n(x) = \sqrt{a^n x^2 + b\dfrac{a^n - 1}{a - 1}}$

1) Tìm a,b biết $f_{12}(x) = \sqrt{x^2 + 8}$

TH1: Với $a = 1$ có

$f_{12}(x) = \sqrt{x^2 + 12b}$

Suy ra $12b = 8 \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f_{12}(x) = \sqrt{a^{12}x^2 + b\dfrac{a^{12} - 1}{a - 1}}$

Suy ra $\begin{cases} a^{12} = 1 \\ b\frac{a^{12}-1}{a-1} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{12} = 1 \\ b\frac{0}{a-1} = 8 (vn) \end{cases}$

2) Tìm a,b biết $f_5(x) = \sqrt{32x^2 + 93}$

TH1: Với $a = 1$ có

$f_5(x) = \sqrt{x^2 + 5b}$

Suy ra không có a,b.

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f_5(x) = \sqrt{a^5x^2 + b\dfrac{a^5 - 1}{a - 1}}$

Suy ra $\begin{cases} a^5 = 32 \\ b\frac{a^5-1}{a-1} = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

3) Tìm a,b biết $f_6(x) = \sqrt{\frac{1}{64}x^2 + 1}$

TH1: Với $a = 1$ có

$f_6(x) = \sqrt{x^2 + 6b}$

Suy ra không có a,b.

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f_6(x) = \sqrt{a^6x^2 + b\dfrac{a^6 - 1}{a - 1}}$

Suy ra $\begin{cases} a^6 = \frac{1}{64} \\ b\frac{a^6-1}{a-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{1}{2} \\ b\frac{a^6-1}{a-1} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{32}{63} \end{cases} V \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{32}{21} \end{cases}$

4) Khi $a = 1; b = \frac{1}{4}$. Tính $\int_0^1 \frac{1}{(f_{12}(x))^2}dx$

$f_{12}(x) = \sqrt{x^2 + 12.\frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 + 3}$

Đặt $x = \sqrt{3}tant$ từ đó ta tính được

$\int_0^1 f_{12}(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3}dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

5) Khi $a = 2; b = \frac{16}{15}$. Tính $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(f_4(x))^2}dx$

$f_4(x) = \sqrt{2^4x^2 + \frac{16}{15}.\frac{2^4 - 1}{2 - 1}} = 4\sqrt{x^2 + 1}$

Đặt $x = \sqrt{3}tant$ từ dó ta tính được

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(f_4(x))^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{16(x^2 + 1)}dx = \frac{\pi}{192}$

6) Khi $a = 2; b = -\frac{16}{5}$. Tính $\int_{\sqrt{3}}^2 f_4(x)dx$

$f_4(x) = \sqrt{2^4x^2 - \frac{16}{5}.\frac{2^4 - 1}{2 - 1}} = 4\sqrt{x^2 - 3}$

$\int_{\sqrt{3}}^2 f_4(x)dx = \int_{\sqrt{3}}^2 4\sqrt{x^2 - 3}dx = 4 - 3ln3$

(dùng lượng giác hóa hoặc tích phân từng phần)

7) Khi $a = -2; b = \frac{8}{3}$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^1 f_3(x)dx$

$f_3(x) = \sqrt{(-2)^3x^2 + \frac{8}{3}.\frac{(-2)^3 - 1}{-2 - 1}} = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - x^2}$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 f_3(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2\sqrt{2}\sqrt{1 - x^2}dx = 2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (đặt x=sint)

Tổng quát:

Hàm số $f(x) = \sqrt[k]{ax^k + b}$

TH1: Với $a = 1$ có

$f_n(x) = \sqrt[k]{x^k + nb}$

TH2: Với $a \neq 1$ có

$f_n(x) = \sqrt[k]{a^n x^k + b\dfrac{a^n - 1}{a - 1}}$

Hay mọi a ta có:

$f_n(x) = \sqrt[k]{a^n x^k + b(1 + a + .. + a^{n-1})}$

Thí dụ 11. Cho $f(x)=\left(\sqrt{x}+a\right)^2$

1)Tìm a>0 biết phương trình:

$$\sum_{k=1}^{10} f_n(x)=77$$

có nghiệm $x=0$.

2)Tìm a >0 biết phương trình:

$$\sum_{k=1}^{8} f_n(x)=400$$

có nghiệm $x=1$.

3)Khi a=2 giải phương trình

$$\sum_{k=1}^{7} f_n(x)=777$$

4)Khi $a=-2$ giải phương trình biết $x\geq 196$

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_5(x)}+\frac{1}{f_8(x)}=\frac{39}{80}$$

5)Khi $a=-2$ giải phương trình biết $x\geq 36$

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}=\frac{7}{2}$$

6)Khi $a=-3$ giải phương trình biết $x\geq 144$

$$\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}+\frac{1}{f_5(x)}=\frac{21}{16}$$

7)Khi $a=-1$ giải phương trình biết $x\geq 9$

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}=\frac{7}{2}$$

8)Khi $a=-1$ giải phương trình biết $x\geq 9$

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}=\frac{13}{2}$$

Lời giải.

ĐK: $x\geq 0$.

$f_1(x)=\left(\sqrt{x}+a\right)^2$. Do a>0

$$f_2(x)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}+a\right)^2}+a\right)^2=\left(\sqrt{x}+2a\right)^2$$

$$f_3(x)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}+2a\right)^2}+a\right)^2=\left(\sqrt{x}+3a\right)^2$$

Bằng quy nạp có

$$f_n(x)=\left(\sqrt{x}+na\right)^2$$

1)Phương trình:

$$\sum_{k=1}^{10} f_n(x)=77$$

có nghiệm $x=0$

$$\Leftrightarrow a^2+4a^2+\cdots+100a^2=77$$

$$\Leftrightarrow 385a^2=77\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

2)phương trình:

$$\sum_{k=1}^{8} f_n(x)=400$$

có nghiệm $x=1$.

$$\Leftrightarrow (1+a)^2+(2+a)^2+..+(8+a)^2=400$$

$$\Leftrightarrow 204+72a+8a^2=400$$

$$\Leftrightarrow 8a^2+72a-196=0\Leftrightarrow a=\frac{-9+\sqrt{179}}{2}$$

3)Khi a=2 giải phương trình

$$\sum_{k=1}^{7} f_n(x)=777$$

$f(x)=\left(\sqrt{x}+2\right)^2$

$f_n(x)=\left(\sqrt{x}+2n\right)^2$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{7} f_n(x)=777$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\right)^2+\left(\sqrt{x}+4\right)^2+..+\left(\sqrt{x}+14\right)^2=777$$

$$\Leftrightarrow 7x+56\sqrt{x}+560=777$$

$$\Leftrightarrow 7x+56\sqrt{x}-217=0$$

$$\Leftrightarrow x+8\sqrt{x}-31=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=-4+\sqrt{47}$$

$$\Leftrightarrow x=63-8\sqrt{47}$$

4)Khi $a=-2$ giải phương trình

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_5(x)}+\frac{1}{f_8(x)}=\frac{39}{80}$$

Do $x\geq 196$

$f(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

$f_1(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

$$f_2(x)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-2\right)^2=\left(\sqrt{x}-4\right)^2$$

……

$$f_7(x)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-12\right)^2}-2\right)^2=\left(\sqrt{x}-14\right)^2$$

$$f_8(x)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-14\right)^2}-2\right)^2=\left(\sqrt{x}-16\right)^2$$

Suy ra

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_5(x)}+\frac{1}{f_8(x)}=\frac{39}{80}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{x}-4\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x}-10\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x}-16\right)^2}=\frac{39}{80}$$

Đặt $\sqrt{x}-10=a$

PT đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+6)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a-6)^2}=\frac{39}{80}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2+72}{(a^2-36)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{39}{80}$$

Đặt $a^2=t$

Ta có:

$$\frac{2t+72}{(t-36)^2}+\frac{1}{t}-\frac{39}{80}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3(t-20)(13t^2-756t+1728)}{80t(t-36)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t=20\ V\ t=\frac{6(63\pm\sqrt{3345})}{13}$$

Suy ra

$$a=\pm\sqrt{20}\ V\ a=\pm\sqrt{\frac{6(63\pm\sqrt{3345})}{13}}$$

Suy ra

$$x=\left(10\pm\sqrt{20}\right)^2\ \text{V}\ x=\left(10\pm\sqrt{\frac{6(63\pm\sqrt{3345})}{13}}\right)^2$$

Đối chiếu điều kiện $x\geq 196$ suy ra

$$x=\left(10+\sqrt{20}\right)^2\ \text{V}\ x=\left(10+\sqrt{\frac{6(63\pm\sqrt{3345})}{13}}\right)^2$$

5)Khi $a=-2$ giải phương trình

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}=\frac{7}{2}$$

$$f(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$$

$$f_n(x)=\left(\sqrt{x}-2n\right)^2 \text{ với n=2,3,4}$$

Suy ra

$$\frac{1}{f_2(x)}+\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}=\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{x}-4\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x}-6\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x}-8\right)^2}=\frac{7}{2}$$

Đặt $\sqrt{x}-6=a$

PT đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+2)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a-2)^2}=\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2+8}{(a^2-4)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{2}$$

Đặt $a^2=t$

Ta có:

$$\frac{2t+8}{(t-4)^2}+\frac{1}{t}-\frac{7}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-2)(7t^2-48t+16)}{2t(t-4)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t=2\ V\ t=\frac{4(6\pm\sqrt{29})}{7}$$

Suy ra

$$a=\pm\sqrt{2}\ V\ a=\pm\sqrt{\frac{4(6\pm\sqrt{29})}{7}}$$

Suy ra pt đã cho có 6 nghiệm:

$$x=\left(6\pm\sqrt{2}\right)^2\ \text{V}\ x=\left(6\pm\sqrt{\frac{4(6\pm\sqrt{29})}{7}}\right)^2$$

Do $x\geq 36$ suy ra

$$x=\left(6+\sqrt{2}\right)^2\ \text{V}\ x=\left(6+\sqrt{\frac{4(6\pm\sqrt{29})}{7}}\right)^2$$

6)Khi $a=-3$ giải phương trình

$$\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}+\frac{1}{f_5(x)}=\frac{21}{16}$$

$$f(x)=\left(\sqrt{x}-3\right)^2$$

$$f_n(x)=\left(\sqrt{x}-3n\right)^2$$

Suy ra

$$\frac{1}{f_3(x)}+\frac{1}{f_4(x)}+\frac{1}{f_5(x)}=\frac{21}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{x}-9\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x}-12\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x}-15\right)^2}=\frac{21}{16}$$

Đặt $\sqrt{x}-12=a$

PT đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+3)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a-3)^2}=\frac{21}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2+18}{(a^2-9)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{21}{16}$$

Đặt $a^2 = t$

Ta có:

$$\frac{2t+18}{(t-9)^2} + \frac{1}{t} - \frac{21}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3(t-1)(7t^2-135t+423)}{16t(t-9)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \; V \; t = \frac{3(45 \pm \sqrt{681})}{14}$$

Suy ra

$$a = \pm 1 \; V \; a = \pm\sqrt{\frac{3(45 \pm \sqrt{681})}{14}}$$

Suy ra

$$x = (12 \pm 1)^2 \; V \; x = \left(12 \pm \sqrt{\frac{3(45\pm\sqrt{681})}{14}}\right)^2$$

do $x \geq 144$ suy ra

$$x = 13^2 \; V \; x = \left(12 + \sqrt{\frac{3(45\pm\sqrt{681})}{14}}\right)^2$$

7)Khi $a = -1$ giải phương trình

$$\frac{1}{f_2(x)} + \frac{1}{f_3(x)} + \frac{1}{f_4(x)} = \frac{7}{3}$$

$$f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$$

$$f_n(x) = \left(\sqrt{x} - n\right)^2$$

Suy ra

$$\frac{1}{f_2(x)} + \frac{1}{f_3(x)} + \frac{1}{f_4(x)} = \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} + \frac{1}{(\sqrt{x}-3)^2} + \frac{1}{(\sqrt{x}-4)^2} = \frac{7}{3}$$

Đặt $\sqrt{x} - 3 = a$

PT đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a-1)^2} = \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2+2}{(a^2-1)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3}$$

Đặt $a^2 = t$

Ta có:

$$\frac{2t+2}{(t-1)^2} + \frac{1}{t} - \frac{7}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-3)(7t^2-2t+1)}{3t(t-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3$$

Suy ra

$$a = \pm\sqrt{3}$$

Suy ra

$$x = \left(3 + \sqrt{3}\right)^2$$

8)Khi $a = -1$ giải phương trình

$$\frac{1}{f_2(x)} + \frac{1}{f_3(x)} + \frac{1}{f_4(x)} = \frac{13}{2}$$

$$f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$$

$$f_n(x) = \left(\sqrt{x} - n\right)^2$$

Suy ra

$$\frac{1}{f_2(x)} + \frac{1}{f_3(x)} + \frac{1}{f_4(x)} = \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} + \frac{1}{(\sqrt{x}-3)^2} + \frac{1}{(\sqrt{x}-4)^2} = \frac{13}{2}$$

Đặt $\sqrt{x} - 3 = a$

PT đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a-1)^2} = \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2+2}{(a^2-1)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{2}$$

Đặt $a^2 = t$

Ta có:

$$\frac{2t+2}{(t-1)^2} + \frac{1}{t} - \frac{13}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-2)(13t^2-6t+1)}{t(t-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

Suy ra

$$a = \pm\sqrt{2}$$

Suy ra

$$x = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2$$

Tổng quát:

Với a,b,x là số thực dương

Hàm số $f(x) = \left(a\sqrt[k]{x} + b\right)^k$

TH1: Với $a = 1$ có

$$f_n(x) = \left(a\sqrt[k]{x} + nb\right)^k$$

TH2: Với $a \neq 1$ có

$$f_n(x) = \left(a^n.\sqrt[k]{x} + n\frac{a^n-1}{a-1}\right)^k$$

Chú ý:Nếu k lẻ thì a,b, là số thực.

Thí dụ 12. Cho $f(x) = \left(2\sqrt{x} - 3\right)^2$

Cho phương trình: $f_2(x) = m$

a) Giải phương trình khi m=9.

b) Giải phương trình khi m=4.

c)Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

$f_1(x) = \left(2\sqrt{x} - 3\right)^2$

$f_2(x) = \left(2\sqrt{\left(2\sqrt{x} - 3\right)^2} - 3\right)^2 =$

$= \left(2\left|2\sqrt{x} - 3\right| - 3\right)^2$

Suy ra

$f_2(x) = m$

$\Leftrightarrow \left(2\left|2\sqrt{x} - 3\right| - 3\right)^2 = m$

a) với m=9 có

$f_2(x) = 9$

$\Leftrightarrow \left(2\left|2\sqrt{x} - 3\right| - 3\right)^2 = 9$

$\Leftrightarrow .. \Leftrightarrow x = 0\ V\ x = \frac{9}{4}\ V\ x = 9$

b) với m=4 có

$f_2(x) = 4$

$\Leftrightarrow \left(2\left|2\sqrt{x} - 3\right| - 3\right)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16}\ V\ x = \frac{25}{16}\ V\ x = \frac{49}{16}\ V\ x = \frac{121}{16}$

Tương tự

$f_2(x) = 1$

$\Leftrightarrow \left(2\left|2\sqrt{x} - 3\right| - 3\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\ V\ x = 1\ V\ x = 4\ V\ x = \frac{25}{4}$

$f_2(x) = 3$

$\Leftrightarrow \left(2\left|2\sqrt{x} - 3\right| - 3\right)^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{8}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\ V\ x = \frac{3}{8}\left(14 \pm 3\sqrt{3}\right)$

c)

$f_2(x) = m$

$\Leftrightarrow \left(2\left|2\sqrt{x} - 3\right| - 3\right)^2 = m$

Đặt $\sqrt{x} = t \geq 0$

PT đã cho trở thành:

$(2|2t - 3| - 3)^2 = m$

Xét $h(t) = (2|2t - 3| - 3)^2$

$= \begin{cases} (-4t + 3)^2 & \text{khi } 0 \leq t \leq 3 \\ (4t - 9)^2 & \text{khi } 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$

Bbt

t	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$
$h(t)$	9	0	9	0	$+\infty$

Từ bbt suy ra PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < m < 9.$

Thí dụ 13. Cho $f(x) = \left(a\sqrt[3]{x} + b\right)^3$

1)Tìm a,b biết $f_2(x) = f_3(x) = -1$ có nghiệm $x = -1$. Trong các cặp (a;b) thỏa mãn đề bài tìm (a;b) để $P = a^6 + b^6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2)Tìm a,b biết $f_2(x) = f_3(x) = 1$ có nghiệm $x = 1$. Trong các cặp (a;b) thỏa mãn đề bài (a;b) tìm giá trị nhỏ nhất $P = a^4 + b^4$.

3)Biết $f_1(x) = -1$ có nghiệm $x = -1$. Chứng minh với mọi n phương trình $f_n(x) = -1$ có nghiệm $x = -1$.

4)Biết $f_1(x) = 1$ có nghiệm $x = 1$. Chứng minh với mọi n phương trình $f_n(x) = 1$ có nghiệm $x = 1$.

Lời giải.

$f_2(x) = \left(a^2.\sqrt[3]{x} + b(1 + a)\right)^3$

$f_3(x) = \left(a^3.\sqrt[3]{x} + b(1 + a + a^2)\right)^3$

1)Do $f_2(x) = f_3(x) = -1$ có nghiệm $x = -1$

Suy ra

$\left(-a^2 + b(1 + a)\right)^3 = \left(-a^3 + b(1 + a + a^2)\right)^3 = -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + b(1 + a) = -1 \\ -a^3 + b(1 + a + a^2) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - a + b)(1 + a) = 0 \\ 1 - a^3 + b(1 + a + a^2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} V \begin{cases} b = a - 1 \\ 1 - a^3 + (a - 1)(1 + a + a^2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} V \begin{cases} b = a - 1 \\ a \in R \end{cases}$

+Với $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ thì $P = a^6 + b^6 = 65$

+Với $\begin{cases} b = a - 1 \\ a \in R \end{cases}$ thì

$P = a^6 + b^6 = a^6 + (1 - a)^6$

Dùng đạo hàm hoặc bđt $a^6+b^6 \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^6$

Ta được $a^6+(1-a)^6 \geq \frac{1}{32}$

Vậy GTNN của P là $\frac{1}{32}$ khi và chỉ khi

$a=\frac{1}{2}; b=-\frac{1}{2}$

2)Do $f_2(x)=f_3(x)=1$

có nghiệm $x=1$

Suy ra

$\left(a^2+b(1+a)\right)^3=\left(a^3+b(1+a+a^2)\right)^3=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b(1+a)=1 \\ a^3+b(1+a+a^2)=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1+b)(1+a)=0 \\ a^3-1+b(1+a+a^2)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} V \begin{cases} b=1-a \\ 1-a^3+(1-a)(1+a+a^2)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} V \begin{cases} b=1-a \\ a\in R \end{cases}$

+Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$ thì $P=a^4+b^4=17$

+Với $\begin{cases} b=1-a \\ a\in R \end{cases}$ thì

$P=a^4+b^4=a^4+(1-a)^4$

Dùng đạo hàm hoặc bđt $a^4+b^4 \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$

Ta được $a^4+(1-a)^4 \geq \frac{1}{8}$

Vậy GTNN của P là $\frac{1}{32}$ khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$

2)Do $f_2(x)=f_3(x)=1$

có nghiệm $x=1$

Suy ra

$\left(a^2+b(1+a)\right)^3=\left(a^3+b(1+a+a^2)\right)^3=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b(1+a)=1 \\ a^3+b(1+a+a^2)=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1+b)(1+a)=0 \\ a^3-1+b(1+a+a^2)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} V \begin{cases} b=1-a \\ 1-a^3+(1-a)(1+a+a^2)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} V \begin{cases} b=1-a \\ a\in R \end{cases}$

3)Biết $f_1(x)=-1$ có nghiệm $x=-1$.

Chứng minh với mọi n thì phương trình

$f_n(x)=-1$ có nghiệm $x=-1$.

Do $f_1(x)=-1$ có nghiệm $x=-1$ nên

$\left(a\sqrt[3]{-1}+b\right)^3=-1$

$\Leftrightarrow -a+b=-1 \Leftrightarrow b=a-1$

Bằng quy nạp được

$f_n(x)=\left(a^n.\sqrt[3]{x}+b(1+a+..+a^{n-1})\right)^3$

$f_n(-1)=\left(a^n.\sqrt[3]{-1}+b(1+a+..+a^{n-1})\right)^3$

$=\left(a^n.\sqrt[3]{-1}+(a-1)(1+a+..+a^{n-1})\right)^3$

$=(-a^n+a^n-1)^3=-1$

Suy ra phương trình $f_n(x)=-1$ có nghiệm $x=-1$.

4)Biết $f_1(x)=1$ có nghiệm $x=1$.

Chứng minh với mọi n thì phương trình

$f_n(x)=1$ có nghiệm $x=1$.

Do $f_1(x)=1$ có nghiệm $x=1$ nên

$\left(a\sqrt[3]{1}+b\right)^3=1$

$\Leftrightarrow a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$

Bằng quy nạp được

$f_n(x)=\left(a^n.\sqrt[3]{x}+b(1+a+..+a^{n-1})\right)^3$

$f_n(1)=\left(a^n.\sqrt[3]{1}+(1-a)(1+a+..+a^{n-1})\right)^3$

$=\left(a^n.\sqrt[3]{1}+(1-a)(1+a+..+a^{n-1})\right)^3$

$=(a^n+1-a^n)^3=1$

Suy ra phương trình $f_n(x)=1$ có nghiệm $x=1$.

Mở rộng 3. Phương pháp lượng giác hóa

Thí dụ 1. Cho $f(x)=2\sqrt{x^2-x^4}$.

1) Giải phương trình: $f_6(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Tính $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f_2(x)\,dx$

3) Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_2(x)\,dx$

Lời giải.

1)ĐKXĐ: $x^2-x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1;1]$

Đến đây ta nghĩ đến phương pháp lượng giác hóa.

Đặt $x=sint$ *với* $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. *Suy ra*

$f_1(x)=f(x)=2.\sqrt{sin^2t(1-sin^2t)}=$

$=2|sintcost|=|sin2t|$

$f_2(x)=2.\sqrt{sin^2 2t(1-sin^2 2t)}=$

$=2|sin2tcos2t|=|sin2^2t|.$

Bằng quy nạp ta được:

$f_6(x) = |sin2^6 t| = |sin64t|.$

$f_6(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |sin64t| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Giải tiếp dành cho bạn đọc.

2) Tính $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f_2(x)\,dx$

Đặt $x = sint$ *với* $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Theo câu trên có

$f_2(x) = |sin4t|$

$dx = costdt$

Đổi cận

$x = -\frac{1}{2} \to t = -\frac{\pi}{6}$

$x = 1 \to t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f_2(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |sin4t|\,costdt$$

$$= \cdots = \frac{32 + 16\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{60}$$

3) Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_2(x)\,dx$

Đặt $x = sint$ *với* $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Theo câu trên có

$f_2(x) = |sin4t|$

$dx = costdt$

Đổi cận

$x = \frac{1}{2} \to t = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \to t = \frac{\pi}{4}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_2(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} |sin4t|\,costdt$$

$$= \cdots = \frac{8\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{60}$$

Các PT tương tự :

Cho $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x^4}$.

1)Tìm số nghiệm của phương trình

a) $f_5(x) = |2x^2 - 1|$. b) $f_6(x) = |3x - 4x^3|$.

c) $f_4(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$. d) $f_5(x) = \sqrt{1-x^2}$.

e) $f_3(x) = \left|\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right|$. f) $f_4(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$.

*Để có PT lượng giác hàm số lượng khác chẳng hạn $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

Đặt $x = tant$ *với* $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *suy ra*

$f(x) = tan2t; f_n(x) = tan2^n t.$

Ta tạo ra các PT hàm hợp sau

a) $f_6(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. b) $f_5(x) = -x$.

c) $f_5(x) = \frac{1+x}{1-x}$. d) $f_5(x) = \frac{1-\sqrt{3}x}{1+\sqrt{3}x}$.

Thí dụ 2. *Cho* $f(x) = x^3 - 3x$

a)Giải phương trình: $f_5(x) = 1$.

b)Giải phương trình: $f_4(x) = \sqrt{2}$.

c)Giải phương trình: $f_4(x) = -\sqrt{3}$.

d)Giải phương trình: $f_4(x) = 2$.

e)Giải phương trình: $f_4(x) = 0$.

f)Giải phương trình: $f_4(x) = 2\cos 81$

h) Tính $\int_1^{\sqrt{3}} f_2(x)\,dx$

k) Tính $\int_1^2 f_2(x)\,dx$

p) Tính $\int_0^1 f_3(x)\,dx$

q) Tính $f'_5(1)$

v) Tính $f'_5(\sqrt{2})$

s) Tính $f'_5(\sqrt{3})$

t) Tính $f'_5\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên f(x)

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f_5(x)=1$hay $f(f_4(x))=1$

tương đương với $f_4(x)=x_i\in[-2;2]$.

Từ bảng biến suy ra $f_4(x)=x_i$ tương đương với $f_3(x)=y_i\in[-2;2]$.Cứ như vậy ta có $f_1(x)=f(x)=z_i\in[2;2]$ có các nghiệm thuộc đoạn $[2;2]$. Suy ra tất cả các nghiệm của PT đã cho $f_5(x)=1$ đều thuộc đoạn $[-2;2]$.

Đặt $x=2cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f(x)=f_1(x)=2(4cos^3t-3cos2t)=2cos3t$

$f_2(x)=2(4cos^33t-3cos3t)=2cos3^2t$

Bằng quy nạp ta được

$f_5(x)=2cos3^5t=2cos243t$

Vậy PT $f_5(x)=1$ trở thành

$2cos243t=1\Leftrightarrow cos243t=cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\pi}{729}+\dfrac{k2\pi}{243}$

Giải tiếp a,b,c,d,exin dành cho bạn đọc.

h) Tính $\int_1^{\sqrt{3}}f_2(x)\,dx$

Đặt $x=2cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f(x)=f_1(x)=2(4cos^3t-3cos2t)=2cos3t$

$f_2(x)=2(4cos^33t-3cos3t)=2cos3^2t$

$dx=-2sintdt$

Đổi cận

$x=1\to t=\dfrac{\pi}{3}$

$x=\sqrt{3}\to t=\dfrac{\pi}{6}$

$\int_1^{\sqrt{3}}f_2(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(-4cos9t.sint)dt$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}4cos9t.sintdt=\cdots=\dfrac{1}{5}$

k) Tính $\int_1^2 f_2(x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}4cos9t.sintdt=\cdots=-\dfrac{3}{40}$

p) Tính $\int_0^1 f_3(x)\,dx$

Đặt $x=2cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

Đặt $x=2cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f(x)=f_1(x)=2(4cos^3t-3cos2t)=2cos3t$

$f_2(x)=2(4cos^33t-3cos3t)=2cos3^2t$

$f_3(x)=2cos3^3t$

$dx=-2sintdt$

Đổi cận

$x=0\to t=\dfrac{\pi}{2}$

$x=1\to t=\dfrac{\pi}{3}$

$\int_0^1 f_3(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}(-4cos27t.sint)dt$

$=-\dfrac{53}{364}$

q) Tính $f'_5(1)$

Đặt $x=2cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f(x)=f_1(x)=2(4cos^3t-3cos2t)=2cos3t$

$f_2(x)=2(4cos^33t-3cos3t)=2cos3^2t$

Bằng quy nạp ta được

$f_5(x)=f_5(2cost)=2cos3^5t$

$=h(t)=2cos243t$

Khi $x=1\ thì\ t=\frac{\pi}{3}$

$h'(t)=-486sin243t$

$h'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-486\sin\left(243\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

$x(t)=2cost$

$x'(t)=-2sint$

$x'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2sin\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t)=2cost$

Ta có: $h'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=f'_5(1).x'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Từ đó ta được $f'_5(1)=0$.

v) Tính $f'_5(\sqrt{2})$

Đặt $x=2cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f(x)=f_1(x)=2(4cos^3t-3cos2t)=2cos3t$

$f_2(x)=2(4cos^33t-3cos3t)=2cos3^2t$

Bằng quy nạp ta được

$f_5(x)=f_5(2cost)=2cos3^5t$

$=h(t)=2cos243t$

Khi $x=\sqrt{2}\ thì\ t=\frac{\pi}{4}$

$h'(t)=-486sin243t$

$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -486\sin\left(243\frac{\pi}{4}\right)$

$= -486\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -243\sqrt{2}$

$x(t) = 2cost$

$x'(t) = -2sint$

$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t) = 2cost$

Ta có: $h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'_5(1).x'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow -243\sqrt{2} = -\sqrt{2}f'_5(1)$

Từ đó ta được $f'_5(\sqrt{2}) = 243.$

s) Tính $f'_5(\sqrt{3})$

$f_5(x) = f_5(2cost) = 2cos3^5t$

$= h(t) = 2cos243t$

Khi $x = \sqrt{3}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$

$h'(t) = -486sin243t$

$h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -486\sin\left(243\frac{\pi}{6}\right) = 0$

$x(t) = 2cost$

$x'(t) = -2sint$

$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2sin\frac{\pi}{6} = -1$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t) = 2cost$

Ta có: $h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'_5(\sqrt{2}).x'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 0 = -f'_5(\sqrt{2})$

Từ đó ta được $f'_5(\sqrt{3}) = 0.$

t) Tính $f'_5\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

có $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = 2cos\frac{\pi}{12}$

$f_5(x) = f_5(2cost) = 2cos3^5t$

$= h(t) = 2cos243t$

Khi $x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = 2cos\frac{\pi}{12}$ thì $t = \frac{\pi}{12}$

$h'(t) = -486sin243t$

$h'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -486\sin\left(243\frac{\pi}{12}\right) = -243\sqrt{2}$

$x(t) = 2cost$

$x'(t) = -2sint$

$x'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2sin\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t) = 2cost$

Ta có: $h'\left(\frac{\pi}{12}\right) = f'_5\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right).x'\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\Leftrightarrow -243\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}f'_5\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

Từ đó ta được

$f'_5\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{486}{\sqrt{3}-1} = 243(\sqrt{3}+1).$

Vậy tại sao tạo ra được phương trình dạng như thí dụ 2.Câu trả lời đó là xuất phát hàm số

$f(x) = 4x^3 - 3x$ và đẳng thức

$4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$

Xét $f(x) = 4x^3 - 3x$

Ta có bảng biến thiên f(x)

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

Nhận xét: Từ bbt suy ra ứng với mỗi x thuộc đoạn $[-1;1]$ ta có $f(x) \in [-1;1]$ và ngược lại $f(x) \in [-1;1]$ chỉ xảy ra với các giá trị $x \in [-1;1]$. Do đó khi $x \in [-1;1]$ ta có

Vậy ta có: $x = 2cost$ với $t \in [0;\pi]$

Khi này ta tạo ra được:

Cho $f(x) = 4x^3 - 3x$

a)Giải phương trình: $f_5(x) = -1.$

b)Giải phương trình: $f_4(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)Giải phương trình: $f_5(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

d)Giải phương trình: $f_4(x) = 0.$

e) Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_2(x)\,dx$

f) Tính $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f_3(x)\,dx$

h)Giải phương trình: $f_4(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

k)Giải phương trình: $f_3(x)=\sqrt{x^2-x^4}$.

Cách giải tương tự như thí dụ 2,3.

* Bây giờ để tạo ra các hàm bậc 3 tương tự $f(x)=4x^3-3x$ là khá dễ dàng

1)chẳng hạn để khi giải cần phải đặt $x=2cost$ và đưa f(x) về dạng $2cos3t=2(4cos^3x-3cosx)$

Suy ra $f(x)=2\left(4\left(\frac{x}{2}\right)^3-3\frac{x}{2}\right)=x^3-3x.$

2) chẳng hạn để khi giải cần phải đặt $x=\sqrt{2}cost$ và đưa f(x) về dạng $\sqrt{2}cos3t$

Suy ra $f(x)=\sqrt{2}\left(4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3-3\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=2x^3-3x.$

Chú ý: Các hàm $f(x)=-x^3+3x$

Hoặc $f(x)=-4x^3+3x;.....$ cũng thuộc loại này.

* Để tạo ra dạng toán phức tạp hơn

3)chẳng hạn để khi giải cần phải đặt $x=1+cost$ và đưa f(x) về dạng $1+cos3t$

Suy ra $f(x)=1+\left(4(x-1)^3-3(x-1)\right)$

$=4x^3-12x^2+9x$

$f(x)=4x^3-12x^2+9x$

Ta có bảng biến thiên f(x)

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗ 0	↗ 2	↘ 0	↗ 2	↗ $+\infty$

Ta có bài toán:

Cho $f(x)=4x^3-12x^2+9x$. *Tìm số nghiệm phương trình:*

a) $f_5(x)=0.$

b $f_4(x)=1$

c) $f_5(x)=2$

d) $f_4(x)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

HD: lí luận tương tự thí dụ 2 dẫn tới

Đặt $x=1+cost$ với $t\in[0;\pi]$

$f_1(x)=1+\cos 3t$

$f_2(x)=1+\cos 3^2t$

Bằng quy nạp được:

$f_n(x)=1+\cos 3^nt$

4) chẳng hạn để khi giải cần phải đặt $x=2+2cost$ và đưa f(x) về dạng $2+2cos3t$

Suy ra $f(x)=2+2\left(4\left(\frac{x}{2}-1\right)^3-3(\frac{x}{2}-1)\right)$

$=x^3-6x^2+9x$

Ta có bài toán:

Cho $f(x)=x^3-12x^2+9x$. *Tìm số nghiệm phương trình:*

a) $f_5(x)=0.$

b) $f_6(x)=2$

c) $f_5(x)=2-\sqrt{3}$

d) $f_4(x)=4.$

HD : Đặt $x=2+2cost$ với $t\in[0;\pi]$

$f_1(x)=2+2\cos 3t$

$f_2(x)=2+2\cos 3^2t$

Bằng quy nạp được:

$f_n(x)=2+2\cos 3^nt$

5)Để khi giải cần phải đặt $x=1+2cost$ và đưa f(x) về dạng $1+2cos3t$

Suy ra $f(x)=1+2\left(4\left(\frac{x-1}{2}\right)^3-3(\frac{x-1}{2})\right)$

$=x^3-3x^2+3$

Ta được

Cho $f(x)=x^3-3x^2+3$. *Tìm số nghiệm phương trình:*

a) $f_5(x)=0$.

b) $f_6(x)=-1$.

c) $f_6(x)=3$.

b) $f_6(x)=-\frac{1}{2}$.

6)Để khi giải cần phải đặt $x=-1+2cost$ và đưa f(x) về dạng $-1+2cos3t$

Suy ra $f(x)=-1+2\left(4\left(\frac{x+1}{2}\right)^3-3(\frac{x+1}{2})\right)$

$=x^3+3x^2-3$

Cho $f(x)=x^3+3x^2-3$. *Tìm số nghiệm phương trình:*

a) $f_5(x)=-1$.

b) $f_6(x)=1$.

c) $f_6(x)=0$. *với* $x\geq 0$

d) $f_6(x)=-3$.

7) Để khi giải cần phải đặt $x=\sqrt{2}cost$ và đưa f(x) về dạng $\sqrt{2}cos3t$ ta được

Cho $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x$

Tìm số nghiệmphương trình:

a) $f_5(x)=0$.

b) $f_6(x)=-1$.

c) $f_7(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ với $x\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có bảng biến thiên $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x$

x	$-\infty$ $-\sqrt{2}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}$ $+\infty$
f(x)	$+\infty$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$ $-\infty$

8) Để khi giải cần phải đặt $x=\sqrt{3}cost$ và đưa f(x) về dạng $\sqrt{3}cos3t$ ta được

Cho $f(x)=\frac{4}{3}x^3-3x$

Tìm số nghiệmphương trình:

a) $f_5(x)=\sqrt{3}$.

b) $f_6(x)=\sqrt{3}\cos 1$

c) $f_7(x)=0$ *với* $x\leq 0$

Có thể tạo ra nhiều dạng câu hỏi về phương trình dạng này chẳng hạn

Thídụ 3. *Cho* $f(x)=4x^3-3x$. *Xét phương trình:* $f_n(x)=0$ *(1)*

a.Tìm n để PT(1) có đúng 9^8 *nghiệm.*

b. Chứng minh với mọi n phương trình (1) có nghiệm lớn nhất,nhỏ nhất lần lượt là M,m thỏa mãn: $m\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\leq M$

c. Tìm n để PT(1) có nghiệm lớn nhất bằng $\cos\frac{\pi}{486}$. *Với n tìm được giả sử các nghiệm* x_i *của PT(1) được sắp xếp theo thứ tự tăng dần tức là* $x_a<x_b$ *với* $a<b$ *,tìm nghiệm* x_{95} *và* x_{203}.

d. Tìm n để PT(1) có nghiệm lớn nhất bằng $\cos\frac{161\pi}{162}$ *. Với n tìm được tính tổng các nghiệm của PT(1) và tìm nghiệm dương nhỏ nhất của PT(1).*

e.Giả sử các nghiệm x_i *của PT(1) được sắp xếp theo thứ tự giảm dần tức là* $x_a<x_b$ *với* $a.b$. *Tìm n để nghiệm* $x_2=\cos\frac{\pi}{486}$.

f)Tính $f'_5\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{6}}}{4}\right)$

Lờigiải.

Lập luận như các thí dụ trên ta có tất cả các nghiệm của PT đã cho đều thuộc đoạn $[-1;1]$.

Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f_n(x)=cos3^nt$.

Ta có PT:

$cos3^nt=0\Leftrightarrow 3^nt=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{3^n}$

với $t \in [0;\pi]$ suy ra

$0 \le \dfrac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{3^n} \le \pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le k \le -\dfrac{1}{2} + 3^n$

Suy ra $k \in \{0; 1; \ldots; 3^n - 1\}$

tương ứng ta có 3^n giá trị x phân biệt.

a. Như vậy PT có 3^n nghiệm. Theo đề bài có $3^n = 9^8 = 3^{16} \Leftrightarrow n = 16.$

b. Xét

$\frac{\frac{\pi}{2}+0.\pi}{3^n}; \frac{\frac{\pi}{2}+1.\pi}{3^n}; \ldots; \frac{\frac{\pi}{2}+(3^n-1).\pi}{3^n}$ suy ra

$\cos\frac{\frac{\pi}{2}+0.\pi}{3^n} > \cos\frac{\frac{\pi}{2}+1.\pi}{3^n} > \ldots > \cos\frac{\frac{\pi}{2}+(3^n-1).\pi}{3^n}$ (*)

Ta có

$\dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n} \le \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{5\pi}{6} \le \dfrac{\frac{\pi}{2}+(3^n-1).\pi}{3^n} = \pi - \dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n}$ (*)

Suy ra nghiệm lớn nhất của (1)

là $M = cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n}$

nghiệm nhỏ nhất của (1) là

$m = \cos(\pi - \dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n})$.

Từ (*) ta có : $m \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \le M$

c. PT(1) có nghiệm lớn

nhất bằng $cos\dfrac{\pi}{486}$ khi và chỉ khi

$cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n} = cos\dfrac{\pi}{486} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n} = \dfrac{\pi}{486}$

$\Leftrightarrow 3^n = 3^5 \Leftrightarrow n = 5.$

Khi n=5 PT(1) có 243 nghiệm là

$x_1 = cos\dfrac{\pi}{486}; x_2 = cos\dfrac{3\pi}{486}; \ldots;$

$x_{243} = cos\dfrac{485\pi}{486}.$

Dễ thấy $x_1 + x_{243} = x_2 + x_{242} = \cdots =$

$= x_{121} + x_{123} = 0.$

Suy ra tổng các nghiệm của PT(1)

bằng $x_{122} = cos\dfrac{\pi}{4} = 0$

Theo (*) các nghiệm sắp xếp theo thứ tự tăng dần là

$x_1 = cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + (243-1).\pi}{243}$

$x_2 = cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + (243-2).\pi}{243}$

……

$x_{95} = cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + (243-95).\pi}{243} = cos\dfrac{11\pi}{18}$

$x_{203} = cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + (243-203).\pi}{243} = cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $x_{203} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nhận xét $x_{41} = -x_{203} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. PT(1) có nghiệm lớn

nhất bằng $cos\dfrac{\pi}{486}$ khi và chỉ khi

$cos(\pi - \dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n}) = cos\dfrac{161\pi}{162} \Leftrightarrow \pi - \dfrac{\frac{\pi}{2}}{3^n} = \dfrac{161\pi}{162}$

$\Leftrightarrow 3^n = 3^4 \Leftrightarrow n = 4.$

Khi n=4 PT(1) có 81 nghiệm là

$x_1 = cos\dfrac{\pi}{162}; x_2 = cos\dfrac{3\pi}{162}; \ldots;$

$x_{81} = cos\dfrac{161\pi}{162}.$

Dễ thấy $x_1 + x_{81} = x_2 + x_{80} = \cdots =$

$= x_{40} + x_{42} = 0.$

Suy ra tổng các nghiệm của PT(1)

bằng $x_{41} = cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

Do $x_{41} = cos\dfrac{\pi}{4} = 0$ nên nghiệm dương nhỏ nhất là

$x_{40} = cos\dfrac{79\pi}{162}.$

e. Làm tương tự câu trên ta có

$x_2 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+1.\pi}{3^n} = cos\frac{\pi}{486} \Leftrightarrow n = 6.$

f)Tính $f'_5\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

Ta có $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = cos\frac{7\pi}{12}$

$f_5(x) = cos3^5 t$

$= h(t) = cos243t$

Khi $x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = cos\frac{7\pi}{12}$ thì $t = \frac{7\pi}{12}$

$h'(t) = -243sin243t$

$h'\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -243\sin\left(243\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{243\sqrt{2}}{2}$

$x(t) = cost$

$x'(t) = -sint$

$x'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -sin\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t) = cost$

Ta có: $h'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = f'_5\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right).x'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{243\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}f'_5\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

Từ đó ta được $f'_5\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{486}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Thêm một hướng tạo ra hàm f(x) như sau

Nếu các nghiệm x thỏa mãn $|x| \geq 1$ thì ta đặt $x = \frac{1}{cost}$ *với* $t \in [0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Ta có:

$$\frac{1}{cos3x} = \frac{1}{4cos^3x - 3cosx} = \frac{\left(\frac{1}{cosx}\right)^3}{4-\left(\frac{1}{cosx}\right)^2}$$

Từ có có

Thídụ 4. *Cho* $f(x) = \frac{x^3}{4-3x^2}$

a)Giải phương trình: $f_3(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b)Giải phương trình: $f_3(x) = -2$.

c) Giải phương trình: $f_3(x) = 1$.

Lờigiải.

$$f'(x) = -\frac{3x^2(x^2-4)}{(4-3x^2)^2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$+\infty$	$\|$	-1	$+\infty$	$\|$	-1	
		$\searrow$	$\|$	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$
		1	$\|$	$-\infty$	1	$\|$	$-\infty$	$-\infty$

Lập luận tương tự các thí dụ trên suy ra các nghiệm của PT $f_3(x) = m$ với $|m| \geq 1$

đặt $x = \frac{1}{cost}$ *với* $t \in [0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Ta có:

$f_1(x) = \frac{1}{cos3x}$

$f_2(x) = \frac{1}{cos3^2x}$

$f_3(x) = \frac{1}{cos3^3x}$

Việc giải các PT xin dành cho bạn đọc.

Thídụ 5. *Cho* $f(x) = x^3 + \frac{13}{16}x - \cos\frac{\pi}{2019}$

Giải phương trình: $f_{10}(x) = x$.

Lờigiải.

Có $f(x) = x^3 + \frac{13}{16}x - \frac{1}{32}\cos\frac{\pi}{2019}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f_{10}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow x^3 + \frac{13}{16}x - \frac{1}{32}\cos\frac{\pi}{2019} = x$

$\Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{16}x = \cos\frac{4\pi}{9}$ (1)

Do $0 < \frac{1}{32}\cos\frac{4\pi}{9} < \frac{1}{32} < \frac{1}{2}$

Lập luận như thí dụ trên ta có tất cả các nghiệm của PT(1) đều thuộc $[-1;1]$. Đặt $x = \frac{1}{2}cost$ với $t \in [0;\pi]$.PT(1) trở thành

$\frac{1}{8}\cos^3 x - \frac{3}{32}\cos x = \frac{1}{32}\cos\frac{\pi}{2019}$

$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{\pi}{2019}$.

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

Nhân xét. Việc nghĩ ra cách giải lượng giác hóa để giải PT hàm hợp mà f(x) là hàm bậc 3 là khá khó khăn . Vì thế ta có thể chọn hàm bậc 2 thì sẽ quen thuộc hơn.

Xuất phát từ công thức lượng giác

$$cos2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x$$

Ta có thể chọn f(x) $= 2x^2 - 1$ hoặc

$$f(x) = 1 - 2x^2$$

Từ đó ta có các PT chẳng hạn:

Thídụ 6.*Giải phương trình và tìm nghiệm dương bé nhất và lớn nhất của phương trình sau:*

$2\left(2\left(2\left(2x^2-1\right)^2-1\right)^2-1\right)^2-1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lờigiải.

Ta có BBT của hàm số f(x) $= 2x^2 - 1$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	1	-1	1	$+\infty$

PT đã cho có dạng $f_4(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do $\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1;1]$ nên từ bảng biến thiên suy ra

$f_4(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ tương đương với $f_3(x)=x_i\in[-1;1]$

Tương tự từ bảng biến thiên suy ra $f_3(x)=x_i$ tương đương với $f_2(x)=x_i\in[-1;1]$. Cứ như vậy suy ra tất cả các nghiệm của PT đã cho đều thuộc đoạn $[-1;1]$. Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$$f_1(x)=2\cos^2 t-1=\cos 2t$$

$$f_2(x)=2\cos^2 2t-1=\cos 2^2 t$$

$$f_3(x)=2\cos^2 2^2 t-1=\cos 2^3 t$$

$$f_4(x)=2\cos^2 2^3 t-1=\cos 2^4 t$$

PT đã cho trở thành

$$cos16t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

* Để tạo ra các hàm f(x) bậc 2 tương tự là khá dễ dàng chẳng hạn để khi giải cần phải đặt

$x=2+cost$ và đưa f(x) về dạng $2+cos2t$

Suy ra $f(x)=2+2(x-2)^2-1=2x^2-8x+9$

Ta có thể tạo ra PT sau

Cho $f(x)=2x^2-8x+9$

a)Giải phương trình: $f_5(x)=\frac{4+\sqrt{3}}{2}$.

b) Giải phương trình: $f_5(x)=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

c) Giải phương trình: $f_5(x)=1$.

* Để tạo ra các hàm f(x) bậc 2 tương tự khác chẳng hạn để khi giải cần phải đặt

$x=-1+cost$ và đưa f(x) về dạng

$-1+cos2t$.

Suy ra $f(x)=-1+2(x+1)^2-1=$

$=2x^2+4x$

Ta có thể tạo ra PT sau

Cho $f(x)=2x^2+4x$

a)Giải phương trình: $f_4(x)=0$.

b)Giải phương trình: $f_4(x)=-\frac{1}{2}$.

* Để tạo ra các hàm f(x) bậc 2 tương tự khác chẳng hạn để khi giải cần phải đặt

$x=-1+2cost$ và đưa f(x) về dạng

$-1+2cos2t=-1+4cos^2 x-2$.

Suy ra $f(x)=-1+4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-2=$

$=x^2+2x-2$

Ta có thể tạo ra PT sau

Cho $f(x)=x^2+2x-2$

a)Giải phương trình: $f_6(x)=-1$.

b)Giải phương trình: $f_6(x)=1$.

* Để tạo ra các hàm f(x) bậc 2 tương tự khác chẳng hạn để khi giải cần phải đặt

$x=3+2cost$ và đưa f(x) về dạng

$3+2cos2t$.

Suy ra $f(x)=3+4\left(\frac{x-3}{2}\right)^2-2=$

$=x^2-6x+10$

Ta có thể tạo được PT sau:

Cho $f(x)=x^2-6x+10$

a)Giải phương trình: $f_6(x)=5$.

b)Giải phương trình: $f_6(x)=2$.

* Để tạo ra các hàm f(x) bậc 2 tương tự khác chẳng hạn để khi giải cần phải đặt

$x=1+2cost$ và đưa f(x) về dạng

$1+2cos2t$.

Suy ra $f(x)=1+4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-2=$

$=x^2-2x$

Cho $f(x)=x^2-2x$

a)Giải phương trình: $f_6(x)=0$.

b)Giải phương trình: $f_6(x)=-1$.

Ta có thể tạo ra PT như sau:

Giải phương trình:

$$2\left(2\left(2x^2-1\right)^2-1\right)^2-1=\sqrt{1-x^2}$$

$$2\left(2\left(2x^2-1\right)^2-1\right)^2-1=2x\sqrt{1-x^2}$$

* Để tạo ra các hàm f(x) bậc 2 đơn giản chẳng hạn để khi giải cần phải đặt
$x=2cost$ và đưa f(x) về dạng
$2cos2t.$

Suy ra $f(x)=4\left(\frac{x}{2}\right)^2-2=x^2-2$

Ta có:

Thí dụ 7.*Giải phương trình và tìm nghiệm âm bé nhất và lớn nhất của phương trình sau::*

$$\left(\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2=\sqrt{3}.$$

Lờigiải.

Đặt $x-2=a$ thì PT đã cho trở thành

$$\left(\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2=\sqrt{3}.(*)$$

Lập luận tương tự các thí dụ trước dẫn tới

đặt $a=2cost\ \ t\in[0;\pi]$ và đưa $f(a)=a^2-2$ về dạng $f(a)=2cos2t.$

Từ PT(*) ta có PT: $2cos2^5t=\sqrt{2}.$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

Với chú ý: $x=2+2cost.$

Ngoài cách lượng giác hóa thì dạng PT này còn cách giải khá đơn giản là:

$$\left(\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2=2+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2=\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2=2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2=\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

Tổng quát:

Giải phương trình:

$$\left(\left(\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2=m$$

khi

a) $m=\pm\sqrt{3}$ b)$m=\pm\sqrt{2}$

c) $m=\pm\frac{2}{3}$ d) $m=\pm\frac{2020}{2019}$

Thí dụ 8.*Giải phương trình:*

$$2\left(2\left(2\left(2\left(2x-1\right)^2-1\right)^2-1\right)^2-1\right)^2-1=m$$

Biết

a) $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};m=\pm cos\frac{\pi}{8};m=\pm\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{3}}{4},....$

c) $m=\pm\frac{1}{3};\pm\frac{2}{5},.....$

Lờigiải.

abc)Đặt $2x-1=a$ *thì PT đã cho trở thành*

$$2\left(2\left(2\left(2a^2-1\right)^2-1\right)^2-1\right)^2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Lập luận tương tự các thí dụ trước dẫn tới

đặt $a=cost\ \ t\in[0;\pi]$ và đưa $f(a)=2a^2-1$ về dạng $f(a)=cos2t.$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

d)Giải dựa vào tính chất

$A^2=m>0\Leftrightarrow A=\pm\sqrt{m}$

Thí dụ 9.*Chứng minh*

$$cos\frac{\pi}{64}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

$$cos\frac{7\pi}{64}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

$$\cos\frac{31\pi}{64}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

$$\cos\frac{25\pi}{64}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Lời giải.

Xét phương trình

$2(2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1)^2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

Do vế trái là đa thức bậc 16 nên (1) có tối đa 16 nghiệm.

$$(1)\Leftrightarrow (2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1)^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2(2x^2-1)^2-1)^2=\frac{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2-1)^2-1=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-1)^2=\frac{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-1=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Vậy (1) có 16 nghiệm phân biệt là

$$x=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$

PT(1) trở thành

$$2(2(2(2cos^2t-1)^2-1)^2-1)^2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2(2cos^2 2t-1)^2-1)^2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2cos^2 4t-1)^2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2cos^2 8t-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos16t=cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}16t=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\16t=-\frac{\pi}{4}+m2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{64}+\frac{k\pi}{8}\\t=-\frac{\pi}{64}+\frac{m\pi}{8}\end{array}\right.$$

Do $t\in[0;\pi]$ nên dễ dàng suy ra $k\in\{0,1,2,\dots,7\}$ và $m\in\{1,2,\dots,8\}$

Do hàm số $y=cost$ nghịch biến trên đoạn $[0;\pi]$ nên

+Nghiệm lớn nhất của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

ứng với t nhỏ nhất là $t=\frac{\pi}{64}$

Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{64}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

+Nghiệm lớn thứ 2 của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

ứng với $t=\frac{7\pi}{64}$ suy ra

$$cos\frac{7\pi}{64}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

+Xét các nghiệm dương của (1) khi này tương ứng có

$0\le t=\frac{\pi}{64}+\frac{k\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ và $0\le t=-\frac{\pi}{64}+\frac{m\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$

được

$k\in\{0,1,2,3\}$ và $m\in\{1,2,3,4\}$

Nghiệm dương nhỏ nhất của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Tương ứng m=4 và với $t=\frac{31\pi}{64}$

Suy ra

$$cos\frac{31\pi}{64}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Nghiệm dương nhỏ thứ 2 của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Tương ứng k=4 và với $t=\frac{25\pi}{64}$

Suy ra

$$\cos\frac{25\pi}{64}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Với cách giải này ta có thể biểu thị các giá trị lượng giác của các góc đặc biệt chẳng hạn:

$$sin\frac{\pi}{64}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

Bằng cách đặt $x=sint\ với\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Các góc khác:

$$cos\frac{\pi}{32}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

$$sin\frac{\pi}{32}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

$$cos\frac{3\pi}{32}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}{2}$$

$$sin\frac{3\pi}{32}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}{2}$$

$$cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$cos\frac{3\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$$

$$sin\frac{3\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$$

Tác giả lấy thêm vài ví dụ để làm rõ hơn về dạng này

Thí dụ 10.*Chứng minh*

$$cos\frac{\pi}{96}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

$$cos\frac{11\pi}{96}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

Lờigiải.
Xét phương trình

$2(2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1)^2-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

Do vế trái là đa thức bậc 16 nên (1) có tối đa 16 nghiệm.

$$(1)\Leftrightarrow(2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1)^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow(2(2x^2-1)^2-1)^2=\frac{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2-1)^2-1=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow(2x^2-1)^2=\frac{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-1=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

Vậy (1) có 16 nghiệm phân biệt là

$$x=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$
PT(1) trở thành

$$2(2(2(2cos^2t-1)^2-1)^2-1)^2-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2(2cos^22t-1)^2-1)^2-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2cos^24t-1)^2-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2cos^28t-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos16t=cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}16t=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\16t=-\frac{\pi}{6}+m2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{96}+\frac{k\pi}{8}\\t=-\frac{\pi}{96}+\frac{m\pi}{8}\end{array}\right.$$

Do $t\in[0;\pi]$ nên dễ dàng suy ra
$k\in\{0,1,2,\dots,7\}$ và $m\in\{1,2,\dots,8\}$
Do hàm số $y=cost$ nghịch biến trên đoạn $[0;\pi]$ nên
+Nghiệm lớn nhất của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

ứng với t nhỏ nhất là $t=\frac{\pi}{96}$

Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{96}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

+Nghiệm lớn thứ 2 của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

ứng với $t=\frac{11\pi}{96}$ suy ra

$$\cos\frac{11\pi}{96}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

Thí dụ 11.*Chứng minh*

$$\cos\frac{\pi}{48}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{48}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}}{2}$$

Lời giải.

Xét phương trình

$2(2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1)^2-1=\frac{1}{2}$ (1)

Do vế trái là đa thức bậc 16 nên (1) có tối đa 16 nghiệm.

$(1)\Leftrightarrow(2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1)^2=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 2(2(2x^2-1)^2-1)^2-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow(2(2x^2-1)^2-1)^2=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow 2(2x^2-1)^2-1=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2}$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}}}{2}$

Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$

PT(1) trở thành

$2(2(2(2\cos^2t-1)^2-1)^2-1)^2-1=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow cos16t=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}16t=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\16t=-\frac{\pi}{3}+m2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{8}\\t=-\frac{\pi}{48}+\frac{m\pi}{8}\end{array}\right.$$

Do $t\in[0;\pi]$ nên dễ dàng suy ra

$k\in\{0,1,2,\ldots,7\}$ và $m\in\{1,2,\ldots,8\}$

Do hàm số $y=cost$ nghịch biến trên đoạn $[0;\pi]$ nên

+Nghiệm lớn nhất của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

ứng với t nhỏ nhất là $t=\frac{\pi}{48}$

Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{48}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

+Nghiệm lớn thứ 2 của (1) là

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}}{2}$$

ứng với $t=\frac{5\pi}{48}$ suy ra

$$\cos\frac{5\pi}{48}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}}{2}$$

* Để tạo ra các hàm f(x) phức tạp hơn xuất phát từ cos2x chẳng hạn để khi giải cần phải đặt $x=\frac{1}{cost}$ và đưa f(x) về dạng $\frac{1}{\cos 2x}=\frac{1}{2\cos^2 x-1}$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{2.\frac{1}{x^2}-1}=\frac{x^2}{2-x^2}$

Thí dụ 15. *Cho* $f(x)=\frac{x^2}{2-x^2}$

a)Giải phương trình: $f_3(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b)Giải phương trình: $f_3(x)=-1$.

c) Giải phương trình: $f_3(x)=-2$.

Lờigiải.

$$f'(x)=-\frac{4x}{(2-x^2)^2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f(x)		$+\infty$	-1	1	1	$+\infty$	-1
				0			
	$-\infty$					$-\infty$	

Lập luận tương tự các thí dụ trên suy ra các nghiệm của PT $f_3(x)=m$ với $|m|\geq 1$

đặt $x=\frac{1}{cost}$ *với* $t\in[0;\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$. Ta có:

$f_1(x)=\frac{1}{\cos 2x}$

$f_2(x)=\frac{1}{\cos 2^2 x}$

$f_3(x)=\frac{1}{\cos 2^3 x}$

Việc giải các PT xin dành cho bạn đọc.

Lưu ý điều kiện xác định.

Thí dụ 16. *Cho* $f(x)=2x^2-1$

a) Tính $f'_5\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) Tính $f'_5\left(\cos\frac{\pi}{64}\right)$

c) Tính $f'_5\left(\sin\frac{\pi}{128}\right)$

d) Tính $\int_0^1 f_4(x)dx$

e) Tính $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 f_5(x)dx$

f) Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_4(x)dx$

g) Tính $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_3(x)dx$

h) Tính $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 f_2(x)dx$

Lờigiải.

Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f(x)=f_1(x)=2cos^2 t-1=cos2t$

$f_2(x)=2cos^2 2t-1=cos2^2 t$

Bằng quy nạp ta được

$f_5(x)=cos2^5 t$

$=h(t)=cos32t$

Khi $x=-\frac{1}{2}$ *thì* $t=\frac{2\pi}{3}$

$h'(t)=-32sin32t$

$h'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-32\sin\left(32\frac{2\pi}{3}\right)=16\sqrt{3}$

$x(t)=cost$

$x'(t)=-sint$

$x'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t)=cost$

Ta có: $h'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f'_5\left(-\frac{1}{2}\right).x'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 16\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.f'_5\left(-\frac{1}{2}\right)$

Từ đó ta được $f'_5\left(-\frac{1}{2}\right)=32$

b) Tính $f'_5\left(\cos\frac{\pi}{64}\right)$

$f_5(x)=cos2^5 t$

$=h(t)=cos32t$

Khi $x=\cos\frac{\pi}{64}$ *thì* $t=\frac{\pi}{64}$

$h'(t)=-32sin32t$

$h'\left(\frac{\pi}{64}\right) = -32\sin\left(32\frac{\pi}{64}\right) = -32$

$x(t) = cost$

$x'(t) = -sint$

$x'\left(\frac{\pi}{64}\right) = -sin\frac{\pi}{64}$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t) = cost$

Ta có: $h'\left(\frac{\pi}{64}\right) = f'_5\left(cos\frac{\pi}{64}\right).x'\left(\frac{\pi}{64}\right)$

$\Leftrightarrow -32 = -sin\frac{\pi}{64}.f'_5\left(\frac{\pi}{64}\right)$

Từ đó ta được $f'_5\left(\frac{\pi}{64}\right) = \frac{32}{sin\frac{\pi}{64}}$

c) Tính $f'_5\left(sin\frac{\pi}{128}\right)$

$f_5(x) = cos2^5t$

$= h(t) = cos32t$

Khi $x = sin\frac{\pi}{128} = cos\frac{63\pi}{128}$ thì $t = \frac{63\pi}{128}$

$h'(t) = -32sin32t$

$h'\left(\frac{63\pi}{128}\right) = -32\sin\left(32\frac{63\pi}{128}\right) = 16\sqrt{2}$

$x(t) = cost$

$x'(t) = -sint$

$x'\left(\frac{63\pi}{128}\right) = -sin\frac{63\pi}{128}$

Có h(t) là hàm hợp tạo bởi 2 hàm số $f_5(x)$ và $x(t) = cost$

Ta có: $h'\left(\frac{63\pi}{128}\right) = f'_5\left(sin\frac{\pi}{128}\right).x'\left(\frac{63\pi}{128}\right)$

$\Leftrightarrow 16\sqrt{2} = -sin\frac{63\pi}{128}.f'_5\left(sin\frac{\pi}{128}\right)$

Suy ra $f'_5\left(sin\frac{\pi}{128}\right) = -\frac{16\sqrt{2}}{sin\frac{63\pi}{128}} == -\frac{16\sqrt{2}}{cos\frac{\pi}{128}}$

d) Tính $\int_0^1 f_4(x)dx$

Đặt $x = cost$ với $t \in [0;\pi]$ suy ra

$f(x) = f_1(x) = 2cos^2t - 1 = cos2t$

$f_2(x) = 2cos^2 2t - 1 = cos2^2t$

Bằng quy nạp ta được

$f_4(x) = cos2^4t$

Khi $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$

Khi $x = 1$ thì $t = 0$

$dx = -sintdt$

$$\int_0^1 f_4(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos16t.sintdt = -\frac{1}{155}$$

e) Tính $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 f_5(x)dx$

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 f_5(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} cos32t.sintdt = \frac{\sqrt{3}}{124}$$

f) Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_4(x)dx$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_4(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cos16t.sintdt$$

$$= -\frac{49 + 2\sqrt{2}}{1020}$$

g) Tính $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_3(x)dx$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_3(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} cos8t.sintdt$$

$$= -\frac{23 + 2\sqrt{2}}{252}$$

h) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 f_2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} cos4t.sintdt = \frac{3\sqrt{3}-4}{60}$

Mở rộng 4. *Các phương trình chứa tham số. phương trình và hệ phương trình có liên quan đến phương trình chứa hàm hợp.*

Thí dụ 1*.Cho phương trình:*

$$\sqrt[3]{m + \sqrt[3]{m + \sqrt[3]{m + x}}} = x. \quad (1)$$

1)Tìm m để phương trình (1)có đúng 3 nghiệm phân biệt.

2)Tìm m để phương trình (1)có đúng 2 nghiệm phân biệt.

3) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^2 + x}}} = x.$$

4) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{-x^5 + \sqrt[3]{-x^5 + \sqrt[3]{-x^5 + x}}} = x.$$

5) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^4 - x^3 + \sqrt[3]{x^4 - x^3 + \sqrt[3]{x^4 - x^3 + x}}} = x.$$

6) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{3x^2-6+\sqrt[3]{3x^2-6+\sqrt[3]{3x^2+x-6}}}=x.$$

7)Tìm a để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt.

$$\sqrt[3]{a+2x+\sqrt[3]{a+2x+\sqrt[3]{a+3x}}}=x$$

và giải các PT sau:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+2x+\sqrt[3]{\sqrt{2}+2x+\sqrt[3]{\sqrt{2}+3x}}}=x.$

b) $\sqrt[3]{1+2x+\sqrt[3]{1+2x+\sqrt[3]{1+3x}}}=x.$

8) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-x=\dfrac{y^2+6\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}} \\ \sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+x}}}=x \end{cases}$$

9) Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x^3-x=2y+a \\ \sqrt[3]{2x+a+\sqrt[3]{2x+a+y}}=y \end{cases}$$

10) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-4x^2+1=y \\ \sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+x}}}=x \end{cases}$$

11) Tìm a để hệ phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2=y+a \\ \sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+x}}}=x \end{cases}$$

12) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+x=2y^2+2 \\ \sqrt[3]{y^4+y^2+\sqrt[3]{y^4+y^2+x}}=x \end{cases}$$

13) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+x=2y^2+1 \\ \sqrt[3]{y^4-1+\sqrt[3]{y^4-1+x}}=x \end{cases}$$

14) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+1)=y(2y+1) \\ \sqrt[3]{2y^3-2y^2+\sqrt[3]{2y^3-2y^2+x}}=x \end{cases}$$

15) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+1)=y(y-1) \\ \sqrt[3]{y^3-3y^2+2y+\sqrt[3]{y^3-3y^2+2y+x}}=x \end{cases}$$

và cho biết có bao nhiêu nghiệm (x;y) thỏa mãn:

a) $|x-y|=1$

b) $x^2+y^2=2$

16) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ \sqrt[3]{y-y^3+\sqrt[3]{y-y^3+x}}=x \end{cases}$$

17) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ \sqrt[3]{7y-y^3+\sqrt[3]{7y-y^3+x}}=x \end{cases}$$

18) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (3x+y)^2+y^2=x^4-x^2+1 \\ \sqrt[3]{3xy+y^2+\sqrt[3]{3xy+y^2+x}}=x \end{cases}$$

Lời giải.

1,2)Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{m+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+x}=x\Leftrightarrow x^3-x=m.$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

3) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x^2+x}}}=x.$$

Đặt $x^2=m$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+x}}}=x. \ (1)$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{m+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+x}=x\Leftrightarrow x^3-x=m$

$\Leftrightarrow x^3-x=x^2$

$\Leftrightarrow x(x^2-x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0\ V\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

4) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{-x^5+\sqrt[3]{-x^5+\sqrt[3]{-x^5+x}}}=x.$$

Đặt $-x^5=m$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+x}}}=x. \ (1)$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{m+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

$PT(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+x}=x\Leftrightarrow x^3-x=m$

$\Leftrightarrow x^3-x=-x^5$

$\Leftrightarrow x(x^4+x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0\ V\ x=\pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

5) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^4-x^3+\sqrt[3]{x^4-x^3+\sqrt[3]{x^4-x^3+x}}}=x.$$

Đặt $x^4-x^3=m$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+x}}}=x.\ (1)$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{m+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

$PT(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{m+x}=x\Leftrightarrow x^3-x=m$

$\Leftrightarrow x^3-x=x^4-x^3$

$\Leftrightarrow x=0\ V\ \ x=1\ V\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

6) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{3x^2-6+\sqrt[3]{3x^2-6+\sqrt[3]{3x^2+x-6}}}=x.$$

Đặt $3x^2-6=m$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+x}}}=x.\ (1)$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{m+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

$PT(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{m+x}=x\Leftrightarrow x^3-x=m$

$\Leftrightarrow x^3-x=3x^2-6$

$\Leftrightarrow x=2\ V\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

7)*Tìm m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt.*

$$\sqrt[3]{m+2x+\sqrt[3]{m+2x+\sqrt[3]{m+3x}}}=x.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+2x+\sqrt[3]{m+2x+\sqrt[3]{m+2x+x}}}=x.$$

Đặt $2x+a=m$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+x}}}=x.\ (1)$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{m+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

$PT(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{m+x}=x\Leftrightarrow x^3-x=m$

$\Leftrightarrow x^3-x=2x+a\Leftrightarrow h(x)=x^3-3x=a$

Ta có bảng biến thiên h(x)

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
h(x)	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

PT có 3 nghiệm phân biệt $a\in(-2;2)$

Khi này các nghiệm $x\in(-2;2)$.

+ Với $a=\sqrt{2}$ thì (*):

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}+2x+\sqrt[3]{\sqrt{2}+2x+\sqrt[3]{\sqrt{2}+3x}}}=x.$$

$\Leftrightarrow x^3-3x=\sqrt{2}$

Từ bbt suy ra các nghiệm

$x\in(-2;2)$ *nên đặt* $x=2cost$ *với* $t\in(0;\pi)$

Ta có PT: $8\cos^3 t-6\cos t=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow cos3t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Giải tiếp dành cho bạn đọc.

+ Với $a=1$ thì (*):

$$\sqrt[3]{1+2x+\sqrt[3]{1+2x+\sqrt[3]{1+3x}}}=x.$$

$\Leftrightarrow x^3-3x=1$

Từ bbt suy ra các nghiệm

$x\in(-2;2)$ *nên đặt* $x=2cost$ *với* $t\in(0;\pi)$

Ta có PT: $8\cos^3 t-6\cos t=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow cos3t=\dfrac{1}{2}$

Giải tiếp dành cho bạn đọc.

8) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-x=\dfrac{y^2+6\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}}\ (*) \\ \sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+x}}}=x\ (**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{y+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

$PT(**)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{y+x}=x\Leftrightarrow y=x^3-x.$

Thay

$y=x^3-x.$

vào (*) được:

$$(x^3-x)^2-(6+\sqrt{2})(x^3-x)+6\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-x=6\\x^3-x=\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow..\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\to y=6\\x=\sqrt{2}\to y=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có 2 nghiệm (2;6),$(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

9) Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases}x^3-x=2y+a(*)\\\sqrt[3]{2x+a+\sqrt[3]{2x+a+y}}=y(**)\end{cases}$$

Do hàm số $f(y)=\sqrt[3]{2x+a+y}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

nên có: $PT(**)\Leftrightarrow f_2(y)=y$

$\Leftrightarrow f(y)=\sqrt[3]{2x+a+y}=y\Leftrightarrow y^3-y=2x+a.$

Kết hợp với (*) ta có hệ

$$\begin{cases}x^3-x=2y+a\\y^3-y=2x+a\end{cases}$$

Trừ vế với vế ta được

$(x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0\leftrightarrow x=y$

Thay vào hệ ta được:

$x^3-3x=a$ (1)

Hệ đã cho có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$h(x)=x^3-3x$

bảng biến thiên h(x)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
h(x)	$-\infty$ ↗	2	↘ -2	↗ $+\infty$

Từ bbt suy ra (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m\in(-2;2).$

10) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^4-4x^2+1=y(*)\\\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+x}}}=x(**)\end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{y+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

$PT(**)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{y+x}=x\Leftrightarrow y=x^3-x.$

Thay

$y=x^3-x.$

vào (*) được:

$x^4-4x^2+1=x^3-x$

$\Leftrightarrow x^4-x^3-4x^2+x+1=0$ *(1)*

Dễ thấy $x=0$ *không là nghiệm của (1)*

Xét $x\neq 0$

$(1)\Leftrightarrow x^2-x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

Đặt $x-\frac{1}{x}=t$ *suy ra* $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$

PT(1) trở thành

$t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=-1\ V\ t=2$

suy ra:

$x-\frac{1}{x}=-1V\ x-\frac{1}{x}=2$

$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2};x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

11) Tìm a để hệ phương trình sau có 4 nghiệm:

$$\begin{cases}\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2=y+a\\\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+\sqrt[3]{y+x}}}=x\end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{y+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có:

$PT(**)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{y+x}=x\Leftrightarrow y=x^3-x.$

Thay

$y=x^3-x.$

vào (*) được:

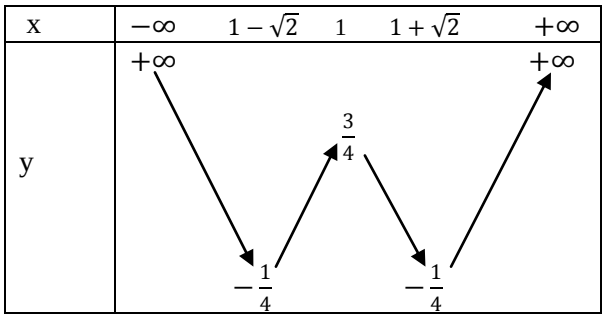
$\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+x=a$

$y=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+x$

$y'=x^3-3x^2+x+1=0$

$\Leftrightarrow x=1;x=1\pm\sqrt{2}$

Bbt



hệ phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right)$.

12) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+x=2y^2+2 (*) \\ \sqrt[3]{y^4+y^2+\sqrt[3]{y^4+y^2+x}}=x (**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{y^4+y^2+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

nên có: PT(**) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{y^4+y^2+x}=x \Leftrightarrow y^4+y^2=x^3-x$

Kết hợp (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} x^2+x=2y^2+2 \\ y^4+y^2=x^3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+(x^2-1)=y^2+y^2+1 \\ x(x^2-1)=y^2\left(y^2+1\right) \end{cases} (***)$$

Theo Viet thì $x; x^2-1$ là nghiệm PT:

$$t^2-(y^2+y^2+1)t+y^2(y^2+1)=0$$

$\Leftrightarrow t=y^2\ V\ t=y^2+1$

Suy ra

$$(***) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y^2 \\ x^2-1=y^2+1 \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x=y^2+1 \\ x^2-1=y^2 \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y^2 \\ y^4-1=y^2+1 \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x=y^2+1 \\ (y^2+1)^2-1=y^2 \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y^2 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x=y^2+1 \\ y=0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=2 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \right.$$

13) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+x=2y^2+1 (*) \\ \sqrt[3]{y^4-1+\sqrt[3]{y^4-1+x}}=x (**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{y^4-1+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

có: PT(**) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{y^4-1+x}=x \Leftrightarrow y^4-1=x^3-x$

Kết hợp (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} x^2+x=2y^2+1 \\ y^4+1=x^3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+(x^2-1)=y^2-1+y^2+1 \\ x(x^2-1)=(y^2-1)\left(y^2+1\right) \end{cases} (***)$$

Theo Viet thì $x; x^2-1$ là nghiệm PT:

$$t^2-(y^2-1+y^2+1)t+(y^2-1)(y^2+1)=0$$

$\Leftrightarrow t=y^2-1\ V\ t=y^2+1$

Suy ra

$$(***) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y^2-1 \\ x^2-1=y^2+1 \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x=y^2+1 \\ x^2-1=y^2-1 \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=x^2-3 \\ x^2-2=y^2 \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x=x^2+1 (vn) \\ x^2=y^2 \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ x^2-2=y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases}$$

14) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+1)=y(2y+1) (*) \\ \sqrt[3]{2y^3-2y^2+\sqrt[3]{2y^3-2y^2+x}}=x (**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{2y^3-2y^2+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có: PT(**) $\Leftrightarrow f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2y^3-2y^2+x}=x \Leftrightarrow 2y^3-2y^2=x^3-x$

Kết hợp (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} x(x+1)=y(2y+1) \\ 2y^3-2y^2=x^3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+(x^2-1)=y-1+2y^2 \\ x(x^2-1)=(y-1).2y^2 \end{cases} (***)$$

Theo Viet thì $x; x^2-1$ là nghiệm PT:

$t^2-(y-1+2y^2)t+(y-1).2y^2=0$

$\Leftrightarrow t=y-1\ V\ t=2y^2$

Suy ra

$$(***) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y-1 \\ x^2-1=2y^2 \end{cases} \begin{cases} x=2y^2 \\ x^2-1=y-1 \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y-1 \\ (y-1)^2-1=2y^2 \end{cases} \begin{cases} x=2y^2 \\ 4y^4=y \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y-1 \\ y=0\ V\ y=-2 \end{cases} \begin{cases} x=2y^2 \\ y=0\ V\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \begin{matrix} x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{matrix}\right.$$

15) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+1)=y(y-1)(*) \\ \sqrt[3]{y^3-3y^2+2y+\sqrt[3]{y^3-3y^2+2y+x}}=x(**) \end{cases}$$

và cho biết có bao nhiêu nghiệm (x;y) thỏa mãn:

a) $\left|x^2-2x-y^2+4y\right|=3$

b) $x^2+y^2=2$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{y^3-3y^2+2y+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có: PT(**) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{y^3-3y^2+2y+x}=x$

$\Leftrightarrow y^3-3y^2+2y=x^3-x$

Kết hợp (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} x(x+1)=y(y-1) \\ y^3-3y^2+2y=x^3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+(x^2-1)=(y-1)+(y^2-2y) \\ x(x^2-1)=(y-1)(y^2-2y) \end{cases} (***)$$

Theo Viet thì $x; x^2-1$ là nghiệm PT:

$t^2-(y-1+y^2-2y)t+(y-1)(y^2-2y)=0$

$\Leftrightarrow t=y-1\ V\ t=y^2-2y$

Suy ra

$$(***) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y-1 \\ x^2-1=y^2-2y \end{cases} \begin{cases} x=y^2-2y \\ x^2-1=y-1 \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y-1 \\ (y-1)^2-1=y^2-2y \end{cases} \begin{cases} x=x^4-2x^2 \\ x^2=y \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y-1 \\ y^2-2y=y^2-2y \end{cases} \begin{cases} x(x+1)(x^2-x-1)=0 \\ x^2=y \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=y-1 \\ y\in R \end{cases} \begin{cases} x=0; x=-1; x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=x^2 \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y-1 \\ y \in R \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y-1 \\ y \in R \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

a) Với nghiệm $\begin{cases} x = y-1 \\ y \in R \end{cases}$ thỏa mãn

$\left|x^2 - 2x - y^2 + 4y\right| = 3$

suy ra có vô số cặp nghiệm (x;y)

b) Dễ thấy $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$

còn x=y=0 không thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$

Xét hệ $\begin{cases} x = y-1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Giải hệ xin dành cho bạn đọc ta được 2 nghiệm (x;y) khác (-1;1). Vậy có 3 cặp nghiệm (;y) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$

16) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 (*) \\ \sqrt[3]{y - y^3 + \sqrt[3]{y - y^3 + x}} = x (**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x) = \sqrt[3]{y - y^3 + x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

nên có: PT(**) $\Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y - y^3 + x} = x \Leftrightarrow y - y^3 = x^3 - x$

Kết hợp (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^3 + y^3 - (x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 3 \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) - (x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3 = xy \\ (x+y)^3 - 3\left((x+y)^2 - 3\right)(x+y) - (x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3 = xy \\ \left[\begin{array}{l} x+y = 0 \\ x+y = 2 \\ x+y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y = 0 \\ xy = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right), (1;1), (-1;-1)\right\}$

17) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ \sqrt[3]{7y - y^3 + \sqrt[3]{7y - y^3 + x}} = x \end{cases}$$

Do hàm số $f(x) = \sqrt[3]{7y - y^3 + x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

nên có: PT(**) $\Leftrightarrow f_2(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7y - y^3 + x} = x \Leftrightarrow 7y - y^3 = x^3 - x$

Kết hợp (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^3 + y^3 = x + 7y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 7(x^3 + y^3) = (x+7y)(x^2 + xy + y^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ -2\,x(x-2y)(3x+2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2y \\ x=-\dfrac{2}{3}y \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x;y)\in\left\{\left(0;\pm\sqrt{7}\right),(2;1),(-2;-1),(3;-2),(-3;2)\right\}$$

18) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (3x+y)^2+y^2=x^4-x^2+1(*) \\ \sqrt[3]{3xy+y^2+\sqrt[3]{3xy+y^2+x}}=x(**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt[3]{3xy+y^2+x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

nên có: PT(**) $\Leftrightarrow f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3xy+y^2+x}=x \Leftrightarrow 3xy+y^2=x^3-x$$

Kết hợp với (*) ta được:

$$\begin{cases} (3x+y)^2+y^2=x^4-x^2+1 \\ 3xy+y^2=x^3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+y)^2+y^2=x^2+(x^2-1)^2 \\ (3x+y)y=x(x^2-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+y+y)^2-2(3x+y)y=(x+x^2-1)^2-2x(x^2-1) \\ (3x+y)y=x(x^2-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+y+y)^2=(x+x^2-1)^2 \\ (3x+y)y=x(x^2-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+y=x+x^2-1 \\ (3x+y)y=x(x^2-1) \end{cases}$$

$$hoặc \begin{cases} 3x+y+y=-x-x^2+1 \\ (3x+y)y=x(x^2-1) \end{cases}$$

$$\underset{Vi-ét}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x+y=x \\ y=x^2-1 \end{cases} V \begin{cases} 3x+y=x^2-1 \\ y=x \end{cases}$$

$$V \begin{cases} 3x+y=-x \\ y=-x^2+1 \end{cases} V \begin{cases} 3x+y=-x^2+1 \\ y=-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+x^2-1=x \\ y=x^2-1 \end{cases} V \begin{cases} 3x+x=x^2-1 \\ y=x \end{cases}$$

$$V \begin{cases} 3x-x^2+1=-x \\ y=-x^2+1 \end{cases} V \begin{cases} 3x-x=-x^2+1 \\ y=-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\pm\sqrt{2} \\ y=x^2-1 \end{cases} V \begin{cases} x=2\pm\sqrt{5} \\ y=x \end{cases}$$

$$V \begin{cases} x=2\pm\sqrt{5} \\ y=-x^2+1 \end{cases} V \begin{cases} x=-1\pm\sqrt{2} \\ y=-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \\ y=2-2\sqrt{2} \end{cases} V \begin{cases} x=-1-\sqrt{2} \\ y=2+2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$V \begin{cases} x=2+\sqrt{5} \\ y=2+\sqrt{5} \end{cases} V \begin{cases} x=2-\sqrt{5} \\ y=2-\sqrt{5} \end{cases}$$

$$V \begin{cases} x=2+\sqrt{5} \\ y=-8-4\sqrt{5} \end{cases} V \begin{cases} x=2-\sqrt{5} \\ y=-8+4\sqrt{5} \end{cases}$$

$$V \begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases} V \begin{cases} x=-1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Chú ý:

Nếu gặp hệ PT có dạng

$$\begin{cases} x+y=a+b \\ xy=ab \end{cases} (*)$$

Theo định lí Vi-ét ta có x,y là các nghiệm pt:

$$t^2-(a+b)t+ab=0$$

$$\Leftrightarrow t=a\ V\ t=b$$

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases} V \begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases}$$

Thí dụ 2.*Cho phương trình:*

$$e^{e^x}=\frac{x-m}{e^m} \quad (1)$$

1)Tìm m để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$.

2)Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(-1;1)$.

Lời giải.

$$(1) \Leftrightarrow m+e^{m+e^x}=x(*)$$

Do hàm số $f(x)=m+e^x$ đồng biến trên tập

R *nên có*

$(*) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow fx) = x$

$\Leftrightarrow m + e^x = x \Leftrightarrow m = x - e^x$

Xét $y = x - e^x$ *có* $y' = 1 - e^x$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
y	-1 ↗		↘ $1-e$
	$-1-\frac{1}{e}$ ↗		

Từ bảng biến thiên suy ra

+phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ *chỉ khi* $m \in \left(-1-\frac{1}{e};-1\right)$

+phương trình (1) có đúng 1 nghiệm phân thuộc khoảng $(-1;1)$ *chỉ khi*

$m \in \left(1-e;-1-\frac{1}{e}\right] \cup \{-1\}$

Thí dụ 3.*Cho phương trình*:

$\sin x + \sin(m + x - \sin x) = 2m \quad (1)$

a)Tìm m để PT(1) có nghiệm.

b) Tìm m để PT(1) có 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{9\pi}{4}\right)$.

c)Giải PT(1) khi m=1.

d)Giải PT(1) khi $m = \frac{1}{2}$.

e) Giải phương trình:

$\sin x + \sin(\cos x + x - \sin x) = 2\cos x$

f) Giải phương trình:

$\sin x + \sin(\sqrt{3}\cos x + x - \sin x) = 2\sqrt{3}\cos x$

h) Giải phương trình:

$\sin x + \sin(\sin 2x + x - \sin x) = 2\sqrt{3}\sin 2x$

k)Tìm a để PT sau có nghiệm:

$\sin x + \sin(\cos x + a + x - \sin x) = 2a + 2\cos x$

Lời giải.

abcd)

$(1) \Leftrightarrow \text{m} + (\text{m} + \text{x} - \sin x) - \sin(m + x - \sin x) = 0$

Do hàm số $\text{f}(x) = m + x - \sin x$ có

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ *nên hàm số f(x) đồng biến trên R. Suy ra*

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = m + x - \sin x = x$

$\Leftrightarrow \sin x = m$. Đây là PT lượng giác cơ bản việc giải tiếp là không khó khăn gì.

e) *Giải phương trình:*

$\sin x + \sin(\cos x + x - \sin x) = 2\cos x$

Đặt $\cos x = m$

PT đã cho trở thành:

$\sin x + \sin(m + x - \sin x) = 2m \quad (1)$

$\Leftrightarrow \text{m} + (\text{m} + \text{x} - \sin x) - \sin(m + x - \sin x) = 0$

Do hàm số $\text{f}(x) = m + x - \sin x$ có

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ *nên hàm số f(x) đồng biến trên R. Suy ra*

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = m + x - \sin x = x$

$\Leftrightarrow \sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

f) Giải phương trình:

$\sin x + \sin(\sqrt{3}\cos x + x - \sin x) = 2\sqrt{3}\cos x$

Đặt $\sqrt{3}\cos x = m$

PT đã cho trở thành:

$\sin x + \sin(m + x - \sin x) = 2m \quad (1)$

$\Leftrightarrow \text{m} + (\text{m} + \text{x} - \sin x) - \sin(m + x - \sin x) = 0$

Do hàm số $\text{f}(x) = m + x - \sin x$ có

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ *nên hàm số f(x) đồng biến trên R. Suy ra*

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = m + x - \sin x = x$

$\Leftrightarrow \sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

h) Giải phương trình:

$\sin x+\sin(\sin 2x+x-\sin x)=2\sqrt{3}\sin 2x$

Đặt sin2x=m

PT đã cho trở thành:

$\sin x+\sin(m+x-\sin x)=2m \quad (1)$

$\Leftrightarrow m+(m+x-\sin x)-\sin(m+x-\sin x)=0$

Do hàm số $f(x)=m+x-\sin x$ có

$f'(x)=1-\cos x\geq 0$ *nên hàm số f(x) đồng biến trên R. Suy ra*

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=m+x-\sin x=x$

$\Leftrightarrow \sin x=m\Leftrightarrow \sin x=\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=k\pi\ V\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

k)Tìm a để PT sau có nghiệm:

$\sin x+\sin(\cos x+a+x-\sin x)=2a+2\cos x$

Đặt a+cosx=m

PT đã cho trở thành:

$\sin x+\sin(m+x-\sin x)=2m \quad (1)$

$\Leftrightarrow m+(m+x-\sin x)-\sin(m+x-\sin x)=0$

Do hàm số $f(x)=m+x-\sin x$

$f'(x)=1-\cos x\geq 0$ *nên hàm số f(x) đồng biến trên R. Suy ra*

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=m+x-\sin x=x$

$\Leftrightarrow a+\cos x+x-\sin x=x$

$\Leftrightarrow a=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Pt có nghiệm

$\Leftrightarrow a\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

Việc tạo ra PT kiểu này là rất dễ ràng chẳng hạn

1)Cho phương trình:

$\cos x+\cos\frac{m+4x-3\cos x}{4}=\frac{2}{3}m. \quad (1)$

a)Tìm m để PT(1) có nghiệm.

b)Giải PT(1) khi $m=\frac{3}{2}$.

Hd: $f(x)=\frac{m+4x-3\cos x}{4}$

đồng biến trên R. Suy ra

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow..\Leftrightarrow 3\cos x=m.$

2)Cho phương trình:

$\sin^2 x+\sin^2\left(m+x-\sin^2 x\right)=2m. \quad (1)$

a)Tìm m để PT(1) có nghiệm.

b)Giải PT(1) khi $m=\frac{1}{2}$.

c)Giải phương trình:

$\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{3\cos x}{2}+x-\sin^2 x\right)=3\cos x.$

d)Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$\sin^2 x+\sin^2\left(m-\cos x+x-\sin^2 x\right)=2m-2\cos x.$

Hd:

ab) $f(x)=m+x-\sin^2 x$

$f'(x)=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x\geq 0$

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow..\Leftrightarrow \sin^2 x=m.$

c)Giải phương trình:

$\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{3\cos x}{2}+x-\sin^2 x\right)=3\cos x.$

Đặt $\frac{3}{2}\cos x=m.$

PT đã cho trở thành

$\sin^2 x+\sin^2\left(m+x-\sin^2 x\right)=2m. \quad (1)$

$f(x)=m+x-\sin^2 x$

$f'(x)=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x\geq 0$

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow..\Leftrightarrow \sin^2 x=m.$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{3}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x=\frac{3}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\ V\ \cos x=2\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

d)Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$\sin^2 x+\sin^2\left(m-\cos x+x-\sin^2 x\right)=2m-2\cos x.$

Đặt $m-\cos x=a.$

PT đã cho trở thành

$\sin^2 x+\sin^2\left(a+x-\sin^2 x\right)=2a.$ (1)

$f(x)=m+x-\sin^2 x$

$f'(x)=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x\geq 0$

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow..\Leftrightarrow sin^2x=a.$

$\Leftrightarrow sin^2x=m-cosx$

$\Leftrightarrow -cos^2x+cosx+1=m$

Đặt $cosx=t\in[-1;1]$

Thí dụ 4.*Cho phương trình*:

$1+\sqrt[3]{3+m+3\sqrt[3]{m+3x}}=x.$ (1)

a)*Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.*

b)*Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.*

c) Giải phương trình:

$1+\sqrt[3]{3-5x^2+3\sqrt[3]{-5x^2+3x}}=x.$

d) Giải phương trình:

$1+\sqrt[3]{x^3-x^4-1+3\sqrt[3]{x^3-x^4-2+3x}}=x.$

e) Giải phương trình:

$1+\sqrt[3]{x^3-x^4+3\sqrt[3]{x^3-x^4-3+3x}}=x.$

f)Tìm a để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt

$1+\sqrt[3]{3+a-\frac{3x^4}{4}+3.\sqrt[3]{a-\frac{3x^4}{4}+3x}}=x.$

h) Giải phương trình:

$1+\sqrt[3]{1-\frac{3x^4}{4}+3.\sqrt[3]{-2-\frac{3x^4}{4}+3x}}=x.$

k)Tìm a để phương trình sau

$1+\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}+3-a+3.\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}+3x-a}}=x.$

có 4 nghiệm phân biệt thỏa mãn:

1. 4 nghiệm tạo thành cấp số cộng
2. Nghiệm nhỏ nhất bằng $1-\sqrt{2}.$
3. Nghiệm nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{2}$
4. Nghiệm dương nhỏ nhất bằng 4.
5. Tích nghiệm lớn nhất với nghiệm nhỏ nhất bằng $-\sqrt[6]{1982}.$
6. Tổng các nghiệm dương bằng 13.
7. Khoảng cách giữa nghiệm dương lớn nhất với nghiệm dương bé nhất bằng $\sqrt{15}+\sqrt{3}.$
8. Nghiệm âm $x\leq 3-\sqrt{15}.$

i)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+\sqrt[3]{3+y+3\sqrt[3]{y+3x}}=x\\ y.\sqrt[3]{y+3x}=x^2-x-y\end{cases}$$

j)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+\sqrt[3]{3+y+3\sqrt[3]{y+3x}}=x\\ x^2y^2+2x^2y+\frac{1}{x^2}=x^4-6x+9\end{cases}$$

Lời giải.

a)Do hàm số $f(x)=1+\sqrt[3]{m+3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{m+3x}=x$

$\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-1$

Lập bbt $y=x^3-3x^2-1$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

c) Giải phương trình:

$1+\sqrt[3]{3-5x^2+3\sqrt[3]{-5x^2+3x}}=x.$

Đặt $-5x^2=m$ thì PT đã cho trở thành:

$1+\sqrt[3]{3+m+3\sqrt[3]{m+3x}}=x.$ (1)

Do hàm số $f(x)=1+\sqrt[3]{m+3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{m+3x}=x$

$\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-1$

$\Leftrightarrow -5x^2 = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1\ V\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

d) Giải phương trình:

$1 + \sqrt[3]{x^3 - x^4 - 1 + 3\sqrt[3]{x^3 - x^4 - 2 + 3x}} = x.$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{3 + x^3 - x^4 - 2 + 3\sqrt[3]{x^3 - x^4 - 2 + 3x}} = x.$

Đặt $x^3 - x^4 - 2 = m$ thì PT đã cho trở thành:

$1 + \sqrt[3]{3 + m + 3\sqrt[3]{m + 3x}} = x$ (1)

Do hàm số $f(x) = 1 + \sqrt[3]{m + 3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{m + 3x} = x$

$\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - x^4 - 2 = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}; x = \pm\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$

e) Giải phương trình:

$1 + \sqrt[3]{x^3 - x^4 + 3\sqrt[3]{x^3 - x^4 - 3 + 3x}} = x.$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{3 + x^3 - x^4 - 3 + 3\sqrt[3]{x^3 - x^4 - 3 + 3x}} = x.$

Đặt $x^3 - x^4 - 3 = m$ thì PT đã cho trở thành:

$1 + \sqrt[3]{3 + m + 3\sqrt[3]{m + 3x}} = x.$ (1)

Do hàm số $f(x) = 1 + \sqrt[3]{m + 3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{m + 3x} = x$

$\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - x^4 - 3 = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1; x = \pm\sqrt{2}$

f)Tìm a để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt

$1 + \sqrt[3]{3 + m - \dfrac{3x^4}{4} + 3\sqrt[3]{m - \dfrac{3x^4}{4} + 3x}} = x.$

Đặt $a - \dfrac{3x^4}{4} = m$ thì PT đã cho trở thành:

$1 + \sqrt[3]{3 + m + 3\sqrt[3]{m + 3x}} = x.$ (1)

Do hàm số $f(x) = 1 + \sqrt[3]{m + 3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{m + 3x} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m + 3x} = x - 1 \Leftrightarrow m + 3x = (x-1)^3$

$\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow a - \dfrac{3x^4}{4} = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{3x^4}{4} + x^3 - 3x^2 - 1$

Xét $y = \dfrac{3x^4}{4} + x^3 - 3x^2 - 1$

$y' = 3x^3 + 3x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0\ V\ x = 1\ V\ x = -2$

Bbt

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bbt suy ra PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow a \in \left(-\dfrac{9}{4};\ -1\right).$

h) Giải phương trình:

$1 + \sqrt[3]{1 - \dfrac{3x^4}{4} + 3\sqrt[3]{-2 - \dfrac{3x^4}{4} + 3x}} = x.$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{3 - 2 - \dfrac{3x^4}{4} + 3\sqrt[3]{-2 - \dfrac{3x^4}{4} + 3x}} = x.$

Đặt $a - \dfrac{3x^4}{4} = m$ thì PT đã cho trở thành:

$1 + \sqrt[3]{3 + m + 3\sqrt[3]{m + 3x}} = x.$ (1)

Do hàm số $f(x) = 1 + \sqrt[3]{m + 3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{m + 3x} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m + 3x} = x - 1 \Leftrightarrow m + 3x = (x-1)^3$

$\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow -2 - \dfrac{3x^4}{4} = x^3 - 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2+2x-2)(3x^2-2x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}\ V\ x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}.$

k)Tìm a để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt

$1+\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}+3-a+3.\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}+3x-a}}=x.$

Đặt $\frac{x^4}{12}-a=m$ thì PT đã cho trở thành:

$1+\sqrt[3]{3+m+3\sqrt[3]{m+3x}}=x.$ (1)

Do hàm số $f(x)=1+\sqrt[3]{m+3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{m+3x}=x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3x}=x-1\Leftrightarrow m+3x=(x-1)^3$

$\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-1$

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{12}-a=x^3-3x^2-1$

$\Leftrightarrow a=\frac{x^4}{12}-x^3+3x^2+1$

Xét $y=\frac{x^4}{12}-x^3+3x^2+1$

$y'=\frac{1}{3}x^3-3x^2+6x=0$

$\Leftrightarrow x=0\ V\ x=3\ V\ x=8$

Bbt

x	$-\infty$	0	3	6	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	1	↗ $\frac{31}{4}$	↘ 1	↗ $+\infty$

Từ bbt suy ra PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow a\in\left(1;\frac{31}{4}\right)$, Khi này

$a=\frac{x^4}{12}-x^3+3x^2+1$

$\Leftrightarrow x^4-12x^3+36x^2=12(a-1)$

$\Leftrightarrow (x^2-6x)^2=12(a-1)$

$\Leftrightarrow x^2-6x=\pm 2\sqrt{3(a-1)}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2=9\pm 2\sqrt{3(a-1)}$

$\Leftrightarrow x-3=\pm\sqrt{9\pm 2\sqrt{3(a-1)}}$

$\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{9\pm 2\sqrt{3(a-1)}}$

Các nghiệm này sắp xếp theo thứ tự giảm dần là

$3+\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}};3+\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}};$

$3-\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}};3-\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}$

1)4 nghiệm lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$3+\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}-3-\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}}=$

$=3+\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}}-3+\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}}=$

$=3-\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}}-3+\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}=3.\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}}$

$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{3(a-1)}=9\left(9-2\sqrt{3(a-1)}\right)$

$\Leftrightarrow 20.\sqrt{3(a-1)}=72\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=\frac{133}{25}.$

2) Nghiệm nhỏ nhất bằng $1-\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow 3-\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}=1-\sqrt{2}.$

$\Leftrightarrow a=\frac{53}{12}-2\sqrt{2}$

3.Nghiệm nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 3-\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a=\frac{361}{192}$

4) Nghiệm dương nhỏ nhất bằng 4

$3+\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}}=4$

$\Leftrightarrow a=\frac{19}{3}$

5) Tích nghiệm lớn nhất với nghiệm nhỏ nhất bằng $-\sqrt[6]{1982}$

$$\Leftrightarrow \left(3+\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}\right)\times\left(3-\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}\right) = -\sqrt[6]{1982}$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3(a-1)} = -\sqrt[6]{1982}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{12+\sqrt[3]{1982}}{12}$$

6)Tổng các nghiệm dương bằng 13.

$$\Leftrightarrow 3+\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}+3+\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}} +3-\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}} = 13$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{61}{12}$$

7/Khoảng cách giữa nghiệm dương lớn nhất với nghiệm dương bé nhất bằng $\sqrt{15}+\sqrt{3}$.

$$3+\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}}-\left(3-\sqrt{9-2\sqrt{3(a-1)}}\right) = \sqrt{15}+\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 4$$

8)Nghiệm âm $x \le 3-\sqrt{15}$.

$$3-\sqrt{9+2\sqrt{3(a-1)}} \le 3-\sqrt{15}.$$

$$\Leftrightarrow 4 \le a < \frac{31}{4}.$$

Chú ý: có thể tìm điều kiện PT có 4 nghiệm phân biệt dựa vào biến đổi trên.

Nhận xét. Các nghiệm PT viết ở dạng căn trong căn chẳng hạn

+Với a=2 ta có PT:

$$1+\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}+1+3.\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}+3x-2}} = x.$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}-2+3+3.\sqrt[3]{\frac{x^4}{12}-2+3x}} = x.$$

Đặt $\frac{x^4}{12}-2=m$ thì PT đã cho trở thành:

$$1+\sqrt[3]{3+m+3\sqrt[3]{m+3x}} = x. \quad (1)$$

Do hàm số $f(x)=1+\sqrt[3]{m+3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{m+3x}=x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3x}=x-1 \Leftrightarrow m+3x=(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{12}-2=x^3-3x^2-1$$

$$\Leftrightarrow x^4-12x^3+36x^2=12$$

$$\Leftrightarrow (x^2-6x)^2=12$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{9-2\sqrt{3}}; x=3\pm\sqrt{9+2\sqrt{3}}$$

i)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+\sqrt[3]{3+y+3\sqrt[3]{y+3x}}=x(*) \\ y.\sqrt[3]{y+3x}=x^2-x-y(**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=1+\sqrt[3]{y+3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(*) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{y+3x}=x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+3x}=x-1(***)$$

Thay vào (**) được:

$$y(x-1)=x^2-x-y$$

$$\Leftrightarrow x(y-x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0\ V\ y=x-1$$

Với x=0 thay vào (***) được $y=-1$.

Với x=0 thay vào (***) được:

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4x-1}=x-1 \Leftrightarrow 4x-1=(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow .. \Leftrightarrow x=0\ V\ x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{3}$$

Suy ra các nghiệm của hệ là:

$$(0;-1),\left(\frac{3+\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{13}}{3}\right),\left(\frac{3-\sqrt{13}}{3};\frac{-\sqrt{13}}{3}\right)$$

j)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+\sqrt[3]{3+y+3\sqrt[3]{y+3x}}=x(*) \\ x^2y^2+2x^2y+\frac{1}{x^2}=x^4-6x+9(**) \end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=1+\sqrt[3]{y+3x}$ đồng biến trên R nên có: PT(*) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{y+3x}=x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+3x}=x-1 \Leftrightarrow y+3x=(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow y+1=x^3-3x^2$$

Kết hợp với (**) ta có

$$\begin{cases} y+1=x^3-3x^2 \\ x^2y^2+2x^2y+\frac{1}{x^2}=x^4-6x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x).\dfrac{1}{x} = x^2(x-3) \\ (xy+x)^2 + \dfrac{1}{x^2} = x^4 + (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x).\dfrac{1}{x} = x^2(x-3) \\ \left(xy+x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2(xy+x).\dfrac{1}{x} = (x^2+x-3)^2 - 2x^2(x-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x).\dfrac{1}{x} = x^2(x-3) \\ \left(xy+x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = (x^2+x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x).\dfrac{1}{x} = x^2(x-3) \\ xy+x+\dfrac{1}{x} = x^2+x-3 \end{cases} V \begin{cases} (xy+x).\dfrac{1}{x} = x^2(x-3) \\ xy+x+\dfrac{1}{x} = -x^2-x+3 \end{cases}$$

$$\overset{Vi-\acute{e}t}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} xy+x = x^2 \\ \dfrac{1}{x} = x-3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy+x = x-3 \\ \dfrac{1}{x} = x^2 \end{cases}$$

$$hoặc \begin{cases} xy+x = -x^2 \\ \dfrac{1}{x} = -x+3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy+x = -x+3 \\ \dfrac{1}{x} = -x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+x = x^2 \\ x = \dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy+x = x-3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$hoặc \begin{cases} xy+x = -x^2 \\ x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy+x = -x+3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Giải các hệ PT được nghiệm $(x;y)$ *gồm*

$$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right),$$

$$(1;-3), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right), (-1;-5)$$

Thí dụ 5.

a)*Cho phương trình:*

$$\left(\left(\left(x+m\right)^3+m\right)^3+m\right)^3 = x. \quad (1)$$

Tập hợp tất cả các giá trị m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt là khoảng (a;b). Tìm a-b.

b)Giải phương trình:

$$\left(\left(\left(x+1-\sqrt[3]{x}\right)^3+1-\sqrt[3]{x}\right)^3+1-\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

c)*Tìm a để phương trình có 3 nghiệm phân biệt:*

$$\left(\left(\left(x+\sqrt[3]{x^2}-a\right)^3+\sqrt[3]{x^2}-a\right)^3+\sqrt[3]{x^2}-a\right)^3 = x.$$

d)*Tìm a để phương trình có 3 nghiệm phân biệt:*

$$\left(\left(\left(x+a-\frac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}\right)^3+a-\frac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}\right)^3+a-\frac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}\right)^3 = x.$$

e) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(\left(\left(x+y\right)^3+y\right)^3+y\right)^3 = x \\ (2x^2+2y^2)^3 = x^2 \end{cases}$$

f) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(\left(\left(x+y\right)^3+y\right)^3+y\right)^3 = x \\ x^2+y^2 = \sqrt[3]{x^2} - y\sqrt[3]{x} \end{cases}$$

Lời giải.

a)Do hàm số $f(x) = (x+m)^3$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow (x+m)^3 = x \Leftrightarrow x+m = \sqrt[3]{x}$

$\Leftrightarrow m = \sqrt[3]{x} - x$

Đặt $\sqrt[3]{x} = t$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

b)Giải phương trình:

$$\left(\left(\left(x+1-\sqrt[3]{x}\right)^3+1-\sqrt[3]{x}\right)^3+1-\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

Đặt $1-\sqrt[3]{x} = m$ thì PT đã cho trở thành

$$\left(\left(\left(x+m\right)^3+m\right)^3+m\right)^3 = x. \quad (1)$$

Do hàm số $f(x) = (x+m)^3$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow (x+m)^3 = x \Leftrightarrow x+m = \sqrt[3]{x}$

$\Leftrightarrow m = \sqrt[3]{x} - x \Leftrightarrow 1-\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} - x$

$\Leftrightarrow x - 2\sqrt[3]{x} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=1\\ \sqrt[3]{x}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$$

c)*Tìm a để phương trình có 3 nghiệm phân biệt*:

$$\left(\left(\left(x+\sqrt[3]{x^2}-a\right)^3+\sqrt[3]{x^2}-a\right)^3+\sqrt[3]{x^2}-a\right)^3=x.$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2}-a=m$ thì PT đã cho trở thành

$$\left(\left(\left(x+m\right)^3+m\right)^3+m\right)^3=x. \quad (1)$$

Do hàm số $f(x)=(x+m)^3$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow (x+m)^3=x \Leftrightarrow x+m=\sqrt[3]{x}$

$\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{x}-x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}-a=\sqrt[3]{x}-x$

$\Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}=a$

Đặt $\sqrt[3]{x}=t$

Ta được:

$t^3+t^2-t=a$

Xét $y=t^3+t^2-t$

$y'=3t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow t=-1; t=\dfrac{1}{3}$

Bbt

t	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	1	↘	$\frac{11}{27}$ ↗ $+\infty$

Pt có 3 nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left(\frac{11}{27};1\right)$.

d)*Tìm a để phương trình có 3 nghiệm phân biệt*:

$$\left(\left(\left(x+a-\frac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}\right)^3+a-\frac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}\right)^3+a-\frac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}\right)^3=x.$$

Đặt $a-\dfrac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}=m$ thì PT đã cho trở thành

$$\left(\left(\left(x+m\right)^3+m\right)^3+m\right)^3=x. \quad (1)$$

Do hàm số $f(x)=(x+m)^3$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow (x+m)^3=x \Leftrightarrow x+m=\sqrt[3]{x}$

$\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{x}-x$

$\Leftrightarrow a-\dfrac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}=\sqrt[3]{x}-x$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{2.\sqrt[3]{x^5}}{5}-x+\sqrt[3]{x}$

Đặt $\sqrt[3]{x}=t$ ta được:

$\dfrac{2}{5}t^5-t^3+t=a$

Xét $y=\dfrac{2}{5}t^5-t^3+t$

$y'=2t^4-3t^2+1=0 \Leftrightarrow t=\pm1; t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

BBT

t	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{-2}{5}$	↘	$\frac{-3}{5\sqrt{2}}$	↗	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	↘ $\frac{2}{5}$	↗ $+\infty$

Pt đã cho có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow a\in\left(\frac{-3}{5\sqrt{2}};\frac{-2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)$.

Chú ý: Trong các bảng biến thiên phần viết thêm tác giả không có dòng xét dấu y'.

e) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(\left(\left(x+y\right)^3+y\right)^3+y\right)^3=x(*)\\ (2x^2+2y^2)^3=x^2\ \ (**)\end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\left(x+y\right)^3$ đồng biến trên R nên có:

$PT(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow\left(x+y\right)^3=x\Leftrightarrow x+y=\sqrt[3]{x}$

Ta có hệ:

$$\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{x}\\ (2x^2+2y^2)^3=x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{x}\\ 2x^2+2y^2=\sqrt[3]{x^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{x}\\ 2x^2+2y^2=(x+y)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{x}\\ (x-y)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{x}\\ x=y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=0\ V\ x=y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

f) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(\left(\left(x+y\right)^3+y\right)^3+y\right)^3=x(*)\\ x^2+y^2=\sqrt[3]{x^2}-y\sqrt[3]{x}\end{cases}$$

Do hàm số $f(x)=\left(x+y\right)^3$ đồng biến trên R nên có:

$PT(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow\left(x+y\right)^3=x\Leftrightarrow x+y=\sqrt[3]{x}$

Ta có hệ:

$$\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{x}\\ x^2+y^2=\sqrt[3]{x^2}-y\sqrt[3]{x}\end{cases}\ (1)$$

+Với $x=0$ thay vào (1) được y=0.

+Xét $x\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}=1\\ \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)^2+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=1-\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\\ \left(1-\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)^2+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=1-\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\\ \frac{y}{\sqrt[3]{x}}=0\ V\ \frac{y}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=1\\ \frac{y}{\sqrt[3]{x}}=0\end{cases}\ \text{V}\ \begin{cases}\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{2}\\ \frac{y}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ y=0\end{cases}\ \text{V}\ \begin{cases}x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}\ \text{V}\ \begin{cases}x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

Vậy hệ có 5 nghiệm:

$$\begin{cases}x=\pm1\\ y=0\end{cases}\ \text{V}\ \begin{cases}x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\text{V}\ \begin{cases}x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}\ \text{V}\ \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

Thí dụ 6.*Cho phương trình:*

$$\left(\left(x^2+m^2\right)^2+m^2\right)^2+m^2=x\ \ (1)$$

a)Tìm m để PT(1) có nghiệm.

b) Tìm m để PT(1) có 2 nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để PT(1) có nghiệm duy nhất.

d)Tìm m để PT(1) có tổng bình phương các nghiệm bằng $\frac{3}{4}$.

e)Giải phương trình:

$$\left(\left(x^2+\frac{1}{|8x|}\right)^2+\frac{1}{|8x|}\right)^2+\frac{1}{|8x|}=x$$

f)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}((x^2+y^2)^2+y^2)^2+y^2=x\\ x^3+y^3=3x^2-xy(x+y)\end{cases}$$

g)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}((x^2+y^2)^2+y^2)^2+y^2=x\\ x^2y^2+6x^2-10x+4=0\end{cases}$$

h)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ((x^2+y^2)^2+y^2)^2+y^2=x \\ 1+(2xy-y)^2=2xy+x-2y \end{cases}$$

k)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x^2+2(y-1)^2)^2+2(y-1)^2=x \\ (y^2+2(x-1)^2)^2+2(x-1)^2=y \end{cases}$$

Lời giải.

abc) *do* $VT \geq 0$ *nên* $x \geq 0$.

Do hàm số $f(x)=x^2+m^2$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x^2+m^2=x$

$\Leftrightarrow x^2-x+m^2=0$

Giải tiếp dành cho bạn đọc.

e)Giải phương trình:

$$\left(\left(x^2+\frac{1}{|8x|}\right)^2+\frac{1}{|8x|}\right)^2+\frac{1}{|8x|}=x$$

do $VT>0$ *nên* $x>0$. *PT trở thành*

$$\left(\left(x^2+\frac{1}{8x}\right)^2+\frac{1}{8x}\right)^2+\frac{1}{8x}=x(*)$$

Đặt $\frac{1}{8x}=m>0$

Do hàm số $f(x)=x^2+m$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên có: PT(*) $\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x^2+m=x$

$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{8x}=0$

$\Leftrightarrow 8x^3-8x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ V\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

f)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ((x^2+y^2)^2+y^2)^2+y^2=x & (1) \\ x^3+y^3=3x^2-xy(x+y) & (2) \end{cases}$$

do $VT(1) \geq 0$ *nên* $x \geq 0$.

Do hàm số $f(x)=x^2+y^2$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x^2+y^2=x$

Kết hợp với (2) ta được:

$$\begin{cases} x^2+y^2=x \\ x^3+y^3=3x^2-xy(x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x \\ (x+y)(x^2+y^2-xy)=3x^2-xy(x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x \\ (x+y)(x^2+y^2)=3x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x \\ x(x+y)=3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x \\ x(-2x+y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x \\ x=0 \end{cases} V \begin{cases} x^2+y^2=x \\ -2x+y=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x;y) \in (0;0);\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$.

g)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ((x^2+y^2)^2+y^2)^2+y^2=x & (1) \\ x^2y^2+6x^2-10x+4=0 & (2) \end{cases}$$

do $VT(1) \geq 0$ *nên* $x \geq 0$.

Do hàm số $f(x)=x^2+y^2$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x^2+y^2=x$

Kết hợp với (2) ta được:

$$\begin{cases} x^2+y^2=3x-2+2-2x \\ x^2y^2=(3x-2)(2-2x) \end{cases} (*)$$

Theo Viet x^2, y^2 là nghiệm PT:

$t^2-(3x-2+2-2x)t+(3x-2)(2-2x)=0$

$\Leftrightarrow t=3x-2\ V\ t=2-2x$

Suy ra:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2=3x-2 \\ y^2=2-2x \end{cases} \begin{cases} x^2=2-2x \\ y^2=3x-2 \end{cases}\right.$$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x;y) \in (1;0),\left(-1+\sqrt{3};\pm\sqrt{3\sqrt{3}-5}\right)$

h)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ((x^2+y^2)^2+y^2)^2+y^2=x & (1) \\ 1+(2xy-y)^2=2xy+x-2y & (2) \end{cases}$$

Do $VT(1) \geq 0$ *nên* $x \geq 0$.

Do hàm số f(x) = $x^2 + y^2$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Có: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - y^2 \le \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

$y^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

Lại có:

$(\mathbf{2}) \Leftrightarrow (2xy - y)^2 = 2xy + x - 2y - 1$

$\Leftrightarrow (2xy - y)^2 = (x - 1)(2y + 1)$ (3)

Do $x \le 1$; $-\frac{1}{2} \le y$ và $(2xy - y)^2 \ge 0$

Suy ra $(2xy - y)^2 \ge 0 \ge (x - 1)(2y + 1)$

Vì vậy

$(\mathbf{3}) \Leftrightarrow (2xy - y)^2 = (x - 1)(2y + 1) = 0$

Kết hợp: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ suy ra:

Các nghiệm (x;y) là $(1;0), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

k)Giải hệ phương trình

$\begin{cases} (x^2 + 2(y-1)^2)^2 + 2(y-1)^2 = x \ (1) \\ (y^2 + 2(x-1)^2)^2 + 2(x-1)^2 = y \ (2) \end{cases}$

Do $VT(1) \ge 0$ *nên* $x \ge 0$.

Do hàm số f(x) = $x^2 + 2(y-1)^2$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 2(y-1)^2 = x$

Do $VT(2) \ge 0$ *nên* $y \ge 0$.

Do hàm số f(y) = $y^2 + 2(x-1)^2$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(2) $\Leftrightarrow f_2(y) = y$

$\Leftrightarrow f(y) = y \Leftrightarrow y^2 + 2(x-1)^2 = y$

Ta có hệ:

$\begin{cases} x^2 + 2(y-1)^2 = x & (3) \\ y^2 + 2(x-1)^2 = y & (4) \end{cases}$

Trừ vế với vế (3) cho (4) được:

$(x - y)(x + y + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = y \ (do\ x + y + 5 > 0)$

Thay x=y vào (3) ta được

$x^2 + 2(x-1)^2 = x \Leftrightarrow x = 1\ V\ x = \frac{2}{3}$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(1;1); \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Thí dụ tương tự.

Cho phương trình:

$\left(\left(x^4 + m^2\right)^4 + m^2\right)^4 + m^2 = x \quad (1)$

a)Tìm m để PT(1) có nghiệm.

b) Tìm m để PT(1) có 2 nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để PT(1) có nghiệm duy nhất.

d)Giải phương trình:

$\left(\left(x^4 + \frac{7}{4}x^2\right)^4 + \frac{7}{4}x^2\right)^4 + \frac{7}{4}x^2 = x$

Lời giải.

abc)*dễ thấy* $x \ge 0$.

Do hàm số f(x) = $x^4 + m^2$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^4 + m^2 = x \Leftrightarrow m^2 = x - x^4$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

d)Giải phương trình:

$\left(\left(x^4 + \frac{7}{4}x^2\right)^4 + \frac{7}{4}x^2\right)^4 + \frac{7}{4}x^2 = x (*)$

dễ thấy $x \ge 0$.

Đặt $\frac{7}{4}x^2 = m \geq 0$

Do hàm số $f(x) = x^4 + m$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ nên có: PT(*) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^4 + m^2 = x$

$\Leftrightarrow x^4 + \frac{7}{4}x^2 - x = 0 \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow x = 0 V x = \frac{1}{2}$

Thí dụ 7.*Cho phương trình*:

$1 + m^2 + 2\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2 + 2\sqrt{x-1}}} = x.$ (1)

a)*Giải biện luận theo m phương trình (1).*

b)*Chứng minh với mọi m phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 5.*

c) Tập hợp tất cả giá trị m để PT(1) có tất cả các nghiệm x thỏa mãn $x \leq m^2 + m + 8$ là đoạn $[a;b]$. Tìm giá trị $P = a + b$ và $Q = a - b$

d) Giải phương trình:

$1 + \frac{30}{x} + 2\sqrt{\frac{30}{x} + 2\sqrt{\frac{30}{x} + 2\sqrt{x-1}}} = x.$

Lời giải.

dễ thấy $x \geq 1$.

a,b)Do hàm số $f(x) = 1 + m^2 + 2\sqrt{x-1} \geq 1$ đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$ nên có:

PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1 + m^2 + 2\sqrt{x-1} = x$

$\Leftrightarrow 1 + m^2 = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1$

$\Leftrightarrow 1 + m^2 = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 = \pm\sqrt{1+m^2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{1+m^2} \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{1+m^2} \leq 0 \end{array}\right.$

+ Với m=0 PT(1) có 2 nghiệm x=1;x=5.

+Với $m \neq 0$ ta có: $1 + \sqrt{1+m^2} > 1$

và $1 - \sqrt{1+m^2} < 0$

Suy ra PT(1) có nghiệm duy nhất

$x = 1 + \left(1 + \sqrt{1+m^2}\right)^2 > 1 + 2^2 = 5$

c) Với m=0 PT(1) có nghiệm thỏa mãn đề bài.

+Với $m \neq 0$ (1) có nghiệm duy nhất :

$x = 1 + \left(1 + \sqrt{1+m^2}\right)^2$ suy ra

$1 + \left(1 + \sqrt{1+m^2}\right)^2 \leq m^2 + m + 8$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+m^2} \leq m + 5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -5 \\ 4(1+m^2) \leq (m+5)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{5 - 2\sqrt{22}}{3} \leq m \leq \frac{5 + 22\sqrt{22}}{3}$

$\Rightarrow a = \frac{5 - 2\sqrt{22}}{3}; b = \frac{5 + 2\sqrt{22}}{3}$

$\Rightarrow a + b = \frac{10}{3}; a - b = -\frac{4\sqrt{22}}{3}.$

d) Giải các phương trình:

$1 + \frac{30}{x} + 2\sqrt{\frac{30}{x} + 2\sqrt{\frac{30}{x} + 2\sqrt{x-1}}} = x.$

dễ thấy $x \geq 1$.

Đặt $\frac{30}{x} = m > 0$

Do hàm số $f(x) = 1 + m + 2\sqrt{x-1} > 1$ và đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$ nên có:

PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1 + m + 2\sqrt{x-1} = x$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{30}{x} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{30}{x} = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$ (*)

+*Với* $1 \leq x \leq 2$ *thì* $VP(*) > 1 > VT(*)$

+*Với* $x > 2$ *ta có*:

$y = 1 + \frac{30}{x}$ và $h = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$

Có

$y' = -\frac{30}{x^2} < 0$ và $h = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} > 0$

Suy ra VT(*) là hàm nghịch biến trên $(2;+\infty)$

VP(*) là hàm đồng biến trên $(2;+\infty)$

Suy ra PT(*) có không quá 1 nghiệm. Suy ra $x=10$ là nghiệm duy nhất của (*).

Vậy PT đã cho có 1 nghiệm x=10.

Tương tự

Cho phương trình:

$4+m^2+4\sqrt{m^2+4\sqrt{m^2+4\sqrt{x-4}}}=x.$ (1)

a)*Giải biện luận theo m phương trình (1).*

b)*Chứng minh với mọi m phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 20 .*

c) Có bao nhiêu số nguyên m để PT(1) có nghiệm $x\in[29;125]$.

d) Giải các phương trình:

$4+\frac{145}{x}+4\sqrt{\frac{145}{x}+4\sqrt{\frac{145}{x}+4\sqrt{x-4}}}=x.$

Lời giải.

dễ thấy $x\geq 4$.

a,bc)Do hàm số $f(x)=4+m^2+4\sqrt{x-4}\geq 4$

và đồng biến trên khoảng $[4;+\infty)$ nên có:

$\text{PT(1)}\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 4+m^2+4\sqrt{x-4}=x$

$\Leftrightarrow 4+m^2=x-4-4\sqrt{x-4}+4$

$\Leftrightarrow 4+m^2=\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{x-4}-2=\pm\sqrt{4+m^2}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-4}=2+\sqrt{4+m^2}\\ \sqrt{x-4}=2-\sqrt{4+m^2}\end{array}\right.$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

d) Giải các phương trình:

$4+\frac{145}{x}+4\sqrt{\frac{145}{x}+4\sqrt{\frac{145}{x}+4\sqrt{x-4}}}=x.$

dễ thấy $x\geq 4$.

Đặt $\frac{145}{x}=m>0$

Ta có:

$4+m+4\sqrt{m+4\sqrt{m+4\sqrt{x-4}}}=x.$

Do hàm số $f(x)=4+m+4\sqrt{x-4}>4$

và đồng biến trên khoảng $[4;+\infty)$ nên có:

$\text{PT(1)}\Leftrightarrow f_3(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 4+m+4\sqrt{x-4}=x$

$\Leftrightarrow 4+\frac{145}{x}=x-4-4\sqrt{x-4}+4$

$\Leftrightarrow 4+\frac{145}{x}=\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-4}-2=\pm\sqrt{4+\frac{145}{x}}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-4}=2+\sqrt{4+\frac{145}{x}}(*)\\ \sqrt{x-4}=2-\sqrt{4+\frac{145}{x}}(**)\end{array}\right.$

do $x\geq 4$ *nên* $VP(**)<0\leq VT(**)$

Dễ thấy VT(*) là hàm đồng biến trên $[4;+\infty)$

VP(*) là hàm nghịch biến trên $[4;+\infty)$.

Suy ra $x=29$ *là nghiệm duy nhất của (*).*

Vậy PT đã cho có 1 nghiệm x=29.

Thí dụ 8.*Cho phương trình:*

$\sqrt{a\sqrt{ax+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{ax+\sqrt{x}}}=x.$ (1)

a) *Giải phương trình (1) với a=3.*

b) Chứng minh với mọi số thực dương a *phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.* Tìm số thực dương a để PT(1) có nghiệm $x\in(9;100)$.

c)Giải phương trình:

$\sqrt{(1+\frac{x}{1+\sqrt{x}})\sqrt{(1+\frac{x}{1+\sqrt{x}})x+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{(1+\frac{x}{1+\sqrt{x}})x+\sqrt{x}}}=x.$

Lời giải.

ab)*dễ thấy* $x\geq 0$.

Do hàm số $f(x)=\sqrt{ax+\sqrt{x}}$

và đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có:

$\text{PT(1)}\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{ax+\sqrt{x}}=x$

$\Leftrightarrow ax+\sqrt{x}=x^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(a\sqrt{x}+1-x\sqrt{x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ a\sqrt{x}=x\sqrt{x}-1(*) \end{array}\right.$$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm PT(*).

Xét x>0 ta có

$$(*)\Leftrightarrow a=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ta có BBT

x	0	$+\infty$
$y'=1+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	+	
$y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Từ bbt suy ra PT(*) có đúng một nghiệm dương với mọi số thực dương a.

PT(1) có nghiệm $x\in(9;100)$

khi và chỉ khi $a\in\left(\frac{26}{3};\frac{999}{10}\right)$.

Với a=3 thì PT(1) trở thành

$$\sqrt{3\sqrt{3x+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{3x+\sqrt{x}}}=x.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\sqrt{x}-3\sqrt{x}=1(*) \end{array}\right.$$

Đặt $\sqrt{x}=t\geq 0$

PT(*) trở thành $x^3-3x=1$

Đến đây tương tự phần lượng giác hóa ta đặt

$$\sqrt{x}=t=cosz\ với\ z\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

c)Giải phương trình:

$$\sqrt{(1+\frac{x}{1+\sqrt{x}})\sqrt{(1+\frac{x}{1+\sqrt{x}})x+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{(1+\frac{x}{1+\sqrt{x}})x+\sqrt{x}}}=x$$

dễ thấy $x\geq 0$.

Đặt $1+\frac{x}{1+\sqrt{x}}=a\geq 1$. *PT trở thành*

$$\sqrt{a\sqrt{ax+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{ax+\sqrt{x}}}=x.\ (1)$$

Do hàm số $f(x)=\sqrt{ax+\sqrt{x}}$

và đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có:

$$PT(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x$$

$$\Leftrightarrow f(x)=x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ax+\sqrt{x}}=x\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(a\sqrt{x}+1-x\sqrt{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ a\sqrt{x}=x\sqrt{x}-1(*) \end{array}\right.$$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm PT(*).

Xét x>0 ta có

$$(*)\Leftrightarrow\left(1+\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}=x\sqrt{x}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{x}+x}{1+\sqrt{x}}.\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{x}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=x-1$$

$$\Leftrightarrow x=(x-1)^2\ (với\ x\geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy PT có 2 nghiệm $x=0;x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Thí dụ 9.*Cho phương trình*:

$$a^2\left(a^2x^2+\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{a^2x^2+\sqrt{x}}=x.\quad (1)$$

a) *Giải phương trình (1) với* $a=\frac{3}{8}$.

b) Tìm a để *phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.*

c) Tìm a để *phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.*

d) Tìm a để *phương trình (1) có nghiệm duy nhất.*

Lời giải.

dễ thấy $x\geq 0$.

Do hàm số $f(x)=a^2x^2+\sqrt{x}$

đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ nên có:

$\text{PT(1)} \Leftrightarrow f_2(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(a^2x\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ a^2 = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} (*) \end{array}\right.$

Ta có BBT

x	0		9/4		$+\infty$
$y' = \dfrac{3-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x^5}}$		+	0	−	
$y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

Giải tiếp câu b,c.d xin dành cho bạn đọc.

Câu a PT có 3 nghiệm

$x = 0; x = \frac{16}{9}; x = \frac{8}{9}\left(7 - \sqrt{13}\right).$

Thí dụ 10. *Cho a là số thực lớn hơn 1 và phương trình:*

$$\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - ..- \sqrt{a - \sqrt{a - x}}}}} = x.$$

(vế trái có 100 dấu căn).

a)Giải (1) khi a=3.

b) Chứng minh (1) luôn có nghiệm duy nhất lớn hơn $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.Tìm a để (1) có nghiệm x thỏa mãn

$x < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{a^2+38}{12}}.$

c)Tìm a để (1) có nghiệm x thỏa mãn

$x > \frac{-1+\sqrt{12+\sqrt{a^2+16}}}{2}.$

d)Tìm a để (1) có nghiệm x thỏa mãn

$1 \le x \le -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{a^2+38}{12}}.$

e)Tìm a để (1) có nghiệm x thỏa mãn

$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{a^2+9}{12}} \le x \le -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{a^2+38}{12}}.$

f)Tìm a nguyên để (1) có nghiệm nguyên.

g) Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2+9^9 - \sqrt{x^2+9^9 - \sqrt{x^2+9^9 - \sqrt{x^2+9^9 - x}}}} = x$$

h)Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^2}{2}+2 - \sqrt{\frac{x^2}{2}+2 - \sqrt{\frac{x^2}{2}+2 - \sqrt{\frac{x^2}{2}+2 - x}}}} = x$$

k)Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^2}{3}+1 - \sqrt{\frac{x^2}{3}+1 - \sqrt{\frac{x^2}{3}+1 - \sqrt{\frac{x^2}{3}+1 - x}}}} = x$$

t)Giải phương trình

$$\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1 - \sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1 - \sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1 - \sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1 - x}}}} = x$$

Lời giải.

a) với a=3 ta có :

$$\sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{3 - ..- \sqrt{3 - \sqrt{3 - x}}}}} = x. \quad (1)$$

Do $\text{VT(1)} \ge 0$ nên $x \ge 0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;3]$. Do $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3 - x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$ nên

$(1) \Leftrightarrow f_{50}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}.$

b) Do $\text{VT(1)} \ge 0$ nên $x \ge 0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;a]$. Do $f(x) = \sqrt{a - \sqrt{a - x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;a]$ và có tập giá trị là $\left[\sqrt{a - \sqrt{a}}; \sqrt{a}\right]$ là tập con của $[0;a]$ nên

$(1) \Leftrightarrow f_{50}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{a - \sqrt{a - x}} = x \Leftrightarrow a - \sqrt{a - x} = x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a-x}-x\right)\left(\sqrt{a-x}+x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a-x}=x(*)\\ \sqrt{a-x}=1-x(**)\end{array}\right.$

$(**)\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ a=x(x-1)+1\le 1\end{cases}$

Do $a>1$ nên (**) vô nghiệm.

$(*)\Leftrightarrow a=x^2+x\Leftrightarrow a+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

Xét $x<-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{a^2+38}{12}}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}<-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{a^2+38}{12}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{a^2+38}{12}}$

$\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a<5\\ a>7\end{array}\right.$

Vậy $a\in(1;5)\cup(7;+\infty)$.

c) $x>\frac{-1+\sqrt{12+\sqrt{a^2+16}}}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}>\frac{-1+\sqrt{12+\sqrt{a^2+16}}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+\frac{1}{4}}>\frac{\sqrt{12+\sqrt{a^2+16}}}{2}$

$\Leftrightarrow x>\frac{21}{5}$

d) $1\le x\le -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{a^2+38}{12}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\le a\le 5\\ a\ge 7\end{array}\right.$.

e) $-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{a^2+9}{12}}\le x\le -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{a^2+38}{12}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<a\le 5\\ 7\le a\le 6+\sqrt{30}\end{array}\right.$.

f Do $(1)\Leftrightarrow x^2+x-a=0$ (2)

(1) có nghiệm nguyên thì $\Delta=1+4a=m^2$

(Với m là số tự nhiên). Do 1+4a là số lẻ nên m cũng là số tự nhiên lẻ tức m=2k+1. Suy ra

$1+4a=(2k+1)^2\Leftrightarrow a=k(k+1)$

Khi m=2k ta được x=k. Vậy PT(1) có nghiệm nguyên khi và chỉ khi a là tích của 2 số nguyên dương liên tiếp.

g) Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2+9^9-\sqrt{x^2+9^9-\sqrt{x^2+9^9-\sqrt{x^2+9^9-x}}}}=x$$

Đặt $x^2+9^9=a>1$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}}=x\ (1)$$

Do VT(1) ≥ 0 nên $x\ge 0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;a]$. Do $f(x)=\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;a]$ và có tập giá trị là $\left[\sqrt{a-\sqrt{a}};\sqrt{a}\right]$ nên

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x \Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a-x}-x\right)\left(\sqrt{a-x}+x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a-x}=x(*)\\ \sqrt{a-x}=1-x(**)\end{array}\right.$

$(**) \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ a=x(x-1)+1\le 1\end{cases}$

Do $a>1$ nên (**) vô nghiệm.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9^9-x}=x \Leftrightarrow x=9^9.$

h)Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^2}{2}+2-\sqrt{\frac{x^2}{2}+2-\sqrt{\frac{x^2}{2}+2-\sqrt{\frac{x^2}{2}+2-x}}}}=x$$

Đặt $\frac{x^2}{2}+2=a\ge 2$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}}=x\ (1)$$

Do VT(1) ≥ 0 nên $x\ge 0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;a]$. Do $f(x)=\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;a]$ và có tập giá trị là $\left[\sqrt{a-\sqrt{a}};\sqrt{a}\right]$ là tập con của $[0;a]$ nên

$(1) \Leftrightarrow f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x \Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x \Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a-x}-x\right)\left(\sqrt{a-x}+x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a-x}=x(*)\\ \sqrt{a-x}=1-x(**)\end{array}\right.$

$(**) \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ a=x(x-1)+1\le 1\end{cases}$

Do $a\ge 2$ nên (**) vô nghiệm.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{2}+2-x}=x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+x-2=0$

$\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{5}$

k)Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^2}{3}+1-\sqrt{\frac{x^2}{3}+1-\sqrt{\frac{x^2}{3}+1-\sqrt{\frac{x^2}{3}+1-x}}}}=x$$

Đặt $\frac{x^2}{3}+1=a\ge 1$

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}}=x\ (1)$$

Do VT(1) ≥ 0 nên $x\ge 0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;a]$. Do $f(x)=\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;a]$ và có tập giá trị là $\left[\sqrt{a-\sqrt{a}};\sqrt{a}\right]$ là tập con của $[0;a]$. nên

$(1) \Leftrightarrow f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x \Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x \Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a-x}-x\right)\left(\sqrt{a-x}+x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a-x}=x(*)\\ \sqrt{a-x}=1-x(**)\end{array}\right.$

$(**)\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ a=x(x-1)+1\le 1\end{cases}$

Do $a\ge 1$ nên $(**)\Leftrightarrow x=0.$

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{3}+1-x}=x\Leftrightarrow \frac{2x^2}{3}+x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$

Vậy PT có 2 nghiệm $x=0;x=\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$

t)Giải phương trình

$$\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1-\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1-\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1-\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1-x}}}}=x$$

Đặt $\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1=a\ge 1$

PT đã cho trở thành:

$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}}=x$ (1)

Do VT(1) ≥ 0 nên $x\ge 0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;a]$. Do $f(x)=\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;a]$ và có tập giá trị là $\left[\sqrt{a-\sqrt{a}};\sqrt{a}\right]$ là tập con của $[0;a]$. nên

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow a-\sqrt{a-x}=x^2$

$\Leftrightarrow a-x-\sqrt{a-x}=x^2-x$

$\Leftrightarrow a-x-x^2+x-\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a-x}-x\right)\left(\sqrt{a-x}+x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a-x}=x(*)\\ \sqrt{a-x}=1-x(**)\end{array}\right.$

$(**)\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ a=x(x-1)+1\le 1\end{cases}$

Do $a\ge 1$ nên $(**)\Leftrightarrow x=0.$

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x^2+x}{3}\right)^2+1-x}=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(x^2+x)^2+x^2+x-1=0$

$\Leftrightarrow$ ...

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{19-6\sqrt{5}}-1}{2};x=\frac{\sqrt{19+6\sqrt{5}}-1}{2}$

Vậy PT có 3 nghiệm :

$x=1;x=\frac{\sqrt{19-6\sqrt{5}}-1}{2};x=\frac{\sqrt{19+6\sqrt{5}}-1}{2}$

Thí dụ 11. *Cho b là số thực dương và phương trình:*

$$a+b.\sqrt{b.\sqrt{b.\sqrt{\ldots b.\sqrt{b.\sqrt{x-a}}}}}=x.\ (1)$$

(vế trái có 100 dấu căn).

a)Chứng minh với mọi a phương trình(1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

b) Tìm a,b nguyên để PT có nghiệm lớn bằng 100 và nghiệm nhỏ là số nguyên tố.

c) Tìm a,b để PT có nghiệm lớn bằng 12 và nghiệm nhỏ là số nguyên tố. Tính tổng bình phương các giá trị b tìm được.

d) Tìm a để phương trinh sau có 3 nghiệm phân biệt

$$a+x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-a}}}}}=x.$$

(*vế trái có* 100 *dấu căn*).

e) Tìm a để phương trinh sau có 3 nghiệm phân biệt và tích của chúng bằng 2^{2020}

$$a+x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-a}}}}}=x.$$

(*vế trái có* 100 *dấu căn*).

f) Tìm a để phương trinh sau có 3 nghiệm phân biệt và tổng bình phương của 3 nghiệm bằng 2^{2020}

$$a+x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-a}}}}}=x.$$

(*vế trái có* 100 *dấu căn*).

h) Giải phương trình :

$$\frac{1}{8}+x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-\frac{1}{8}}}}}}=x.$$

(*vế trái có* 100 *dấu căn*).

Lời giải.

a)ĐK $x\ge a$. Do $f(x)=a+b\sqrt{x-a}$ đồng biến trên nửa khoảng $[a;+\infty)$ và có tập giá trị là $[a;+\infty)$ nên

$(1)\Leftrightarrow f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow a+b\sqrt{x-a}=x\Leftrightarrow b\sqrt{x-a}=x-a$

$\Leftrightarrow b^2(x-a)=(x-a)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=a+b^2\end{array}\right.$

PT có 2 nghiệm $x=a;x=a+b^2$

b)Ta có nghiệm lớn

$x=a+b^2=100\to a=(10-b)(10+b)$

Do nghiệm nhỏ a là số nguyên tố nên $10-b=1$

Suy ra $b=9;a=19$ thỏa mãn đề bài.

c)Ta có nghiệm lớn

$x=a+b^2=12\to a=12-b^2<12$

Do nghiệm nhỏ a là số nguyên tố nên

$a\in\{2;3;5;7;11\}$.

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

d) Tìm a để phương trinh sau có 3 nghiệm phân biệt

$$a+x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-a}}}}}=x$$

Xét $x=0$ thay vào PT được $x=a=0$

Với $a=0$ thì PT:

$$x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x}}}}}=x\Leftrightarrow x=0;x=1$$

Xét $x\ne 0$ đặt $x^2=b>0$

PT đã cho trở thành:

$$a+b.\sqrt{b.\sqrt{b.\sqrt{\ldots b.\sqrt{b.\sqrt{x-a}}}}}=x$$

ĐK $x\ge a$. Do $f(x)=a+b\sqrt{x-a}$ đồng biến trên nửa khoảng $[a;+\infty)$ và có tập giá trị là $[a;+\infty)$ nên

$(1) \Leftrightarrow f_{100}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow a + b\sqrt{x-a} = x \Leftrightarrow b\sqrt{x-a} = x-a$

$\Leftrightarrow b^2(x-a) = (x-a)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a + b^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a + x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x^2 - x + a = 0 (*) \end{array}\right.$

PT có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi PT(*) có 2 nghiệm phân biệt khác a.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - 4a > 0 \\ a^2 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a < \frac{1}{4} \\ a \neq 0 \end{array}\right.$

e) Từ câu d và theo Định lí Viet phương trình

$$a + x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-a}}}}} = x$$

có 1 nghiệm $x = a$ và tích 2 nghiệm còn lại bằng a. Tích 3 nghiệm là a^2

Theo đề bài có :

$a^2 = 2^{2020} \Leftrightarrow a = -2^{1010}$ do $a < \frac{1}{4}$.

Vậy $a = -2^{1010}$

f)

Từ câu d và theo Định lí Viet phương trình

$$a + x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-a}}}}} = x$$

có 1 nghiệm $x = a$ và tổng bình phương 2 nghiệm còn lại bằng $1 - 2a$.

Tổng bình phương 3 nghiệm bằng

$a^2 + 1 - 2a = (a-1)^2$

Theo đề bài có :

$(a-1)^2 = 2^{2020} \Leftrightarrow a - 1 = \pm 2^{1010}$

$\Leftrightarrow a = 1 \pm 2^{1010}$

Đối chiếu đk suy ra : $a = 1 - 2^{1010}$.

h) Áp dụng câu d có :

$$\frac{1}{8} + x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{\ldots x^2.\sqrt{x^2.\sqrt{x-\frac{1}{8}}}}}} = x.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{8} \\ x^2 - x + \frac{1}{8} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{8} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$

Thí dụ 12. *Cho a là số thực dương và phương trình:*

$$1 + a.\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{\ldots a.\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{x-1}}}} = x. \quad (1)$$

(vế trái có 100 dấu căn).

a)Giải biện luận phương trình(1) theo a .

b) Tìm a để PT(1) có nghiệm lớn nhất hơn nghiệm bé nhất 6 đơn vị.

c) Tìm a để PT(1) có nghiệm $x = 6$.

d) Tìm a để PT(1) có nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

e) Tìm a để PT(1) có ít nhất 2 nghiệm $x \in \left(\frac{1}{4}; 3\right)$.

f) Tìm a để PT(1) có tất cả các nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

h)Giải phương trình:

$$1 + \frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{\ldots \frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{x^2-1}}}} = x^2.$$

(vế trái có 100 dấu căn).

Lời giải.

a) Do $f(x) = 1 + a.\sqrt[3]{x-1}$

đồng biến trên R nên có

$(1) \Leftrightarrow f_{100}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow 1 + a\sqrt[3]{x-1} = x$

$\Leftrightarrow a\sqrt[3]{x-1} = x - 1$

$\Leftrightarrow a^3(x-1)=(x-1)^3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-1)^2=a^3 \end{array}\right.$

Với $a>0$ pt(1) có đúng 3 nghiệm

$x=1; x=1\pm\sqrt{a^3}$.

b) Theo câu a có PT(1) có nghiệm lớn nhất,nhỏ nhất lần lượt là $x=1+\sqrt{a^3}$; $x=1-\sqrt{a^3}$

Theo đề bài có $2\sqrt{a^3}=6\Leftrightarrow a^3=9\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{9}$

c) Theo câu a có PT(1) có nghiệm

$x=1; x=1+\sqrt{a^3}>1$; $x=1-\sqrt{a^3}<1$

nên $x=1+\sqrt{a^3}=6\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{35}$

c) Theo câu a có PT(1) có nghiệm

$x=1; x=1+\sqrt{a^3}>1$; $x=1-\sqrt{a^3}<1$

nên $x=1-\sqrt{a^3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$

e) Do x=1 là 1 nghiệm nên để PT(1) có ít nhất 2 nghiệm $x\in\left(\frac{1}{4};3\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{a^3}>\dfrac{1}{4} \\ 1+\sqrt{a^3}<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<a<\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}} \\ a>\sqrt[3]{4} \end{array}\right.$

e) Do x=1 là 1 nghiệm nên để PT(1) có tất cả các nghiệm $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-\sqrt{a^3}>\dfrac{1}{3} \\ 1+\sqrt{a^2}<\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\sqrt{a^3}<\frac{2}{3}\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{4}}<a<\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

h)Giải phương trình:

$$1+\frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{...\frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\sqrt[3]{x^2-1}}}}=x^2.$$

(*vế trái có* 100 *dấu căn*).

Đặt $x^2=t$ thì PT trở thành:

$$1+\frac{t}{2}.\sqrt[3]{\frac{t}{2}.\sqrt[3]{...\frac{t}{2}.\sqrt[3]{\frac{t}{2}.\sqrt[3]{t-1}}}}=t \quad (2)$$

Dễ thấy $t=0$ là nghiệm của (2).

Xét $t\neq 0$ đặt $\frac{t}{2}=a>0$ thì (2):

$$1+a.\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{...a.\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{t-1}}}}=t. \quad (1)$$

Do $f(t)=1+a.\sqrt[3]{t-1}$

đồng biến trên R nên có

$(1)\Leftrightarrow f_{100}(t)=t\Leftrightarrow f(t)=t$

$\Leftrightarrow 1+a\sqrt[3]{t-1}=t \Leftrightarrow a\sqrt[3]{t-1}=t-1$

$\Leftrightarrow a^3(t-1)=(t-1)^3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ (t-1)^2=a^3 \end{array}\right.$

$Với\ (t-1)^2=a^3=\left(\frac{t}{2}\right)^3$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^2-6t+4)=0$

$\Leftrightarrow t=2\ V\ t=3\pm\sqrt{5}$

$Vậy\ t=0\ V\ t=1\ V\ t=2\ V\ t=3\pm\sqrt{5}$

$\rightarrow x=0\ V\ x=\pm1\ V\ x=\pm\sqrt{2}\ V\ x=\pm\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$

Vậy PT đã cho có 7 nghiệm:

$x=0\ V\ x=\pm1\ V\ x=\pm\sqrt{2}\ V\ x=\pm\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$

Chú ý:Dạng toán này có thể giải bằng cách dùng phương pháp nâng lũy thừa 2 vế.

Dạng tổng quát

TQ1)Cho số nguyên dương k,a là số thực dương và phương trình:

$m+a.\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{...a.\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{x-m}}}}=x.\ (1)$

(vế trái có 100 dấu căn).

1)Giải biện luận theo a phương trình(1) theo a và m.

2) Biết PT(1) có nghiệm lớn nhất ;bé nhất lần lượt bằng 1 và -2. Tính $P=a^3+m^3$

HD :

Do $f(x)=m+a.\sqrt[3]{x-m}$

đồng biến trên R nên có

$(1)\Leftrightarrow f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow m+a\sqrt[3]{x-m}=x$

$\Leftrightarrow a\sqrt[3]{x-m}=x-m$

$\Leftrightarrow a^3(x-m)=(x-m)^3$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\(x-m)^2=a^3\end{array}\right.$

Với $a>0$ pt(1) có đúng 3 nghiệm

$x=m;x=m\pm\sqrt{a^3}$.

(1) có nghiệm lớn nhất ;bé nhất bằng 1 và -2

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m+\sqrt{a^3}=1\\m-\sqrt{a^3}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{2}\\a=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\end{array}\right.$

$\rightarrow P=a^3+m^3=\dfrac{19}{6}.$

TQ2)Cho số nguyên dương k ;a là số thực dương và phương trình :

$m+a.\sqrt[2k+1]{a.\sqrt[2k+1]{...a.\sqrt[2k+1]{a.\sqrt[2k+1]{x-m}}}}=x.\ (1)$

(vế trái có 100 dấu căn).

a)Giải biện luận phương trình(1) theo a và m.

b) Tìm các số nguyên a và m biết khi $k=2$ thì PT(1) có nghiệm lớn $x=1982+128\sqrt{2}$.

c) Tìm k biết khi $m=3;a=\sqrt[3]{2}$ thì PT(1) có nghiệm $x=3-\sqrt[14]{2^5}$.

HD :

b)Do $f(x)=m+a.\sqrt[5]{x-m}$

đồng biến trên R nên có

$(1)\Leftrightarrow f_{100}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow m+a\sqrt[5]{x-m}=x$

$\Leftrightarrow a\sqrt[5]{x-m}=x-m$

$\Leftrightarrow a^5(x-m)=(x-m)^5$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\(x-m)^4=a^5\end{array}\right.$

Với $a>0$ pt(1) có đúng 3 nghiệm

$x=m;x=m\pm\sqrt[4]{a^5}$.

PT(1) có nghiệm lớn $x=1982+128\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow m+\sqrt[4]{a^5}=1982+128\sqrt{2}=1982+\sqrt[4]{\left(2^6\right)^5}$

$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}m=1982\\a=2^6=64\end{array}\right.$

c)

Do $f(x)=m+a.\sqrt[2k+1]{x-m}$

đồng biến trên R nên có

$(1) \Leftrightarrow f_{100}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow m + a.\sqrt[2k+1]{x-m} = x$

$\Leftrightarrow a.\sqrt[2k+1]{x-1} = x-1$

$\Leftrightarrow a^{2k+1}(x-m) = (x-m)^{2k+1}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ (x-m)^{2k} = a^{2k+1} \end{array}\right.$

Với $a > 0$ pt(1) có đúng 3 nghiệm

$x = m; x = m \pm \sqrt[2k]{a^{2k+1}}$.

Khi $m = 3; a = \sqrt[3]{2}$ thì PT(1) có nghiệm $x = 3 - \sqrt[10]{2}$ nên có

$3 - \sqrt[2k]{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2k+1}} = 3 - \sqrt[14]{2^5}$

$3 - \sqrt[2k]{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2k+1}} = 3 - \sqrt[14]{2^5}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{2k+1}{6k}} = 2^{\frac{5}{14}} \Leftrightarrow \frac{2k+1}{6k} = \frac{5}{14} \Leftrightarrow k = 7$

TQ3)Cho b là số thực dương,k là số nguyên dương và phương trình:

$a + b.\sqrt[2k]{b.\sqrt[2k]{\ldots b.\sqrt[2k]{b.\sqrt[2k]{x-a}}}} = x.\ (1)$

(vế trái có 100 dấu căn).

a)Chứng minh với mọi a phương trình(1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

b) Tìm các số nguyên a và b biết khi $k = 4$ thì PT(1) có nghiệm $x = -6 + \sqrt[7]{2^{48}}$.

Tìm a và b.

HD:b) ĐK $x \geq a$. Do $f(x) = a + b\sqrt[8]{x-a}$ đồng biến trên nửa khoảng $[a; +\infty)$ và có tập giá trị là $[a; +\infty)$ nên

$(1) \Leftrightarrow f_{100}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow a + b\sqrt[8]{x-a} = x \Leftrightarrow b\sqrt[8]{x-a} = x-a$

$\Leftrightarrow b^8(x-a) = (x-a)^8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a + \sqrt[7]{b^8} \end{array}\right.$

Do a nguyên nên nghiệm

$x = a + \sqrt[7]{b^8} = -6 + \sqrt[7]{(2^6)^8}$

Suy ra $a = -6; b = 2^6 = 64$.

Thí dụ 13. *Cho b là số thực dương và phương trình:*

$a - b.\sqrt{b.\sqrt{b.\sqrt{\ldots b.\sqrt{b.\sqrt{a-x}}}}} = x.\ (1)$

(vế trái có 100 dấu căn).

a)Chứng minh với mọi a phương trình(1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

b) Tìm các số nguyên tố a,b nguyên để PT(1) có tổng các nghiệm bằng -21. Với a,b tìm được hãy tính tổng bình phương các nghiệm của (1).

c) Khi $a = 13\sqrt{6}$ thì PT(1) có tổng các nghiệm bằng $26\sqrt{6} - 2016$.Tìm b.

Lời giải.

a)ĐK $x \leq a$. Do $f(x) = a - b\sqrt{a-x}$ đồng biến trên nửa khoảng $(-\infty; a]$ và có tập giá trị là $(-\infty; a]$ nên

$(1) \Leftrightarrow f_{100}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow a - b\sqrt{a-x} = x \Leftrightarrow b\sqrt{a-x} = a-x$

$\Leftrightarrow b^2(a-x) = (a-x)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a - b^2 \end{array}\right.$

PT có 2 nghiệm $x = a; x = a - b^2$.

b)PT(1) có tổng nghiệm bằng -21 nên có $2a - b^2 = -21$ (*)

Nếu b=2 thì VT(*) là số chẵn không thỏa mãn(*).

Suy ra b là số nguyên tố lẻ $b=2k+1$

Thay vào (*) được

$2a-(2k+1)^2=-21 \Leftrightarrow a=2k^2+2k-10$

Suy ra a là số nguyên tố chẵn tức là $a=2$

Suy ra $b=5$. Khi này (1) có 2 nghiệm

$x=2; x=-23.$

c)Ta có có tổng các nghiệm bằng $26\sqrt{6}-2016$ nên có

$26\sqrt{6}-b^2=26\sqrt{6}-2016 \Leftrightarrow b=\sqrt{2016}.$

TQ:

Cho b là số thực dương,k là số nguyên dương và phương trình:

$a-b.\sqrt[2k]{b.\sqrt[2k]{...b.\sqrt[2k]{b.\sqrt[2k]{a-x}}}}=x.$ (1)

(vế trái có 100 dấu căn).

a)Chứng minh với mọi a phương trình(1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

b) Khi $a=\sqrt{2}; b=2\sqrt[8]{8}$ phương trình(1) có nghiệm $x=-\sqrt{2}$. Tìm k.

c) Khi $a=\sqrt[3]{2}; b=\sqrt[5]{64}$ phương trình(1) có nghiệm $x=-\sqrt[3]{2}$. Tìm k.

d) Tìm các số nguyên a,b,k biết (1) có 1nghiệm

$x=2-\sqrt[11]{3^{12}}$

HD :a,b,c) ĐK $x\ge a$. Do $f(x)=a-b.\sqrt[2k]{a-x}$ đồng biến trên nửa khoảng $[a;+\infty)$ và có tập giá trị là $[a;+\infty)$ nên

$(1) \Leftrightarrow f_{100}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow a+b.\sqrt[2k]{a-x}=x \Leftrightarrow b.\sqrt[2k]{a-x}=a-x$

$\Leftrightarrow b^{2k}(a-x)=(a-x)^{2k} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=a-\sqrt[2k-1]{b^{2k}} \end{array}\right.$

Khi $a=\sqrt{2}; b=\sqrt[12]{2}$ thì

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2}-\sqrt[2k-1]{\left(2\sqrt[8]{8}\right)^{2k}}=\sqrt{2}-2^{\frac{11k}{4(2k-1)}} \end{array}\right.$

phương trình(1) có nghiệm $x=-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}-2^{\frac{11k}{4(2k-1)}}=-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{11k}{4(2k-1)}}=2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{11k}{4(2k-1)}=\frac{3}{2} \leftrightarrow k=6$

Khi $a=\sqrt{2}; b=\sqrt[12]{2}$ thì phương trình(1) có nghiệm $x=-\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2}-2^{\frac{12k}{5(2k-1)}}=-\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow \frac{12k}{5(2k-1)}=\frac{4}{5} \leftrightarrow k=5.$

d) theo đề bài có : $x=2-\sqrt[11]{3^{12}}=a-\sqrt[11]{b^{12}}$

Các dạng tương tự.

1) $a+\frac{b}{\sqrt[k]{k\sqrt{\frac{b}{k\sqrt{\frac{b}{\ddots}}}}}}=x$

2) $a+b\left(b\left(...b(x-a)^k...\right)^k\right)^k=x$

Thídụ 14. Cho số thực m thuộc đoạn $[-1;1]$ và $f(x)=4x^3-3x.$

Xét phương trình: $f_n(x)=m$ (1)

Biện luận theo m số nghiệm PT(1).

Lờigiải.

Lập luận như các thí dụ phần lượng giác hóa ta có tất cả các nghiệm của PT đã cho đều thuộc đoạn $[-1;1]$.

Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f_n(x)=cos3^n t.$

PT(1) trở thành:

$cos3^n t=m$

TH1: m=1

$cos3^n t = 1$
$\Leftrightarrow t = \frac{k2\pi}{3^n}$

Do $t \in [0;\pi]$ suy ra
$0 \le \frac{k2\pi}{3^n} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le \frac{3^n}{2}$
Do 3^n là số lẻ nên $0 \le k < \frac{3^n}{2}$ và có
$0 \le k \le \frac{3^n - 1}{2}$
Suy ra $k \in \left\{0; 1; \dots; \frac{3^n-1}{2}\right\}$ có $\frac{3^n+1}{2}$ giá trị;tương ứng ta có $\frac{3^n+1}{2}$ nghiệm x của PT(1).
TH2: m= -1
$cos3^n t = -1$
$\Leftrightarrow t = \frac{\pi + k2\pi}{3^n}$

Do $t \in [0;\pi]$ suy ra
$0 \le \frac{\pi + k2\pi}{3^n} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le \frac{3^n - 1}{2}$
Do 3^n là số lẻ nên
$k \in \left\{0; 1; \dots; \frac{3^n-1}{2}\right\}$ có $\frac{3^n+1}{2}$ giá trị;tương ứng ta có $\frac{3^n+1}{2}$ nghiệm x của PT(1).
TH3: $-1 < m < 1$
$cos3^n t = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\alpha + k2\pi}{3^n} \\ t = \frac{-\alpha + h2\pi}{3^n} \end{array}\right.$
với $\alpha = arccosm \epsilon (0;\pi)$

Xét $t = \frac{\alpha+k2\pi}{3^n}$
Do $t \in [0;\pi]$ suy ra
$0 \le \frac{\alpha + k2\pi}{3^n} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le \frac{3^n - \frac{\alpha}{\pi}}{2}$
Do 3^n là số lẻ và $\frac{3^n-1}{2} < \frac{3^n-\frac{\alpha}{\pi}}{2} < \frac{3^n}{2}$ nên có
$0 \le k \le \frac{3^n - 1}{2}$
Suy ra $k \in \left\{0; 1; \dots; \frac{3^n-1}{2}\right\}$ có $\frac{3^n+1}{2}$ giá trị;tương ứng ta có $\frac{3^n+1}{2}$ nghiệm x của PT(1).
Xét $t = \frac{-\alpha+h2\pi}{3^n}$
Do $t \in [0;\pi]$ suy ra
$0 \le \frac{-\alpha + h2\pi}{3^n} \le \pi \Leftrightarrow 1 \le h \le \frac{3^n + \frac{\alpha}{\pi}}{2}$
Do 3^n là số lẻ và $\frac{3^n-1}{2} < \frac{3^n}{2} < \frac{3^n-\frac{\alpha}{\pi}}{2} < \frac{3^n+1}{2}$
nên có
$1 \le h \le \frac{3^n - 1}{2}$
Suy ra $h \in \left\{1; \dots; \frac{3^n-1}{2}\right\}$ có $\frac{3^n-1}{2}$ giá trị;tương ứng ta có $\frac{3^n-1}{2}$ nghiệm x của PT(1).
Xét $\frac{\alpha+k2\pi}{3^n} = \frac{-\alpha+h2\pi}{3^n}$

$\Leftrightarrow \alpha = (h-k)\pi$ (*)

Do vế phải (*) là bội nguyên của π còn với $\alpha = arccosm \epsilon (0;\pi)$ nên (*) vô nghiệm,

Vậy với $-1 < m < 1$ PT(1) có 3^n nghiệm.

Để số nghiệm không còn quy luật nữa ta có thể cho thêm điều kiện của x. Chẳng hạn

Thí dụ. Cho $f(x) = 4x^3 - 3x$. Xét phương trình: $f_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

a)Tìm số nghiệm PT(1) biết $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b)Tìm số nghiệm PT(1) biết $x < \frac{1}{2}$.

c)Tìm số nghiệm PT(1) biết $-\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d)Tìm số nghiệm PT(1) biết $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < cos\frac{\pi}{8}$.

HD: Đặt $x = cost$ với $t \in [0;\pi]$ suy ra
$f_4(x) = cos81t$.
Ta có PT:

$cos81t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pm\frac{\pi}{4} + k2\pi}{81}$

a) do $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $t \in \left[0; \frac{5\pi}{6}\right)$

b) do $x < \frac{1}{2}$ nên $t \in \left(\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

c) do $-\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right)$

d) do $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < cos\frac{\pi}{8}$ nên $t \in \left(\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}\right)$

Giải từng ý xin dành cho bạn đọc.

Chú ý:các hàm số khác được tạo ra từ hàm số

$f(x) = 4x^3 - 3x$ có công thức số nghiệm tương tự.

Thí dụ 15. Cho số thực m thuộc đoạn $[-1; 1]$ và $f(x) = 2x^2 - 1$. Xét

phương trình: $f_n(x) = m$ (1)

Biện luận theo m số nghiệm PT(1).

Lời giải.

Lập luận như các thí dụ phần lượng giác hóa ta có tất cả các nghiệm của PT đã cho đều thuộc đoạn $[-1; 1]$.

Đặt $x = cost$ với $t \in [0; \pi]$ suy ra

$f_n(x) = cos2^n t.$

Ta có PT:

$cos2^n t = m$

TH1: m=1

$cos2^n t = 1$

$\Leftrightarrow t = \frac{k2\pi}{2^n}$

Do $t \in [0; \pi]$ suy ra

$0 \le \frac{k2\pi}{2^n} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le 2^{n-1}$

Suy ra $k \in \{0; 1; \ldots; 2^{n-1}\}$ có $2^{n-1} + 1$ giá trị;tương ứng ta có $2^{n-1} + 1$ nghiệm x của PT(1) .

TH2: $m = -1$

$cos2^n t = -1$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi + k2\pi}{2^n}$

Do $t \in [0; \pi]$ suy ra

$0 \le \frac{\pi + k2\pi}{2^n} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le 2^{n-1} - \frac{1}{2}$

Suy ra $k \in \{0; 1; \ldots; 2^{n-1} - 1\}$ có $2^{n-1} + 1$ giá trị;tương ứng ta có $2^{n-1} + 1$ nghiệm x của PT(1) .

TH3: $-1 < m < 1$

$cos2^n t = m$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\alpha + k2\pi}{2^n} \\ t = \frac{-\alpha + h2\pi}{2^n} \end{array}\right.$ với $\alpha = arccosm \epsilon (0; \pi)$

Xét $t = \frac{\alpha + k2\pi}{2^n}$

Do $t \in [0; \pi]$ suy ra

$0 \le \frac{\alpha + k2\pi}{2^n} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le 2^{n-1} - \frac{\alpha}{2\pi}$

Suy ra $k \in \{0; 1; \ldots; 2^{n-1} - 1\}$ có 2^{n-1} giá trị;tương ứng ta có 2^{n-1} nghiệm x của PT(1).

Xét $t = \frac{-\alpha + h2\pi}{2^n}$

Do $t \in [0; \pi]$ suy ra

$0 \le \frac{-\alpha + h2\pi}{2^n} \le \pi \Leftrightarrow 1 \le h \le 2^{n-1} + \frac{\alpha}{2\pi}$

Suy ra $k \in \{1; \ldots; 2^{n-1}\}$ có 2^{n-1} giá trị;tương ứng ta có 2^{n-1} nghiệm x của PT(1).

Xét $\frac{\alpha + k2\pi}{2} = \frac{-\alpha + h2\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = (h - k)\pi$ (*)

Do vế phải (*) là bội nguyên của π còn với $\alpha = arccosm \epsilon (0; \pi)$ nên (*) vô nghiệm,

Vậy với $-1 < m < 1$ PT(1) có 2^n nghiệm.

Thí dụ tương tự.

1.Cho số thực m thuộc đoạn $[-1;1]$ và $f(x)=8x^4-8x^2+1$. Xét phương trình: $f_n(x)=m$ (1)

a)Biện luận theo m số nghiệm PT(1).

b) Khi n=3 và $m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ hãy tìm số nghiệm của PT(1) sao cho $-\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có BBT của hàm số f(x) như sau:

x	$-\infty$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1 $\nearrow$ $+\infty$

Lập luận như các thí dụ phần lượng giác hóa ta có tất cả các nghiệm của PT đã cho đều thuộc đoạn $[-1;1]$.

Đặt $x=cost$ với $t\in[0;\pi]$ suy ra

$f(x)=cos4x$

$\rightarrow f_n(x)=cos4^n t.$

PT(1) trở thành:

$cos4^n t=m$.Giải tiếp dành cho bạn đọc.

2. Cho m là số thực thỏa mãn $|m|\geq 1$ và $f(x)=\frac{x^3}{4-3x^2}$.

Biện luận theo m số nghiệm phương trình: $f_n(x)=m$.

Lời giải. $f'(x)=-\frac{3x^2(x^2-4)}{(4-3x^2)^2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $\nearrow$ 1	$+\infty$	$\searrow$	-1 $\searrow$ $-\infty$
	1	$\nearrow$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$-\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Lập luận tương tự các thí dụ lượng giác hóa suy ra các nghiệm của PT $f_n(x)=m$ với $|m|\geq 1$

đặt $x=\frac{1}{cost}$ $với\ t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Ta có:

$f_1(x)=\frac{1}{cos3x}$

$f_2(x)=\frac{1}{cos3^2x}$

$\rightarrow f_n(x)=\frac{1}{cos3^n x}$

PT(1) trở thành $\frac{1}{cos3^n x}=m$

TH1: m=1

$cos3^n t=1$

$\Leftrightarrow t=\frac{k2\pi}{3^n}$

Do $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ suy ra

$0\leq\frac{k2\pi}{3^n}\leq\pi\Leftrightarrow 0\leq k\leq\frac{3^n}{2}$

Do 3^n là số lẻ nên $0\leq k<\frac{3^n}{2}$ và có

$0\leq k\leq\frac{3^n-1}{2}$

Xét $\frac{k2\pi}{3^n}=\frac{\pi}{2}\leftrightarrow 4k=3^n$ vô nghiệm vì 3^n là số lẻ.

Suy ra $k\in\left\{0;1;\ldots;\frac{3^n-1}{2}\right\}$ có $\frac{3^n+1}{2}$ giá trị;tương ứng ta có $\frac{3^n+1}{2}$ nghiệm x của PT(1).

TH2: m=-1 tương tự TH1 ta có $\frac{3^n+1}{2}$ nghiệm x của PT(1).

TH3: $m<-1\ hoặc\ m>1$

$$cos3^n t=\frac{1}{m}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\alpha+k2\pi}{3^n}\\t=\frac{-\alpha+h2\pi}{3^n}\end{array}\right.$$

với $\alpha=arccos\frac{1}{m}\epsilon(0;\pi)$

Xét $t=\frac{\alpha+k2\pi}{3^n}$

Do $t\in[0;\pi]$ suy ra

$0\leq\frac{\alpha+k2\pi}{3^n}\leq\pi\Leftrightarrow 0\leq k\leq\frac{3^n-\frac{\alpha}{\pi}}{2}$

Do 3^n là số lẻ và $\frac{3^n-1}{2} < \frac{3^n-\frac{\alpha}{\pi}}{2} < \frac{3^n}{2}$ nên có

$0 \le k \le \frac{3^n-1}{2}$

Suy ra $k \in \left\{0; 1; \dots; \frac{3^n-1}{2}\right\}$ có $\frac{3^n+1}{2}$ giá trị;tương ứng ta có $\frac{3^n+1}{2}$ nghiệm x của PT(1).

Xét $t = \frac{-\alpha+h2\pi}{3^n}$

Do $t \in [0;\pi]$ suy ra

$$0 \le \frac{-\alpha+h2\pi}{3^n} \le \pi \Leftrightarrow 1 \le h \le \frac{3^n+\frac{\alpha}{\pi}}{2}$$

$$0 \le \frac{-\alpha+h2\pi}{3^n} \le \pi \Leftrightarrow 1 \le h \le \frac{3^n+\frac{\alpha}{\pi}}{2}$$

Do 3^n là số lẻ và $\frac{3^n-1}{2} < \frac{3^n}{2} < \frac{3^n-\frac{\alpha}{\pi}}{2} < \frac{3^n+1}{2}$ nên có

$1 \le h \le \frac{3^n-1}{2}$

Suy ra $h \in \left\{1; \dots; \frac{3^n-1}{2}\right\}$ có $\frac{3^n-1}{2}$ giá trị;tương ứng ta có $\frac{3^n-1}{2}$ nghiệm x của PT(1).

Xét $\frac{\alpha+k2\pi}{3^n} = \frac{-\alpha+h2\pi}{3^n}$

$\Leftrightarrow \alpha = (h-k)\pi$ (*)

Do vế phải (*) là bội nguyên của π còn với $\alpha = arccosm\epsilon(0;\pi)$ nên (*) vô nghiệm,

Xét $\frac{\alpha+k2\pi}{3^n} = \frac{-\alpha+h2\pi}{3^n} = \frac{\pi}{2}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2\frac{\alpha}{\pi} + k4\pi = 3^n \\ -2\frac{\alpha}{\pi} + h4\pi = 3^n \end{cases}$$

Có $0 < 2\frac{\alpha}{\pi} < 1$ nên vế trái từng PT của hệ không thể là số lẻ nên hệ này vô nghiêm

Vậy với $m < -1$ *hoặc* $m > 1$ PT(1) có 3^n nghiệm.

Thí dụ 16.*Cho phương trình:*

$$1+m\left(2+m\left(2+m(1+x)^3\right)^3\right)^3 = x. \quad (1)$$

a)Giải biện luận theo m số nghiệm của phương trình (1).

b)Giải phương trình:

$$1+\frac{1}{x^2+23}\left(2+\frac{1}{x^2+23}\left(2+\frac{1}{x^2+23}(1+x)^3\right)^3\right)^3 = x.$$

Lờigiải.

a)Do hàm số $f(x) = 1+m(1+x)^3$ đồng biến trên R khi $m > 0$ và nghịch biến trên R khi $m < 0$ nên với $m \ne 0$ có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1+m(1+x)^3 = x$

$\Leftrightarrow m(1+x)^3 = 1+x-2$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3}$

(dễ thấy x= -1 không là nghiệm của(1))

Lập bbt $y = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3}$ có

$y' = \frac{4-2x}{(1+x)^4}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$	$\searrow$	0

Chú ý.m=0 PT có 1 nghiệm x=1

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

b)Giải phương trình:

$$1+\frac{1}{x^2+23}\left(2+\frac{1}{x^2+23}\left(2+\frac{1}{x^2+23}(1+x)^3\right)^3\right)^3 = x.$$

Đặt $\frac{1}{x^2+23} = m > 0$ thì PT trở thành:

$$1+m\left(2+m\left(2+m(1+x)^3\right)^3\right)^3 = x. \quad (1)$$

Do hàm số $f(x) = 1+m(1+x)^3$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1+m(1+x)^3 = x$

$\Leftrightarrow m(1+x)^3 = x-1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+23}(1+x)^3 = x-1$

$\Leftrightarrow (1+x)^3 = (x-1)(x^2+23)$

$\Leftrightarrow 4(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Dạng tương tự.

$1+m\sqrt[3]{2+m\sqrt[3]{2+m\sqrt[3]{1+x}}} = x.$ (1)

a) *Giải biện luận theo m số nghiệm của phương trình (1).*

b)Tìm m để PT(1) có nghiệm $x \in (-2;0)$.

c)Tìm m để PT(1) có nghiệm $x \in (-9;-1)$.

d) Tìm m để PT có 3 nghiệm phân biệt và có tổng bình phương các nghiệm bằng 2019.

Lời giải

Với m=0 (1) có nghiệm duy nhất x=1.

Do hàm số $f(x) = 1+m\sqrt[3]{1+x}$ hoặc đồng biến trên R khi $m>0$ hoặc nghịch biến trên R khi $m<0$ nên với $m \neq 0$ theo kết quả 1 có:

PT(1) $\Leftrightarrow f_3(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1+m\sqrt[3]{1+x} = x$

Đặt $t = \sqrt[2]{1+x}$.

Ta có $mt = t^3 - 2$ (*)

Có t=0 không là nghiệm của (*).

Xét $t \neq 0$ thì

$(*) \Leftrightarrow m = t^2 - \dfrac{2}{t}$

Với $y = t^2 - \frac{2}{t}$

$y' = 2t + \dfrac{2}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Bbt

t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$-\infty$	$+\infty$

abc)Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

d) PT(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 3$.

$1+m\sqrt[3]{1+x} = x \Leftrightarrow m\sqrt[3]{1+x} = x-1$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (3-m^3)x - 1 - m^3 = 0$

Theo Định lí Viet có

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 3 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = 3-m^3 \end{cases}$

Theo đề bài có:

$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2 = 2019$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) = 2019$

$\Leftrightarrow 9 - 6 + 2m^3 = 2019$

$\Leftrightarrow 2m^3 = 2016 \Leftrightarrow m^3 = 1008$

$\Leftrightarrow m = \sqrt[3]{1008}$

Thí dụ 17. *Cho phương trình:*

$m + \dfrac{64x + 8m\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(8x+m\sqrt{x^2+1}\right)^2 + x^2 + 1}} = x.$ (1)

Biện luận theo m số nghiệm phương trình (1).

Lời giải

Chia Tử và mẫu vế trái (1) cho $\sqrt{x^2+1}$ được:

$$m + \frac{m + 8\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\left(m+8\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + 1}} = x. \quad (2)$$

Xét $f(x) = m + \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ là hàm số đồng biến vì

$f'(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}} > 0.$

PT(2) có dạng: $f_2(x) = x$

Áp dụng kết quả 1 có

$f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow m + \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}} = x \Leftrightarrow m = x - \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$

Xét $y = x - \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y' = 1 - \frac{8x}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-2\right)\left(x^2+5+2\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Ta có BBT của hàm số như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$+\infty$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

Thí dụ tương tự:.

1.*Cho phương trình*:

$$m + \frac{64x + 8m\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{\left(8x + m\sqrt{x^2+2}\right)^2 + x^2 + 2}} = x. \quad (1)$$

Biện luận theo m số nghiệm phương trình (1).

2.*Cho phương trình*:

$$m + \frac{64x + 8m\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{\left(8x + m\sqrt{x^2+3}\right)^2 + x^2 + 3}} = x. \quad (1)$$

Biện luận theo m số nghiệm phương trình (1).

Thí dụ 18.*Cho phương trình*:

$$\frac{2m}{5} + \frac{4x}{25}\sqrt{x^2+3} = \frac{x-m}{\sqrt{\left(m + \frac{2x}{5}\sqrt{x^2+3}\right)^2 + 3}}. \quad (1)$$

Biện luận theo m số nghiệm phương trình (1).

Lời giải

$$m + \frac{2}{5}\left(m + \frac{2x}{5}\sqrt{x^2+3}\right)\sqrt{\left(m + \frac{2x}{5}\sqrt{x^2+3}\right)^2 + 3} = x$$

(2)

Xét $f(x) = m + \frac{2x}{5}\sqrt{x^2+3}$ là hàm số đồng biến vì

$f'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}} > 0.$

PT(2) có dạng: $f_2(x) = x$

Áp dụng kết quả 1 có

$f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$$\Leftrightarrow m + \frac{2x}{5}\sqrt{x^2+3} = x \Leftrightarrow m = x - \frac{2x}{5}\sqrt{x^2+3}$$

Xét $y = x - \frac{2x}{5}\sqrt{x^2+3}$

$$y' = 1 - \frac{2}{5}.\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{x^2+3} - 4x^2 - 6}{5\sqrt{x^2+3}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Ta có BBT của hàm số như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\infty$

Giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

Thí dụ 19.*Cho phương trình*:

$$\frac{\cos x}{2+\sin x} + \frac{\cos\left(m + x - \frac{\cos x}{2+\sin x}\right)}{2+\sin\left(m + x - \frac{\cos x}{2+\sin x}\right)} = 2\text{m}. \quad (1)$$

a)Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b)Tìm m để phương trình (1) có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Lời giải

PT(1) tương đương

$$m+\left(m+x-\frac{\cos x}{2+\sin x}\right)-\frac{\cos\left(m+x-\frac{\cos x}{2+\sin x}\right)}{2+\sin\left(m+x-\frac{\cos x}{2+\sin x}\right)}=x\ (2)$$

Xét $f(x)=m+x-\frac{cosx}{2+sinx}$ có

$$f'(x)=\frac{(1+sinx)(5+sinx)}{(2+sinx)^2}\geq 0$$

Suy ra f(x) đồng biến trên R.

$(2)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow m+x-\frac{cosx}{2+sinx}=x$

$\Leftrightarrow m=\frac{cosx}{2+sinx}$

$\Leftrightarrow msinx-cosx=-2m \quad (3)$

a)(3) có nghiệm khi và chỉ khi

$m^2+1\geq 4m^2\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}\leq m\leq\frac{\sqrt{3}}{3}.$

b)Theo câu a có

$(1)\Leftrightarrow m=\frac{cosx}{2+sinx}$ (*)

Xét $x=\pi$ thay vào (*) ta được: $m=-\frac{1}{2}$

Xét $x\in[0;\pi)$ suy ra $\frac{x}{2}\in[0;\frac{\pi}{2})$

Đặt $t=tan\frac{x}{2}$

với $t\in[0;+\infty)$

PT(*) trở thành $m=\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}$

$m=\frac{1-t^2}{2t^2+2t+2}$ (**)

Xét $f(t)=\frac{1-t^2}{2t^2+2t+2}$

$f'(t)=-\frac{t^2+4t+1}{2(2t^2+2t+2)^2}<0$ *với* $t\geq 0$

BBT

x	0	$+\infty$
f(x)	$\frac{1}{2}$ ↘	$-\frac{1}{2}$

Từ BBT suy ra

phương trình (1) có nghiệm thuộc $[0;\pi)$.

$\Leftrightarrow m\in(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$

Vậy *phương trình (1) có nghiệm thuộc đoạn* $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. $\Leftrightarrow m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Thí dụ tương tự.

1.*Cho phương trình*:

$$\frac{\sin x}{cosx-2}+\frac{sinx\left(m+x-\frac{\sin x}{cosx-2}\right)}{cos\left(m+x-\frac{sinx}{cosx-2}\right)-2}=2m. \quad (1)$$

a)*Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.*

b)Tìm m để phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

c)Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

d)Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

Lời giải

PT(1) tương đương

$$m+\left(m+x-\frac{\sin x}{\cos x-2}\right)-\frac{\sin\left(m+x-\frac{\sin x}{\cos x-2}\right)}{\cos\left(m+x-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}=x\ (2)$$

Xét $f(x)=m+x-\frac{sinx}{cosx-2}$ có

$$f'(x)=\frac{(1-cosx)^2+2}{(2-cosx)^2}>0$$

Suy ra f(x) đồng biến trên R.

$(2) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow m + x - \frac{sinx}{cosx-2} = x$

$\Leftrightarrow m = \frac{sinx}{cosx-2}$

$\Leftrightarrow sinx - mcosx = -2m \quad (3)$

a)(3) có nghiệm khi và chỉ khi

$m^2 + 1 \geq 4m^2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

b)Theo câu a có

$(1) \Leftrightarrow m = \frac{sinx}{cosx-2} \quad (*)$

Xét $x = \pi$ *thay vào (*) ta được:* $m = 0$.

Xét $x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \setminus \{\pi\}$ *suy ra* $\frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Đặt $t = tan\frac{x}{2}$

với $t \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

PT(*) trở thành $m = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{-2t}{1+3t^2}$ *(**)*

Xét $f(t) = \frac{-2t}{1+3t^2}$

$f'(t) = \frac{6t^2-2}{(1+3t^2)^2}$

BBT

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	↘	0	↘		↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0

Từ bbt suy ra
phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \setminus \{\pi\}$
khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm

$t \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \setminus \{0\}$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

c)phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

d)Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \Leftrightarrow m \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2.Cho phương trình:

$$\frac{2+\cos x}{2+\sin x} + \frac{2+\cos\left(m+x-\frac{2+\cos x}{2+sinx}\right)}{2+\sin\left(m+x-\frac{2+\cos x}{2+sinx}\right)} = 2m. \quad (1)$$

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

Lời giải PT(1) tương đương

$$m + \left(m + x - \frac{2+cosx}{2+sinx}\right) - \frac{\cos\left(m+x-\frac{2+cosx}{2+sinx}\right)}{2+\sin\left(m+x-\frac{2+cosx}{2+sinx}\right)} = x \quad (2)$$

Xét $f(x) = m + x - \frac{2+cosx}{2+sinx}$ có

$f'(x) = \frac{(1+cosx)^2 + 2(1-sinx)}{(2+sinx)^2} > 0$

Suy ra f(x) đồng biến trên R.

$(2) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow m + x - \frac{2+cosx}{2+sinx} = x$

$\Leftrightarrow m = \frac{2+cosx}{2+sinx}$

$\Leftrightarrow msinx - cosx = 2 - 2m \quad (3)$

(3) có nghiệm khi và chỉ khi

$m^2 + 1 \geq (2-2m)^2 \Leftrightarrow \frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq m \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

Thí dụ 20.

a)*Tìm m để phương trình:*

$m^2+\sqrt{m^2+1+\sqrt{m^2+1+\sqrt{1+x}}}=x \quad (1)$

có nghiệm $x=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$.

b) Giải phương trình:

$$\frac{x^2}{16}+1+\sqrt{\frac{x^2}{16}+2+\sqrt{\frac{x^2}{16}+2+\sqrt{1+x}}}=x$$

Lời giải

a)Đk:$x\geq -1$

Xét $f(x)=m^2+\sqrt{1+x}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$ và có tập giá trị là $[m^2;+\infty)$ nên

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow m^2+\sqrt{1+x}=x \quad (2)$

Do (1) có nghiệm $x=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$ nên thay vào (2) ta được $m^2=3\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

b) Giải phương trình:

$$\frac{x^2}{16}+1+\sqrt{\frac{x^2}{16}+2+\sqrt{\frac{x^2}{16}+2+\sqrt{1+x}}}=x$$

Đặt $\frac{x^2}{16}+1=m\geq 1$ thì PT trở thành:

$$m+\sqrt{m+1+\sqrt{m+1+\sqrt{1+x}}}=x$$

Đk: $x\geq -1$

Xét $f(x)=m+\sqrt{1+x}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$ và có tập giá trị là $[m;+\infty)$ nên

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow m+\sqrt{1+x}=x$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+1+\sqrt{1+x}=x$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1-1)^2}{16}+2+\sqrt{1+x}=x+1$

$\Leftrightarrow (x+1-1)^2+32+16\sqrt{1+x}=16(x+1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+1)(x+1+2\sqrt{x+1}-11)=0$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=8\ v\ x=12-4\sqrt{3}$

Thí dụ 21.*Cho phương trình:*

$$\frac{m}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{\left(mx+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)^2+3}}=(1-m^2)x. \quad (1)$$

a)Chứng minh với mọi $m>1$ để phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất.

b)Tìm $m>1$ để phương trình (1) có nghiệm x thỏa mãn

$$-1<x<-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}.$$

c)Tìm $m>1$ để phương trình (1) có nghiệm x thỏa mãn

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}<x<-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}$$

Lời giải

a)PT(1) tương đương

$$m\left(mx+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\left(mx+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)^2+3}}=x \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x)=mx+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ có

$$f'(x)=m-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{m\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$$

Ta có $m\sqrt{x^2+3} > \sqrt{x^2+3} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$.

Suy ra $f'(x) > 0$ với mọi x

Suy ra f(x) đồng biến trên R.

$(2) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow mx + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = x$

$\Leftrightarrow (1-m)x = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ (3)

Do $1-m<0$ và $\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} > 0$ nên $x<0$

$(3) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+3} = \frac{1}{m-1}$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - \frac{1}{(m-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{4}{(m-1)^2}}}{2}}$

b)Xét $-1 < x < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}$

$\Leftrightarrow -1 < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{4}{(m-1)^2}}}{2}} < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}$

$\Leftrightarrow 1 > \sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{4}{(m-1)^2}}}{2}} > \sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}$

$\Leftrightarrow 1 > \frac{-3+\sqrt{9+\frac{4}{(m-1)^2}}}{2} > \frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}$

$\Leftrightarrow 25 > 9 + \frac{4}{(m-1)^2} > \frac{901}{100}$

$\Leftrightarrow 4 > \frac{1}{(m-1)^2} > \frac{1}{400}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < (m-1)^2 < 400$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < 21.$

C)Xét $-\frac{1}{2\sqrt{2}} < x < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{4}{(m-1)^2}}}{2}} < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} > \sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{4}{(m-1)^2}}}{2}} > \sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8} > \frac{-3+\sqrt{9+\frac{4}{(m-1)^2}}}{2} > \frac{-3+\sqrt{\frac{901}{100}}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{169}{16} > 9 + \frac{4}{(m-1)^2} > \frac{901}{100}$

$\Leftrightarrow \frac{25}{64} > \frac{1}{(m-1)^2} > \frac{1}{400}$

$\Leftrightarrow \frac{64}{25} < (m-1)^2 < 400$

$\Leftrightarrow \frac{13}{5} < m < 21.$

Thí dụ 22.*Cho phương trình*:

$x^5 + 6\left(m + \frac{x}{6} + \frac{x^5}{6}\right)^5 = 35x - 42m.$ (1)

a)Tìm m để PT(1) có 3 nghiệm phân biệt.

b)Giải phương trình:

$x^5 + 6\left(x^3 + \frac{x}{6} + \frac{x^5}{6}\right)^5 = 35x - 42x^3$

Lời giải

a)PT(1) tương đương

$$m+\frac{1}{6}\left(m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}\right)+\frac{1}{6}\left(m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}\right)^5=x \quad (2)$$

Xét $f(x)=m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}$ là hàm số đồng biến.

Áp dụng kết quả 1 có

$(2)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}=x$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{5x}{6}-\frac{x^5}{6}$$

Xét $y=\frac{5x}{6}-\frac{x^5}{6}$

$$y'=\frac{5}{6}-\frac{5x^4}{6}$$

bbt

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\infty$

Từ bbt suy ra PT(1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

b) Giải phương trình:

$$x^5+6\left(x^3+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}\right)^5=35x-42x^3$$

Đặt $x^3=m$. PT đã cho trở thành:

$$x^5+6\left(m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}\right)^5=35x-42m$$

$$\Leftrightarrow m+\frac{1}{6}\left(m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}\right)+\frac{1}{6}\left(m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}\right)^5=x \quad (2)$$

Xét $f(x)=m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}$ là hàm số đồng biến.

Áp dụng kết quả 1 có

$(2)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow m+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}=x$$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{x}{6}+\frac{x^5}{6}=x$$

$$\Leftrightarrow x(x^4+6x^2-5)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ V } x=\pm\sqrt{\sqrt{14}-3}.$$

Dạng coi tham số(hoặc số) là ẩn còn ẩn là tham số

Tác giả phần viết thêm:

Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du số 1,Bắc Ninh.

Thí dụ 23.*Cho phương trình*:

$$4+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{m-1}}}}}}}}=m. \quad (1)$$

a)Tìm m để PT(1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{3};2\right)$.

b) Giải (1) khi $m=2020$ hay giải phương trình

$$4+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{2019}}}}}}}}=2020.$$

c) Giải phương trình:

$$4+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{3+\cfrac{x}{\sqrt{x-1}}}}}}}}=x.$$

Lời giải

Đk:$m > 1$

Do $x > 0$ nên dễ thấy $f(m) = 4 + \frac{x}{\sqrt{m-1}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và có tập giá trị là $(4; +\infty)$. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_5(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$\Leftrightarrow 4 + \frac{x}{\sqrt{m-1}} = m$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{m-1}} = m - 4$

$\Leftrightarrow x = (m-4)\sqrt{m-1}$

$\Leftrightarrow x = (m-1)\sqrt{m-1} - 3\sqrt{m-1}$ (2)

a)

đặt $\sqrt{m-1} = a > 0$ .Từ (2) có

$a^3 - 3a = x$

$(m-1)\sqrt{m-1} - 3\sqrt{m-1} = h(a) = a^3 - 3a$

$h'(a) = 3a^2 - 3$

Bbt

a	0	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
h(a)		0		2	$+\infty$
	0				
		-2			

Từ bbt suy ra khi $x \in (\sqrt{3}; 2)$ thì

$\sqrt{m-1} = a \in (\sqrt{3}; 2)$

Do vậy đặt $\sqrt{m-1} = 2\cos t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$

(2) trở thành: $2(4\cos^3 t - 3\cos t) = x$

$\Leftrightarrow \cos 3t = \frac{x}{2}$ (3).

Do $x \in (\sqrt{3}; 2)$ nên từ (3) có

$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 3t < 1$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6} < \cos 3t < \cos 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} > 3t > 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{18} > t > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{m-1} = 2\cos t \in \left(\cos\frac{\pi}{18}; 1\right)$

$\Leftrightarrow m \in \left(1 + 4\cos^2\frac{\pi}{18}; 2\right)$.

b) Với $x \le 0$ thì

$$4 + \frac{x}{\sqrt{3 + \frac{x}{\sqrt{3 + \frac{x}{\sqrt{2019}}}}}} \le 4 < 2020$$

Với $x > 0$ có

Do $(1) \Leftrightarrow x = (m-4)\sqrt{m-1}$

nên khi m=2020 PT(1) có nghiệm

$x = 2016\sqrt{2019}$

c) Giải phương trình:

$$4 + \frac{x}{\sqrt{3 + \frac{x}{\sqrt{3 + \frac{x}{\sqrt{3 + \frac{x}{\sqrt{x-1}}}}}}}} = x.$$

Đk: $x > 1$

Đặt $x = m > 0$ nên PTđã cho trở thành

$$4 + \frac{m}{\sqrt{3 + \frac{m}{\sqrt{3 + \frac{m}{\sqrt{3 + \frac{m}{\sqrt{x-1}}}}}}}} = x$$

dễ thấy $f(m) = 4 + \frac{m}{\sqrt{x-1}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và có tập giá trị là $(4; +\infty)$. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_5(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow 4 + \frac{x}{\sqrt{x-1}} = x$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x-1}} = x - 4$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = (x-4)^2$ với $x > 4$

$\Leftrightarrow (x-4)^2(x-1) - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 8x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{2}$

Thí dụ 24. *Cho phương trình:*

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+m}}}}}}}} = m. \quad (1)$$

a)Tìm m để PT có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| \le 4 + 2\sqrt{2}$.

b)Giải phương trình

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1983}}}}}}}} = 1982.$$

c)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \\ x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

d)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \\ y + \sqrt{y+1} = \frac{2x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \\ y^2 + y + 1 = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{2}{y^2} \end{cases}$$

f)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \\ \frac{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}{\sqrt{1+x}}}}}} = x \end{cases}$$

Lời giải

Nếu $x = 0$ thì $m = 0$. Với $m = 0$ thì (1) có 1 nghiệm $x = 0$ không thỏa mãn đề bài.

Với $x \neq 0$ suy ra $x^2 > 0$ nên $VT(1) > 0$

Vì vậy $m > 0$.

dễ thấy $f(m) = \frac{x^2}{\sqrt{1+m}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ *và có tập giá trị là* $(0; +\infty)$ Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_5(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1+m}} = m$$

$$\Leftrightarrow x^2 = m\sqrt{1+m}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m\sqrt{1+m}}$$

a) $|x_1 - x_2| \le 4 + 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{m\sqrt{1+m}} + \sqrt{m\sqrt{1+m}}\right| \le 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{m\sqrt{1+m}} \le 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m\sqrt{1+m}} \le 2 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{1+m} \le 6 + 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (m+1) - \sqrt{1+m} - 6 - 4\sqrt{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 < m \le 2 + 2\sqrt{2}$$

Vậy $0 < m \le 2 + 2\sqrt{2}$

b) theo câu a với $m = 1982$ thì (1):

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1983}}}}}}}}}} = 1982$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m\sqrt{1+m}} == \pm\sqrt{1982\sqrt{1983}}$$

c)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \quad (1) \\ x\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\right) = \dfrac{5}{2} \ (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn đề bài.

Với $x \neq 0$ suy ra $x^2 > 0$ nên $VT(1) > 0$

Vì vậy $y > 0$.

dễ thấy $f(y) = \frac{x^2}{\sqrt{1+y}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ *và có tập giá trị là* $(0;+\infty)$ Theo kết quả 1 có

$$(1) \Leftrightarrow f_3(y) = y \Leftrightarrow f(y) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1+y}} = y \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+y}} = \frac{y}{x} \ (*)$$

Thay $\frac{x}{\sqrt{1+y}} = \frac{y}{x}$ vào (2) được:

$$x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) = \frac{5}{2} \ (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{x}{\sqrt{1+y}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2y \ V \ x = \frac{y}{2}$$

Với $x = 2y$ thay vào (*): $\frac{2y}{\sqrt{1+y}} = \frac{y}{2y}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y} = 4y \Leftrightarrow 16y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{65}}{32} \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{65}}{16}$$

Với $x = \frac{y}{2}$ thay vào (*): $\frac{\frac{y}{2}}{\sqrt{1+y}} = \frac{y}{\frac{y}{2}}$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{1+y} = 4y \Leftrightarrow y^2 - 16y - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 8 + 4\sqrt{5} \rightarrow x = 4 + 2\sqrt{5}$$

d)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \quad (1) \\ y+\sqrt{y+1} = \dfrac{3x}{\sqrt{2}} \quad (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn đề bài.

Với $x \neq 0$ suy ra $x^2 > 0$ nên $VT(1) > 0$

Vì vậy $y > 0$.

dễ thấy $f(y) = \frac{x^2}{\sqrt{1+y}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ *và có tập giá trị là* $(0;+\infty)$ Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(y) = y \Leftrightarrow f(y) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1+y}} = y \Leftrightarrow y\sqrt{y+1} = x^2$$

Kết hợp với (2) có:

$$\begin{cases} y\sqrt{y+1} = x^2 \\ y+\sqrt{y+1} = \dfrac{3x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{y+1} = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{3}(y+\sqrt{y+1})\right]^2 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}(y+\sqrt{y+1}) = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2\sqrt{y+1})(2y-\sqrt{y+1}) = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}(y+\sqrt{y+1}) = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ y = 2+2\sqrt{2} \end{cases} V \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{34}}{8} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

Cách khác:

$$\begin{cases} y\sqrt{y+1} = x^2 \\ y+\sqrt{y+1} = \frac{3x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{y+1} = \sqrt{2}x.\dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ y+\sqrt{y+1} = \sqrt{2}x+\dfrac{x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Sau đó dùng ĐL Viet để giải tiếp.

e)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \quad (1) \\ y^2+y+1 = \dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{2}{y^2} \quad (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn đề bài.

Với $x \neq 0$ suy ra $x^2 > 0$ nên $VT(1) > 0$

Vì vậy $y > 0$.

dễ thấy $f(y) = \frac{x^2}{\sqrt{1+y}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ *và có tập giá trị là* $(0;+\infty)$ Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(y) = y \Leftrightarrow f(y) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1+y}} = y \Leftrightarrow y\sqrt{y+1} = x^2$$

Kết hợp với (2) có:

$$\begin{cases} y\sqrt{y+1} = x^2 \\ y^2+y+1 = \dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{2}{y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{y+1} = x^2 \\ \left(y+\sqrt{y+1}\right)^2 - 2y\sqrt{y+1} = \left(\dfrac{xy}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right)^2 - 2x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{y+1} = x^2 \\ \left(y+\sqrt{y+1}\right)^2 = \left(\dfrac{xy}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{y+1} = x^2 \\ y + \sqrt{y+1} = \dfrac{xy}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{y} \end{cases}$$

$$hoặc \begin{cases} y\sqrt{y+1} = x^2 \\ y + \sqrt{y+1} = -\dfrac{xy}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{y+1} = \dfrac{xy}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{y} \\ y + \sqrt{y+1} = \dfrac{xy}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{y} \end{cases}$$

$$hoặc \begin{cases} y\sqrt{y+1} = \left(-\dfrac{xy}{\sqrt{2}}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right) \\ y + \sqrt{y+1} = \left(-\dfrac{xy}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right) \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[Theo\ Vi-ét]{} \begin{cases} y = \frac{xy}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{y+1} = \frac{\sqrt{2}}{y} \end{cases} hoặc \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{y} \\ \sqrt{y+1} = \frac{xy}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$hoặc \begin{cases} y = \left(-\dfrac{xy}{\sqrt{2}}\right) \\ \sqrt{y+1} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right) (vn) \end{cases} hoặc \begin{cases} y = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right) (vn) \\ \sqrt{y+1} = \left(-\dfrac{xy}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{xy}{\sqrt{2}} \\ y = 1 \end{cases} \quad hoặc \begin{cases} y = \sqrt[4]{2} \\ \sqrt{y+1} = \frac{xy}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \quad hoặc \begin{cases} x = \sqrt[4]{2}.\sqrt{\sqrt[4]{2}+1} \\ y = \sqrt[4]{2} \end{cases}$$

f)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+y}}}}}} = y \quad (1) \\ \dfrac{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}{\sqrt{1+x}}}}}} = x \quad (2) \end{cases}$$

ĐK: $x; y > -\frac{1}{2}$

Dễ thấy $x = 0$ *thì từ (2) suy ra* $y = -2$ *không thỏa mãn đề bài.*

Với $x \neq 0$ *suy ra* $x^2 > 0$ nên $VT(1) > 0$

Vì vậy $y > 0$. Tương tự có $x > 0$.

dễ thấy $f(y) = \frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+y}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ *và có tập giá trị là* $(0;+\infty)$ Theo kết quả 1 có

$$(1) \Leftrightarrow f_3(y) = y \Leftrightarrow f(y) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+y}} = y \Leftrightarrow y\sqrt{y+1} = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$

Tương tự

$$(2) \Leftrightarrow x\sqrt{x+1} = \left(1+\frac{y}{2}\right)^2$$

Ta có hệ PT:

$$\begin{cases} x\sqrt{x+1} = \left(1+\frac{y}{2}\right)^2 & (3) \\ y\sqrt{y+1} = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 & (4) \end{cases}$$

Trừ vế với vế (3),(4) ta được

$$x\sqrt{x+1} - y\sqrt{y+1} = \left(1+\frac{y}{2}\right)^2 - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - y^3 + x^2 - y^2}{x\sqrt{x+1} - y\sqrt{y+1}} = -\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y+2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)}{x\sqrt{x+1} - y\sqrt{y+1}} + \left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y+2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x^2+xy+y^2+x+y}{x\sqrt{x+1} - y\sqrt{y+1}} + \frac{x+y+2}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay x=y vào (3) ta được:

$$x\sqrt{x+1} = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x\sqrt{x+1} = (x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2(x+1) = (x+2)^4$$

$\Leftrightarrow (x^2-4x-4)^2=0 \Leftrightarrow x^2-4x-4=0$

$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=2+2\sqrt{2}$. Vậy $x=y=2+2\sqrt{2}$

Thí dụ 25. *Cho phương trình:*
$1+\sqrt[3]{3+x+3.\sqrt[3]{x+3m}}=m \quad (1)$

a) *Tìm m để phương trình có nghiệm $x>-5$.*

b) *Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-5;-3)$ là tập hợp gồm hợp các khoảng. Tính tổng độ dài các khoảng đó.*

c) *Giải phương trình*
$1+\sqrt[3]{3+x+3.\sqrt[3]{x+3^{334}}}=3^{333}$

Lời giải.

Do hàm số $f(m)=1+\sqrt[3]{x+3m}$ đồng biến trên R nên có: PT(1) $\Leftrightarrow f_2(m)=m$

$\Leftrightarrow f(m)=m \Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{x+3m}=m$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3m}=m-1$

$\Leftrightarrow x=m^3-3m^2-1$

a) Xét $x>-5$

$\Leftrightarrow m^3-3m^2-1>-5$

$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)^2>0$

$\Leftrightarrow m\in(-1;2)\cup(2;+\infty)$

b) Xét $-3>x>-5$

$\Leftrightarrow -3>m^3-3m^2-1>-5$

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow m\in(-1;1-\sqrt{3})\cup(1;2)\cup(2;1+\sqrt{3})$

Tổng độ dài các khoảng là:

$(1-\sqrt{3}-(-1))+(2-1)+(1+\sqrt{3}-2)=2.$

c) Với $m=3^{333}$ thì
(1) trở thành $1+\sqrt[3]{3+x+3.\sqrt[3]{x+3^{334}}}=3^{333}$

Nghiệm
$x=m^3-3m^2-1=3^{999}-3^{667}-1$

Thí dụ 26. *Cho phương trình:*
$(x+2(x+2(x+2m)^3)^3)^3=m \quad (1)$

a) *Chứng minh với mọi m phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.*

b) *Giải PT(1) với $m=2012$.*

c) *Tìm m để (1) có nghiệm $x=\frac{1}{2}$. Biết giá trị m nhỏ nhất có dạng $a+b\sqrt{5}$ với a,b là các số hữu tỉ. Tìm giá trị $P=a^3+b^3$.*

d) *Tìm m để (1) có nghiệm $x<-\frac{1}{2}$.*

e) *Giải phương trình*
$(x+2(x+2(x+2^{667})^3)^3)^3=2^{666}$

Lời giải.

a) Dễ thấy $f(m)=(x+2m)^3$ là hàm số đồng biến trên R. Theo kết quả 1 có

(1) $\Leftrightarrow f_3(m)=m \Leftrightarrow f(m)=m$

$\Leftrightarrow (x+2m)^3=m$

$\Leftrightarrow x+2m=\sqrt[3]{m}$

$\Leftrightarrow x=-2m+\sqrt[3]{m}$

b) Với $m=2012$ Pt(1) có nghiệm duy nhất
$x=-4024+\sqrt[3]{2012}$

c) Xét $x=-2m+\sqrt[3]{m}=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{m}=\dfrac{1}{2}\\ \sqrt[3]{m}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{8}\\ m=\dfrac{-2\pm\sqrt{5}}{8}\end{array}\right.$$

Giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là

$m=\frac{-2-\sqrt{5}}{8}$ suy ra $a=-\frac{1}{4}; b=-\frac{1}{8}.$

$\rightarrow P=-\frac{9}{512}$

d) Dành cho bạn đọc.

e) Với $m=2^{666}$ thì (1) trở thành

$(x+2(x+2(x+2^{667})^3)^3)^3=2^{666}$

Có nghiệm: $x=-2m+\sqrt[3]{m}=-2^{667}+2^{222}$

Thí dụ 27.*Cho phương trình*:

$x + (x + (x + (x + (x + m^5)^5)^5)^5)^5 = m.$ (1)

Chứng minh với mọi số nguyên m phương trình (1)luôn có nghiệm nguyên chia hết cho 30.

Lờigiải.

Dễ thấy $f(m) = \mathrm{x} + \mathrm{m}^5$ là hàm số đồng biến trên R. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_5(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$\Leftrightarrow \mathrm{x} = -(\mathrm{m}^5 - \mathrm{m})$

Xét

$\mathrm{P} = \mathrm{m}^5 - \mathrm{m} = (\mathrm{m}-1)\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}^2+1)$

Vì $(\mathrm{m}-1)\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)$ *là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.*

Mặt khác

$\mathrm{P} = (\mathrm{m}-1)\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}^2-4+5)$

$= (\mathrm{m}-2)(\mathrm{m}-1)\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+2) - 5(\mathrm{m}-1)\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)$

Vì $(\mathrm{m}-2)(\mathrm{m}-1)\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+2)$ *là tích 6 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.*

Mà (5;6)=1 nên P chia hết cho 30

Suy ra $\mathrm{x} = -(\mathrm{m}^5 - \mathrm{m})$ *chia hết cho 30.*

PT tương tự

Cho phương trình:

$x + (x + (x + m^3)^3)^3 = m.$ (1)

Chứng minh với mọi số nguyên m phương trình (1)luôn có nghiệm nguyên chia hết cho 6.

Thí dụ 28.*Cho phương trình*:

$x + x^2(x + x^2(x + x^2m^3)^3)^3 = m$ *(1)*

a)Tìm m để phương trình(1) có 2 nghiệm trái dấu $x_1; x_2$.*Giải (1) khi* $m = 2$.

b) Tim m để $x_1 + x_2 \le -\frac{1}{2^{666}}$.

c) Tim m để $x_1x_2 \ge \sqrt{2019} - \sqrt{2020}$.

d) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 \ge 12$.

Lờigiải.

a)Với $m = 0$ thì (1):

$x + x^2(x + x^2(x)^3)^3 = 0$

$\Leftrightarrow x(1 + x^4(1 + x^4)^3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0.$

+Xét $m \neq 0$

Dễ thấy $f(m) = x + x^2m^3$ là hàm số đồng biến trên R. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$\Leftrightarrow x + x^2m^3 = m$

$\Leftrightarrow m^3x^2 + x - m = 0$ (2)

Do $ac = -m^4 < 0$ nên (2) có 2 nghiệm trái dấu

Suy rai mọi $m \neq 0$ *phương trình(1) có đúng 2 nghiệm trái dấu* $x_1; x_2$.

Với m=2 thì

$(1) \Leftrightarrow 8x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{16}$

b) Theo định lí Viet có

$x_1 + x_2 \le -\frac{1}{2^{666}}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{m^3} \le -\frac{1}{2^{666}} \Leftrightarrow \frac{1}{m^3} \ge \frac{1}{2^{666}}$

$\Leftrightarrow \frac{2^{666} - m^3}{2^{666}m^3} \ge 0$

$\Leftrightarrow 0 < m \le 2^{222}.$

c) Theo Viet có

$x_1x_2 \geq \sqrt{2019}-\sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{m^2} \geq -\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}$

$\Leftrightarrow m^2 \geq \sqrt{2019}+\sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-\sqrt{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}\right) \cup \left(\sqrt{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}};+\infty\right)$

d) Theo Viet có

$x_1^2+x_2^2 \geq 12.$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \geq 12$

$\Leftrightarrow \frac{1}{m^6}+\frac{2}{m^2}-12 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{m^2}-2\right)\left(\frac{1}{m^4}+\frac{2}{m^2}+6\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2} \geq 2 \Leftrightarrow m^2 \leq 2 \Leftrightarrow m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

Vậy $m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\backslash\{0\}$.

Thí dụ 29. *Cho phương trình:*

$x^2+x(x^2+x(x^2+xm^3)^3)^3=m$ *(1)*

a)Tìm m để PT(1) có 2 nghiệm phân biệt.

b)Tìm m để PT(1) có đúng 1 nghiệm.

c) Tìm m để (1) có nghiệm $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

d) Tìm m để (1) có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $|x_1+x_2-2x_1x_2|=1$

Lời giải.

a)Với $m=0$ PT(1) trở thành

$x^2+x(x^2+x(x^2)^3)^3=0$

$\Leftrightarrow x^2+x(x^2+x^7)^3=0$

$\Leftrightarrow x^2+x^7(1+x^5)^3=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(1+x^5(1+x^5)^3\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(1+x^5+\frac{1}{4}x^{10}+\frac{11}{4}x^{10}+3x^{15}+x^{20}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$

$\left(1+x^5+\frac{1}{4}x^{10}+\frac{11}{4}x^{10}+3x^{15}+x^{20}>0\right)$

Với $m \neq 0$ theo trên thì nghiệm $x \neq 0$

Dễ thấy $f(m)=x^2+xm^3$ hoặc là hàm số đồng biến trên R. khi x>0 hoặc là hàm số nghịch biến trên R. khi x<0 .Theo kết quả 1 đều có

$(1) \Leftrightarrow f_3(m)=m \Leftrightarrow f(m)=m$

$\Leftrightarrow x^2+xm^3=m$

$\Leftrightarrow x^2+m^3x-m=0$ **(2)**

PT(2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^6+4m>0$

$\Leftrightarrow m(m^5+4)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-\sqrt[5]{4} \end{array}\right.$

b) Theo trên m=0 (1) có đúng 1 nghiệm.

Với $m \neq 0$ (1) có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta = m^6+4m=0 \Leftrightarrow m=-\sqrt[5]{4}$

Vậy m=0; $m=-\sqrt[5]{4}$ pt(1) có đúng 1 nghiệm.

c) Thay $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ vào (2) được

$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}m^3-m=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m-1)\left((\sqrt{5}-1)m^2+(\sqrt{5}-1)m+\sqrt{5}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{14\sqrt{5}-26}}{2(\sqrt{5}-1)} \end{array}\right.$$

Đối chiếu đk $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-\sqrt[5]{4} \end{array}\right.$ thì các m cần tìm là

$m=1;\ m=\dfrac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{14\sqrt{5}-26}}{2(\sqrt{5}-1)}$.

d) Theo Viet có

$$|x_1+x_2-2x_1x_2|=1$$
$$\Leftrightarrow |-m^3+2m|=1$$

$$\Leftrightarrow |-m^2+2||m|=1$$
$$\Leftrightarrow (-m^2+2)^2m^2=1$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ m=\pm\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \end{array}\right.$$

Đối chiếu đk có nghiệm $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-\sqrt[5]{4} \end{array}\right.$

suy ra có 4 giá trị m cần tìm là

$m=1;\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{5});m=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Thí dụ 30. *Cho phương trình:*

$1+x\sqrt{2+x\sqrt{2+x\sqrt{1+m}}}=m.$

a) Tìm m để PT(1) có nghiệm $x=2$

b) Tìm m để PT(1) có nghiệm $x=1+\sqrt{2}$

c) Giải phương trình

$1+x\sqrt{2+x\sqrt{2+x\sqrt{1+7^{2019}}}}=7^{2019}$.

d) Giải phương trình

$1+\frac{|x|}{3}\sqrt{2+\frac{|x|}{3}\sqrt{2+\frac{|x|}{3}\sqrt{1+x}}}=x$

Lời giải.

a) Với $x=2>0$ nên

Dễ thấy $f(m)=1+x\sqrt{1+m}$ là hàm số đồng biến trên $[-1;+\infty)$ có tập giá trị $[1;+\infty)$.. Theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(m)=m\Leftrightarrow f(m)=m$

$\Leftrightarrow 1+x\sqrt{1+m}=m\Leftrightarrow 1+2\sqrt{1+m}=m$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+m}=m-1\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow m=3+2\sqrt{2}$

b) Với $x=1+\sqrt{2}>0$ nên

Dễ thấy $f(m)=1+x\sqrt{1+m}$ là hàm số đồng biến trên R. Theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(m)=m\Leftrightarrow f(m)=m$

$\Leftrightarrow 1+x\sqrt{1+m}=m$

$\Leftrightarrow 1+(1+\sqrt{2})\sqrt{1+m}=m$

$\Leftrightarrow (1+\sqrt{2})\sqrt{1+m}=m-1$

$\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow m=\dfrac{5+2\sqrt{2}+\sqrt{41+28\sqrt{2}}}{2}$

c) $1+x\sqrt{2+x\sqrt{2+x\sqrt{1+7^{2019}}}}=7^{2019}$ (2)

Nếu $x\le 0$ thì $VT(2)\le 1<VP(2)$.

Suy ra (2) có nghiệm x>0. Khi này (2) là PT(1) khi

$m=7^{2019}$. Do vậy

Dễ thấy $f(m)=1+x\sqrt{1+m}$ là hàm số đồng biến trên R. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$\Leftrightarrow 1 + x\sqrt{1+m} = m$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{m-1}{\sqrt{m+1}} = \dfrac{7^{2019}-1}{\sqrt{7^{2019}+1}}$

d) Giải phương trình

$$1 + \frac{|x|}{3}\sqrt{2 + \frac{|x|}{3}\sqrt{2 + \frac{|x|}{3}\sqrt{1+x}}} = x \ (*)$$

Hướng dẫn: dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn (*)
Xét $x \neq 0$
Đối chiếu PT gốc:

$$1 + x\sqrt{2 + x\sqrt{2 + x\sqrt{1+m}}} = m.$$

Ta phải đặt $x = m$

PT(*) trở thành:

$$1 + \frac{|x|}{3}\sqrt{2 + \frac{|x|}{3}\sqrt{2 + \frac{|x|}{3}\sqrt{1+m}}} = m$$

Dễ thấy $f(m) = 1 + \frac{|x|}{3}\sqrt{1+m}$ là hàm số đồng biến trên R. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{|x|}{3}\sqrt{1+m} = m$

$\underset{m=x}{\Longleftrightarrow} 1 + \dfrac{|x|}{3}\sqrt{1+x} = x$

$\Leftrightarrow |x|\sqrt{1+x} = 3x - 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 \geq 0 \\ x^2(1+x) = (3x-3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)(x^2 - 5x + 3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 3 \ V \ x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

Việc chuyển đổi giữa ẩn và tham số là đơn giản

Chẳng hạn thí dụ sau

Thí dụ 31.

1.*Cho phương trình*:

$$1 + \sqrt{1 + m^2 + \sqrt{1 + m^2 + \sqrt{m^2 + x}}} = x. \ (1)$$

a) Chứng minh với mọi m PT (1) luôn có nghiệm duy nhất x_m. Tìm giá trị nhỏ nhất của x_m.

b) Giải (1) khi $m = 2^{22}$.

Đổi vai trò ẩn và tham số ta được:

2.*Cho phương trình*:

$$1 + \sqrt{1 + x^2 + \sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x^2 + m}}} = m. \ (2)$$

a)Tìm m để (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt và tích 2 nghiệm lớn hơn $-2009m$.

b) Giải phương trình:

$$1 + \sqrt{1 + x^2 + \sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt[4]{3}}}} = \sqrt[4]{3}.$$

Lời giải.

1)

ab)Dễ thấy $f(x) = 1 + \sqrt{m^2 + x}$ là hàm số đồng biến trên. $[-m^2; +\infty)$ có tập giá trị $[1; +\infty)$.. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{m^2 + x} = x$

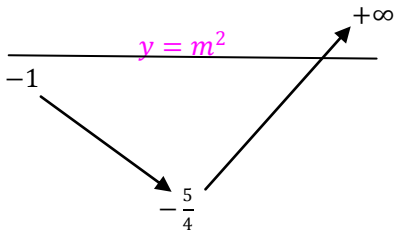
$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + x} = x - 1$

$\Leftrightarrow m^2 + x = (x-1)^2 \ với \ x \geq 1.$

$\Leftrightarrow m^2 = x^2 - 3x + 1$

BBT

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x^2-3x+1	-1	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$



Từ bbt ta thấy với mỗi m đường thẳng $y=m^2$ luôn cắt đồ thị $y=x^2-3x+1$ tại tại 1 điểm duy nhất và m^2 càng nhỏ thì nghiệm x tương ứng càng nhỏ.Mà $m^2\geq 0$ nên nghiệm nhỏ nhất của (1) đạt được là nghiệm PT: $x^2-3x+1=0$ *với* $x\geq 1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Cách 2

$m^2=x^2-3x+1$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1-m^2=0$

$\overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{3+\sqrt{5+4m^2}}{2}\geq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

c)theo câu a thì với $m=2^{22}$

$(1)\Leftrightarrow x^2-3x+1=2^{44}$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1-2^{44}=0$

$\overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{3+\sqrt{5+2^{46}}}{2}$

2.*Cho phương trình*:

$1+\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2+\sqrt{x^2+m}}}=m.\ (2)$

a)Đk:$m\geq -x^2$

Dễ thấy $f(m)=1+\sqrt{x^2+m}$ là hàm số đồng biến trên $[-x^2;+\infty)$ có tập giá trị $[1;+\infty)$.

Theo kết quả 1 có

$(2)\Leftrightarrow f_3(m)=m\Leftrightarrow f(m)=m$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+m}=m$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+m}=m-1$

$\Leftrightarrow x^2+m=(m-1)^2\ với\ m\geq 1.$

$\Leftrightarrow x^2=m^2-3m+1$

PT có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m^2-3m+1>0\Leftrightarrow m>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

ta có tích các nghiệm bằng:$-(m^2-3m+1)$

Theo đề bài suy ra

$-(m^2-3m+1)>-2019m$

$\Leftrightarrow m^2-2022m+1<0$

$\underset{m\geq 1}{\Leftrightarrow} m<1011+2\sqrt{255530}$

Vậy $\frac{3+\sqrt{5}}{2}<m<1011+2\sqrt{255530}$

PT(2) có tích 2 nghiệm lớn hơn $-2009m$.

b) Khi $m=\sqrt[4]{3}$ thì (2) trở thành:

$1+\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2+\sqrt{x^2+\sqrt[4]{3}}}}=\sqrt[4]{3}\ (*)$

Theo câu a

$(*)\Leftrightarrow x^2=m^2-3m+1=\sqrt{3}-3\sqrt[4]{3}+1$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\sqrt{3}-3\sqrt[4]{3}+1}$

Thí dụ 32.*Cho phương trình*:

$\sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9}{2}m}}}}=m.\ (1)$

a) Tìm m để PT(1) có nghiệm.

b) Giải phương trình

$\sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9\sqrt[3]{10}}{2}}}}}=\sqrt[3]{10}$

c) Giải phương trình

$$\sqrt{1+\sqrt{x+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{x+\frac{9\sqrt[3]{10}}{2}}}}}=\sqrt[3]{10}$$

d) Giải phương trình :

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}\sqrt{1+\left|1+\frac{9}{4}x\right|}}}=x$$

Lời giải.

a)Do VT>0 nên :$m>0$

Dễ thấy $f(m)=\sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9}{2}m}}$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ có tập giá trị là tập con của $(0;+\infty)$.

Theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(m)=m\Leftrightarrow f(m)=m$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9}{2}m}}=m$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+\frac{9}{2}m}=m^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\frac{9}{2}m}=m^2-1$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{9}{2}m=(m^2-1)^2 \text{ với } m\geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2=(m^2-1)^2-\frac{9}{2}m$$

PT(1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m^2-1)^2-\frac{9}{2}m\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(2m^3+4m^2+4m-1)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow m\geq 2$$

Với $m=2$ pt có nghiệm duy nhất x=0.

Với $m>2$ PT có nghiệm dương là

$$x=\sqrt{(m^2-1)^2-\frac{9}{2}m}>\sqrt{m^4-244}$$

$$\Leftrightarrow (m^2-1)^2-\frac{9}{2}m>m^4-244$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(m-10)(4m+49)>0$$

$$\Leftrightarrow m<10$$

Vậy $m\in\{3;4;5;6;7;8;9\}$

b) Với $m=\sqrt[3]{10}$ thì (1) trở thành

$$\sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{x^2+\frac{9\sqrt[3]{10}}{2}}}}}=\sqrt[3]{10}$$

$$\Leftrightarrow x^2=(m^2-1)^2-\frac{9}{2}m$$

$$=\left(\sqrt[3]{100}-1\right)^2-\frac{9\sqrt[3]{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\left(\sqrt[3]{100}-1\right)^2-\frac{9\sqrt[3]{10}}{2}}$$

c) tương tự câu trên

$$\sqrt{1+\sqrt{x+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{x+\frac{9\sqrt[3]{10}}{2}}}}}=\sqrt[3]{10}$$

$$\Leftrightarrow x=\left(\sqrt[3]{100}-1\right)^2-\frac{9\sqrt[3]{10}}{2}$$

d) phương trình :

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}\sqrt{1+\left|1+\frac{9}{4}x\right|}}}=x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^2}}}}=x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}x}}}}=x$$

VT > 0 nên $x>0$

Đặt x=m thì PT trở thành:

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}m}}}}=m$$

Dễ thấy $f(m)=\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}m}}$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ có tập giá trị là tập con của $(0;+\infty)$.

Theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(m)=m\Leftrightarrow f(m)=m$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}m}}=m$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}x}=x^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}x}=x^2-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{81}{16}x^2+1+\frac{9}{2}x=(x^2-1)^2\ với\ x\geq 1$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{9}{4}x\right)^2=(x^2-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{9}{4}x=x^2-1\ (do\ x\geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{209}}{8}$$

Thí dụ 33. Cho phương trình:

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3.\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3m}}}}=m.\ (1)$$

a)Giải PT (1) .

b)Giải phương trình

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3.\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3^{34}}}}}=3^{33}$$

c)Giải phương trình

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3.\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3\sqrt[3]{3}}}}}=\sqrt[3]{3}$$

d) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^9-3x^6-1+3.\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^9-3x^6+3x-1}}}}=x.$$

Lời giải.

a)Dễ thấy $f(m)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3m}}$ là hàm số đồng biến trên R.. Theo kết quả 1 có

$(2)\Leftrightarrow f_2(m)=m\Leftrightarrow f(m)=m$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3m}}=m$$

$$\Leftrightarrow x=(m^3-1)^3-3m$$

b)Với $m=3^{33}$ thì (2):

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3.\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x+3^{34}}}}}=3^{33}$$

$\Leftrightarrow x = (3^{99} - 1)^3 - 3^{34}$

c)Với $m = \sqrt[3]{3}$ thì (2):

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x + 3.\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x + 3\sqrt[3]{3}}}}} = \sqrt[3]{3}$$

$\Leftrightarrow x = 8 - 3\sqrt[3]{3}$

d) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{\mathbf{1} + \sqrt[3]{x^9 - 3x^6 - 1 + 3.\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^9 - 3x^6 + 3x - 1}}}} = x.$$

Đặt $x = m$ thì PT đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{\mathbf{1} + \sqrt[3]{x^9 - 3x^6 - 1 + 3.\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^9 - 3x^6 - 1 + 3m}}}} = m$$

Dễ thấy $f(m) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^9 - 3x^6 - 1 + 3m}}$ là hàm số đồng biến trên R.. Theo kết quả 1 có

$(2) \Leftrightarrow f_2(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^9 - 3x^6 - 1 + 3m}} = m$

$\Leftrightarrow x^9 - 3x^6 - 1 = (m^3 - 1)^3 - 3m$

$\Leftrightarrow x^9 - 3x^6 - 1 = (x^3 - 1)^3 - 3x$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ V\ x = \pm 1.$

Thí dụ 34. Cho *phương trình*:

$x + 3.\sqrt[3]{1 + x + 3.\sqrt[3]{1 + x + 3.\sqrt[3]{1 + m}}} = m.$ (1)

a)Giải PT (1) theo m.

b)Tìm m để (1) có nghiệm $x \in (-1; 1)$

c) Giải phương trình

$x + 3.\sqrt[3]{1 + x + 3.\sqrt[3]{1 + x + 3.\sqrt[3]{2}}} = 1.$

Lời giải.

a)Dễ thấy $f(m) = x + 3.\sqrt[3]{1 + m}$ là hàm số đồng biến trên R.. Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(m) = m \Leftrightarrow f(m) = m$

$\Leftrightarrow x + 3.\sqrt[3]{1 + m} = m \Leftrightarrow x = m - 3.\sqrt[3]{1 + m}$

b) (1) có nghiệm $x \in (-1; 1)$

$\Leftrightarrow -1 < m + 1 - 3.\sqrt[3]{1 + m} - 1 < 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} < \sqrt[3]{1 + m} < -1 \\ -1 < \sqrt[3]{1 + m} < 0 \\ \sqrt{3} < \sqrt[3]{1 + m} < 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\sqrt{3} - 1 < m < -2 \\ -2 < m < -1 \\ 3\sqrt{3} - 1 < m < 7 \end{array}\right.$$

c) Với m=1 thì (1):

$$x + 3.\sqrt[3]{1 + x + 3.\sqrt[3]{1 + x + 3.\sqrt[3]{2}}} = 1$$

$\Leftrightarrow x = m - 3.\sqrt[3]{1 + m} = 1 - 3\sqrt[3]{2}$

Thí dụ 35. Giải hệ *phương trình*:

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + \sqrt{y^4 + 4\sqrt{y^2 + \sqrt{y^4 + 4x}}}} = x \quad (1) \\ x^6 + x^5 y = 32 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Dễ thấy x=0 không là nghiệm hệ PT

Do đó từ (1) suy ra $x > 0$.

Dễ thấy $f(x) = \sqrt{y^2 + \sqrt{y^4 + 4x}}$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Theo kết quả 1 có:

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + \sqrt{y^4 + 4x}} = x$

$\Leftrightarrow y^2+\sqrt{y^4+4x}=x^2\Leftrightarrow\sqrt{y^4+4x}=x^2-y^2$

$\Leftrightarrow y^4+4x=(x^2-y^2)^2 \quad với\ x^2-y^2\geq 0$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2y^2=4x\Leftrightarrow x^3-2xy^2=4$

$\Leftrightarrow 1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{4}{x^3}$ (*)

(chia 2 vế cho x^3)

Khi này

$(2)\Leftrightarrow 1-\frac{y}{x}=2\left(\frac{4}{x^3}\right)^2$

$\Leftrightarrow 1-\frac{y}{x}=2\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(2\frac{y}{x}-1\right)\left(4\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{y}{x}\in\left\{-1;\frac{1}{2};\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\right\}$

+ Với $\frac{y}{x}=-1$ thay vào (*) được:

$\frac{4}{x^3}=-1\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{4}<0\ (loại)$

+ Với $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$ thay vào (*) được:

$\frac{4}{x^3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2\rightarrow y=1$

+ Với $\frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thay vào (*) được:

$\frac{4}{x^3}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0\ (vô\ nghiệm\ vì\ x>0)$

+ Với $\frac{y}{x}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ thay vào (*) được:

$\frac{4}{x^3}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{16}{1+\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{4\sqrt{5}-4}$

$\rightarrow y=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.\sqrt[3]{4\sqrt{5}-4}=-\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{5}-1)^4}{2}}$

Đối chiếu đk: $x^2-y^2\geq 0$ suy ra hệ có 2 nghiệm (x;y) là (2;1) và $\left(\sqrt[3]{4\sqrt{5}-4};-\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{5}-1)^4}{2}}\right)$

Chú ý: Từ quá trình giải hệ PT trên ta có 1 hệ PT sau nhiều nghiệm là:

$\begin{cases}x^3-2xy^2=4\\x^6+x^5y=32\end{cases}$

Thí dụ 36.*Cho a là số thực dương và phương trình:*

$$\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}}}}}=x \qquad (1)$$

a) Chứng minh với mọi số thực a dương phương trình (1) luôn có đúng 2 nghiệm phân biệt.

b)Tìm a nguyên dương bé hơn 2020 để (1) có 2 nghiệm nguyên phân biệt.

c) Giải phương trình:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}}}=x$$

d) Giải phương trình

$$\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}}}}}=x$$

e) Tính tổng và tích các nghiệm của (1)

khi $a=4^{111}-2^{111}$.

f)Tìm a để tổng các nghiệm của (1) bằng $2a-2$.

h) Tìm a để tổng các nghiệm của (1) bằng $\frac{(x-5)(x-1)}{4}$.

k)Giải phương trình:

$$\frac{\frac{1+x^2}{3}}{1+\sqrt{\frac{1+x^2}{3}-\frac{\frac{1+x^2}{3}}{1+\sqrt{\frac{1+x^2}{3}-\frac{\frac{1+x^2}{3}}{1+\sqrt{\frac{1+x^2}{3}}-x}}}}}=x$$

p)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{2}y^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-\dfrac{\sqrt[3]{2}y^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}}}}=x\\ \dfrac{\sqrt[3]{2}x^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}x^2-\dfrac{\sqrt[3]{2}x^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}x^2-y}}}}=y\end{cases}$$

q) Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{3+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{3+x^2}-\dfrac{\sqrt{3+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{3+x^2}-x}}}}=x$$

v) Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4+2x+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{4+2x+x^2}-\dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{4+2x+x^2}-x}}}}=x$$

Lời giải.

a) Do $VT(1)>0$ *nên* $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\sqrt{a}};a\right]$nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow x+x\sqrt{a-x}=a$$

$$\Leftrightarrow a-x-x\sqrt{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\\ \sqrt{a-x}=x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\\ a-x=x^2(*)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\end{array}\right.$$

Dễ thấy $x=a$ không là nghiệm của (*) vậy Pt luôn có 2 nghiệm phân biệt.

PT(1) có 2 nghiệm nguyên

$\Leftrightarrow 1+4a=n^2$ với $n\in N$

$\Leftrightarrow 4a=(n-1)(n+1)$ (*)

Nếu n chẵn thì $(n-1)(n+1)$ là số lẻ không chia hết cho 4

Suy ra n là số lẻ thỏa mãn tức

$n=2k+1$ *với* $k\in N, k\geq 1$

Thay vào (*) suy ra $a=k(k+1)$

Khi này

$$PT \text{ đã } cho\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k(k+1)\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}=k\end{array}\right.$$

Vậy để (1) có 2 nghiệm nguyên
$\Leftrightarrow a$ *là tích 2 số nguyên dương liên tiếp.*

Các nghiệm này là $x=k(k+1); x=k$

$a=k(k+1)<2020$

$$\Leftrightarrow k<\frac{-1+\sqrt{8081}}{2}\approx 44{,}45$$

Suy ra có 45 số nguyên dương k,tương ứng có 45 số a cần tìm.

Khi a=1 thì (1):

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}}}=x$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Khi a=2 thì (1):

$$\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}}}}}=x$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a=2\\x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}=1\end{array}\right.$$

e) Với (1) khi

$a=4^{111}-2^{111}=2^{111}(2^{111}-1)$ (tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a=4^{111}-2^{111}\\x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}=2^{111}-1\end{array}\right.$$

Tổng các nghiệm bằng $4^{111}-1$.

Tích các nghiệm bằng $2^{111}(2^{111}-1)^2$

f)Tổng các nghiệm của (1) bằng $2a-2$

$$\Leftrightarrow a+\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}=2a-2$$

$$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow a=2+\sqrt{2}$$

h) tổng các nghiệm của (1) bằng $\frac{(x-5)(x-1)}{4}$

$$\Leftrightarrow a+\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}=\frac{(x-5)(x-1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4a+1+2\sqrt{1+4a}+1=x^2-6x+9$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+4a}+1\right)^2=(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+4a}+1=x-3\ V\ \sqrt{1+4a}+1=3-x$$

$$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=4-\sqrt{13}\ V\ x=6+\sqrt{21}$$

k)Giải phương trình:

$$\frac{\frac{1+x^2}{3}}{1+\sqrt{\frac{1+x^2}{3}-\frac{\frac{1+x^2}{3}}{1+\sqrt{\frac{1+x^2}{3}-\frac{\frac{1+x^2}{3}}{1+\sqrt{\frac{1+x^2}{3}-x}}}}}}=x$$

Đặt $\frac{1+x^2}{3}=a>0$ ta được:

$$\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}}}}}=x\qquad(1)$$

Do $VT(1)>0\ nên\ x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\sqrt{a}};a\right]$nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow x+x\sqrt{a-x}=a$$

$$\Leftrightarrow a-x-x\sqrt{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\\sqrt{a-x}=x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\a-x=x^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+x^2}{3} \\ \frac{1+x^2}{3}-x=x^2 \end{array}\right. \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

p)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{2}y^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-\dfrac{\sqrt[3]{2}y^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}}}}=x & (1) \\ \dfrac{\sqrt[3]{2}x^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}x^2-\dfrac{\sqrt[3]{2}x^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}x^2-y}}}}=y & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy nếu $x=0$ thì từ hệ PT suy ra $y=0$.

Nếu $y=0$ thì từ hệ PT suy ra $x=0$.

Xét $x\neq 0; y\neq 0$

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $\left(0;\sqrt[3]{2}y^2\right]$

Xét $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2}y^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $\left(0;\sqrt[3]{2}y^2\right]$và có tập giá trị là $\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}y^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2}};\sqrt[3]{2}y^2\right]$nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{2}y^2}{1+\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}}=x$$

$$\Leftrightarrow x+x\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}=\sqrt[3]{2}y^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2}y^2-x-x\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ \sqrt{\sqrt[3]{2}y^2-x}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ \sqrt[3]{2}y^2-x=x^2 \end{array}\right.$$

Tương tự

$$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt[3]{2}x^2 \\ \sqrt[3]{2}x^2-y=y^2 \end{array}\right.$$

Từ đó hệ đã cho tương đương

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ y=\sqrt[3]{2}x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ \sqrt[3]{2}x^2-y=y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2}y^2-x=x^2 \\ y=\sqrt[3]{2}x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2}y^2-x=x^2 \\ \sqrt[3]{2}x^2-y=y^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \begin{cases} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ y=2y^4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ 2y^4-y=y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^4-x=x^2 \\ y=\sqrt[3]{2}x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2}y^2-x-\sqrt[3]{2}x^2+y=x^2-y^2 \\ \sqrt[3]{2}x^2-y=y^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \begin{cases} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2}y^2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt[3]{2}x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-y)\left[\left(1+\sqrt[3]{2}\right)(x+y)+1\right]=0 \\ \sqrt[3]{2}x^2-y=y^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt[3]{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ \sqrt[3]{2}y^2-y=y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt[3]{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt[3]{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ PT đã cho là

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}; \begin{cases} x=\sqrt[3]{2} \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt[3]{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

q) Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{3+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{3+x^2}-\frac{\sqrt{3+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{3+x^2}-x}}}}=x$$

Đặt $\sqrt{3+x^2}=a>0$ ta được:

$$\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}}}=x \qquad (1)$$

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\sqrt{a}};a\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow x+x\sqrt{a-x}=a$$

$$\Leftrightarrow a-x-x\sqrt{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ \sqrt{a-x}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ a-x=x^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3+x^2} \\ \sqrt{3+x^2}=x^2+x \end{array}\right.$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x^2=3+x^2 \ (vô\ nghiệm) \\ 3+x^2=(x^2+x)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+3x^2+3x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x+1)^3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1-\sqrt[3]{2}<0 \end{array}\right.$$

Vậy PT có 1 nghiệm x=1.

v) Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4+2x+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{4+2x+x^2}-\frac{\sqrt{4+2x+x^2}}{1+\sqrt{\sqrt{4+2x+x^2}-x}}}}=x$$

Đặt $\sqrt{4+2x+x^2}=\sqrt{3+(x+1)^2}=a>0$

ta được:

$$\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}}}=x \qquad (1)$$

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\sqrt{a}};a\right]$nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow x+x\sqrt{a-x}=a$$

$$\Leftrightarrow a-x-x\sqrt{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ \sqrt{a-x}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ a-x=x^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=\sqrt{4+2x+x^2} \\ \sqrt{4+2x+x^2}=x^2+x \end{array}\right.$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{c} x^2=4+2x+x^2 \\ 4+2x+x^2=(x^2+x)^2 \end{array}\right.$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{c} x=-2<0(loại) \\ 4+2x+x^2=(x^2+x)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^3-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=-2<0(loại) \\ x^3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

Vậy PT có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{2}$.

Thí dụ 37.Cho $a>0, b\geq 1$ *và phương trình*:

$$\frac{a}{b+\sqrt{a-\frac{a}{b+\sqrt{a-\frac{a}{b+\sqrt{a-x}}}}}}=x \qquad (1)$$

a) Tìm a,b biết phương trình (1) có 2 nghiệm $x=1$ *và* $x=2$.

b)Giải phương trình:

$$\frac{2}{3+\sqrt{2-\frac{2}{3+\sqrt{2-\frac{2}{3+\sqrt{2-x}}}}}}=x$$

c)Giải phương trình:

$$\frac{9}{1+\sqrt{9-\frac{9}{1+\sqrt{9-\frac{9}{1+\sqrt{9-x}}}}}}=x$$

Do $VT(1)>0$ *nên* $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{b+\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{b+\sqrt{a}};\frac{a}{b}\right]$là tập con của$(0;a]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow bx+x\sqrt{a-x}=a$$

Do $x=1$ *và* $x=2$ là nghiệm nên ta có:

$$\begin{cases} b+\sqrt{a-1}=a \\ 2b+2\sqrt{a-2}=a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-\sqrt{a-1} \\ 2a-2\sqrt{a-1}+2\sqrt{a-2}=a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-\sqrt{a-1} \\ a-1-2\sqrt{a-1}+1+2\sqrt{a-2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-\sqrt{a-1} \\ \left(\sqrt{a-1}-1\right)^2+2\sqrt{a-2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-\sqrt{a-1} \\ \left(\sqrt{a-1}-1\right)^2=2\sqrt{a-2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

b)Giải phương trình:

$$\frac{2}{3+\sqrt{2-\frac{2}{3+\sqrt{2-\frac{2}{3+\sqrt{2-x}}}}}}=x$$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 3x+x\sqrt{2-x}=2$

$\Leftrightarrow x=-4+2\sqrt{5}$

c)Giải phương trình:

$$\frac{9}{1+\sqrt{9-\frac{9}{1+\sqrt{9-\frac{9}{1+\sqrt{9-x}}}}}}=x$$

$\Leftrightarrow x=9\ v\ x=\frac{\sqrt{37}-1}{2}$

Thí dụ 38.Tìm số thực dương m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt và giải phương trình khi $m=\frac{1}{8}$

$$\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-x}}}}}}=x$$

Đặt $m+\frac{3x^2}{2}=a>0$ thì PT:

$$\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-x}}}}}}=x$$

trở thành:

$$\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}}}}}=x \qquad (1)$$

Do $VT(1)>0\ nên\ x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\sqrt{a}};a\right]$nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow x+x\sqrt{a-x}=a$$

$$\Leftrightarrow a-x-x\sqrt{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ \sqrt{a-x}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ a-x=x^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+\frac{3x^2}{2} \\ m+\frac{3x^2}{2}-x=x^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x^2}{2}-x+m=0 \quad (2) \\ \frac{x^2}{2}-x+m=0 \quad (3) \end{array}\right.$$

PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

khi và chỉ khi PT(2) và PT(3) cùng có 2 nghiệm dương phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

+PT(2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-6m>0 \\ \frac{2}{3}>0 \\ \frac{2m}{3}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{6}$$

+PT(3) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m>0 \\ 2>0 \\ 2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$$

+ Giải sử (2) và (3) có nghiệm chung thì ta có

$$\begin{cases} \frac{3x^2}{2}-x+m=0 \\ \frac{x^2}{2}-x+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ \frac{x^2}{2}-x+m=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ m=0 (loại\ vì\ m>0) \end{cases}$$

Vậy (2) và (3) không có nghiệm chụng

Từ đó ta có

PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{6}$$

Giải PT với $m=\frac{1}{8}$ dành cho bạn đọc.

$$\frac{\frac{1}{8}+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3x^2}{2}-\frac{\frac{1}{8}+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3x^2}{2}-\frac{\frac{1}{8}+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3x^2}{2}}-x}}}}}=x$$

Có 4 nghiệm

$$x=\frac{1}{6}; x=\frac{1}{2}; x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Chú ý. Nếu không muốn phương trình của dạng này nhìn phức tạp dạng $f_3(x)$ như PT:

$$\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}}-x}}}}}=x$$

Ta có thể chỉ để ở $f_2(x)$

$$\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}}-x}}}=x$$

Ta được đề bài nhìn hợp lí hơn là:

Thí dụ 38'.Tìm số thực dương m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt và giải phương trình khi $m=\frac{1}{8}$

$$\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}-\frac{m+\frac{3x^2}{2}}{1+\sqrt{m+\frac{3x^2}{2}}-x}}}}}=x$$

Vì thế ở bài viết nhiều phương trình tác giả quen để ở dạng $f_3(x)$ nên có thể nhìn phức tạp ,bạn đọc có thể tự chỉnh lại đề cho gọn hơn.

***Thí dụ 39**.Cho a là số thực dương và phương trình:*

$$\frac{a}{1+2.\sqrt{a-\frac{a}{1+2.\sqrt{a-\frac{a}{1+2.\sqrt{a}-x}}}}}=x \qquad (1)$$

a) Chứng minh với mọi số thực a dương phương trình (1) luôn có đúng 2 nghiệm phân biệt.

b)Tìm a nguyên dương bé hơn 2020 để (1) có 2 nghiệm nguyên.

c) Tập hợp các giá trị a để (1) có nghiệm nhỏ nhất nhỏ hơn $\frac{2a}{1+\sqrt{9+a^2}}$ là khoảng có độ dài bao nhiêu.

d)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{y^2-\dfrac{y^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{y^2-x}}}} = x \\ \dfrac{x^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{x^2-\dfrac{x^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{x^2-y}}}} = y \end{cases}$$

Lời giải.

a) Do $VT(1) > 0$ *nên* $x > 0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x) = \frac{a}{1+2.\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+2\sqrt{a}};a\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+2\sqrt{a-x}} = x \Leftrightarrow x + 2x\sqrt{a-x} = a$$

$$\Leftrightarrow a - x - 2x\sqrt{a-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x} - 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = a \\ \sqrt{a-x} = 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = a \\ a - x = 4x^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = a \\ 4x^2 + x - a = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = a \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{1+16a}}{8} \end{array}\right.$$

PT(1) có 2 nghiệm nguyên

$\Leftrightarrow 1 + 16a = n^2$ với $n \in N$

$\Leftrightarrow 16a = (n-1)(n+1)$ (*)

Nếu n chẵn thì $(n-1)(n+1)$ là số lẻ không chia hết cho 16

Suy ra n là số lẻ thỏa mãn tức

$n = 2k+1$ *với* $k \in N, k \geq 1$

Thay vào (*) suy ra $4a = k(k+1)$

Do (k,k+1)=1 suy ra 1 trong 2 số k,k+1 chia hết cho 4.

TH1: $k = 4i$ *với* $i \geq 1; i \in Z$

$\rightarrow a = i(4i+1)$

Suy ra

Khi này

PT đã $cho \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = a = i(4i+1) \\ x = 1+i \end{array}\right.$

TH2: $k = 4i+3$ *với* $i \geq 0; i \in Z$

$\rightarrow a = (i+1)(4i+3)$

Suy ra

Khi này

PT đã $cho \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = a = (i+1)(4i+3) \\ x = i \end{array}\right.$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm nguyên

Giải tiếp dành cho bạn đọc.

c) Xét $\frac{-1+\sqrt{1+16a}}{8} < a$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{1+16a}-8a}{8} < 0$$

$$\Leftrightarrow -1+\sqrt{1+16a}-8a < 0$$

$$\Leftrightarrow -2+\sqrt{1+16a}-16a < 0$$

$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{1+16a}\right)^2 < 0$ (luôn đúng với a>0)

Vậy nghiệm nhỏ nhất của PT là $x = \frac{-1+\sqrt{1+16a}}{8}$

Theo đề bài có:

$$\frac{-1+\sqrt{1+16a}}{8} < \frac{2a}{1+\sqrt{9+a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+16a-1}{8\left(1+\sqrt{1+16a}\right)} < \frac{2a}{1+\sqrt{9+a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{1+\sqrt{1+16a}} < \frac{2a}{1+\sqrt{9+a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1+16a}} < \frac{1}{1+\sqrt{9+a^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1+16a} > 1+\sqrt{9+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+16a} > \sqrt{9+a^2}$$

$$\Leftrightarrow 1+16a > 9+a^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < a^2-16a+8$$

$$\Leftrightarrow 8-2\sqrt{14} < a < 8+2\sqrt{14}$$

Vậy tập hợp các giá trị a cần tìm là

khoảng $\left(8-2\sqrt{14};8-2\sqrt{14}\right)$ có độ dài là $4\sqrt{14}$

d)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{y^2-\frac{y^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{y^2-x}}}} = x \quad (1) \\ \dfrac{x^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{x^2-\frac{x^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{x^2-y}}}} = y \quad (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $x=0$ thì từ hệ PT suy ra $y=0$.

$y=0$ thì từ hệ PT suy ra $x=0$.

Xét x,y≠ 0

Do $VT(1)>0$ $nên$ $x>0$

Xét $f(x)=\frac{y^2}{1+\sqrt{2}.\sqrt{y^2-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;y^2]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{y^2}{1+\sqrt{2}\sqrt{y^2}};y^2\right]$nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+\sqrt{2}\sqrt{y^2-x}}=x \Leftrightarrow x+\sqrt{2}x\sqrt{y^2-x}=y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2-x-\sqrt{2}x\sqrt{y^2-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2-x}\left(\sqrt{y^2-x}-\sqrt{2}x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=y^2 \\ \sqrt{a-x}=\sqrt{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=y^2 \\ y^2-x=2x^2 \end{array}\right.$$

Tương tự

Do $VT(2)>0$ $nên$ $y>0$

$$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y=x^2 \\ x^2-y=2y^2 \end{array}\right.$$

Hệ PT đã cho tương đương

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y^2 \\ y=x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y^2 \\ x^2-y=2y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-x=2x^2 \\ y=x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-x=2x^2 \\ x^2-y=2y^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\underset{x,y>0}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y^2 \\ y=y^4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y^2 \\ y^4-y=2y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^4-x=2x^2 \\ y=x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-x^2-x+y=2x^2-2y^2 \\ x^2-y=2y^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow_{x,y>0}\left[\begin{array}{c}\begin{cases}x=y^2\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=y^2\\y^3-2y-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x^3-2x-1=0\\y=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}(x-y)(3x+3y+1)=0\\x^2-y=2y^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow_{x,y>0}\left[\begin{array}{c}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=y^2\\(y+1)(y^2-y-1)=0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+1)(x^2-x-1)=0\\y=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x=y\\y^2-y=2y^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow_{x,y>0}\left[\begin{array}{c}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=y^2\\y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\y=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x=y\\y=0\ (loại) V\ y=-1(loại)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Thí dụ 40. Cho *a là số thực dương và phương trình*:

$$\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}}}=x \quad (1)$$

a)Tìm a để PT(1) không có nghiệm nào thuộc khoảng (1; 2).

b)Tìm số thực m dương để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt

$$\frac{m+mx^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{m+mx^2-\frac{m+mx^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{m+mx^2-x}}}}=x$$

c)Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}-\frac{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}-x}}}}=x$$

d)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}xy+2y=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{1+y^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2-\frac{1+y^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2-x}}}}=x\end{cases}$$

Lời giải.

a) Do $VT(1)>0$ *nên* $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a}};a\right]$ nên theo kết quả 1 có:

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}x\sqrt{a-x}=a$$

$$\Leftrightarrow a-x-\frac{1}{2}x\sqrt{a-x}=0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-\frac{1}{2}x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ \sqrt{a-x}=\frac{1}{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ a-x=\frac{1}{4}x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ x^2+4x-4a=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ x=2(\sqrt{1+a}-1) \end{array}\right.$

PT(1) có ít nhất một nghiệm nào thuộc

khoảng $(1;2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 1<a<2 \\ 1<2(\sqrt{1+a}-1)<2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<a<2 \\ \frac{5}{4}<a<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<a<3$

Suy ra PT(1) không có nghiệm nào thuộc khoảng $(1;2)$

$\Leftrightarrow a \in (0;1] \cup [3;+\infty)$

b)Tìm số thực m dương để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt

$$\frac{m+mx^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{m+mx^2-\frac{m+mx^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{m+mx^2-x}}}}=x$$

Đặt $m+mx^2=a>0$ thì PT thành:

$$\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}}}=x \qquad (1)$$

Do $VT(1)>0$ nên $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a}};a\right]$ nên theo kết quả 1 có:

$(1) \Leftrightarrow f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}=x \Leftrightarrow x+\frac{1}{2}x\sqrt{a-x}=a$

$\Leftrightarrow a-x-\frac{1}{2}x\sqrt{a-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-\frac{1}{2}x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ \sqrt{a-x}=\frac{1}{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=m+mx^2 \\ m+mx^2-x=\frac{1}{4}x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} mx^2-x+m=0 & (2) \\ (m-\frac{1}{4})x^2-x+m=0 & (3) \end{array}\right.$

PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

khi và chỉ khi PT(2) và PT(3) cùng có 2 nghiệm dương phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

+PT(2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-4m^2>0 \\ \frac{1}{m}>0 \\ 1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$

+PT(3) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-(4m-1)m>0 \\ \frac{1}{m-\frac{1}{4}}>0 \\ \frac{m}{m-\frac{1}{4}}>0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{17}}{8}<m<\frac{1+\sqrt{17}}{8} \\ m>\frac{1}{4} \\ m>\frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{8}$

+ Giải sử (2) và (3) có nghiệm chung thì ta có

$$\begin{cases} mx^2 - x + m = 0 \\ \left(m - \frac{1}{4}\right)x^2 - x + m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \frac{x^2}{2} - x + m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = 0 (loại\ vì\ m > 0) \end{cases}$$

Vậy (2) và (3) không có nghiệm chụng

Từ đó ta có

PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$$

c)Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}} - \frac{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}-x}}}} = x$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}} = a > 0$ thì PT trở thành

$$\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a - \frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}}} = x \quad (1)$$

$VT(1) > 0\ nên\ x > 0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0; a]$

Xét $f(x) = \frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên khoảng $(0; a)$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a}}; a\right]$ nên theo kết quả 1 có:

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}} = x \Leftrightarrow x + \frac{1}{2}x\sqrt{a-x} = a$$

$$\Leftrightarrow a - x - \frac{1}{2}x\sqrt{a-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ \sqrt{a-x} = \frac{1}{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ a - x = \frac{1}{4}x^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x^2 + 4x - 4a = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}} & (2) \\ x^2 + 4x - 4.\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}} = 0 & (3) \end{array}\right.$$

$$(2) \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 = x^2 + 4x + 1$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{5}$$

$$(3) \Leftrightarrow x^2 + 4x = 4.\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{2}}$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} (x^2+4x)^2 = 8(x^2+4x) + 8$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} (x^2+4x)^2 - 8(x^2+4x) - 8 = 0$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x = 4 + 2\sqrt{6}$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x - 4 - 2\sqrt{6} = 0$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = -2 + \sqrt{8 + 2\sqrt{6}}$$

d)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy+2y=\dfrac{3}{2} & (1) \\ \dfrac{1+y^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2-\frac{1+y^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2-x}}}}=x & (2) \end{cases}$$

Đặt $1+y^2=a>0$ thì PT (2) trở thành

$$\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}}}=x \quad (3)$$

$VT(3)>0$ *nên* $x>0$

Suy ra (1) xác định trên nửa khoảng $(0;a]$

Xét $f(x)=\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;a]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a}};a\right]$ nên theo kết quả 1 có:

$(3)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+\frac{1}{2}\sqrt{a-x}}=x\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}x\sqrt{a-x}=a$$

$$\Leftrightarrow a-x-\frac{1}{2}x\sqrt{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-x}\left(\sqrt{a-x}-\frac{1}{2}x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ \sqrt{a-x}=\frac{1}{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ a-x=\frac{1}{4}x^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=a \\ x^2+4x-4a=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1+y^2 \\ x^2+4x-4(1+y^2)=0 \end{array}\right.$$

TH1: Với $x=1+y^2$ thay vào (1):

$$(1+y^2)y+2y=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^3+3y=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^3+3y=\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow x=1+\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2$$

TH2: Với $x^2+4x-4(1+y^2)=0$ kết hợp với (1) ta có:

$$\begin{cases} xy+2y=\dfrac{3}{2} \\ x^2+4x-4(1+y^2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)y=\dfrac{3}{2} \\ (x+2)^2-4y^2=8 \end{cases} \quad (*)$$

Dễ thấy $y=0$ không là nghiệmcủa (*).

Xét $y\neq 0$

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\dfrac{3}{2y} \\ \dfrac{9}{4y^2}-4y^2=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\dfrac{3}{2y} \\ 16y^4+32y^2-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\dfrac{3}{2y} \\ y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\dfrac{3}{2y} \\ y=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ V } \begin{cases} x=-5<0(loại) \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=1+\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \\ y=\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

Thí dụ 41.Cho *a là số thực dương và phương trình*:

$$\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}}}}=x \quad (1)$$

a)Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Giải phương trình với $a=\sqrt{2^{22}+2^{11}}$

b)Tìm a để phương trình có nghiệm $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{12}\right)$

c) Tìm a để phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{1+8^{2020}}$

d) Tìm a để phương trình có nghiệm này gấp 2^{22} lần nghiệm kia.

e)Giải phương trình

$$\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\sqrt{x-x^2}}}}=x$$

Chú ý:Để PT phức tạp hơn ta có thể sửa (1) thành:

$$\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}}}}}}=x$$

f)Giải phương trình

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8x^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8x^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8x^2}}.\sqrt{1-x}}}}}}=x$$

h)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ \frac{4+y^4}{2}=\frac{x^4+2(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)} \end{cases}$$

p)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ 2+y^4=\frac{x^4+2(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)} \end{cases}$$

q)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ \frac{2+y^4}{2}=\frac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)} \end{cases}$$

t)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ \frac{2+y^4}{3}=\frac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-2x+2)} \end{cases}$$

z)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ \frac{2+y^4}{4}=\frac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-2x+2)} \end{cases}$$

s)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}.\sqrt{1-x}}}}=x \\ \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}.\sqrt{1-y}}}}=y \end{cases}$$

w)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}}.\sqrt{1-x}}}} = x \\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{8}x^2}}.\sqrt{1-y}}}} = y \end{cases}$$

Lời giải.

a) do $VT > 0$ nên $0 < x \leq 1$

Dễ thấy $f(x) = \frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+a}; 1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}} = x$

$\Leftrightarrow x + ax.\sqrt{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow -(1-x) + ax.\sqrt{1-x} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x} - ax\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{1-x} = ax \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1-x = a^2x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ a^2x^2 + x - 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$

PT(*) có $a^2.(-1) < 0$ và $a^2 1^2 + 1 - 1 \neq 0$ nên (1) có 2 nghiệm phân biệt là

$x = 1; x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} < 1$

+Với $a = \sqrt{2^{22} + 2^{11}}$ PT(1) có 2 nghiệm là

$x = 1; x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} = \dfrac{1}{1+2^{11}}$

b) Theo đề bài

phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{12}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} < \dfrac{5}{12}$

$\Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow \dfrac{84}{25} < a^2 < 6 \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{21}}{5} < x < \sqrt{6}$

c) phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{1+8^{2020}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} = \dfrac{1}{1+8^{2020}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} = \dfrac{1}{1+8^{2020}}$

Đặt $\frac{1}{1+8^{2020}} = m > 0$ ta được

$\dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} = m$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+4a^2} = 2ma^2 + 1$

$\Leftrightarrow 1 + 4a^2 = 4m^2a^4 + 4ma^2 + 1$

$\Leftrightarrow 4a^2 = 4m^2a^4 + 4ma^2$

$\Leftrightarrow 1 = m^2a^2 + m$

$\Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1-m}{m^2} = \dfrac{1-\frac{1}{1+8^{2020}}}{\left(\frac{1}{1+8^{2020}}\right)^2} = 8^{2020}(1+8^{2020})$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a = 8^{1010}.\sqrt{1+8^{2020}}}$.

d) Do (1) có 2 nghiệm phân biệt là

$x = 1; x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} < 1$

Mà phương trình (1) có nghiệm này gấp 2^{22} lần nghiệm kia suy ra

$\dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2} = \dfrac{1}{2^{22}} = m > 0$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1-m}{m^2} = \dfrac{1-\frac{1}{2^{22}}}{\frac{1}{2^{44}}} = 2^{22}(2^{22}-1)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 2^{11}.\sqrt{2^{22}-1}$

Vậy $a = 2^{11}.\sqrt{2^{22}-1}$

e)Giải phương trình

$$\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\sqrt{x-x^2}}}} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{1-x}}}} = x$$

do $VT > 0$ *nên* $0 < x \le 1$

Đặt $\frac{1}{\sqrt{x}} = a > 0$ ta được

$$\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}}}} = x \quad (1)$$

Dễ thấy $f(x) = \frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+a};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}} = x$

$\Leftrightarrow x + ax.\sqrt{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow -(1-x) + ax.\sqrt{1-x} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x} - ax\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{1-x} = ax \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1-x = a^2x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1-x = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1-x = x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

f)Giải phương trình

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8x^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8x^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8x^2}}.\sqrt{1-x}}}}}} = x$$

do $VT > 0$ *nên* $0 < x \le 1$

Đặt $\frac{1}{\sqrt{x}} = a > 0$ ta được

$$\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}}}}}} = x \quad (1)$$

Dễ thấy $f(x) = \frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+a};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a.\sqrt{1-x}} = x$

$\Leftrightarrow x + ax.\sqrt{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow -(1-x) + ax.\sqrt{1-x} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x} - ax\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{1-x} = ax \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1-x = a^2x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1-x = \frac{1}{8x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 8x^3 - 8x^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 8x^3 - 8x^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (2x-1)(4x^2 - 2x - 1) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (2x-1)(4x^2 - 2x - 1) = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

h)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x & (1) \\ \dfrac{4+y^4}{2}=\dfrac{x^4+2(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)} & (2) \end{cases}$$

Xét $y=0$ không là nghiệm hệ.
Xét $y\neq 0$ ta có
do $VT(1)>0$ $nên$ $0<x\leq 1$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+y^2};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}=x$

$\Leftrightarrow x+y^2x.\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow -(1-x)+y^2x.\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-y^2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{1-x}=y^2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1-x=y^4x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y^4=\dfrac{1-x}{x^2} \end{array}\right.$

Với $x=1$ thay vào (2) được
$\frac{4+y^4}{2}=1(vô\ nghiệm).$
Với $y^4=\frac{1-x}{x^2}$ thay vào (2) được:

$$\frac{4+\frac{1-x}{x^2}}{2}=\frac{x^4+2(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+\frac{1-x}{x^2}}{2}=\frac{1+2\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2}{1+\frac{1-x}{x^2}}$$

Đặt $\frac{1-x}{x^2}=t\geq 0$ ta được

$$\frac{4+t}{2}=\frac{1+2t^2}{1+t}\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t=2\ V\ t=-\frac{1}{3}<0$$

Với t=2 suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2}=2 \\ y^4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\ V\ x=-1<0 \\ y=\pm\sqrt[4]{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\pm\sqrt[4]{2} \end{cases}$$

Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\pm\pm\sqrt[4]{2} \end{cases}$$

p)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ 2+y^4=\dfrac{x^4+2(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)} \end{cases}$$

Xét $y=0$ không là nghiệm hệ.
Xét $y\neq 0$ ta có
do $VT(1)>0$ $nên$ $0<x\leq 1$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+y^2};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}=x$

$\Leftrightarrow x+y^2x.\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow -(1-x)+y^2x.\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-y^2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{1-x}=y^2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1-x=y^4x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y^4=\dfrac{1-x}{x^2} \end{array}\right.$

Với $x=1$ thay vào (2) được

$2+y^4=1(vô\ nghiệm)$

Với $y^4=\frac{1-x}{x^2}$ thay vào (2) được:

$$2+\frac{1-x}{x^2}=\frac{x^4+2(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{1-x}{x^2}=\frac{1+2\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2}{1+\frac{1-x}{x^2}}$$

Đặt $\frac{1-x}{x^2}=t\geq 0$ ta được

$$2+t=\frac{1+2t^2}{1+t}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow t=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Với t=$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{x^2}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\ y^4=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{7+2\sqrt{13}}-1}{3+\sqrt{13}}\\ y=\pm\sqrt[4]{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}\end{cases}$$

Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm

$$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{7+2\sqrt{13}}-1}{3+\sqrt{13}}\\ y=\pm\sqrt[4]{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}\end{cases}$$

q)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x\\ \dfrac{2+y^4}{2}=\dfrac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)}\end{cases}$$

Xét $y=0$ thay vào hệ suy ra $x=1$.

Xét $y\neq 0$ ta có

do $VT(1)>0\ nên\ 0<x\leq 1$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{1}{1+y^2};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}=x$

$\Leftrightarrow x+y^2x.\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow -(1-x)+y^2x.\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-y^2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{1-x}=y^2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1-x=y^4x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y^4=\dfrac{1-x}{x^2} \end{array}\right.$

Với $x=1$ thay vào (2) được

$y=0$

Với $y^4=\frac{1-x}{x^2}$ thay vào (2) được:

$$\frac{2+\frac{1-x}{x^2}}{2}=\frac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2+\frac{1-x}{x^2}}{2}=\frac{1+\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2}{1+\frac{1-x}{x^2}}$$

Đặt $\frac{1-x}{x^2}=t\geq 0$ ta được

$$\frac{2+t}{2}=\frac{1+t^2}{1+t}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow t=0\ V\ t=3$$

Với t=0 suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{x^2}=0\\ y^4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$$

Với t=3 suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{x^2}=3\\ y^4=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}\\ y=\pm\sqrt[4]{3}\end{cases}$$

Hệ đã cho có 3 nghiệm

$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{\sqrt{13}-1}{6} \\ y=\pm\sqrt[4]{3} \end{cases}$

t)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ \dfrac{2+y^4}{3}=\dfrac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-2x+2)} \end{cases}$$

Xét $y=0$ thay vào hệ thấy không thỏa mãn.
Xét $y\neq 0$ ta có
do $VT(1)>0$ *nên* $0<x\leq 1$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+y^2};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}=x$

$\Leftrightarrow x+y^2x.\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow -(1-x)+y^2x.\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-y^2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{1-x}=y^2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1-x=y^4x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y^4=\dfrac{1-x}{x^2} \end{array}\right.$

Với $x=1$ thay vào (2) được
$\frac{2+y^4}{3}=1\Leftrightarrow y=\pm 1$
Với $y^4=\frac{1-x}{x^2}$ thay vào (2) được:
$$\frac{2+\frac{1-x}{x^2}}{3}=\frac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-2x+2)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2+\frac{1-x}{x^2}}{3}=\frac{1+\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2}{1+2.\frac{1-x}{x^2}}$$

Đặt $\frac{1-x}{x^2}=t\geq 0$ ta được
$$\frac{2+t}{3}=\frac{1+t^2}{1+2t}\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow t=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$$
Với t=$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ suy ra
$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2}=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \\ y^4=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{11+2\sqrt{21}}-1}{5+\sqrt{21}} \\ y=\pm\sqrt[4]{\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}} \end{cases}$$
Với t=$\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ suy ra
$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2}=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \\ y^4=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{11-2\sqrt{21}}-1}{5-\sqrt{21}} \\ y=\pm\sqrt[4]{\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}} \end{cases}$$

Hệ đã cho có 6 nghiệm

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\pm 1 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{\sqrt{11+2\sqrt{21}}-1}{5+\sqrt{21}} \\ y=\pm\sqrt[4]{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{\sqrt{11-2\sqrt{21}}-1}{5-\sqrt{21}} \\ y=\pm\sqrt[4]{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} \end{cases}$$

z)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+y^2.\sqrt{1-\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}}}=x \\ \dfrac{2+y^4}{4}=\dfrac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-2x+2)} \end{cases}$$

Xét $y=0$ thay vào hệ thấy không thỏa mãn.
Xét $y\neq 0$ ta có
do $VT(1)>0$ *nên* $0<x\leq 1$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+y^2};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2.\sqrt{1-x}}=x$

$\Leftrightarrow x+y^2x.\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow -(1-x)+y^2x.\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-y^2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{1-x}=y^2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1-x=y^4x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y^4=\dfrac{1-x}{x^2} \end{array}\right.$

Với $x=1$ thay vào (2) được

$\frac{2+y^4}{4}=1\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$

Với $y^4=\frac{1-x}{x^2}$ thay vào (2) được:

$$\frac{2+\frac{1-x}{x^2}}{4}=\frac{x^4+(x-1)^2}{x^2(x^2-2x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+\frac{1-x}{x^2}}{4}=\frac{1+\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2}{1+2.\frac{1-x}{x^2}}$$

Đặt $\frac{1-x}{x^2}=t\geq 0$ ta được

$$\frac{2+t}{4}=\frac{1+t^2}{1+2t}\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow t=2\ V\ t=\frac{1}{2}$$

Với t=2 suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{x^2}=2\\ y^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\pm\sqrt[4]{2}\end{cases}$$

Với t=$\frac{1}{2}$ suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\\ y^4=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}-1\\ y=\pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}\end{cases}$$

Vậy hệ PT đã cho có 6 nghiệm

$$\begin{cases}x=1\\ y=\pm\sqrt{2}\end{cases};\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\pm\sqrt[4]{2}\end{cases};\begin{cases}x=\sqrt{3}-1\\ y=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

s)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}.\sqrt{1-x}}}}=x \quad (1)\\ \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}.\sqrt{1-y}}}}=y \quad (2)\end{cases}$$

do $VT(1)>0\ nên\ 0<x\leq 1$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{4}{y^2}}.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là

$\left(\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{4}{y^2}}};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}.\sqrt{1-x}}=x$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}x.\sqrt{1-x}=1$$

$$\Leftrightarrow -(1-x)+\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}.x.\sqrt{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}.x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{1-x}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4y^2}}.x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1-x=x^2\left(1+\dfrac{1}{4y^2}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{4y^2} \end{array}\right.$$

Tương tự

do $VT(2)>0\ nên\ 0<y\leq 1$

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{4x^2}\end{array}\right.$$

Hệ PT đã cho tương đương

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{4y^2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{4x^2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{4x^2}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{4y^2}\\ y=1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{4y^2}\\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{4x^2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=\dfrac{-2+2\sqrt{6}}{5}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{-2+2\sqrt{6}}{5}\\ y=1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

w)Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}}.\sqrt{1-x}}}}=x \quad (1)\\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{1+.\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{8}x^2}}.\sqrt{1-y}}}}=y \quad (2)\end{array}\right.$$

do $VT(1)>0$ *nên* $0<x\leq 1$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}.\sqrt{1-x}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$ và có tập giá trị là $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}};1\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}.\sqrt{1-x}}=x$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}x.\sqrt{1-x}=1$$

$$\Leftrightarrow -(1-x)+\frac{1}{\sqrt{8}y^2}.x.\sqrt{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{8}y^2}.x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{1-x}=\dfrac{1}{\sqrt{8}y^2}.x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ 1-x=x^2.\dfrac{1}{8y^2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{8y^2}\end{array}\right.$$

Tương tự

do $VT(2)>0$ *nên* $0<y\leq 1$

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8x^4}\end{array}\right.$$

Hệ PT đã cho tương đương

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{8y^4}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8x^4}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8x^4} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{8y^4} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{8y^4} \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8x^4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{8} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8y^4}-\dfrac{1}{8x^4} \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8x^4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4+2\sqrt{6} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2y}+\dfrac{1}{xy^2}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-1\right)=0 \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8x^4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4+2\sqrt{6} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=0 \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8x^4} \end{cases} \end{array}\right.$$

(do $0<x\le 1, 0<y\le 1$ nên

$\frac{1}{x^3};\frac{1}{x^2y};\frac{1}{xy^2};\frac{1}{y^3};\frac{1}{x};\frac{1}{y}\ge 1$ suy ra

$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\ge 4$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4+2\sqrt{6} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8y^4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4+2\sqrt{6} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ \dfrac{1}{y}-1=\dfrac{1}{8y^3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4+2\sqrt{6} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ 8y^3-8y^2+1=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4+2\sqrt{6} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4+2\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4+2\sqrt{6} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ (2y-1)(4y^2-2y-1)=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Thí dụ 42. Cho *a là số thực dương và phương trình*:

$$2-\frac{a}{a+\sqrt{1-\frac{a}{a+\sqrt{x-1}}}}=x \quad (1)$$

a)Chứng minh với mỗi số thực a dương phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt . Giả sử với mỗi a ta có nghiệm lớn nhất của (1) là x_a.Tìm

$$\lim_{a\to+\infty} x_a$$

b)Giải phương trình:

$$2-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}}}=x$$

c)Giải phương trình:

$$2-\frac{3}{3+\sqrt{1-\frac{3}{3+\sqrt{x-1}}}}=x$$

d)Giải phương trình:

$$2-\frac{2^{x-2}}{2^{x-2}+\sqrt{1-\frac{2^{x-2}}{2^{x-2}+\sqrt{x-1}}}}=x$$

Lời giải.

a) ĐK: $x \geq 1$

Dễ thấy $f(x)=2-\frac{a}{a+\sqrt{x-1}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ và có tập giá trị là

[1;2) nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{a}{a+\sqrt{x-1}}=x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=a(x-1)+x\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(x-1+a\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x-1+a\sqrt{x-1}-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x-1}=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x-1}=\dfrac{2}{a+\sqrt{a^2+4}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x-1=\dfrac{4}{\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\dfrac{4}{\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)^2}>1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt và nghiệm lớn nhất là $x=x_a=1+\frac{4}{\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)^2}$

$$\lim_{a\to+\infty} x_a=\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{4}{\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)^2}\right)=1$$

b)Khi a=1 thì (1) là

$$2-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}}}=x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x-1+\sqrt{x-1}-1=0 \end{array}\right.$$

PT có 2 nghiệm

$$x=1; x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

c)Khi a=3 thì (1) là

$$2-\frac{3}{3+\sqrt{1-\frac{3}{3+\sqrt{x-1}}}}=x$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x-1+3\sqrt{x-1}-1=0\end{array}\right.$$

PT có 2 nghiệm

$$x=1;x=\frac{13+3\sqrt{13}}{2}$$

d)Giải phương trình:

$$2-\frac{2^{x-2}}{2^{x-2}+\sqrt{1-\frac{2^{x-2}}{2^{x-2}+\sqrt{x-1}}}}=x$$

Đặt $2^{x-2}=a>0$ thì PT trở thành

$$2-\frac{a}{a+\sqrt{1-\frac{a}{a+\sqrt{x-1}}}}=x \quad (1)$$

ĐK: $x\geq 1$

Dễ thấy $f(x)=2-\frac{a}{a+\sqrt{x-1}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ và có tập giá trị là

[1;2) nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{a}{a+\sqrt{x-1}}=x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=a(x-1)+x\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(x-2+a\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\2^{x-2}.\sqrt{x-1}=2-x\end{array}\right.$$

Xét $x>1$

$$2^{x-2}.\sqrt{x-1}=2-x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{2-x}{\sqrt{x-1}} \quad (*)$$

Xét $y=\frac{2-x}{\sqrt{x-1}}$ có $y'=\frac{-x}{2(x-1)\sqrt{x-1}}<0, x>1$

Suy ra $y=\frac{2-x}{\sqrt{x-1}}$ là hàm số nghịch biến

Vậy VT(*) là hàm số đồng biến còn VT(*) là hàm số nghịch biến nên $x=\frac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất của (*)

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=1;x=\frac{3}{2}$

Thí dụ 43.Cho *a là số thực dương và phương trình*:

$$3-\frac{2a}{a+\sqrt{2-\frac{2a}{a+\sqrt{2-\frac{2a}{a+\sqrt{x-1}}}}}}=x \quad (1)$$

a)Chứng minh với mỗi số thực a dương phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt . Giả sử với mỗi a ta có nghiệm lớn nhất của (1) là x_a.Tìm

$$\lim_{a\to+\infty}(x_a-1)a^2$$

b)Giải phương trình:

$$3-\frac{2^{x-1}}{2^{x-2}+\sqrt{2-\frac{2^{x-1}}{2^{x-2}+\sqrt{2-\frac{2^{x-1}}{2^{x-2}+\sqrt{x-1}}}}}}=x$$

Lời giải.

a) ĐK: $x\geq 1$

Dễ thấy $f(x)=3-\frac{2a}{a+\sqrt{x-1}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ và có tập giá trị là

[1;3) nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{2a}{a+\sqrt{x-1}}=x$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}=a(x-1)+x\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(x-1+a\sqrt{x-1}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x-1+a\sqrt{x-1}-2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x-1}=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x-1}=\dfrac{4}{a+\sqrt{a^2+8}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x-1=\dfrac{16}{\left(a+\sqrt{a^2+8}\right)^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\dfrac{16}{\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)^2}>1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt và nghiệm lớn nhất là $x=x_a=1+\frac{16}{\left(a+\sqrt{a^2+8}\right)^2}$

$$\lim_{a\to+\infty}(x_a-1)a^2$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{16}{\left(a+\sqrt{a^2+8}\right)^2}-1\right)a^2$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\frac{16}{\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{a^2}}\right)^2}=4$$

b)Giải phương trình:

$$3-\frac{2^{x-1}}{2^{x-2}+\sqrt{2-\frac{2^{x-1}}{2^{x-2}+\sqrt{2-\frac{2^{x-1}}{2^{x-2}+\sqrt{x-1}}}}}}=x$$

Đặt $2^{x-2}=a>0$ thì PT trở thành

$$3-\frac{2a}{a+\sqrt{2-\frac{2a}{a+\sqrt{2-\frac{2a}{a+\sqrt{x-1}}}}}}=x \quad (1)$$

ĐK: $x\geq 1$

Dễ thấy $f(x)=3-\frac{2a}{a+\sqrt{x-1}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ và có tập giá trị là $[1;3)$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{2a}{a+\sqrt{x-1}}=x$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}=a(x-1)+x\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(x-3+a\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ a\sqrt{x-1}=3-x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2^{x-2}.\sqrt{x-1}=3-x \end{array}\right.$$

Xét $x>1$

$$2^{x-2}.\sqrt{x-1}=3-x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{3-x}{\sqrt{x-1}} \qquad (*)$$

Xét $y=\frac{3-x}{\sqrt{x-1}}$ có $y'=\frac{-x-1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}<0, x>1$

Suy ra $y=\frac{3-x}{\sqrt{x-1}}$ là hàm số nghịch biến

Vậy VT(*) là hàm số đồng biến còn VT(*) là hàm số nghịch biến nên $x=2$ là nghiệm duy nhất của (*)

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=1; x=2$

Thí dụ 44.Cho *m là số thực và phương trình*:

$$4-\frac{3^{m+1}}{3^m+\sqrt{3-\frac{3^{m+1}}{3^m+\sqrt{3-\frac{3^{m+1}}{3^m+\sqrt{x-1}}}}}}=x \quad (1)$$

Chứng minh với mỗi số thực m phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt . Giả sử với mỗi m ta có nghiệm lớn nhất của (1) là x_m.

1)Tìm $\lim\limits_{m\to-\infty} x_m$

2)Tìm $\lim\limits_{m\to+\infty}(x_m-1).3^{2m+1982}$

3)Tìm m biết (1) có nghiệm x=2

4)Biết (1) có nghiệm $x=\frac{25}{16}$ thì $m=log_3\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=\frac{b^3}{4a-b}$.

Lời giải.

Đặt $3^m=a>0$ thì PT trở thành

$$4-\frac{3a}{a+\sqrt{3-\frac{3a}{a+\sqrt{3-\frac{3a}{a+\sqrt{x-1}}}}}}=x \quad (1)$$

ĐK: $x\ge 1$

Dễ thấy $f(x)=4-\frac{3a}{a+\sqrt{x-1}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ và có tập giá trị là $[1;4)$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow 4-\frac{3a}{a+\sqrt{x-1}}=x$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=a(x-1)+x\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(x-1+a\sqrt{x-1}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x-1+a\sqrt{x-1}-3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{x-1}=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+12}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{x-1}=\dfrac{6}{a+\sqrt{a^2+12}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x-1=\dfrac{36}{\left(a+\sqrt{a^2+12}\right)^2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1+\dfrac{36}{\left(3^m+\sqrt{3^{2m}+12}\right)^2}>1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt và nghiệm lớn nhất là

$$x=x_m=1+\frac{36}{\left(3^m+\sqrt{3^{2m}+12}\right)^2}$$

1)Ta có

$$\lim_{m\to-\infty}x_m=\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{36}{\left(3^m+\sqrt{3^{2m}+12}\right)^2}\right)=4$$

2)Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}(x_m-1).3^{2m+1982}=\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{36.3^{2m+1982}}{\left(3^m+\sqrt{3^{2m}+12}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{36.3^{1982}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{12}{3^{2m}}}\right)^2}\right)=3^{1984}$$

3) theo câu trên thì

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ 3^m\sqrt{x-1}=4-x\end{array}\right.$$

(1) có nghiệm x=2

$\Leftrightarrow 3^m=2\Leftrightarrow m=log_3 2$

4) có

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ 3^m\sqrt{x-1}=4-x\end{array}\right.$$

(1) có nghiệm $x=\frac{25}{16}$

$$\Leftrightarrow 3^m\sqrt{\frac{25}{16}-1}=4-\frac{25}{16}\Leftrightarrow 3^m=\frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow m=log_3\frac{13}{4}$$

Suy ra $a=13;b=4$

$$P=\frac{b^3}{4a-b}=\frac{4}{3}$$

*Nếu muốn PT nhìn gọn hơn ta có thể sửa lại đề bài thành

Cho *m là số thực và phương trình*:

$$4-\frac{3^{m+1}}{3^m+\sqrt{3-\frac{3^{m+1}}{3^m+\sqrt{x-1}}}}=x \quad (1)$$

Chứng minh với mỗi số thực m phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt . Giả sử với mỗi m ta có nghiệm lớn nhất của (1) là x_m.

1)Tìm $\lim\limits_{m\to-\infty}x_m$

2)Tìm $\lim\limits_{m\to+\infty}(x_m-1).3^{2m+1982}$

3)Tìm m biết (1) có nghiệm x=2

4)Biết (1) có nghiệm $x=\frac{25}{16}$ thì $m=log_3\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=\frac{b^3}{4a-b}$.

Thí dụ 45.Giải *phương trình*:

$$4-\frac{3\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{8-x^2}+\sqrt{3-\frac{3\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{8-x^2}+\sqrt{x-1}}}}=x$$

Lời giải. đk:$x\geq 1$

Xét $8-x^2=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$ thay vào PT thấy không thỏa mãn.

Với $x\neq 2\sqrt{2}$

Đặt $\sqrt{8-x^2}=a>0$ thì PT trở thành

$$4-\frac{3a}{a+\sqrt{3-\frac{3a}{a+\sqrt{x-1}}}}=x \quad (1)$$

ĐK: $x\geq 1$

Dễ thấy $f(x)=4-\frac{3a}{a+\sqrt{x-1}}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ và có tập giá trị là [1;4) nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$$\Leftrightarrow 4-\frac{3a}{a+\sqrt{x-1}}=x$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=a(x-1)+x\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(x-4+a\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ a\sqrt{x-1}=4-x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{8-x^2}.\sqrt{x-1}=4-x\end{array}\right. (*)$$

$$(*)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1\leq x<2\sqrt{2}\\ (8-x^2)(x-1)=(4-x)^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1\leq x<2\sqrt{2}\\ (x^2+2x-12)(x-2)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1+\sqrt{13}\end{array}\right.$$

Vậy PT có 3 nghiệm

$x=1,x=2,x=-1+\sqrt{13}$

Thí dụ 46.Cho *phương trình*:

$$\sqrt[3]{m+x+\sqrt[3]{m+2x}}=x$$

a)giải phương trình với m=1

b)Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

c)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt[3]{2+2y+\sqrt[3]{2+2y+x}}=x\\ \sqrt[3]{2+2x+\sqrt[3]{2+2x+y}}=y\end{cases}$$

d)Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+x}}}=x$$

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{8x}+\sqrt[3]{\frac{-1}{8x}+\sqrt[3]{\frac{-1}{8x}+x}}}=x$$

e)Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$$\sqrt[3]{\frac{m}{x}+\sqrt[3]{\frac{m}{x}+\sqrt[3]{\frac{m}{x}+x}}}=x$$

f)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt[3]{6+5y+\sqrt[3]{6+5y+x}}=x\\ \sqrt[3]{6+5x+\sqrt[3]{6+5x+y}}=y\end{cases}$$

f)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt[3]{2-y-6x+\sqrt[3]{2-y-5x}}=x\\ \sqrt[3]{2-x-6y+\sqrt[3]{2-x-5y}}=y\end{cases}$$

h)Cho phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{m}{x^3}+\sqrt[3]{\frac{m}{x^3}+\sqrt[3]{\frac{m}{x^3}+x}}}=x$$

1)Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt
2) Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt
3)Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{-2}{27x^3}+\sqrt[3]{\frac{-2}{27x^3}+\sqrt[3]{\frac{-2}{27x^3}+x}}}=x$$

Lời giải.

Đặt $m+x=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a+x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình đã cho trở thành :$f_2(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a+x}=x$

$\Leftrightarrow x^3-x=a\Leftrightarrow x^3-x=m+x$

$\Leftrightarrow x^3-2x=m \quad (1)$

a)Với a=1

$\sqrt[3]{1+x+\sqrt[3]{1+2x}}=x$
$\Leftrightarrow x^3-2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-1\ V\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

b)Xét $h(x)=x^3-2x$

$h'(x)=3x^2-2$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
h(x)	$-\infty$ ↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$ ↘	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$ ↗	$+\infty$

Từ bbt suy ra PT có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{6}}{9}\le m\le\frac{4\sqrt{6}}{9}$

c)Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt[3]{2+2y+\sqrt[3]{2+2y+x}}=x \quad (1)\\ \sqrt[3]{2+2x+\sqrt[3]{2+2x+y}}=y \quad (2)\end{cases}$$

Lời giải

a)Đặt $2+2y=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a+x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình (1) trở thành :$f_2(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_2(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a+x}=x$

$\Leftrightarrow x^3-x=2+2y$

Tương tự

$(2) \Leftrightarrow y^3-y=2+2x$

Hệ PT đã cho tương đương

$$\begin{cases}x^3-x=2+2y\\ y^3-y=2+2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3-x-y^3+y=2y-2x\\ y^3-y=2+2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0\\ y^3-y=2+2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ y^3-3y-2=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=y=2\ V\ x=y=-1$

d)Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+x}}}=x$$

Đặt $\frac{1}{x}=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a+x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+x}}}=x$$

$\Leftrightarrow f_3(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_3(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a+x}=x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+x=x^3 \Leftrightarrow x^4-x^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Tương tự

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{8x}+\sqrt[3]{\frac{-1}{8x}+\sqrt[3]{\frac{-1}{8x}+x}}}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{8x}+x=x^3 \Leftrightarrow x^4-x^2+\frac{1}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ V\ x=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

e)Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng:

$$\sqrt[3]{\frac{m}{x}+\sqrt[3]{\frac{m}{x}+\sqrt[3]{\frac{m}{x}+x}}}=x$$

Đặt $\frac{m}{x}=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a+x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình đã cho trở thành :

$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+x}}}=x$

$\Leftrightarrow f_3(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a+x}=x$

$\Leftrightarrow \frac{m}{x}+x=x^3\Leftrightarrow x^4-x^2-m=0\ (với\ x\neq 0)$

PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $t^2-t-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow \begin{cases}1+4m>0\\1>0\\-m>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<m<0$

Khi này 4 nghiệm của PT đã cho là

$-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$ với $t_1<t_2$

Các nghiệm này lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow t_2=9t_1$

Theo định lí Viet có

$\begin{cases}t_1+t_2=1\\t_1t_2=-m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10t_1=1\\9t_1^2=-m\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{9}{100}$

f)Giải hệ phương trình

$\begin{cases}\sqrt[3]{6+5y+\sqrt[3]{6+5y+x}}=x & (1)\\ \sqrt[3]{6+5x+\sqrt[3]{6+5x+y}}=y & (2)\end{cases}$

Đặt $6+5y=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a+x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình (1) trở thành :$f_2(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a+x}=x$

$\Leftrightarrow x^3-x=6+5y$

Tương tự

$(2)\Leftrightarrow y^3-y=6+5x$

Hệ PT đã cho tương đương

$\begin{cases}x^3-x=6+5y\\y^3-y=6+5x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-x-y^3+y=5y-5x\\y^3-y=6+5x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+4)=0\\y^3-y=6+5x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\y^3-6y-6=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\2(y+1)^3=(y+2)^3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\\sqrt[3]{2}(y+1)=y+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

f)Giải hệ phương trình

$\begin{cases}\sqrt[3]{2-y-6x+\sqrt[3]{2-y-5x}}=x\\ \sqrt[3]{2-x-6y+\sqrt[3]{2-x-5y}}=y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{2-y-6x+\sqrt[3]{2-y-6x+x}}=x & (1)\\ \sqrt[3]{2-x-6y+\sqrt[3]{2-x-6y+y}}=y & (2)\end{cases}$

Đặt $2-y-6x=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a+x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình (1) trở thành :$f_2(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a+x}=x$

$\Leftrightarrow x^3 - x = 2 - y - 6x$

$\Leftrightarrow x^3 + 5x = 2 - y$

Tương tự

$(2) \Leftrightarrow y^3 + 5y = 2 - x$

Hệ PT đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^3 + 5x = 2 - y \\ y^3 + 5y = 2 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 5x - y^3 - 5y = x - y \\ y^3 + 5y = 2 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 4) = 0 \\ y^3 + 6y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2(y+1)^3 = -(y-2)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt[3]{2}(y+1) = -y + 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$

h)Tìm m để phương trình sau

$$\sqrt[3]{\frac{m}{x^3} + \sqrt[3]{\frac{m}{x^3} + \sqrt[3]{\frac{m}{x^3} + x}}} = x$$

1)có 4 nghiệm phân biệt
2) có đúng 2 nghiệm phân biệt
Đặt $\frac{m}{x^3} = a$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{a + x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a + x}}} = x$$

$\Leftrightarrow f_3(x) = x$

Theo kết quả 1 có

$f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{a + x} = x$

$\Leftrightarrow \frac{m}{x^3} + x = x^3 \Leftrightarrow x^6 - x^4 = m \ (với \ x \neq 0)$

Xét $h(x) = x^6 - x^2$

$h'(x) = 6x^5 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

BBT

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
h(x)	$+\infty$	$\frac{-4}{27}$	0	$\frac{-4}{27}$	$+\infty$

Từ bbt suy ra

PT có 4 nghiệm phân biệt$\Leftrightarrow \frac{-4}{27} < m < 0$

PT có đúng 2 nghiệm phân biệt$\Leftrightarrow m \geq 0 \ V \ m = \frac{-4}{27}$

Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{-2}{27x^3} + \sqrt[3]{\frac{-2}{27x^3} + \sqrt[3]{\frac{-2}{27x^3} + x}}} = x$$

Đặt $\frac{-2}{27x^3} = a$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{a + x}$ là hàm số đồng biến trên R.

Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a + x}}} = x$$

$\Leftrightarrow f_3(x) = x$

Theo kết quả 1 có

$f_3(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{a + x} = x$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{27x^3}+x=x^3 \Leftrightarrow x^6-x^4+\frac{2}{27}=0$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}$

Thí dụ 47.

1)Cho phương trình:

$\sqrt[3]{m+2x-\sqrt[3]{m+2x-\sqrt[3]{m+x}}}=x$

a)giải phương trình với $m=-\frac{3}{8}$

b)Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

2)Tìm m nguyên để phương trình:

$\sqrt[3]{\frac{m}{x}-\sqrt[3]{\frac{m}{x}-\sqrt[3]{\frac{m}{x}-x}}}=x$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$ phân biệt thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 8$

Lời giải

$\sqrt[3]{m+2x-\sqrt[3]{m+2x-\sqrt[3]{m+x}}}=x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+2x-\sqrt[3]{m+2x-\sqrt[3]{m+2x-x}}}=x$

Đặt $m+2x=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a-x}$ là hàm số nghịch biến trên R.

Phương trình đã cho trở thành :

$\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{a-x}}}=x$

$\Leftrightarrow f_3(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_3(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a-x}=x$

$\Leftrightarrow m+2x-x=x^3 \Leftrightarrow m=x^3-x$

Xét $h(x)=x^3-x$

Bbt

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
h(x)	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗ $+\infty$

a) $PT \Leftrightarrow x^3-x+\frac{3}{8}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}Vx=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$

b)PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{9}<m<\frac{2\sqrt{3}}{9}$

2)Tìm m nguyên để phương trình:

$\sqrt[3]{\frac{m}{x}-\sqrt[3]{\frac{m}{x}-\sqrt[3]{\frac{m}{x}-x}}}=x$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$ phân biệt thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 8$

Đặt $\frac{m}{x}=a$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{a-x}$ là hàm số nghịch biến trên R.

Phương trình đã cho trở thành :

$\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{a-x}}}=x$

$\Leftrightarrow f_3(x)=x$

Theo kết quả 1 có

$f_3(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{a-x}=x$

$\Leftrightarrow \frac{m}{x}-x=x^3 \Leftrightarrow x^4+x^2-m=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2} \\ x^2=\frac{-1-\sqrt{1+4m}}{2}(vn) \end{array}\right.$ *với* $m\ge -\frac{1}{4}$

Để PT có 2 nghiệm phân biệt thì $\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}>0$

$\Leftrightarrow m>0$

Suy ra $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}}$

Vì vậy

$|x_1 - x_2| \le 8$

$\Leftrightarrow 2.\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}} \le 8$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}} \le 4$

$\Leftrightarrow -1+\sqrt{1+4m} \le 32$

$\Leftrightarrow 0 < m \le 272$

Suy ra có 272 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Thí dụ 48.*Giải phương trình*:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2-\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}-x}}} = x$$

Lời giải

Đặt $1+x^2 = a \ge 1$

PT đã cho trở thành

$$\frac{1}{1+\sqrt{a-\frac{1}{1+\sqrt{a}-x}}} = x \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{a}-x}$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(-\infty; a]$ và có tập giá trị là $(0; 1]$
Theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{a-x}} = x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2-x}} = x \ (dễ\ thấy\ x > 0)$

$\Leftrightarrow x\sqrt{1+x^2-x} = 1-x$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\ (chia\ 2\ vế\ cho x^2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1 = \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2 \ với\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{6\sqrt{5}-2}}{4}$

Tương tự

a.*Giải phương trình*:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+2x^2-\frac{1}{1+\sqrt{1+2x^2}-x}}} = x \quad Đs: x = \frac{1}{2}$$

b.*Giải phương trình*:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+3x^2-\frac{1}{1+\sqrt{1+3x^2}-x}}} = x$$

$Đs: x = \frac{1-\sqrt{13}+\sqrt{22\sqrt{13}-10}}{12}$

c.*Giải phương trình*:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+4x^2-\frac{1}{1+\sqrt{1+4x^2}-x}}} = x$$

$Đs: x = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{30\sqrt{17}-14}}{16}$

d.*Giải phương trình*:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+6x^2-\frac{1}{1+\sqrt{1+6x^2}-x}}} = x$$

$Đs: x = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$

d.*Giải phương trình*:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+12x^2-\frac{1}{1+\sqrt{1+12x^2}-x}}} = x$$

$Đs: x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}$

Thí dụ 49. Cho f(x) $= \frac{x}{x+2}$.

1)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = a$ có đúng 4 nghiệm âm phân biệt.

2)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1.

3)Tìm a>0 để phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax^2$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

1)Ta có

$$f_1(x) = \frac{x}{x+2}$$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+2} = \frac{x}{\frac{2^2-1}{2-1}x+2^2}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{\frac{2^2-1}{2-1}x+2^2}}{\frac{x}{\frac{2^2-1}{2-1}x+2^2}+2} = \frac{x}{\frac{2^3-1}{2-1}x+2^3}$$

Bằng quy nạp ta được

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{2^n-1}{2-1}x+2^n}$$

Xét hàm số $y = \sum_{i=1}^{4} f_i(x)$

$$y = \frac{x}{x+2}+\frac{x}{3x+4}+\frac{x}{7x+8}+\frac{x}{15x+16}$$

$$y' = \frac{2}{(x+2)^2}+\frac{4}{(3x+4)^2}+\frac{8}{(7x+8)^2}+\frac{16}{(15x+16)^2} > 0$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Bbt

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{8}{7}$		$-\frac{15}{16}$		0
y		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$			0
	$\frac{54}{35}$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		

Từ bbt suy ra PT có 4 nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \dfrac{54}{15} \\ a < 0 \end{array}\right.$$

2)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1.

Tương tự câu 1

Xét hàm số $y = \sum_{i=1}^{4} f_i(x)$

$$y = \frac{x}{x+2}+\frac{x}{3x+4}+\frac{x}{7x+8}+\frac{x}{15x+16}$$

có

$$\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2}+\frac{x}{3x+4}+\frac{x}{7x+8}+\frac{x}{15x+16} = ax$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{3x+4}+\dfrac{1}{7x+8}+\dfrac{1}{15x+16} = a \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét $g = \frac{1}{x+2}+\frac{1}{3x+4}+\frac{1}{7x+8}+\frac{1}{15x+16}$

$$g' = \frac{-1}{(x+2)^2}+\frac{-3}{(3x+4)^2}+\frac{-7}{(7x+8)^2}+\frac{-15}{(15x+16)^2} < 0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bbt

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{8}{7}$		$-\frac{15}{16}$		0		1
y		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$			$\frac{624}{1085}$
	0		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		1		

Từ bảng biến thiên suy ra

Phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1.

khi và chỉ khi phương trình(*) có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và nhỏ hơn 1.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ \dfrac{624}{1085} < a \neq 1 \end{array}\right.$$

3)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax^2$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{2};1\right)$.

Tương tự câu 1

Xét hàm số $y = \sum_{i=1}^{4} f_i(x)$

$$y = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{3x+4} + \frac{x}{7x+8} + \frac{x}{15x+16}$$

có

$$\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{x}{3x+4} + \frac{x}{7x+8} + \frac{x}{15x+16} = ax^2$$

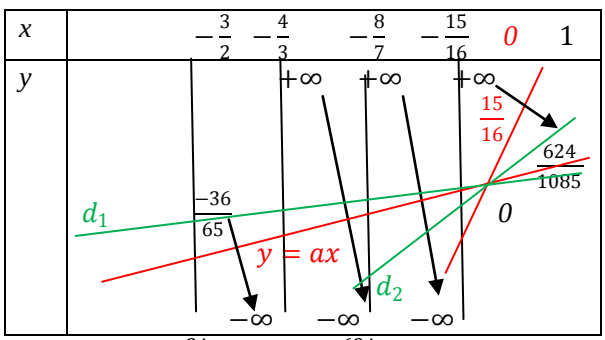
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3x+4} + \frac{1}{7x+8} + \frac{1}{15x+16} = ax \ (*) \end{array}\right.$$

Xét $g = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3x+4} + \frac{1}{7x+8} + \frac{1}{15x+16}$

$g' = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{-3}{(3x+4)^2} + \frac{-7}{(7x+8)^2} + \frac{-15}{(15x+16)^2} > 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bbt



Ta có: $d_1: y = \frac{24}{65}x$ $d_2: y = \frac{624}{1085}x$

Do y=ax với a>0 là hàm số đồng biến nên đồ thị của nó cắt mỗi nhánh của đồ thị y=h(x) tại không quá 1 điểm.

Từ bảng biến thiên suy ra trên khoảng $\left(-\frac{3}{2};1\right)$

+Với $0 < a \le \frac{24}{65}$ thì (*) có đúng 2 nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt

+Với $\frac{24}{65} < a \le \frac{624}{1085}$ *hoặc* $a = \frac{15}{16}$ thì (*) có đúng 3 nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt

+Với $\frac{15}{16} \ne a > \frac{624}{1085}$ thì (*) có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 5 nghiệm phân biệt

Thí dụ 50. Cho f(x) = $\frac{x}{x+1}$.

1)Tìm a và n để phương trình $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = a$ có đúng 6 nghiệm âm phân biệt.

2)Tìm a và n để phương trình $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = a$ có đúng 6 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1.

3)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{6} f_i(x) = a$ có đúng 5 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1.

Lời giải.

Ta có $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

Bằng quy nạp ta được

$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$$

Xét hàm số $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$

$$y = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2x+1} + .. + \frac{x}{nx+1}$$

TXĐ của hàm số $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$

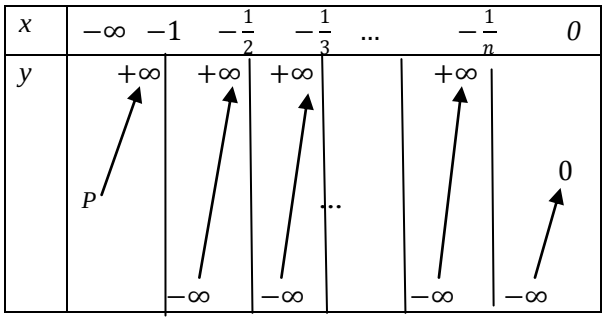
$$D = (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right) \cup \ldots \cup \left(-\frac{1}{n};+\infty\right)$$

(gồm n+1 khoảng)

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} + .. + \frac{1}{(nx+1)^2} > 0$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

1)Bbt



Với $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$ và bảng biến thiên gồm n+1 khoảng

$(-\infty; -1); \left(-1; -\frac{1}{2}\right); \ldots; \left(-\frac{1}{n}; 0\right)$

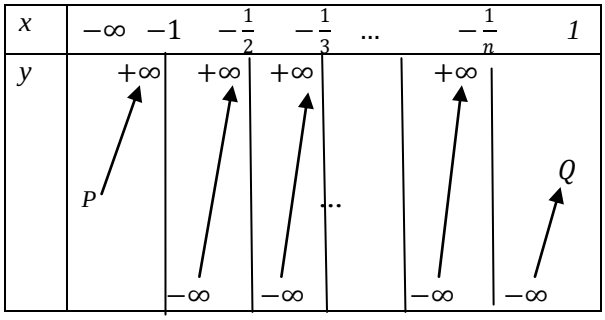
Từ bbt suy ra PT có đúng 6 nghiệm âm phân biệt thì $n = 6$. Khi này

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{6} = \frac{49}{20}$$

Từ bbt suy ra phương trình có đúng 6 nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow a < 0 \; V \; a > \frac{49}{20}$$

2)Bbt



Với $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$

$$Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} < P$$

và bảng biến thiên gồm n+1 khoảng

$(-\infty; -1); \left(-1; -\frac{1}{2}\right); \ldots; \left(-\frac{1}{n}; 0\right)$

Từ bbt suy ra PT có đúng 6 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1

thì $n = 6$. Khi này

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{6} = \frac{49}{20}$$

$$Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{7} = \frac{223}{140}$$

Từ bbt suy ra phương trình có đúng 6 nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow a < \frac{223}{140} \; V \; a > \frac{49}{20}$$

3) từ bbt câu 2 suy ra

Phương trình $\sum_{i=1}^{6} f_i(x) = a$ có đúng 5 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1$\Leftrightarrow \frac{223}{140} \le a \le \frac{49}{20}$

3) từ bbt câu 1 suy ra

Phương trình $\sum_{i=1}^{6} f_i(x) = a$ có đúng 5 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow 0 \le a \le \frac{49}{20}$

Thí dụ 51. Cho f(x) = $\frac{x}{x+1}$.

1)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2; 1)$.

2)Tìm $a > 0$ để phương trình $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax^2$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng$(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x+1}$$

Bằng quy nạp ta được

$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$$

$$\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2x+1} + \frac{x}{3x+1} + \frac{x}{4x+1} = ax$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{4x+1} = a \; (*) \end{array}\right.$$

Xét $h(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{4x+1}$

$$h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-2}{(2x+1)^2} + \frac{-3}{(3x+1)^2} + \frac{-4}{(4x+1)^2} < 0$$

Ta có bảng biến thiên

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1
h(x)	$\frac{-176}{105}$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\frac{77}{60}$	

Từ bbt suy ra trên khoảng $(-2;1)$

+Với $a < \frac{-176}{105}$ V $a > \frac{77}{60}$ thì (*) có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 5 nghiệm phân biệt

+Với $\frac{-176}{105} \le a \le \frac{77}{60}$thì (*) có đúng 3nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt

2) $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}+\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{3x+1}+\frac{x}{4x+1}=ax^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{4x+1}=ax \ (*) \end{array}\right.$$

Xét $h(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{4x+1}$

$$h'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{-2}{(2x+1)^2}+\frac{-3}{(3x+1)^2}+\frac{-4}{(4x+1)^2}<0$$

Ta có bbt

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	1
h(x)	$\frac{-176}{105}$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\frac{77}{60}$		

d_1, d_2, 0

Ta có: $d_1: y=\frac{88}{105}x$ $d_2: y=\frac{77}{60}x$

Do y=ax với a>0 là hàm số đồng biến nên đồ thị của nó cắt mỗi nhánh của đồ thị y=h(x) tại không quá 1 điểm.

Từ bảng biến thiên suy ra trên khoảng $(-2;1)$

+Với $0 < a \le \frac{88}{105}$thì (*) có đúng 3 nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt

+Với $\frac{88}{105} < a \le \frac{77}{60}$ thì (*) có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 5 nghiệm phân biệt

+Với $a > \frac{77}{60}$ thì (*) có đúng 5 nghiệm phân biệt khác 0 nên PT đã cho có đúng 6 nghiệm phân biệt

Bài tập tương tự

Cho $f(x)=\frac{x}{2x+1}$.

1)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x)=a$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$.

2)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x)=ax$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$.

3)Tìm a>0 để phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x)=ax^2$ có đúng 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng$(-1;1)$.

4)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x)=a$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

5)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x)=ax$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

6)Tìm a>0 để phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x)=ax^2$ có đúng 7 nghiệm phân biệt.

7)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x)=ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

8)Biện luận theo a>0 số nghiệm phương trình $\sum_{i=1}^{5} f_i(x) = ax^2$.

Thí dụ 52. Cho f(x) = $\frac{x}{x+1}$.
Tìm số thực $a > 0$ để đồ thị hàm số $y = \sqrt{a - x^2}$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số $y = \sum_{i=1}^{4} f_i(x)$ trên khoảng $(-2; 0)$ tại ít nhất 1 điểm.

Lời giải.

Ta có $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

Bằng quy nạp ta được

$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$$

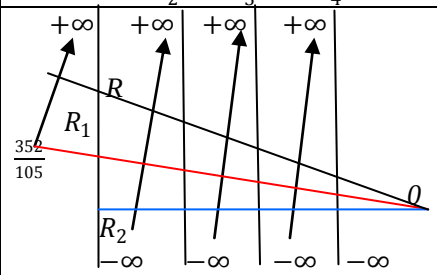
Xét

$$\sum_{i=1}^{4} f_i(x) =$$

$$= h(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2x+1} + \frac{x}{3x+1} + \frac{x}{4x+1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^2} > 0$$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		
	$\frac{352}{105}$					0
		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	



Dễ thấy đồ thị hàm số $y = \sqrt{a - x^2}$ $(x^2 + y^2 = a)$ là nửa đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{a} > 1$ nằm phía trên trục hoành.

Với $A\left(-2; \frac{352}{105}\right)$ có $R_1 = OA = \sqrt{\frac{168004}{11025}}$

$R_2 = d_{(0;x=-1)} = 1$

+Với $x \in (-2; -1)$ có

$g(x) = x^2 + (h(x))^2$

$g'(x) = 2[x + h(x).h'(x)]$

Vì $h(x) > \frac{352}{105} > 2$

Và $h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^2}$

$$> \frac{1}{(x+1)^2} > \frac{1}{(-2+1)^2} = 1$$

Suy ra $h(x).h'(x) > 2$ mà $x > -2$ nên

$g'(x) > 0$

Suy ra g(x) đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$

Với $M(x; h(x))$

$OM = \sqrt{x^2 + (h(x))^2} > \sqrt{g(-2)} = R_1$

Và

$OM = \sqrt{x^2 + (h(x))^2} = R > R_1$ có đúng 1 nghiệm.

Suy ra nửa đường tròn O bán kính R nếu cắt nhánh đồ thị h(x) trên khoảng $(-2; -1)$ thì tại đúng 1 điểm và từ bbt ta thấy nửa đường tròn O bán kính R nếu cắt mỗi nhánh còn lại của đồ thị h(x) tại ít nhất 1 điểm.Mà $R_2 < R_1$

Từ bảng biến thiên suy ra để đồ thị hàm số $y = \sqrt{a - x^2}$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số $y = \sum_{i=1}^{4} f_i(x)$ trên khoảng $(-2; 0)$ tại ít nhất 1 điểm khi và chỉ khi

$$R = \sqrt{a} > R_1 = OA = \sqrt{\frac{168004}{11025}}$$

$$\Leftrightarrow a > \frac{168004}{11025}$$

Thí dụ 53. Cho f(x) = $\frac{x}{x+1}$.

Tìm $a < 0$ và để phương trình

$\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax^3$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;1)$.

Lời giải.

$$\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = ax^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}+\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{3x+1}+\frac{x}{4x+1} = ax^3$$

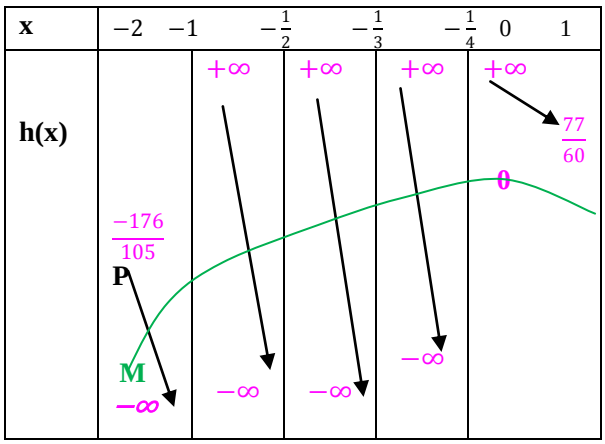
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{4x+1} = ax^2 \ (*) \end{array}\right.$$

Xét $h(x) = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{4x+1}$

$$h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{-2}{(2x+1)^2}+\frac{-3}{(3x+1)^2}+\frac{-4}{(4x+1)^2} < 0$$

h(x) nghịch biến trên từng khoảng xác định

Ta có bbt



Dễ thấy Parabol $y = ax^2$ cắt các nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tại các điểm có hoành độ âm

Xét $x \in (-2;0)$

Có $y = ax^2$ *với* $a < 0$ là hàm số đồng biến. suy ra

Parabol $y = ax^2$ *với* $a < 0$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tối đa 1 điểm.

Xét

$$g(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{5}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1} - ax^2$$

trên khoảng $\left(\frac{-1}{3};\ \frac{-1}{4}\right)$ khi này g(x) liên tục trên khoảng $\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\right)$ và

$$\lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{-1}{4}^-} g(x) = -\infty$$

Theo tính chất hàm số liên tục thì tồn tại 2 số u;vthuộc khoảng $\left(\frac{-1}{3};\ \frac{-1}{4}\right)$ thỏa mãn $g(u).g(v) < 0$

Suy ra $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{-1}{3};\ \frac{-1}{4}\right)$. Mà Parabol $y = ax^2$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tối đa 1 điểm nên nghiệm này là duy nhất.

Tương tự $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên từng khoảng $\left(\frac{-1}{2};\ \frac{-1}{3}\right); \left(-1;\ \frac{-1}{2}\right)$

Có $P\left(-2;\frac{-176}{105}\right)$ thuộc đồ thị h(x)

$M(-2;4a)$ thuộc Parabol $y = ax^2$

Để PT đã cho có 5 nghiệm phân biệt thì Parabol $y = ax^2$ cắt thêm nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) ứng với $x \in (-2;-1)$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi tung độ điểm M bé hơn tung độ điểm P

$$\leftrightarrow 4a < \frac{-176}{105} \Leftrightarrow a < \frac{44}{105}$$

Nhận xét. Dạng toán thí dụ 52 ,53và các thí dụ tương tự ở trước ta không nhất thiết phải chọn hàm hợp mà chỉ cần một hàm số là tổng và hiệu các biểu thức dạng $\frac{ax+b}{cx+d}$ hoặc $\frac{m}{nx+p}$

Thí dụ. *Tìm số chính phương a để phương trình sau*

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2}+\cdots+\frac{x}{x-2019}=-\sqrt{a-x^2}$$

a)Có đúng 100 nghiệm phân biệt.

b)Có nhiều hơn 900 nghiệm phân biệt.

Lờigiải.

Dễ thấy $a=0$ PT có đúng 1 nghiệm $x=0$.

Xét $a>0$

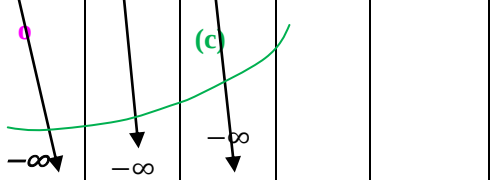
Xét $h(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2}+\cdots+\frac{x}{x-2019}$

$$h'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\cdots+\frac{-1}{(x-2019)^2}<0$$

h(x) nghịch biến trên từng khoảng xác định

BBT

x	$-\infty$ 0	1	2 ..	2019	$+\infty$
h(x)	2019 → $-\infty$	$+\infty$ → $-\infty$	$+\infty$ → $-\infty$	…	$+\infty$ → 2019



Do $y=-\sqrt{a-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le o\\x^2+y^2=a\end{cases}$

nên đồ thị $y=-\sqrt{a-x^2}$ là nửa đường tròn (C) tâm 0 bán kính bằng $R=\sqrt{a}$.

Từ bảng biến thiên suy ra nửa đường tròn (C) cắt đồ thị hàm số y=h(x) (nếu có) tại các điểm có hoành độ dương.

Với $x>0$ thì $y=-\sqrt{a-x^2}$ là hàm số đồng biến. Mà h(x) là hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên suy ra nửa đường tròn (C) cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tại không quá 1 điểm.

Vậy

a)PT có đúng 100 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow R=\sqrt{a}=100\Rightarrow a=10000$

b)PT có nhiều hơn 900 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow R=\sqrt{a}\ge 901; R\in Z$

$\Leftrightarrow a=R^2; R\ge 901; R\in Z$

$\Leftrightarrow$ a là số chính phương lớn hơn hoặc bằng 811801.

Thí dụ. *Tìm a là số thực dương để phương trình sau*

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{4}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1}=ax^2$$

có số nghiệm là nhiều nhất thuộc khoảng $(-1;+\infty)$ và cho biết số nghiệm nhiều nhất là bao nhiêu..

Lờigiải.

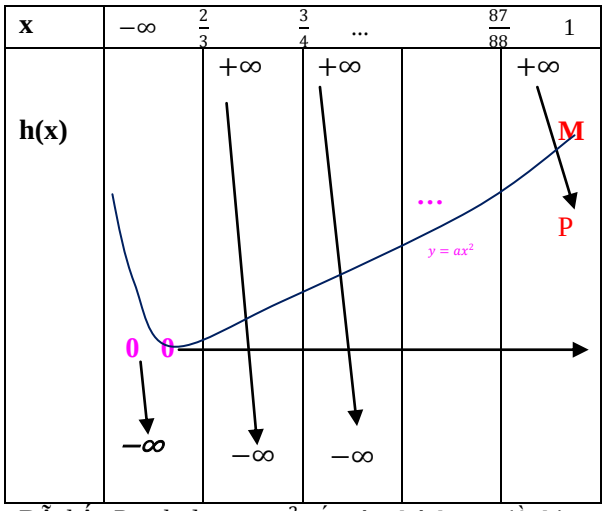
Xét $h(x)=\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{4}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1}$

$$h'(x)=\frac{-\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2}+\frac{-\frac{4}{3}}{\left(\frac{4}{3}x-1\right)^2}+\cdots+\frac{-\frac{88}{87}}{\left(\frac{88}{87}x-1\right)^2}<0$$

Từ 3 đến 88 có 86 số từ đó suy ra hàm số h(x) xác định trên 87 khoảng gồm

$$\left(-\infty;\frac{2}{3}\right);\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right);\left(\frac{3}{4};\frac{4}{5}\right);\ldots;\left(\frac{86}{87};\frac{87}{88}\right);\left(\frac{87}{88};1\right)$$

Tương ứng ta có 87 nhánh đồ thị của h(x)



Dễ thấy Parabol $y = ax^2$ cắt các nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tại các điểm có hoành độ dương

Xét $x \in (0; +\infty)$

Có $y = ax^2$ là hàm số đồng biến. suy ra

Parabol $y = ax^2$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tối đa 1 điểm.

Xét

$$g(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}x - 1} + \frac{1}{\frac{4}{3}x - 1} + \frac{1}{\frac{5}{5}x - 1} + \cdots + \frac{1}{\frac{88}{87}x - 1} - ax^2$$

trên 1 khoảng xác định của hàm số có dạng $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$

Chẳng hạn khoảng $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$ khi này g(x) liên tục trên khoảng $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$ và

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{4}^-} g(x) = -\infty$$

Theo tính chất hàm số liên tục thì tồn tại 2 số u;vthuộc khoảng $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$ thỏa mãn

$$g(u).g(v) < 0$$

Suy ra $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$. Mà Parabol $y = ax^2$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tối đa 1 điểm nên nghiệm này là duy nhất của PT đã cho. Vậy trên mỗi khoảng $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right); \ldots; \left(\frac{86}{87}; \frac{87}{88}\right)$ pt đã cho có đúng 1 nghiệm.

Bây giờ ta tìm điều kiện để Parabol $y = ax^2$ cắt nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) ứng với

$$x \in \left(\frac{87}{88}; 1\right)$$

Với x=1 thì

$$y = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} + \frac{1}{\frac{4}{3}-1} + \frac{1}{\frac{5}{5}-1} + \cdots + \frac{1}{\frac{88}{87}-1}$$

$$= 2 + 3 + \cdots + 87 = 3827$$

Suy ra $P(1; 3827)$ thuộc đồ thị hàm số y=h(x) khi xét đồ thị trên tập R

Xét $M(1; a)$ thuộc Parabol $y = ax^2$ khi xét đồ thị trên tập R.

Từ bảng biến thiên suy ra để Parabol $y = ax^2$ cắt nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) ứng với

$x \in \left(\frac{87}{88}; 1\right)$ khi và chỉ khi tung độ điểm M lớn hơn tung độ điểm P.

$\Leftrightarrow a > 3827.$

Để phương trình đã cho có số nghiệm nhiều nhất thì để Parabol $y = ax^2$ cắt nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) ứng với $x \in \left(\frac{87}{88}; 1\right) \Leftrightarrow a > 3827.$

Do Parabol $y = ax^2$ luôn không cắt nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) ứng với $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ nên số nghiệm nhiều nhất của phương trình đã cho là 86.

Bài tập tương tự

Tìm a là số thực dương để phương trình sau

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x - 1} + \frac{1}{\frac{4}{3}x - 1} + \frac{1}{\frac{5}{4}x - 1} + \cdots + \frac{1}{\frac{88}{87}x - 1} = ax^2$$

có đúng 85 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1; +\infty)$

Để phương trình đã cho có *đúng 85 nghiệm phân biệt thuộc khoảng* $(-1;+\infty)$ thì để Parabol $y=ax^2$ không cắt nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) ứng với $x\in\left(\frac{87}{88};1\right)$

$\Leftrightarrow 0<a\leq 3827.$

Chú ý:Ta có thể thay $y=ax^2$ bằng các hàm số khác có tính chất tương tự chẳng hạn'

1)Tìm a là số thực dương để phương trình sau

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{4}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1}=ax^4$$

có nghiệm là nhiều nhất thuộc khoảng $(-1;+\infty)$ *và cho biết số nghiệm nhiều nhất là bao nhiêu..*

2)Tìm a là số thực dương để phương trình sau

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{4}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1}=ax^2+1$$

có đúng 86 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;+\infty)$.

3)Tìm a để phương trình sau

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{4}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1}=x^2+a^2$$

có đúng 86 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;+\infty)$.

4)Tìm a để phương trình sau

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{4}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1}=x^2+a^2$$

có đúng 85 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;+\infty)$.

3)Tìm a để phương trình sau

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}x-1}+\frac{1}{\frac{5}{4}x-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{88}{87}x-1}=\sqrt{x^2+a^2}$$

có đúng 86 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;+\infty)$.

Thí dụ

1)*Tìm a là số thực dương để phương trình sau*

$$\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x-\frac{2}{3}}+\frac{1}{x-\frac{3}{4}}+\cdots+\frac{1}{x-\frac{99}{100}}=ax^2$$

có đúng 99 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

2)*Tìm a là số thực dương để phương trình sau*

$$\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x-\frac{2}{3}}+\frac{1}{x-\frac{3}{4}}+\cdots+\frac{1}{x-\frac{99}{100}}=ax$$

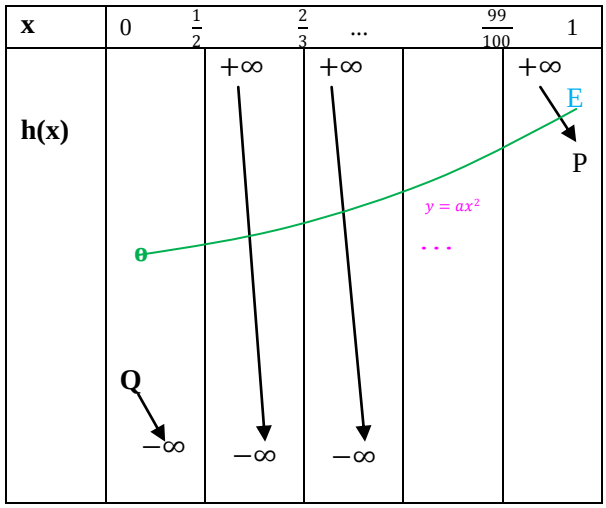
có đúng 99 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

1)

Xét $h(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x-\frac{2}{3}}+\frac{1}{x-\frac{3}{4}}+\cdots+\frac{1}{x-\frac{99}{100}}$

$$h'(x)=\frac{-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{-1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}+\cdots+\frac{-1}{\left(x-\frac{99}{100}\right)^2}<0$$



$Q(0;-\frac{2}{1}-\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\cdots-\frac{100}{99})$

P(1;2+3+4+..+100)

Hay P(1;5049)

$E(1;a)$

Dễ thấy Parabol $y=ax^2$ cắt các nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tại các điểm có hoành độ dương

Xét $x\in(0;+\infty)$

Có $y = ax^2$ là hàm số đồng biến mà h(x) nghịch biến trên từng khoảng xác định. suy ra

Parabol $y = ax^2$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tối đa 1 điểm.

Xét

$$g(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x-\frac{3}{4}} + \cdots + \frac{1}{x-\frac{99}{100}} - ax^2$$

trên khoảng $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$ khi này g(x) liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$ và

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-} g(x) = -\infty$$

Theo tính chất hàm số liên tục thì tồn tại 2 số u;vthuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn

$$g(u).g(v) < 0$$

Suy ra $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng$\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$. Mà Parabol $y = ax^2$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) tối đa 1 điểm nên nghiệm này là duy nhất của PT đã cho. Vậy trên mỗi khoảng $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right);\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\right)..;\left(\frac{98}{99};\ \frac{99}{100}\right)$ (có 98 khoảng) pt đã cho có đúng 1 nghiệm.

Như vậy PT đã cho có ít nhất 98 nghiệm phân biệt.

Để PT đã cho có đúng 99 nghiệm phân biệt thì Parabol $y = ax^2$ cắt nhánh của đồ thị hàm số y=h(x) ứng với khoảng $\left(\frac{99}{100};1\right)$.Điều này xảy ra khi và chỉ khi tung độ điểm E lớn hơn tung độ điểm P

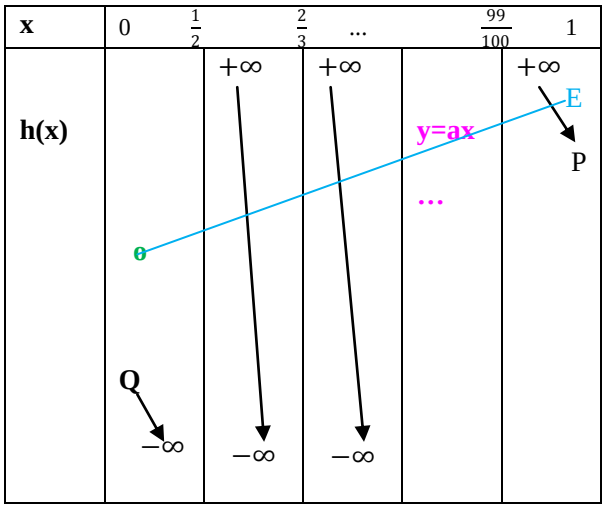
$\Leftrightarrow a > 5049.$

2)

Xét $h(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x-\frac{3}{4}} + \cdots + \frac{1}{x-\frac{99}{100}}$

$$h'(x) = \frac{-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{-1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2} + \cdots + \frac{-1}{\left(x-\frac{99}{100}\right)^2} < 0$$

bbt



$Q(0; -\frac{2}{1} - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} - \cdots - \frac{100}{99})$

P(1;2+3+4+..+100)

Hay P(1;5049)

$E(1; a)$

Lập luận tương tự câu 1

PT đã cho có đúng 99 nghiệm $\Leftrightarrow$ tung độ điểm E lớn hơn tung độ điểm P

$\Leftrightarrow a > 5049.$

Chú ý: PT có đúng 99 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1) \Leftrightarrow 0 < a \leq 5049$

Thí dụ 54. Cho f(x) = $\frac{x}{2x+1}$

1)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{6} f_i(x) = \sqrt{x^2+a^2}$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;0)$.

2)Tìm $a < 0$ để phương trình $\sum_{i=1}^{6} f_i(x) = ax$ có đúng 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn$[-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

Bằng quy nạp ta được

$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$$

Xét hàm số $f(x) = \sum_{i=1}^{1982} f_i(x)$

$f(x)=\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{3x+1}+..+\frac{x}{7x+1}$

TXĐ của hàm số

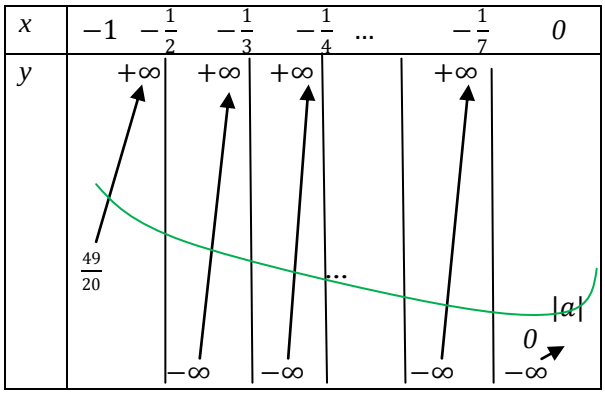
$D=\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)...\cup\left(-\frac{1}{7};+\infty\right)$

(có 7 khoảng)

$f'(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(3x+1)^2}+..+\frac{1}{(7x+1)^2}>0$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

1)Bbt



Dễ thấy đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+a^2}$ *chỉ cắt đồ thị hàm số g(x) tại điểm có hoành độ âm.*

Xét $x\in(-1;0)$. *Khi này do g(x) đồng biến trên từng khoảng xác định còn* $y=\sqrt{x^2+a^2}$ *nghịch biến trên khoảng* $(-1;0)$.*Do vậy đồ thị hàm số* $y=\sqrt{x^2+a^2}$ *chỉ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số g(x) tại không quá điểm .*

Xét $g(x)=\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{3x+1}+..+\frac{x}{7x+1}-\sqrt{x^2+a^2}$

trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$

khi này g(x) liên tục trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ và

$\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}^+}g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-}g(x)=+\infty$

Theo tính chất hàm số liên tục thì tồn tại 2 số u;vthuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ thỏa mãn

$g(u).g(v)<0$

Suy ra $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$. Mà *đồ thị hàm số* $y=\sqrt{x^2+a^2}$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=f(x) tối đa 1 điểm nên nghiệm này là duy nhất của PT đã cho. Vậy trên mỗi khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right);..;\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{7}\right)$ pt đã cho có đúng 1 nghiệm. Như vậy PT đã cho có ít nhất 5 nghiệm phân biệt.

Vậy PT đã cho có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi *đồ thị hàm số* $y=\sqrt{x^2+a^2}$ cắt nhánh của đồ thị hàm số y=f(x) ứng với khoảng $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

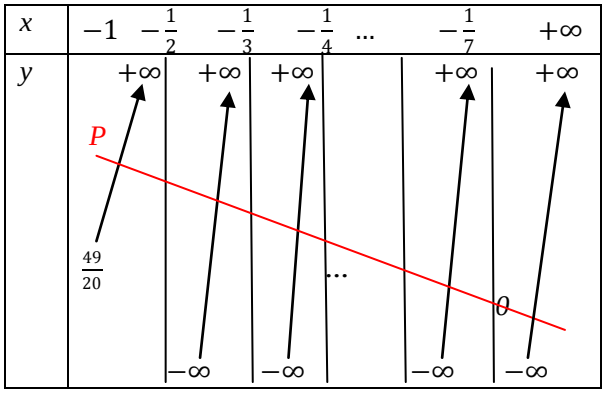
Điều này xảy ra khi và chỉ khi tung độ điểm

$P\left(-1;\sqrt{1+a^2}\right)$ *lớn hơn* $\frac{49}{20}$

$\sqrt{1+a^2}>\frac{49}{20}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-\frac{\sqrt{2001}}{20}\\a>-\frac{\sqrt{2001}}{20}\end{array}\right.$

Chú ý: $\sqrt{1+a^2}\le\frac{49}{20}$ *pt có 5 nghiệm phân biệt* thuộc khoảng $(-1;0)$

2)Bbt



Xét $x\in(-1;+\infty)$. *Khi này do g(x) đồng biến trên từng khoảng xác định còn* $y=ax$ *nghịch biến trên khoảng*$(-1;+\infty)$.*Do vậy đồ thị hàm số* $y=ax$ *chỉ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số g(x) tại không quá điểm .*

Xét $g(x)=\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{3x+1}+..+\frac{x}{7x+1}-\sqrt{x^2+a^2}$

trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$

khi này g(x) liên tục trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ và

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} g(x)=+\infty$$

Theo tính chất hàm số liên tục thì tồn tại 2 số u;vthuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ thỏa mãn

$$g(u).g(v)<0$$

Suy ra $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\right)$. Mà *đồ thị hàm số* $y=ax$ cắt mỗi nhánh của đồ thị hàm số y=f(x) tối đa 1 điểm nên nghiệm này là duy nhất của PT đã cho. Vậy trên mỗi khoảng $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right);\ \left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right);..;\ \left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{7}\right)$ pt đã cho có đúng 1 nghiệm. Như vậy PT đã cho có ít nhất 6 nghiệm phân biệt.

Vậy PT đã cho có 7 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi *đồ thị hàm số* $y=ax$ cắt nhánh của đồ thị hàm số y=f(x) ứng với nửa khoảng $[-1;-\frac{1}{2})$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi tung độ điểm

$P(-1;-a)$ lớn hơn hoặc bằng $\frac{49}{20}$

$$\Leftrightarrow -a\geq\frac{49}{20}\Leftrightarrow a\leq-\frac{49}{20}$$

Chú ý: $-\frac{49}{20}<a<0$ *pt có 6 nghiệm phân biệt* thuộc đoạn$[-1;+\infty)$.

Bài toán có thể hỏi khác là:

Cho f(x) $=\frac{x}{2x+1}$

Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{6} f_i(x)=\sqrt{x^2+a^2}$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;0)$.

Thí dụ tương tự.

Cho f(x) $=\frac{x}{2x+1}$

1)Tìm a để phương trình $\sum_{i=1}^{7} f_i(x)=\sqrt{x^2+a^2}$ có đúng 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;0)$.

2)Tìm $a<0$ để phương trình $\sum_{i=1}^{7} f_i(x)=$ ax có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn$[-1;+\infty)$.

Nhận xét:Dạng toán như thí dụ 53,54,.. theo tác giả sẽ còn nhiều ý tưởng hay và khó hơn,xin dành cho bạn đọc tiếp tục phát triển.

Tác giả: Vũ Hồng Phong.

Thí dụ 55. Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{3}{(x^2-x)^2}+\sqrt{\frac{3}{(x^2-x)^2}+x}}=x$$

Lời giải.

Đk:$x>0$

Đặt $\frac{3}{(x^2-x)^2}=a>0$

PT đã cho trở thành

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x\quad(1)$$

Xét $f(x)=\sqrt{a+x}$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và có tập giá trị là $\left(\sqrt{a};+\infty\right)$

Theo kết quả 1 có

$$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{3}{(x^2-x)^2}+x}=x$$

$$\Leftrightarrow(x^2-x)^3=3\Leftrightarrow x^2-x=\sqrt[3]{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{1+4\sqrt[3]{3}}}{2}$$

Thí dụ 56. Cho $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^3+3x-\frac{m}{40}$. Tìm các số nguyên m để phương trình $f(f(x))=x$ có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Có $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^3+3x-\frac{m}{40}$

$f'(x)=x^4-3x^2+3>0$

Suy ra hàm số đồng biến trên R

Theo kết quả 1 có

$f(f(x))=x$

$\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\frac{1}{5}x^5-x^3+3x-\frac{m}{40}=x$

$\Leftrightarrow\frac{1}{5}x^5-x^3+2x=\frac{m}{40}$

Xét $h=\frac{1}{5}x^5-x^3+2x$

$h'=x^4-3x^2+2=0\Leftrightarrow x=\pm1;x=\pm\sqrt{2}$

bbt

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
h(x)	$-\infty$	$-\frac{4\sqrt{2}}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4\sqrt{2}}{5}$	$+\infty$

Từ bbt suy ra

PT có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\frac{m}{40}\in\left(-\frac{6}{5};-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)\cup\left(\frac{4\sqrt{2}}{5};\frac{6}{5}\right)$

$\Leftrightarrow m\in\left(-48;-32\sqrt{2}\right)\cup\left(32\sqrt{2};48\right)$

Suy ra $m\in\{-47;-46;46;47\}$

Thí dụ 57. Cho $f(x)=\frac{x}{2x+1}$. Tìm m để phương trình sau có đúng 4 nghiệm phân biệt

$$\prod_{k=1}^{4}f_k(x)=m$$

Lời giải.

$$\prod_{k=1}^{4}f_k(x)=m$$

$\Leftrightarrow\frac{x}{2x+1}.\frac{x}{3x+1}.\frac{x}{4x+1}.\frac{x}{5x+1}=m$ (*)

Đk:$x\neq-\frac{1}{2};x\neq-\frac{1}{3};x\neq-\frac{1}{4};x\neq-\frac{1}{5}$

Dễ thấy x=0 thì từ (*) suy ra m=0.

Ngược lại m=0 thì (*) có nghiệm duy nhất x=0.

Xét $x\neq0$ và $m\neq0$

$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{2+\frac{1}{x}}.\frac{1}{3+\frac{1}{x}}.\frac{1}{4+\frac{1}{x}}.\frac{1}{5+\frac{1}{x}}=m$

Đặt $\frac{1}{x}=t$ với $t\neq-2;t\neq-3;t\neq-4;t\neq-5$

PT đã cho trở thành

$\frac{1}{2+t}.\frac{1}{3+t}.\frac{1}{4+t}.\frac{1}{5+t}=m$

$\Leftrightarrow(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)=\frac{1}{m}$ (1)

Đặt $a=t+\frac{7}{2}$ với $a\neq\pm\frac{3}{2};a\neq\pm\frac{1}{2}$

PT(1) trở thành

$\left(a-\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{m}$

$\Leftrightarrow\left(a^2-\frac{9}{4}\right)\left(a^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{m}$

$\Leftrightarrow a^4-2a^2+\frac{9}{16}=\frac{1}{m}$ (2)

Xét $g(a) = a^4 - 2a^2 + \frac{9}{16}$

$g'(a) = 4a^3 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0; a = \pm 1$

bbt

a	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g(a)	$+\infty$	↘	$-\frac{7}{16}$	↗	$\frac{9}{16}$	↘	$-\frac{7}{16}$	↗	$+\infty$

PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ PT(2) có 4 nghiệm phân biệt $a \neq \pm\frac{3}{2}; a \neq \pm\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \neq \frac{9}{6} \\ \frac{1}{m} \neq \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{16} < \frac{1}{m} < \frac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 8 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\frac{16}{7} \\ m > \frac{16}{9} \end{array}\right. \end{cases}$$

Thí dụ 58.

a)Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt

$$\sqrt[3]{m + 2(x^3 - x)^2 + \sqrt[3]{m + 2(x^3 - x)^2 + x}} = x$$

b)Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt

$$\sqrt[3]{m + 3(x^3 - x)^3 + \sqrt[3]{m + 3(x^3 - x)^3 + x}} = x$$

Lời giải.

a) Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt

$$\sqrt[3]{m + 2(x^3 - x)^2 + \sqrt[3]{m + 2(x^3 - x)^2 + x}} = x$$

Đặt $m + (x^3 - x)^2 = a$ phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a + x}} = x \quad (1)$$

Xét $f(x) = \sqrt[3]{a + x}$ là hàm số đồng biến trên R

Nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a + x} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m + 2(x^3 - x)^2 + x} = x$

$\Leftrightarrow 2(x^3 - x)^2 - (x^3 - x) = -m \quad (2)$

Đặt $t = x^3 - x$

$t' = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
t	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

Phương trình (2) trở thành

$2t^2 - t = -m \quad (3)$

Xét $h(t) = t^2 - t$

bbt

t	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$+\infty$
h(t)	$+\infty$	↘	$\frac{8+6\sqrt{3}}{27}$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{8-6\sqrt{3}}{27}$	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow PT(3)$ *có 2 nghiệm phân biệt thuộc*

$$khoảng\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<-m<\frac{8-6\sqrt{3}}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8+6\sqrt{3}}{27}<m<\frac{1}{4}$$

b)Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt

$$\sqrt[3]{m+3(x^3-x)^3+\sqrt[3]{m+3(x^3-x)^3+x}}=x$$

Đặt $m+(x^3-x)^3=a$ *phương trình đã cho trở thành*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+x}}=x \quad (1)$$

Xét $f(x)=\sqrt[3]{a+x}$ *là hàm số đồng biến trên R*

Nên theo kết quả 1 có

$$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow \sqrt[3]{a+x}=x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3(x^3-x)^3+x}=x$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3-x\right)^3-\left(x^3-x\right)=-m \quad (2)$$

Đặt $t=x^3-x$

$$t'=3x^2-1\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

bbt

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
t	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

PT(2) trở thành: $3t^3-t=-m$ (3)

Xét $h(t)=3t^3-t$

$h'(t)=9t^2-1$

bbt

t	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$+\infty$
$h(t)$	$-\infty$	↗	$\frac{10\sqrt{3}}{81}$	↗	$\frac{2}{9}$	↘	$\frac{-2}{9}$	↗	$\frac{-10\sqrt{3}}{81}$	↗	$+\infty$

PT đã cho có 6 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow PT(3)$ *có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc*

khoảng $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{81}<-m<\frac{2}{9}\ V\frac{-2}{9}<-m<\frac{-10\sqrt{3}}{81}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{81}<m<\frac{2}{9}\ V\frac{-2}{9}<m<\frac{-10\sqrt{3}}{81}$$

Thí dụ 59. *Tìm m để phương trình sau có đúng 9 nghiệm phân biệt*

$$\sqrt[3]{m+\frac{(x^3-3x)^3}{3}+3.\sqrt[3]{m+\frac{(x^3-3x)^3}{3}+3x}}=x$$

Lời giải.

Đặt $m+\frac{(x^3-3x)^3}{3}=a$ *phương trình đã cho trở thành*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+3x}}=x \quad (1)$$

Xét $f(x)=\sqrt[3]{a+3x}$ *là hàm số đồng biến trên R*

Nên theo kết quả 1 có

$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a+3x} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m + \frac{(x^3-3x)^3}{3} + 3x} = x$

$\Leftrightarrow \frac{(x^3-3x)^3}{3} - (x^3-3x) = -m \quad (2)$

Đặt $t = x^3 - 3x$

$t' = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow t = \pm 1$

bbt

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t	$-\infty$ ↗	2	↘ -2	↗ $+\infty$

PT(2) trở thành: $\frac{1}{3}t^3 - t = -m$ (3)

Xét $h(t) =: \frac{1}{3}t^3 - t$

$h'(t) = t^2 - 1$

bbt

t	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$h(t)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{2}{3}$	↗ $\frac{2}{3}$	↘ $-\frac{2}{3}$	↗ $\frac{2}{3}$	↗ $+\infty$

PT đã cho có 9 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ *PT*(3) *có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc*

khoảng $(-2;2)$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < -m < \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$

Thí dụ 60.

a)*Giải phương trình*

$$\frac{3}{8+8x+\frac{24}{8+8x+\frac{24}{8+8\sqrt{x}}}} = \sqrt{x} - x$$

b)Tìm số thực dương m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm phân biệt lớn hơn -1

$$x^2 + \frac{m}{1+x^2+\frac{m}{1+x^2+\frac{m}{1+x}}} = x$$

Lời giải.

a)Đặt $\sqrt{x} = t \geq 0$.PT đã cho trở thành

$$\frac{3}{8+8t^2+\frac{24}{8+8t^2+\frac{24}{8+8t}}} = t - t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{3}{8+8t^2+\frac{24}{8+8t^2+\frac{24}{8+8t}}} = t \quad (1)$$

Đặt $t^2 = a \geq 0$ thì (1) trở thành

$$a + \frac{3}{8+8a+\frac{24}{8+8a+\frac{24}{8+8t}}} = t \quad (2)$$

Xét $f(t) = a + \frac{3}{8+8t}$

là hàm số nghịch biến trên$[0;+\infty)$ và có tập giá trị là $(a; a+\frac{3}{8}]$ nên theo kết quả 1 có

$(2) \Leftrightarrow f_3(t) = t \Leftrightarrow f(t) = t$

$\Leftrightarrow a + \frac{3}{8+8t} = t \Leftrightarrow t^2 + \frac{3}{8+8t} = t$

$\Leftrightarrow 8t^3-8t+3=0$

$\Leftrightarrow (2t-1)(4t^2+2t-3)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4} \end{array}\right.$

Từ đó suy ra PT đã cho có 2 nghiêm

$x=\dfrac{1}{4}; x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{8}$

b)Tìm số thực dương m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm phân biệt lớn hơn -1

$x^2+\dfrac{m}{1+x^2+\frac{m}{1+x^2+\frac{m}{1+x}}}=x \quad (1)$

Đặt $x^2=a\geq 0$ thì (1) trở thành

$a+\dfrac{m}{1+a+\frac{m}{1+a+\frac{m}{1+x}}}=x \quad (2)$

Xét $f(x)=a+\frac{m}{1+x}$

là hàm số nghịch biến trên$(-1;+\infty)$ và có tập giá trị là $(a;+\infty)$ nên theo kết quả 1 có

$(2)\Leftrightarrow f_3(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow a+\dfrac{m}{1+x}=x\Leftrightarrow x^2+\dfrac{m}{1+x}=x$

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{1+x}=x-x^2$

$\Leftrightarrow m=(x-x^2)(1+x)$

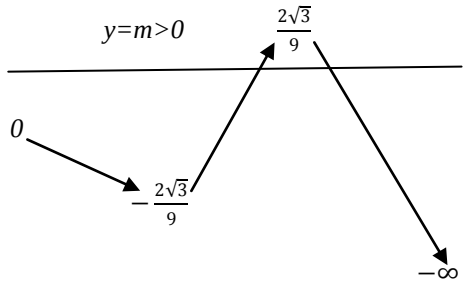
$\Leftrightarrow m=x-x^3$

Xét $h(x)=x-x^3$ với $x>-1$

$h'(x)=1-3x^2$

bbt

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
t		0		$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$-\infty$



Từ bbt suy ra

Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt lớn hơn $-1\Leftrightarrow 0<m<\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Nhận xét:

-Với $0<m<\frac{2\sqrt{3}}{9}$ PT(1) có đúng 2 nghiệm phân biệt $x>-1$

-Với $m=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ PT(1) có đúng 1 nghiệm phân biệt $x>-1$

-Với $m>\frac{2\sqrt{3}}{9}$ PT(1) không có nghiệm $x>-1$

Thí dụ 61.

a)*Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+1-\sqrt{x^2+1-\sqrt{x^2+1-\sqrt{x^2+1-x}}}}=x$$

b)Tìm $a\geq 1$ để phương trình sau có nghiệm $x=1$

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{..\sqrt{a-x}}}}}=x$$

(vế trái có 100 dấu căn)

c)Tìm $a\geq 1$ để phương trình sau có nghiệm $x=\frac{4}{5}$

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{..\sqrt{a-x}}}}}=x$$

(vế trái có 100 dấu căn)

d)Tìm $a \geq 1$ để phương trình sau có nghiệm $x = 2019^{2020}$

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{..\sqrt{a-x}}}}}=x$$

(vế trái có 100 dấu căn)

Lời giải.

a)Đặt $x^2+1=a\geq 1$ pT đã cho trở thành

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}}=x \quad (1)$$

Đk:$0\leq x\leq a$. Do $a\geq 1$ *nên* $\sqrt{a}\leq a$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên

$[0;a]$ và tập giá trị là $\left[\sqrt{a-\sqrt{a}};\sqrt{a}\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_2(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1-\sqrt{x^2+1-x}}=x$

$\Leftrightarrow x^2+1-\sqrt{x^2+1-x}=x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1-x}=1\Leftrightarrow x^2+1-x=1$

$\Leftrightarrow x=0\ V\ x=1$

b)Tìm $a \geq 1$ để phương trình sau có nghiệm $x = 1$

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{..\sqrt{a-x}}}}}=x \quad (1)$$

(vế trái có 100 dấu căn)

Đk:$0\leq x\leq a$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên

$[0;a]$ và tập giá trị là $\left[\sqrt{a-\sqrt{a}};\sqrt{a}\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_{50}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x$

PT đã cho có nghiệm $x=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-1}}=1\Leftrightarrow a-\sqrt{a-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-1}(\sqrt{a-1}-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=2\end{array}\right.$

c) Tương tự câu b

PT đã cho có nghiệm $x=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-\frac{4}{5}}}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow a=\frac{36}{25}$

d)Tìm $a \geq 1$ để phương trình sau có nghiệm $x = 2019^{2020}$

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{..\sqrt{a-x}}}}}=x$$

(vế trái có 100 dấu căn)

Đk:$0\leq x\leq a$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ đồng biến trên

$[0;a]$ và tập giá trị là $\left[\sqrt{a-\sqrt{a}};\sqrt{a}\right]$ nên theo kết quả 1 có

$(1)\Leftrightarrow f_{50}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x$

PT đã cho có nghiệm $x=2019^{2020}=m$

$\Leftrightarrow\sqrt{a-\sqrt{a-2}}=2$

$\Leftrightarrow a-\sqrt{a-m}=m^2\Leftrightarrow\sqrt{a-m}=a-m^2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq m^2\\a^2-(2m^2+1)a+m^4+m=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq m^2\\a^2-(2m^2+1)a+(m^2+m)(m^2-m+1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq m^2\\\left[\begin{array}{c}a=m^2-m+1<m^2\\a=m^2+m\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow a=m^2+m=2019^{4040}+2019^{2020}$

Thí dụ 62. *Cho* $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a)*Tìm m để phương trình sau có nghiệm:*

$$\sum_{n=1}^{100}f_{(n^2+n)^2}(x)=m$$

b)*Tìm m để phương trình sau có nghiệm:*

$$\sum_{n=1}^{9}f_{4^n}(x)=m$$

c)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{11}f_{(4^n-1)}(x)=\frac{2047}{2048}x$$

d)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{8}f_{(4^n-1)}(x)=\frac{255}{256}$$

e)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{9}f_{(4^n-3)}(x)=\frac{511}{512}$$

f)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{6}f_{(4^n-2)}(x)=\frac{63}{64}x$$

h)*Tìm a để phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{7}f_{4^n}(x)=a\,x$$

có đúng 3 nghiệm phân biệt.

k)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{5}f_{(4^n-1)}(x)=\frac{31}{32}x^2$$

p)*Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng* $(-1;1)$*:*

$$\sum_{n=1}^{9}f_{(9^n-1)}(x)=mx^2$$

Lời giải.

Ta có

$$f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}+1}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Bằng quy nạp ta được

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}$$

a)Có

$$\sum_{n=1}^{100} f_{(n^2+n)^2}(x)=m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{36x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{(100^2+100)^2x^2+1}}=m$$

Xét

$$y=\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{36x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{(100^2+100)^2x^2+1}}$$

$$y'=\frac{1}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3}+\frac{1}{\left(\sqrt{36x^2+1}\right)^3}+..+\frac{1}{\left(\sqrt{(100^2+100)^2x^2+1}\right)^3}>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+..+\frac{1}{100.101}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$$

$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\frac{-1}{1.2}+\frac{-1}{2.3..}+..+\frac{-1}{100.101}=-\frac{100}{101}$$

Bbt

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\frac{100}{101}$	↗	$\frac{100}{101}$

PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{100}{101};\frac{100}{101}\right)$

b)Có

$$\sum_{n=1}^{9} f_{4^n}(x)=m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{16x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{4^9x^2+1}}=m$$

Xét

$$y=\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{16x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{4^9x^2+1}}$$

$$y'=\frac{1}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3}+\frac{1}{\left(\sqrt{16x^2+1}\right)^3}+..+\frac{1}{\left(\sqrt{4^9x^2+1}\right)^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+..+\frac{1}{2^9}=\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{511}{512}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-..-\frac{1}{2^9}=-\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}}=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^9=-\frac{511}{512}$$

Bbt

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\frac{511}{512}$	↗	$\frac{511}{512}$

PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{511}{512};\frac{511}{512}\right)$

c)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{11} f_{(4^n-1)}(x)=\frac{2047}{2048}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{15x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{(4^{11}-1)x^2+1}} = \frac{2047}{2048}x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{15x^2+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(4^{11}-1)x^2+1}} = \frac{2047}{2048} \end{array}\right.$$

Đặt $x^2 = t \geq 0$ thì phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{15x^2+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(4^{11}-1)x^2+1}} = \frac{2047}{2048}$$

trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{3t+1}}+\frac{1}{\sqrt{15t+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(4^{11}-1)t+1}} = \frac{2047}{2048} \ (*)$$

Dễ thấy $f(t) = \frac{1}{\sqrt{3t+1}}+\frac{1}{\sqrt{15t+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(4^{11}-1)t+1}}$

là hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$

suy ra PT(*) có nghiệm duy nhất $t = 1$

Với $t = 1$ suy ra $x = \pm 1$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm $x = 0; x = \pm 1$

d)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{8} f_{(4^n-1)}(x) = \frac{255}{256}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{15x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{(4^8-1)x^2+1}} = \frac{255}{256} \ (1)$$

Do $VP(1) > 0$ *nên từ* $(1) suy\ ra\ x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}+\frac{1}{\sqrt{15+\frac{1}{x^2}}}+..+\frac{1}{\sqrt{4^8-1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{255}{256}$$

Đặt $\frac{1}{x^2} = t > 0$ thì phương trình trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{3+t}}+\frac{1}{\sqrt{15+t}}+..+\frac{1}{\sqrt{4^8-1+t}} = \frac{255}{256}$$

Dễ thấy $f(t) = \frac{1}{\sqrt{3+t}}+\frac{1}{\sqrt{15+t}}+..+\frac{1}{\sqrt{4^8-1+t}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

suy ra PT(*) có nghiệm duy nhất $t = 1$

Với $t = 1$ suy ra $x = \pm 1$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = \pm 1$

e)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{9} f_{(4^n-3)}(x) = \frac{511}{512}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{13x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{(4^9-3)x^2+1}} = \frac{511}{512} \ (1)$$

Do $VP(1) > 0$ *nên từ* $(1) suy\ ra\ x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\frac{1}{\sqrt{13+\frac{1}{x^2}}}+..+\frac{1}{\sqrt{4^9-3+\frac{1}{x^2}}} = \frac{511}{512}$$

Đặt $\frac{1}{x^2} = t > 0$ thì phương trình trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}}+\frac{1}{\sqrt{13+t}}+..+\frac{1}{\sqrt{4^9-3+t}} = \frac{511}{512}$$

Dễ thấy $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}+\frac{1}{\sqrt{13+t}}+..+\frac{1}{\sqrt{4^9-3+t}}$

là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

suy ra PT(*) có nghiệm duy nhất $t = 3$

Với $t = 1$ suy ra $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

f)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{6} f_{(4^n-2)}(x) = \frac{63}{64}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{14x^2+1}} + .. + \frac{x}{\sqrt{(4^6-2)x^2+1}} = \frac{63}{64}x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{14x^2+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{(4^6-2)x^2+1}} = \frac{63}{64} \end{array}\right.$$

Đặt $x^2 = t \geq 0$ thì phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{14x^2+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{(4^6-2)x^2+1}} = \frac{63}{64}$$

trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{2t+1}} + \frac{1}{\sqrt{14t+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{(4^6-2)t+1}} = \frac{63}{64}$$

Dễ thấy $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} + \frac{1}{\sqrt{14t+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{(4^6-2)t+1}}$

là hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

suy ra PT(*) có nghiệm duy nhất $t = 2$

Với $t = 1$ suy ra $x = \pm\sqrt{2}$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm $x = 0; x = \pm\sqrt{2}$

h)*Tìm a để phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{7} f_{4^n}(x) = a\,x$$

có đúng 3 nghiệm phân biệt.

$$\sum_{n=1}^{7} f_{4^n}(x) = a\,x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{16x^2+1}} + .. + \frac{x}{\sqrt{4^7x^2+1}} = ax$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{16x^2+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{4^7x^2+1}} = a \end{array}\right.$$

Đặt $x^2 = t \geq 0$ thì phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{16x^2+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{4^7x^2+1}} = a$$

trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{4t+1}} + \frac{1}{\sqrt{16t+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{4^7t+1}} = a\ (*)$$

Dễ thấy $f(t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} + \frac{1}{\sqrt{16t+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{4^7t+1}}$

là hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

t	0	$+\infty$
f(t)	7	0

PT đã cho có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow PT(*) có đúng\ 1\ nghiệm\ dương$

$\Leftrightarrow m \in (0; 7)$

k)*Giải phương trình:*

$$\sum_{n=1}^{5} f_{(4^n-1)}(x) = \frac{31}{32}x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{15x^2+1}} + .. + \frac{x}{\sqrt{(4^5-1)x^2+1}} = \frac{31}{32}x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{15x^2+1}} + .. + \frac{1}{\sqrt{(4^5-1)x^2+1}} = \frac{31}{32}x \end{array}\right.$$

Xét

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{15x^2+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(4^5-1)x^2+1}}=\frac{31}{32}x$$

Do vế trái dương nên $x>0$

Khi này Vế trái là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ còn Vế phải là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Suy ra $x=1$ là nghiệm duy nhất của PT

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{15x^2+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(4^5-1)x^2+1}}=\frac{31}{32}x$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=0;x=1$

Tương tự

Giải phương trình:

$$\sum_{n=1}^{6} f_{(4^n-1)}(x)=\frac{63}{64}x^3$$

ĐS: PT đã cho có 3 nghiệm $x=0;x=\pm 1$

p)*Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng* $(-1;1)$ *:*

$$\sum_{n=1}^{9} f_{(9^n-1)}(x)=mx^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{8x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{80x^2+1}}+..+\frac{x}{\sqrt{(9^9-1)x^2+1}}=mx^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{8x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{80x^2+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(9^9-1)x^2+1}}=mx \end{array}\right.$$

xét

$$\frac{1}{\sqrt{8x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{80x^2+1}}+..+\frac{1}{\sqrt{(9^9-1)x^2+1}}=mx \ (1)$$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của (1)

Với $x\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{x\sqrt{8x^2+1}}+\frac{1}{x\sqrt{80x^2+1}}+..+\frac{1}{x\sqrt{(9^9-1)x^2+1}}=m \quad (2)$$

$$y=\frac{1}{x\sqrt{8x^2+1}}+\frac{1}{x\sqrt{80x^2+1}}+..+\frac{1}{x\sqrt{(9^9-1)x^2+1}}$$

$$y'=\frac{-2.8^2x^2-1}{x\sqrt{8x^2+1}}+\frac{-2.80^2x^2-1}{x\sqrt{80x^2+1}}+..+\frac{-2.(9^9-1)^2x^2-1}{x\sqrt{(9^9-1)x^2+1}}$$

bbt

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	0	$\frac{\frac{1}{3^9}-1}{2}$	$-\infty$ $+\infty$	$\frac{1-\frac{1}{3^9}}{2}$	0

Từ bbt suy ra

PT đã cho có đúng 2 *phân biệt thuộc khoảng* $(-1;1)\Leftrightarrow$ PT(2) đã cho có đúng 1 *phân biệt thuộc khoảng* $(-1;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<\frac{\frac{1}{3^9}-1}{2} \\ m>\frac{1-\frac{1}{3^9}}{2} \end{array}\right.$$

PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM HỢP

Chuyên mục: Phương Pháp Giải Toán

Tạp Chí Toán Học Và Tuổi Trẻ

Số 504 Tháng 6-2019

Các tác giả :

Vũ Hồng Phong Bất Lự làng, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh .

Trần Văn Lâm xóm Tiến Bộ,thôn Vân Trai,xã Tân Phú,thị xã Phổ Yên,tỉnh Thái Nguyên.

Kết quả 2.

Cho hai hàm số y=f(x) và y=g(x) cùng đồng biến trên miền H thỏa mãn $f(x) > g(x)$ với $\forall x \in H$,tập giá trị của các hàm số f(x) và g(x) trên miền H đều là các tập con của H. Khi đó

$f_n(x) > g_n(x), \forall x \in H$ (với $n \in N^*$).

Chứng minh.

Do $f(x) > g(x), \forall x \in H$ nên

$f_1(x) > g_1(x), \forall x \in H$.

Hàm số y=f(x) đồng biến nên ta có

$f(x) > g(x) \Rightarrow f_2(x) = f(f(x)) > f(g(x))$.

Mà $f(x) > g(x)$ với $\forall x \in H$ nên

$f(g(x)) > g(g(x)) = g_2(x)$

suy ra $f_2(x) > g_2(x), \forall x \in H$.

Bằng quy nạp có $f_n(x) > g_n(x), \forall x \in H$.

Sau đây là các thí dụ.

Thí dụ 1. Giải phương trình:

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq -2$ suy ra $6+x > 0$.

Xét $\sqrt{2+x} > \sqrt[3]{6+x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+x}\right)^6 > \left(\sqrt[3]{6+x}\right)^6$

$\Leftrightarrow (2+x)^3 - (6+x)^2 > 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+7x+14) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Tương tự có $\sqrt{2+x} < \sqrt[3]{6+x} \Leftrightarrow x < 2$.

Dễ thấy hàm số $f(x) = \sqrt{2+x}$ và

$g(x) = \sqrt[3]{6+x}$ cùng đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và nửa khoảng $[-2;2)$.

PT đã cho trở thành: $f_3(x) = g_3(x)$. (1)

+Với $x > 2$ thì $f(x) > g(x) > 2$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$.

+Với $x \in [-2;2)$ thì $0 \leq f(x) < g(x) < 2$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$.

+Với x=2 là nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x = 2$.

Thí dụ 2. Giải phương trình:

$18 + 9.2^{2^x} = 2.3^{3^x}$. (1)

Lời giải. $PT(1) \Leftrightarrow 1 + 2^{2^x-1} = 3^{3^x-2}$

$\Leftrightarrow 2^{2^x-1} - 1 = 3^{3^x-2} - 2$. (2)

Hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến nên

$2^x - 1 < 3^x - 2 \Leftrightarrow 2^x + 1 < 3^x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Tương tự $2^x - 1 > 3^x - 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Dễ thấy hàm số $f(x) = 2^x - 1$ và $g(x) = 3^x - 2$ đồng biến trên từng khoảng $(1;+\infty)$ và $(-\infty;1)$.

PT(2) trở thành: $f_2(x) = g_2(x)$.

+Với $x > 1$ thì $1 < f(x) < g(x)$.

Theo kết quả 2 ta có $f_2(x) < g_2(x)$.

+Với $x<1$ thì $1>f(x)>g(x)$.

Theo kết quả 2 ta có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với x=1 là nghiệm của PT(2).

Vậy PT đã cho có 1 nghiệm $x=1$.

Thí dụ 3. Giải phương trình:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi\sin x}{3\sqrt{2}}\right)\right)\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi\sin x}{\sqrt{8}}\right)\right)\right).$$

Lời giải. Đặt $\sin x=t\in[-1;1]$.

PT đã cho trở thành:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3\sqrt{2}}\right)\right)\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi t}{\sqrt{8}}\right)\right)\right).\ (*)$$

Ta có $t=0$ là 1 nghiệm của PT(*). Nhận thấy nếu t_0 là nghiệm của PT(*) thì $-t_0$ cũng là nghiệm của PT(*). Do vậy ta chỉ cần xét $t\in(0;1]$.Khi này $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}t\in\left(0;\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right]$; $\frac{\pi t}{\sqrt{8}}\in\left(0;\frac{\pi}{\sqrt{8}}\right]$; $\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\in\left(0;\frac{\pi}{6\sqrt{2}}\right]$ .Suy ra $f(t)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{3\sqrt{2}}$ và $g(t)=\sin\frac{\pi t}{\sqrt{8}}$ đồng biến trên nửa khoảng $(0;1]$; $h(t)=\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}$ nghịch biến trên nửa khoảng $(0;1]$; $\sin\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0;\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0$.

PT(*) trở thành: $f_3(t)=g_3(t)$.

Xét $f(t)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{3\sqrt{2}}>\sin\frac{\pi t}{\sqrt{8}}=g(t)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(2.\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)>\sin\left(3.\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>3\sin\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}-4\sin^3\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)\left[1+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)-4\cos^2\left(\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)\right]>0$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right]\left[\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]>0$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{12}>\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{12}<\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\Leftrightarrow t>\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tương tự $f(t)<g(t)\Leftrightarrow t<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Với $t\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$ thì

$$1>\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\geq f(t)>g(t)>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Theo kết quả 2 ta có $f_3(t)>g_3(t)$.

Với $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thì

$$0<f(t)<g(t)<\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Theo kết quả 2 ta có $f_3(t)<g_3(t)$.

Dễ thấy $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm của PT(*).

Vậy $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm duy nhất của PT(*) khi xét $t\in(0;1]$.Theo các nhận xét ở trên thì PT(*) có tất

cả 3 nghiệm $t=0;t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra PT đã cho có nghiệm là

$x=k\pi;x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi;x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi;x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi.$

Dưới đây là một số thí dụ viết thêm về ứng dụng kết quả 2 để giải phương trình,bất phương trình và chứng minh bất đẳng thức.

Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du số 1,Bắc Ninh

Thí dụ 4. Giải phương trình:

$\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}=\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}+x}}$

Lời giải.

ĐK: $x\geq-\frac{1}{2}$.

Xét $\sqrt{1+2x}>\sqrt{2+\sqrt{2}+x}\Leftrightarrow 1+2x>2+\sqrt{2}+x$

$\Leftrightarrow x>1+\sqrt{2}$.

Tương tự có. $\sqrt{1+2x}>\sqrt{2+\sqrt{2}+x}$

$\Leftrightarrow x<1+\sqrt{2}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{1+2x}$ và

$g(x)=\sqrt{2+\sqrt{2}+x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và nửa khoảng

$\left[-\frac{1}{2};1+\sqrt{2}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>1+\sqrt{2}$ thì $f(x)>g(x)>1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $-\frac{1}{2}\leq x<1+\sqrt{2}$ thì

$0\leq f(x)<g(x)<1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=1+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1+\sqrt{2}$.

Tương tự

1. Giải phương trình:

$\sqrt{2+2\sqrt{2+2x}}=\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{3}+x}}$

ĐS: $x=1+\sqrt{3}$

2. Giải phương trình:

$\sqrt{\frac{7}{4}+\sqrt{\frac{7}{4}+x}}=\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}x}}$

ĐS: $x=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

Thí dụ 5. Giải phương trình:

$\sqrt{6+\sqrt{6+x}}=\sqrt{6+\sqrt{3+2\sqrt{6+\sqrt{3+2x}}}}$

Lời giải.

ĐK: $x\geq-\frac{3}{2}$.

Xét $\sqrt{6+x}>\sqrt{6+\sqrt{2x+3}}\Leftrightarrow x>\sqrt{2x+3}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2>2x+3\end{cases}\Leftrightarrow x>3$.

Tương tự có. $\sqrt{6+x}>\sqrt{6+\sqrt{2x+3}}$

$\Leftrightarrow x<3$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{6+x}$ và

$g(x)=\sqrt{6+\sqrt{2x+3}}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(3;+\infty)$ và nửa khoảng $\left[-\frac{1}{2};3\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>3$ thì $f(x)>g(x)>3$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $-\frac{1}{2}\le x<3$ thì $0\le f(x)<g(x)<3$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$.

+Với $x=3$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=3$.

Thí dụ 6. Giải phương trình:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}=\sqrt{2+\sqrt{5+4\sqrt{2+\sqrt{5+4x}}}}$$

Lời giải.

ĐK: $x\ge-\frac{1}{2}$.

Xét $\sqrt{1+2x}>\sqrt{2+\sqrt{5+4x}}\Leftrightarrow x>1+\sqrt{2}$.

Tương tự có. $\sqrt{1+2x}<\sqrt{2+\sqrt{5+4x}}$

$\Leftrightarrow x<1+\sqrt{2}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{1+2x}$ và

$g(x)=\sqrt{2+\sqrt{5+4x}}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và nửa khoảng $\left[-\frac{1}{2};1+\sqrt{2}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>1+\sqrt{2}$ thì $f(x)>g(x)>1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $-\frac{1}{2}\le x<1+\sqrt{2}$ thì

$0\le f(x)<g(x)<1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=1+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1+\sqrt{2}$.

Thí dụ 7. Giải phương trình:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}=\sqrt[4]{16+11\sqrt{2}+\sqrt[4]{16+11\sqrt{2}+x}}$$

Lời giải.

ĐK: $x\ge-\frac{1}{2}$.

Xét $\sqrt{1+2x}>\sqrt[4]{16+11\sqrt{2}+x}$

$\Leftrightarrow(1+2x)^2>16+11\sqrt{2}+x$

$\Leftrightarrow\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(4x+4\sqrt{2}+7\right)>0$

$\Leftrightarrow x>1+\sqrt{2}$.

Tương tự có. $\sqrt{1+2x}<\sqrt[4]{16+11\sqrt{2}+x}$

$\Leftrightarrow x<1+\sqrt{2}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{1+2x}$ và

$g(x)=\sqrt[4]{16+11\sqrt{2}+x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và nửa khoảng $\left[-\frac{1}{2};1+\sqrt{2}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>1+\sqrt{2}$ thì $f(x)>g(x)>1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $-\frac{1}{2}\le x<1+\sqrt{2}$ thì

$0\le f(x)<g(x)<1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=1+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1+\sqrt{2}$.

Thí dụ tương tự.

Giải phương trình:

$$\sqrt{2+2\sqrt{x}}=\sqrt[4]{14+2\sqrt{3}+14\sqrt[4]{2\sqrt{3}+7x}}$$

PT có đúng 1 nghiệm $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Cách giải

Đặt $2+2x=t$ suy ra

$$\sqrt{2+2\sqrt{2+2t}}=\sqrt[4]{14+2\sqrt{3}+14\sqrt[4]{14+2\sqrt{3}+14t}}$$

Cách tạo ra dạng PT dạng này như sau:

Chẳng hạn để PT có nghiệm $x=1+\sqrt{3}$ thì giá trị f(x) và g(x) đều phải bằng $1+\sqrt{3}$ khi $x=1+\sqrt{3}$. Nếu muốn hàm f(x) là biểu thức căn bậc 2 thì trong căn có giá trị ứng với $x=1+\sqrt{3}$ là $4+2\sqrt{3}$. Khi này trong căn ta có thể chọn là $2+2x$. Còn g(x) nếu muốn có dạng $\sqrt{1+\sqrt{a}}$ thì khi này với $x=1+\sqrt{3}$ thì $\sqrt{a}=3+2\sqrt{3}$ suy ra $a=21+22\sqrt{3}$ từ đó ta có thể chọn a là biểu thức 9+12x. Từ đó ta đã tạo ra thí dụ sau

Thí dụ 8. Giải phương trình:

$$\sqrt{2+2\sqrt{2+2x}}=\sqrt{1+\sqrt{9+12\sqrt{1+\sqrt{9+12x}}}}$$

Lời giải.

ĐK: $x\ge-\frac{3}{4}$.

Xét $\sqrt{2+2x}>\sqrt{1+\sqrt{9+12x}}\Leftrightarrow 2x+1>\sqrt{9+12x}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\(2x+1)^2>9+12x\end{cases}.$$

$\Leftrightarrow x>1+\sqrt{3}$

Tương tự có $\sqrt{2+2x}<\sqrt{1+\sqrt{9+12x}}$

$\Leftrightarrow x<1+\sqrt{3}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{2+2x}$ và

$g(x)=\sqrt{1+\sqrt{9+12x}}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(1+\sqrt{3};+\infty\right)$ và nửa khoảng

$\left[-\frac{3}{4};1+\sqrt{3}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>1+\sqrt{3}$ thì $f(x)>g(x)>1+\sqrt{3}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $-\frac{3}{4}\le x<1+\sqrt{3}$ thì

$0\le f(x)<g(x)<1+\sqrt{3}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=1+\sqrt{3}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1+\sqrt{3}$.

*Với f(x),g(x) dạng lũy thừa cũng làm tương tự

Chẳng hạn để PT có nghiệm $x=2\sqrt{2}$ thì giá trị f(x) và g(x) đều phải bằng $2\sqrt{2}$ khi $x=2\sqrt{2}$

Nên có thể chọn $f(x)=2x^3-30\sqrt{2}$ và

$$g(x)=x^3-15\sqrt{2}$$

Ta được phương trình:

$$2\left(2\left(2x^3-30\sqrt{2}\right)^3-30\sqrt{2}\right)^3-30\sqrt{2}=\left(\left(x^3-15\sqrt{2}\right)^3-15\sqrt{2}\right)^3-15\sqrt{2}$$

$$\leftrightarrow 2\left(2\left(2x^3-30\sqrt{2}\right)^3-30\sqrt{2}\right)^3=\left(\left(x^3-15\sqrt{2}\right)^3-15\sqrt{2}\right)^3+15\sqrt{2}$$

ta đưa về PT:

$$2\left(2\left(2x-30\sqrt{2}\right)^3-30\sqrt{2}\right)^3=\left(\left(x-15\sqrt{2}\right)^3-15\sqrt{2}\right)^3+15\sqrt{2}$$

Cách giải.

Đặt $x=t^3$ ta được:

$$2\left(2\left(2t^3-30\sqrt{2}\right)^3-30\sqrt{2}\right)^3=\left(\left(t^3-15\sqrt{2}\right)^3-15\sqrt{2}\right)^3+15\sqrt{2}$$

$$\leftrightarrow 2\left(2\left(2t^3-30\sqrt{2}\right)^3-30\sqrt{2}\right)^3-30\sqrt{2}=\left(\left(t^3-15\sqrt{2}\right)^3-15\sqrt{2}\right)^3-15\sqrt{2}$$

Ta vừa tạo ra PT nhìn khá phức tạp nhưng ta hoàn toàn tạo ra những PT nhìn gọn hơn chẳng hạn

Giải phương trình:

$$1+3\left(2+3\left(2+3\left(2+3x\right)\right)\right)^3=2\left(1+2\left(1+2x\right)^3\right)^3$$

Cách giải.

Đặt $x=t^3$ ta được:

$f(t)=2+3t^3$

$f(t)=1+2t^3$

ta được PT:

$$1+3\left(2+3\left(2+3\left(2+3t^3\right)\right)\right)^3=2\left(1+2\left(1+2t^3\right)^3\right)^3$$

$\Leftrightarrow f_3(t)=g_3(t)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow t=-1.$

Ta có thể tạo ra f(x),g(x) kiểu khác

Chẳng hạn:

Thí dụ 9. Giải phương trình:

$$2\left(2x^3-1\right)^3-1=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{8}\left(1+x\right)^3\right)^3.$$

Lời giải.

Xét $2x^3-1>\frac{1}{8}(x+1)^3\Leftrightarrow(x-1)\left(5x^2+4x+3\right)>0$

$\Leftrightarrow x>1.$

Tương tự có. $2x^3-1>\frac{1}{8}(x+1)^3\Leftrightarrow x<1$

Dễ thấy hàm số $f(x)=2x^3-1$ và

$g(x)=\frac{1}{8}(x+1)^3$ cùng đồng biến trên

khoảng $(1;+\infty)$ và nửa khoảng. $(-\infty;1)$

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>1$ thì $f(x)>g(x)>1$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

Với $x<1$ thì $f(x)<g(x)<1$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với x=1 là nghiệm PT đã cho.

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1$.

Thí dụ 10. Giải phương trình:

$$2\left(2x^5-1\right)^5=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{2}$$

Lời giải.

Xét $2x^5-1>\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(4x^4+4x^3+3x^2+3x+3\right)>0 \Leftrightarrow x>1.$

Tương tự có. $2x^5-1>\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x<1$

Dễ thấy hàm số $f(x)=2x^5-1$ và

$g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(1;+\infty)$ và nửa khoảng. $(-\infty;1)$

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>1$ thì $f(x)>g(x)>1$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

Với $x<1$ thì $f(x)<g(x)<1$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với x=1 là nghiệm PT đã cho.

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1$.

PT tương tự:

Giải phương trình:

$$a)2\left(2x.\sqrt[3]{x^2}-1\right)^5=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{2}$$

$$b)2\left(2\left(2x^5-1\right)^5-1\right)^5=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{2}$$

$$c)2\left(2\left(2\sqrt[3]{x^5}-1\right)^5-1\right)^5=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{2}$$

Thí dụ 11. Giải phương trình:

$$2+\sqrt{5+2\sqrt{5+2\sqrt{1+2x}}}=\sqrt{5+6\sqrt{5+6\sqrt{5+6x}}}$$

Lời giải.

ĐK: $x\geq -\frac{1}{2}$.

Xét $2+\sqrt{1+2x}>\sqrt{5+6x}$

$\Leftrightarrow 5+2x+4\sqrt{1+2x}>5+6x.$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+2x}>x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ 1+2x>x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x<1+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x<1+\sqrt{2}$

Tương tự có. $2+\sqrt{1+2x}>\sqrt{5+6x}$

$\Leftrightarrow x>1+\sqrt{2}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=2+\sqrt{1+2x}$ và

$g(x)=\sqrt{5+6x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và nửa khoảng

$\left[-\frac{1}{2};1+\sqrt{2}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_3(x)=g_3(x)$. (1)

+Với $-\frac{1}{2}\le x<1+\sqrt{2}$ thì $1+\sqrt{2}>f(x)>g(x)\ge 0$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $x>1+\sqrt{2}$ thì $1+\sqrt{2}<f(x)<g(x)$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$.

+Với $x=1+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1+\sqrt{2}$

Thí dụ 11. Giải phương trình:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}=\sqrt[3]{3+\sqrt{2}+4.\sqrt[3]{3+\sqrt{2}+4x}}$$

Lời giải.

ĐK: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Xét $\sqrt{1+2x}>\sqrt[3]{3+\sqrt{2}+4x}$

$\Leftrightarrow (1+2x)^3>(3+\sqrt{2}+4x)^2$

$\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x>1+\sqrt{2}$.

Tương tự có. $\sqrt{1+2x}<\sqrt[3]{3+\sqrt{2}+4x}$

$\Leftrightarrow x<1+\sqrt{2}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{1+2x}$ và

$g(x)=\sqrt[3]{3+\sqrt{2}+4x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và nửa khoảng

$\left[-\frac{1}{2};1+\sqrt{2}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$. (1)

+Với $x>1+\sqrt{2}$ thì $f(x)>g(x)>1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $-\frac{1}{2}\le x<1+\sqrt{2}$ thì

$0\le f(x)<g(x)<1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=1+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1+\sqrt{2}$.

Thí dụ tương tự.

Giải phương trình:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}=\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}+3.\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}+3x}}$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}=\sqrt[3]{5+3\sqrt{2}+2.\sqrt[3]{5+3\sqrt{2}+2x}}$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}=\sqrt[3]{6+4\sqrt{2}+\sqrt[3]{6+4\sqrt{2}+x}}$$

PT có đúng 1 nghiệm $x=1+\sqrt{2}$.

Thí dụ 12. Giải phương trình:

$$1+\sqrt{1+2\sqrt{2x-1}}=\sqrt[3]{4\sqrt{2}+10.\sqrt[3]{4\sqrt{2}+10x}}$$

Lời giải.

ĐK: $x\ge\frac{1}{2}$.

Xét $1+\sqrt{2x-1}>\sqrt[3]{4\sqrt{2}+10x}$

Đặt $\sqrt{2x-1}=a\ge 0$

Ta có

$1+a>\sqrt[3]{4\sqrt{2}+5+5a^2}$

$\Leftrightarrow (1+a)^3>4\sqrt{2}+5+5a^2$

$\Leftrightarrow \left(a-1-\sqrt{2}\right)\left(a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)a+4\right)>0$

$\Leftrightarrow a>1+\sqrt{2}$

$\Rightarrow x>2+\sqrt{2}$

Vậy $1+\sqrt{2x-1}>\sqrt[3]{4\sqrt{2}+10x}$

$\Leftrightarrow x>2+\sqrt{2}$

Tương tự

$1+\sqrt{2x-1}<\sqrt[3]{4\sqrt{2}+10x}$

$\Leftrightarrow x<2+\sqrt{2}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=1+\sqrt{2x-1}$ và

$g(x)=\sqrt[3]{4\sqrt{2}+10x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$ và nửa khoảng

$\left[\frac{1}{2};2+\sqrt{2}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$ (1)

+Với $x>2+\sqrt{2}$ thì $f(x)>g(x)>2+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $\frac{1}{2}\le x<2+\sqrt{2}$ thì

$1\le f(x)<g(x)<2+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=2+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=2+\sqrt{2}$.

Thí dụ 13. Giải phương trình:

$1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}=\sqrt[3]{12+5.\sqrt[3]{12+5.\sqrt[3]{12+5x}}}$

Lời giải.

ĐK: $x\ge -1$.

Xét $1+\sqrt{1+x}>\sqrt[3]{12+5x}$

Đặt $\sqrt{x+1}=a\ge 0$

Ta có

$1+a>\sqrt[3]{7+5a^2}$

$\Leftrightarrow (1+a)^3>7+5a^2$

$\Leftrightarrow (a-2)\left(a^2+3\right)>0$

$\Leftrightarrow a>2$

$\Rightarrow x>3$

Vậy $1+\sqrt{1+x}>\sqrt[3]{12+5x}$

$\Leftrightarrow x>3$

Tương tự

$1+\sqrt{1+x}>\sqrt[3]{12+5x}$

$\Leftrightarrow x<3$

Dễ thấy hàm số $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ và

$g(x)=\sqrt[3]{12+5x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(3;+\infty)$ và nửa khoảng $[-1;3)$.

PT đã cho trở thành: $f_3(x)=g_3(x)$ (1)

+Với $x>3$ thì $f(x)>g(x)>3$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $-1\le x<3$ thì $1\le f(x)<g(x)<3$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$.

+Với $x = 2+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x = 3$.

Các PT tương tự

Giải phương trình:

$1+\sqrt{2+\sqrt{1+x}} = \sqrt[3]{12+5.\sqrt[3]{12+5x}}$

$1+\sqrt{2\sqrt{2x-2}} = \sqrt[3]{12+5.\sqrt[3]{12+5x}}$

$1+\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2x-2}}} = \sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+x}}}$

$1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}} = \sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+x}}}$

$1+\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2x-2}}} = \sqrt[3]{6+7.\sqrt[3]{6+7.\sqrt[3]{6+7x}}}$

PT có đúng 1 nghiệm $x = 3$.

Thí dụ 14. Giải phương trình:

$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}}} = \sqrt[4]{5+12\sqrt[4]{5+12x}}$

Lời giải.

ĐK: $x \ge -\dfrac{5}{12}$.

Xét $\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}} > \sqrt[4]{5+12x}$

$\Leftrightarrow (1+2\sqrt{1+2x})^2 > 5+12x$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+2x} > x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ 1+2x > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x < 1+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x < 1+\sqrt{2}$.

Tương tự có. $\sqrt{1+2\sqrt{1+2x}} < \sqrt[4]{5+12x}$

$\Leftrightarrow x > 1+\sqrt{2}$

Dễ thấy hàm số $f(x) = \sqrt{1+2\sqrt{1+2x}}$ và

$g(x) = \sqrt[4]{5+12x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $\left(1+\sqrt{2}; +\infty\right)$ và nửa khoảng

$\left[-\dfrac{5}{12}; 1+\sqrt{2}\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x) = g_2(x)$. (1)

+Với $x > 1+\sqrt{2}$ thì $0 \le f(x) < g(x) < 1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x) < g_2(x)$.

+Với $-\dfrac{5}{12} \le x < 1+\sqrt{2}$ thì $f(x) > g(x) > 1+\sqrt{2}$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x) > g_2(x)$.

+Với $x = 1+\sqrt{2}$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x = 1+\sqrt{2}$.

Thí dụ 15. Giải phương trình:

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} = \sqrt[4]{10+3.\sqrt[4]{10+3.\sqrt[4]{10+3x}}}$

Lời giải.

ĐK: $x \ge -2$.

Xét $\sqrt{2+x} > \sqrt[4]{10+3x}$

$\Leftrightarrow (2+3x)^2 > 10+3x$

$\Leftrightarrow (x-2)(3+x) > 0$

$\Leftrightarrow x > 2$.

Tương tự $\sqrt{2+x}<\sqrt[4]{10+3x}$

$\Leftrightarrow x<2$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{2+x}$ và

$g(x)=\sqrt[4]{10+3x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(2;+\infty)$ và nửa khoảng $[-2;2)$.

PT đã cho trở thành: $f_3(x)=g_3(x)$ (1)

+Với $x>2$ thì $f(x)>g(x)>2$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $-2\le x<2$ thì $0\le f(x)<g(x)<2$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$.

+Với $x=2$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=2$.

Để dạng này dễ nhìn hơn ta có thể sửa thành

Giải phương trình:

$\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=\sqrt[4]{10+3.\sqrt[4]{10+3x}}$

PT có đúng 1 nghiệm $x=2$.

Các PT tương tự:

$\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=\sqrt[4]{12+2.\sqrt[4]{12+2x}}$

$\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{14+x}}$

PT có đúng 1 nghiệm $x=2$.

$\sqrt{3+2\sqrt{3+2x}}=\sqrt[4]{51+10.\sqrt[4]{51+10x}}$

PT có đúng 1 nghiệm $x=2$.

Thí dụ 16. Giải phương trình:

$1+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}=\sqrt[3]{9+6.\sqrt[3]{9+6x}}$

Lời giải

ĐK: $x\ge -1$.

Xét $1+\sqrt{1+x}>\sqrt[3]{9+6x}$

Đặt $\sqrt{1+x}=a\ge 0$

$\rightarrow 1+a>\sqrt[3]{3+6a^2}$

$\Leftrightarrow (1+a)^3>3+6a^2$

$\Leftrightarrow (a-2)(a^2-a+1)>0$.

$\Leftrightarrow a>2\rightarrow x>3$

Vậy $1+\sqrt{1+x}>\sqrt[3]{9+6x}$

$\Leftrightarrow x>3$

Tương tự $1+\sqrt{1+x}<\sqrt[3]{9+6x}$

$\Leftrightarrow x<3$

Dễ thấy hàm số $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ và

$g(x)=\sqrt[3]{9+6x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(3;+\infty)$ và nửa khoảng $[-1;3)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$ (1)

+Với $x>3$ thì $f(x)>g(x)>3$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $-1\le x<3$ thì $1\le f(x)<g(x)<3$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=3$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=3$.

Để dạng này nhìn phức tạp hơn ta có thể sửa thành

Giải phương trình:

$$1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}=\sqrt[3]{9+6.\sqrt[3]{9+6\sqrt[3]{9+6x}}}$$

PT có đúng 1 nghiệm $x=3$.

Thí dụ 17. Giải phương trình:

$$1+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}=\sqrt{6+\sqrt{3+2\sqrt{6+\sqrt{3+2x}}}}$$

Lời giải

ĐK: $x\ge -1$.

Xét $1+\sqrt{1+x}>\sqrt{6+\sqrt{3+2x}}$

$\Leftrightarrow 2+x+2\sqrt{1+x}>6+\sqrt{3+2x}$

$\Leftrightarrow x-3+2(\sqrt{1+x}-2)+3-\sqrt{3+2x}>0$

$\Leftrightarrow x-3+\dfrac{2(x-3)}{2+\sqrt{1+x}}-\dfrac{2(x-3)}{3+\sqrt{3+2x}}>0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(1+\dfrac{2}{2+\sqrt{1+x}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{3+2x}}\right)>0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1+\sqrt{3+2x}}{3+\sqrt{3+2x}}\right)>0$

$\Leftrightarrow x-3>0\Leftrightarrow x>3.$

Tương tự $1+\sqrt{1+x}<\sqrt{6+\sqrt{3+2x}}$

$\Leftrightarrow x<3$

Dễ thấy hàm số $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ và

$g(x)=\sqrt{6+\sqrt{3+2x}}$ cùng đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ và nửa khoảng $[-1;3)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$ (1)

+Với $x>3$ thì $f(x)>g(x)>3$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $-1\le x<3$ thì $1\le f(x)<g(x)<3$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=3$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=3$.

Thí dụ 18. Giải phương trình:

$$1+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}$$

Lời giải

ĐK: $x\ge -1$.

Xét $1+\sqrt{1+x}>\sqrt{6+\sqrt{6+x}}$

$\Leftrightarrow 2+x+2\sqrt{1+x}>6+\sqrt{6+x}$

$\Leftrightarrow x-3+2(\sqrt{1+x}-2)+3-\sqrt{6+x}>0$

$\Leftrightarrow x-3+\dfrac{2(x-3)}{2+\sqrt{1+x}}-\dfrac{x-3}{3+\sqrt{6+x}}>0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(1+\dfrac{2}{2+\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{6+x}}\right)>0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{1+x}}+\dfrac{2+\sqrt{6+x}}{3+\sqrt{6+x}}\right)>0$

$\Leftrightarrow x-3>0\Leftrightarrow x>3.$

Tương tự $1+\sqrt{1+x}<\sqrt{6+\sqrt{6+x}}$

$\Leftrightarrow x<3$

Dễ thấy hàm số $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ và

$g(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+x}}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(3;+\infty)$ và nửa khoảng $[-1;3)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$ (1)

+Với $x>3$ thì $f(x)>g(x)>3$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $-1\le x<3$ thì $1\le f(x)<g(x)<3$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=3$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=3$.

Thí dụ 19. Giải phương trình:

$$\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{6+2x}}}=1+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{4+x}}}$$

Lời giải

ĐK: $x\ge -3$.

Xét $1+\sqrt{6+2x}>2+\sqrt{4+x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6+2x}>1+\sqrt{4+x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6+2x}-4+3-\sqrt{4+x}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x-5)}{4+\sqrt{6+2x}}-\dfrac{x-5}{3+\sqrt{4+x}}>0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{2}{4+\sqrt{6+2x}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{4+x}}\right)>0$

$\Leftrightarrow (x-5)\dfrac{2+2\sqrt{x+4}-\sqrt{6+2x}}{\left(4+\sqrt{6+2x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}>0$

$\Leftrightarrow (x-5)\dfrac{2+2\sqrt{x+4}-\sqrt{6+2x}}{\left(4+\sqrt{6+2x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}>0$

$\Leftrightarrow (x-5)\dfrac{2+\dfrac{2x+10}{2\sqrt{x+4}+\sqrt{6+2x}}}{\left(4+\sqrt{6+2x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}>0$

$\Leftrightarrow x-5>0\Leftrightarrow x>5.$

Tương tự $1+\sqrt{6+2x}<2+\sqrt{4+x}$

$\Leftrightarrow x<5$

Dễ thấy hàm số $f(x)=1+\sqrt{6+2x}$ và

$g(x)=2+\sqrt{4+x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(5;+\infty)$ và nửa khoảng $[-3;5)$.

PT đã cho trở thành:

$$1+\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{6+2x}}}=2+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{4+x}}}$$

$\Leftrightarrow f_3(x)=g_3(x)$ (1)

+Với $x>5$ thì $f(x)>g(x)>5$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $-3\le x<5$ thì $1\le f(x)<g(x)<5$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$.

+Với $x=5$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=5$.

Thí dụ 20. Giải phương trình:

$$\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2x}}}=1+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{5+x}}}$$

Lời giải

ĐK: $x\ge -\dfrac{3}{2}$.

Xét $\sqrt{3+2x}>1+\sqrt[3]{5+x}$

Đặt $\sqrt[3]{5+x}=a\geq\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

$\rightarrow\sqrt{2a^3-7}>a+1$

$\Leftrightarrow 2a^3-7>(a+1)^2$

$\Leftrightarrow (a-2)(2a^2+3a+4)>0.$

$\Leftrightarrow a>2\Rightarrow x>3$

Vậy $\sqrt{3+2x}>1+\sqrt[3]{5+x}$

$\Leftrightarrow x>3$

Tương tự $\sqrt{3+2x}>1+\sqrt[3]{5+x}$

$\Leftrightarrow x<3$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{3+2x}$ và

$g(x)=1+\sqrt[3]{5+x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(3;+\infty)$ và nửa khoảng $\left[-\frac{3}{2};3\right)$.

PT đã cho trở thành: $f_3(x)=g_3(x)$ (1)

+Với $x>3$ thì $f(x)>g(x)>3$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $-\frac{3}{2}\leq x<3$ thì $0\leq f(x)<g(x)<3$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$.

+Với $x=3$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=3$.

Thí dụ 21. Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.Chứng minh

$$\sqrt{3}sinx.sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)\leq xsin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{\pi sinx}{3}\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.+ Dễ thấy BĐT(*) đúng với $x=0$

và thấy nếu BĐT(*) đúng với x_0 thì nó cũng đúng với $-x_0$ (do Vế trái và vế phải đều là các hàm số chẵn) nên ta chỉ cần chứng minh BĐT đúng với $x>0$.

Vớp $x\in(0;\frac{\pi}{2}]$ suy ra $sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)>0$;

$sinx>0$ và $sin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{\pi sinx}{3}\right)\right)>0$.

Ta chứng minh BĐT cần chứng minh sau:

$sinx<x$ với x>0. Thật vậy

Xét $y=sinx-x$ với x>0 có

$y'=cosx-1\leq 0$

Suy ra hàm số $y=sinx-x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Vì vậy

$y=sinx-x<y(0)=0$

Suy ra $sinx<x$

Do $sinx<x$ nên có

$$\sqrt{3}sinx.sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)\leq\sqrt{3}x.sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)$$

Ta chứng minh

$$\sqrt{3}x.sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)\leq xsin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{\pi sinx}{3}\right)\right)$$

$$\leftrightarrow\sqrt{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)\leq sin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{\pi sinx}{3}\right)\right)$$

(*)

Đặt $\sin x=t\in[0;1]$.

BĐT đã cho trở thành

$$\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)$$

$$\le \sin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(2.\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right). (1)$$

Xét $f(t) = 2sin\frac{\pi t}{6}$ và $g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi t}{3}$

Bất đẳng thức (*) có dạng:

$f_2(t) \le g_2(t)$.

Xét $f(t) \le g(t)$

$$\Leftrightarrow 2sin\frac{\pi t}{6} \le \frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi t}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2sin\frac{\pi t}{6} \le \frac{4}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi t}{6}cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}sin\frac{\pi t}{6} \le sin\frac{\pi t}{6}cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\Leftrightarrow sin\frac{\pi t}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - cos\frac{\pi t}{6}\right) \le 0 (2)$$

Do xét $t \in (0;1]$ nên $\frac{\pi t}{6} \in (0;\frac{\pi}{6}]$

Suy ra $sin\frac{\pi t}{6}>0$ và $cos\frac{\pi t}{6} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra (2) đúng.

Dấu '=' xảy ra tại (2) khi và chỉ khi t=1.

Ta có $0 < f(t) \le g(t) \le \frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi}{3} = 1$

Theo kết quả 2 có: $f_2(t) \le g_2(t)$.

Vậy (*) đúng.

Từ đó BĐT đã cho chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Ta có thể tạo ra PT sau:

Thí dụ 22. Giải phương trình:

$$\sqrt{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)\right)$$
$$= sin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{\pi sinx}{3}\right)\right)\right)$$

HD: Đặt $\sin x = t \in [-1;1]$

Ta có

$$\sqrt{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)\right)$$
$$= sin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)\right) (*)$$

Ta có $t = 0$ là nghiệm (*) .

Dễ thấy(*) có nghiệm t_0 thì nó cũng có nghiệm $-t_0$ (do Vế trái và vế phải đều là các hàm số lẻ).

Do vậy ta chỉ cần xét $t \in (0;1]$

Xét $f(t) = 2sin\frac{\pi t}{6}$ và $g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi t}{3}$

(*) có dạng:

$f_3(t) = g_3(t)$.

Xét $f(t) \le g(t)$

$$\Leftrightarrow 2sin\frac{\pi t}{6} \le \frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi t}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2sin\frac{\pi t}{6} \le \frac{4}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi t}{6}cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}sin\frac{\pi t}{6} \le sin\frac{\pi t}{6}cos\frac{\pi t}{6}$$

$\Leftrightarrow sin\frac{\pi t}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-cos\frac{\pi t}{6}\right)\le 0$ (1)

Do xét $t\in(0;1]$ nên $\frac{\pi t}{6}\in(0;\frac{\pi}{6}]$

Suy ra $sin\frac{\pi t}{6}>0$ và $cos\frac{\pi t}{6}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra (1) đúng.

Dấu '=' xảy ra tại (1) khi và chỉ khi t=1.

Ta có $0<f(t)\le g(t)\le\frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{\pi}{3}=1$

Theo kết quả 2 có: $f_3(t)\le g_3(t)$.

Theo các nhận xét ở trên thì dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$sinx=0\ v\ sinx=\pm1\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$.

Thí dụ 23.

Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.Chứng minh

$$xsin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)\ge\sqrt{2}sinx.sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi sinx}{4}\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.+ Dễ thấy BĐT(*) đúng với $x=0$

và thấy nếu BĐT(*) đúng với x_0 thì nó cũng đúng với $-x_0$ (do Vế trái và vế phải đều là các hàm số chẵn) nên ta chỉ cần chứng minh BĐT đúng với $x>0$.

Vớp $x\in(0;\frac{\pi}{2}]$ suy ra $sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)>0$;

$sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi sinx}{4}\right)\right)>0$ và $sinx>0$.

Ta chứng minh BĐT cần chứng minh sau:

$sinx<x$ với x>0. Thật vậy

Xét $y=sinx-x$ với x>0 có

$y'=cosx-1\le0$

Suy ra hàm số $y=sinx-x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Vì vậy

$y=sinx-x<y(0)=0$

Suy ra $sinx<x$

Do $sinx<x$ nên có

$$xsin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)\ge sinx.sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)$$

Ta chứng minh

$$sinx.sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)\ge\sqrt{2}sinxsin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi sinx}{4}\right)\right)$$

$$\leftrightarrow sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)\ge\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi sinx}{4}\right)\right)$$

(*)

Đặt $\sin x=t\in[0;1]$.

BĐT(1) trở thành

$$\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\ge\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right)}\ (1)$$

Xét $f(t)=sin\frac{\pi t}{2}$ và $g(t)=\sqrt{2}sin\frac{\pi t}{4}$

Bất đẳng thức (1) có dạng:

$f_2(t)\ge g_2(t)$.

Xét $f(t)\ge g(t)$

$$\Leftrightarrow sin\frac{\pi t}{2}\ge\sqrt{2}sin\frac{\pi t}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2sin\frac{\pi t}{4}cos\frac{\pi t}{4}\ge\sqrt{2}sin\frac{\pi t}{4}$$

$$\Leftrightarrow sin\frac{\pi t}{4}\left(2cos\frac{\pi t}{4}-\sqrt{2}\right)\ge0\ (2)$$

Do xét $t\in(0;1]$ nên $\frac{\pi t}{4}\in(0;\frac{\pi}{4}]$

Suy ra $sin\frac{\pi t}{6}>0$ và $cos\frac{\pi t}{6}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra (2) đúng.

Dấu '=' xảy ra tại (2) khi và chỉ khi t=1.

Ta có $0 < f(t) \le g(t) \le \sqrt{2}sin\frac{\pi}{4} = 1$

Theo kết quả 2 có: $f_2(t) \le g_2(t)$.

Vậy (*) đúng.

Từ đó BĐT đã cho chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Tương tự.

1) Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.Chứng minh

$$xsin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right) \ge 2sinx.sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

2) Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.Chứng minh

$$xsin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)\right)$$
$$\ge 2sinx.sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi sinx}{6}\right)\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

HD: Xét $f(t) = sin\frac{\pi t}{2}$ và $g(t) = 2sin\frac{\pi t}{6}$

Thí dụ 24. Giải phương trình:

$$sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi sinx}{2}\right)\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi sinx}{4}\right)\right)\right)$$

HD: Đặt $\sin x = t \in [-1;1]$

$$sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right) = \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right)\right)$$

Xét $f(t) = sin\frac{\pi t}{2}$ và $g(t) = \sqrt{4}sin\frac{\pi t}{4}$

Ta có PT:

$f_3(t) = g_3(t)$.

Xét $f(t) \ge g(t)$

$$\Leftrightarrow sin\frac{\pi t}{2} \ge \sqrt{2}sin\frac{\pi t}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2sin\frac{\pi t}{4}cos\frac{\pi t}{4} \ge \sqrt{2}sin\frac{\pi t}{4}$$

$$\Leftrightarrow sin\frac{\pi t}{4}\left(2cos\frac{\pi t}{4} - \sqrt{2}\right) \ge 0 \ (1)$$

Do xét $t \in (0;1]$ nên $\frac{\pi t}{4} \in (0;\frac{\pi}{4}]$

Suy ra $sin\frac{\pi t}{6}$>0 và $cos\frac{\pi t}{6} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra (1) đúng.

Theo kết quả 2 có: $f_3(t) \le g_3(t)$.

Theo các nhận xét ở trên thì dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$sinx = 0 \ v \ sinx = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Thí dụ 25. Giải phương trình:

$$sin\left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi sinx}{3}\right)\right) = \sqrt{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi sinx}{6}\right)\right).$$

Lời giải.

Đặt $\sin x = t \in [-1;1]$.

PT đã cho trở thành:

$$sin\left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi t}{3}\right)\right) = \sqrt{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi t}{6}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3}sin\left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi t}{3}\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi t}{6}\right)\right) (*)$$

Ta có $t = 0$ là nghiệm (*) .

Dễ thấy(*) có nghiệm t_0 thì nó cũng có nghiệm $-t_0$ (do Vế trái và vế phải đều là các hàm số lẻ).

Do vậy ta chỉ cần xét $t \in (0;1]$

Xét $f(t) = \frac{\sqrt{6}}{3} sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{3}$ và g(t) $= \sqrt{2}\sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6}$

(*) có dạng:

$f_2(t) = g_2(t)$.

Xét $f(t) > g(t)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{3} > \sqrt{2} sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6}$

$\Leftrightarrow sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{3} > \sqrt{3} sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6}$

$\Leftrightarrow sin\left(2.\frac{\sqrt{2}\pi t}{6}\right) > \sqrt{3} sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6}$

$\Leftrightarrow 2 sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6} cos \frac{\sqrt{2}\pi t}{6} > \sqrt{3} sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6}$

$\Leftrightarrow sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6}\left(cos \frac{\sqrt{2}\pi t}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$ (1)

Do $t \in (0;1]$ nên $\frac{\sqrt{2}\pi t}{6} \in (0; \frac{\sqrt{2}\pi}{6}]$

Suy ra $sin \frac{\sqrt{2}\pi t}{6} > 0$ và $y = cos \frac{\sqrt{2}\pi t}{6}$ là hàm số nghịch biến trên $(0;1]$

(1) $\Leftrightarrow cos \frac{\sqrt{2}\pi t}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$\Leftrightarrow cos \frac{\sqrt{2}\pi t}{6} > cos \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\pi t}{6} < \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow t < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự $f(t) > g(t) \Leftrightarrow t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do $t \in (0;1]$ nên

$\frac{\sqrt{2}\pi t}{3} \in (0; \frac{\sqrt{2}\pi}{3}]$

$\frac{\sqrt{2}\pi t}{6} \in (0; \frac{\sqrt{2}\pi}{6}]$

Suy ra f(t) và g(t) đồng biến trên nửa khoảng (0;1] và các tập con của (0;1].

Với $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$ thì

$\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < f(t) < g(t) < g(1) \approx 0,95 < 1.$

Theo kết quả 2 ta có $f_2(t) < g_2(t)$.

Với $t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thì

$\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > f(t) > g(t) > 0.$

Theo kết quả 2 ta có $f_2(t) < g_2(t)$.

Dễ thấy $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm của PT(*).

Vậy $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm duy nhất của PT(*) khi xét $t \in (0;1]$.Theo các nhận xét ở trên thì PT(*) có tất cả 3 nghiệm $t = 0; t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra PT đã cho có nghiệm là

$x = k\pi; x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi.$

Thí dụ 26. Giải phương trình:

$$\frac{4^{\frac{4^x+6^x}{10}}+6^{\frac{4^x+6^x}{10}}}{2}=2^{\frac{2^x+3^x}{5}}+3^{\frac{2^x+3^x}{5}}$$

Lời giải

$$PT\Leftrightarrow\frac{4^{\frac{4^x+6^x}{10}}+6^{\frac{4^x+6^x}{10}}}{10}=\frac{2^{\frac{2^x+3^x}{5}}+3^{\frac{2^x+3^x}{5}}}{5}$$

Xét $\frac{4^x+6^x}{10}>\frac{2^x+3^x}{5}$

$\Leftrightarrow 4^x+6^x>2(2^x+3^x)$

$\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)\left(2^x+3^x\right)>0$

$\Leftrightarrow 2^x>2\Leftrightarrow x>1.$

Tương tự $\frac{4^x+6^x}{10}<\frac{2^x+3^x}{5}\Leftrightarrow x<1$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\frac{4^x+6^x}{10}$ và $g(x)=\frac{2^x+3^x}{5}$

cùng đồng biến trên

khoảng $(1;+\infty)$ và nửa khoảng $(-\infty;1)$.

PT đã cho trở thành: $f_2(x)=g_2(x)$ (1)

+Với $x>1$ thì $f(x)>g(x)>1$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $x<1$ thì $f(x)<g(x)<1$

nên theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với $x=1$ nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=1$.

Thí dụ 27. Cho x là số thực. Chứng minh

$6^{6^x+2^x-2}+2^{6^x+2^x-2}\geq 4^{4^x+3^x-2}+3^{4^x+3^x-2}$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

+Với $x>0$ thì $2^x>2^0=1;\left(\frac{3}{2}\right)^x>\left(\frac{3}{2}\right)^0=1$

Suy ra $2^x-1>0;3^x-2^x>0$

Suy ra $(2^x-1)(3^x-2^x)>0$

Tương tự

Với $x<0$ thì $2^x<2^0=1;\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{3}{2}\right)^0=1$

Suy ra $(2^x-1)(3^x-2^x)>0$

+Với $x=0$ suy ra $(2^x-1)(3^x-2^x)=0$

Vậy ta có: $(2^x-1)(3^x-2^x)\geq 0$

Suy ra $6^x+2^x-2\geq 4^x+3^x-2>-2$

Xét $f(x)=6^x+2^x-2;g(x)=4^x+3^x-2$

đồng biến trên R và $f(x)\geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có: $f_2(x)\geq g_2(x)$

hay

$6^{6^x+2^x-2}+2^{6^x+2^x-2}-2\geq 4^{4^x+3^x-2}+3^{4^x+3^x-2}-2$

$\Leftrightarrow 6^{6^x+2^x-2}+2^{6^x+2^x-2}\geq 4^{4^x+3^x-2}+3^{4^x+3^x-2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=0.

Thí dụ 28. Cho x là số thực. Chứng minh

$36+6.\left(\sqrt[6]{6}\right)^{6^x}\geq 4.3^{3^{x-1}+2^{x-1}}+9.2^{3^{x-1}+2^{x-1}}$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

$36+6.\left(\sqrt[6]{6}\right)^{6^x}\geq 4.3^{3^{x-1}+2^{x-1}}+9.2^{3^{x-1}+2^{x-1}}$

$\Leftrightarrow 1+6^{6^{x-1}-1}\geq 3^{3^{x-1}+2^{x-1}-2}+2^{3^{x-1}+2^{x-1}-2}$

$\Leftrightarrow 6^{6^{x-1}-1}\geq 3^{3^{x-1}+2^{x-1}-2}+2^{3^{x-1}+2^{x-1}-2}-1$

+Với $x>1$ thì $2^x>2^1=2;3^x>3^1=3$

Suy ra $(2^x-2)(3^x-3)>0$

+Với $x<1$ thì $2^x<2^1=2;3^x<3^1=3$

Suy ra $(2^x-2)(3^x-3)>0$

+Với $x<1$ thì $(2^x-2)(3^x-3)=0$

Vậy có $(2^x-2)(3^x-3)\geq 0$

$\Leftrightarrow 6^x\geq 2.3^x+3.2^x-6$

$\Leftrightarrow 6^{x-1}\geq 3^{x-1}+2^{x-1}-1$

Xét $f(x)=6^{x-1};g(x)=3^{x-1}+2^{x-1}-1$

đồng biến trên R và $f(x)\geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có: $f_2(x)\geq g_2(x)$

hay

$6^{6^{x-1}-1}\geq 3^{3^{x-1}+2^{x-1}-2}+2^{3^{x-1}+2^{x-1}-2}-1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=1.

Thí dụ 29. Cho x là số thực thỏa mãn $x\geq 2$.Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}}}\leq\sqrt{4+\sqrt{-2+\sqrt{4+\sqrt{-2+x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Xét $f(x)=\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}$

$g(x)=\sqrt{4+\sqrt{-2+x}}$

$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}\leq\sqrt{4+\sqrt{-2+x}}$

$\Leftrightarrow\left(8+\sqrt{-2+x}\right)^2\leq\left(4+\sqrt{-2+x}\right)^3$

$\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{-2+x}\left((-2+x)+11\sqrt{-2+x}+32\right)$ (lđ)

Vậy $2\leq f(x)\leq g(x)$ với $x\geq 2$

Mà f(x) và g(x) đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Áp dụng kết quả 2 suy ra $f_2(x)\leq g_2(x)$

Hay

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}}}\leq\sqrt{4+\sqrt{-2+\sqrt{4+\sqrt{-2+x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=2.

Thí dụ 30. Cho x là số thực thỏa mãn $x\geq 2$.Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}}}\leq 2.\sqrt[6]{-1+6.\sqrt[6]{-1+3x}}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Xét $f(x)=\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}$

$g(x)=2.\sqrt[6]{-1+3x}$

$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}\leq 2.\sqrt[6]{-1+3x}$

$\Leftrightarrow\left(8+\sqrt{-2+x}\right)^2\leq 64(-1+3x)$

$\Leftrightarrow 0\leq 191(x-2)-16\sqrt{-2+x}+256$

$\Leftrightarrow 0\leq 19(x-2)+\left(\sqrt{-2+x}-8\right)^2-16\sqrt{-2+x}+192$

(luôn đúng)

Vậy $2\leq f(x)\leq g(x)$ với $x\geq 2$

Mà f(x) và g(x) đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Áp dụng kết quả 2 suy ra $f_2(x)\leq g_2(x)$

Hay

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}}} \le 2.\sqrt[6]{-1+6.\sqrt[6]{-1+3x}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=2.

Thí dụ 31. Cho x là số thực thỏa mãn $x \ge 1$.Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+x}}}}}} \ge \sqrt[216]{x}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Xét $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+x}}$

$g(x)=\sqrt[6]{x}$

$\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+x}} \le \sqrt[6]{x}$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{-1+x}\right)^2 \le x$

$\Leftrightarrow 0 \le 2\sqrt{-1+x}$ (luôn đúng)

Vậy $1 \le f(x) \le g(x)$ với $x \ge 1$

Mà f(x) và g(x) đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Áp dụng kết quả 2 suy ra $f_3(x) \le g_3(x)$

Hay

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+x}}}}}} \ge \sqrt[216]{x}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=1.

BT.Cho x là số thực thỏa mãn $x \ge 1$.Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+x}}}} \le 1+2\sqrt{2\sqrt{x-1}}$$

HD:Xét $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt{-1+x}}$

$g(x)=1+2\sqrt{x-1}$.

Thí dụ 32. Cho x là số thực thỏa mãn $x \ge 2$.Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}}} \ge \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Xét $f(x)=\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}$

$g(x)=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}$

$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}} \ge \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}$

$\Leftrightarrow 8+\sqrt{-2+x} \ge 6+\sqrt[3]{6+x}$

$\Leftrightarrow 2+\sqrt{x-2} \ge \sqrt[3]{8+x-2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{-2+x}\left((-2+x)+11\sqrt{-2+x}+12\right) \ge 0$ **(ld)**

Vậy $f(x) \ge g(x) \ge 2$ với $x \ge 2$

Mà f(x) và g(x) đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Áp dụng kết quả 2 suy ra $f_2(x) \ge g_2(x)$

Hay

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+\sqrt[3]{8+\sqrt{-2+x}}}} \ge \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=2.

Thí dụ 33. Cho x là số thực thỏa mãn

$0 \le x \le 1$.Chứng minh rằng

$$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}}} \le \sqrt[8]{x}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Xét $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

$g(x)=\sqrt{x}$

$\sqrt{1-\sqrt{1-x}} \le \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x} \le x$

$\Leftrightarrow 0 \le \sqrt{1-x}\left(1-\sqrt{1-x}\right)$ (luôn đúng)

Vậy $0 \le f(x) \le g(x) \le 1$ với $0 \le x \le 1$.

Mà f(x) và g(x) đồng biến trên [0; 1].

Áp dụng kết quả 2 suy ra $f_3(x) \le g_3(x)$

Hay

$$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}}} \le \sqrt[8]{x}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\sqrt{1-x}\left(1-\sqrt{1-x}\right)=0 \leftrightarrow x=0\ V\ x=1$

Tương tự

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}} \le \sqrt[4]{x}$$

Thí dụ 34. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} < -1+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7+x}}}$$

Lời giải.

ĐK: $x \ge -2$

.Xét $\sqrt{2+x} > -1+\sqrt{7+x}$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{2+x} > \sqrt{7+x} \Leftrightarrow 3+x+2\sqrt{2+x} > 7+x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} > 2 \Leftrightarrow x > 2$.

Tương tự

$\sqrt{2+x} > -1+\sqrt{7+x}$

$\Leftrightarrow -2 \le x < 2$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$ và

$g(x)=-1+\sqrt{7+x}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(2;+\infty)$ và nửa khoảng $[-2;2)$.

BPT đã cho trở thành: $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 2$ thì $f(x) > g(x) > 2$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$.

+Với $-2 \le x < 2$ thì $-2 < 0 \le f(x) < g(x) < 2$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$.

Vậy tập nghiệm BPT đã cho là [-2;2).

Thí dụ 35. Giải bất phương trình:

$$-1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3+x}}}} > x$$

Lời giải.

ĐK: $x \ge -3$

.Xét $-1+\sqrt{2+\sqrt{3+x}}>x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{3+x}}>x+1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \begin{cases} x\geq -1 \\ 2+\sqrt{3+x}>(x+3-2)^2 \end{cases} \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \begin{cases} x\geq -1 \\ (1+\sqrt{3+x})(\sqrt{3+x}-2)(x+2+\sqrt{3+x})<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \begin{cases} x\geq -1 \\ \sqrt{3+x}-2<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -3\leq x<1$

Tương tự $-1+\sqrt{2+\sqrt{3+x}}>x$

$\Leftrightarrow x>1$

Dễ thấy hàm số $f(x)=-1+\sqrt{2+\sqrt{3+x}}$ và

$g(x)=x$ cùng đồng biến trên

khoảng $(1;+\infty)$ và nửa khoảng $[-3;1)$.

BPT đã cho trở thành: $f_3(x)<g_3(x)$

+Với $x>1$ thì $1<f(x)<g(x)$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$.

+Với $-3\leq x<1$ thì $1>f(x)>g(x)>-3$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$.

+Với $x=1$ thì $f_3(x)=g_3(x)$

Vậy tập nghiệm BPT đã cho là [-3;1)

Thí dụ 36. Giải bất phương trình:

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}>1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}$

Lời giải.

ĐK: $-1+2\sqrt{2x-3}\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{13}{8}$.

Xét $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>1+\sqrt{2x-3}$

$\Leftrightarrow 2+\sqrt{2+x}>2x-2+2\sqrt{2x-3}$

$\Leftrightarrow 0>2x-4+2\sqrt{2x-3}-\sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow 0>2(x-2)+\frac{8(x-2)}{2\sqrt{2x-3}+\sqrt{2+x}}$

$\Leftrightarrow 0>(x-2)[2+\frac{8}{2\sqrt{2x-3}+\sqrt{2+x}}]$

$\Leftrightarrow x<2$.

Tương tự $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}<1+\sqrt{2x-3}$

$\Leftrightarrow x>2$

Xét:

$1+\sqrt{2x-3}\geq \frac{13}{8} \Leftrightarrow x\geq \frac{217}{128}$.

$1+\sqrt{2x-3}<\frac{13}{8} \Leftrightarrow \frac{13}{8}\leq x<\frac{217}{128}$

Dễ thấy hàm số $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$ và

$g(x)=1+\sqrt{2x-3}$ cùng đồng biến trên

khoảng $(2;+\infty)$ và nửa khoảng $\left[\frac{3}{2};2\right)$.

BPT đã cho trở thành: $f_3(x)>g_3(x)$ (1)

+Với $x>2$ thì $2<f(x)<g(x)$

nên theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$.

+Với $x\in\left[\frac{217}{128};2\right)$ thì $2>f(x)>g(x)\ge\frac{13}{8}$

nên theo **kết quả 2 mở rộng** có. $f_3(x)<g_3(x)$

Thật vậy do hàm số y=f(x) và y=g(x) cùng đồng biến trên miền H=$\left[\frac{13}{8};2\right)$ và theo trên có:

$$\forall x\in\left[\frac{217}{128};2\right)\to 2>f(x)>g(x)\ge\frac{13}{8}$$

do hàm số y=f(x) đồng biến nên

$\Rightarrow f_2(x)=f(f(x))>f(g(x))$

Áp dụng kết quả $f(x)>g(x)$ với $\forall x\in\left[\frac{13}{8};2\right)$

có:

$$f(g(x))>g(g(x))=g_2(x)$$

Do vậy $f_2(x)>g_2(x),\forall x\in\left[\frac{217}{128};2\right)$

Bằng quy nạp có $f_n(x)>g_n(x),\forall x\in\left[\frac{217}{128};2\right)$.

+Với $\frac{13}{8}\le x<\frac{217}{128}$ thì

$$f_3(x)\ge f_3\left(\frac{13}{8}\right)\approx 1,99>g_3\left(\frac{217}{128}\right)=\frac{3}{2}\ge g_3(x)$$

Hoặc chỉ cần đánh giá:

$$f_3(x)>\sqrt{3}>g_3\left(\frac{217}{128}\right)=\frac{3}{2}\ge g_3(x)$$

+ với x=2 thì $f_3(x)=g_3(x)$

Vậy tập nghiệm của BPT:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}>1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}$$

là: $\left[\frac{13}{8};2\right)$

*Từ cách chứng minh kết quả 2 mở rộng thấy $\left[\frac{217}{128};2\right)$ là tập con thực sự của $\left[\frac{13}{8};2\right)$ nên ta tạm coi khi xét $x\in\left[\frac{217}{128};2\right)$ vẫn là xét $\left[\frac{13}{8};2\right)$ thì quá trình chứng minh kết quả 2 mở rộng như là chứng minh kết quả 2.

Việc phát biểu kết quả 2 mở rộng xin dành cho bạn đọc.

Xin giới thiệu cách giải khác thí dụ viết thêm đầu tiên :

Thí dụ 1. Cho $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-1$.

Giải phương trình: $f_{1982}(x)=x$. (1)

Lờigiải.

Ta có bảng biến thiên hàm số f(x) như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	$-\frac{17}{16}$	↗	$+\infty$

Do $f(x)\ge-\frac{17}{16}$ với mọi $x\in R$ nên $x=f_{1982}(x)\ge-\frac{17}{16}.\forall x.$

•**TH1:**Xét $x\in[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$

Từ bảng biến thiên có f(x) nghịch biến trên nửa khoảng $[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ và có tập giá trị là $[-\frac{103}{256};-\frac{1}{4})$ $\subset[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$.Áp dụng kết quả 1 trên khoảng xác định $[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ ta có

(1) $\Leftrightarrow f_2(x)=x$

$(x^2+\frac{1}{2}x-1)^2+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}x-1\right)-1=x.(2)$

$(2)\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x+1)(2x+1)(2x^2-x-2)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\frac{1}{2}\\x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

Do $x\in[-\frac{17}{16};-\frac{1}{4})$ nên (2) có 3 nghiệm là

$x=-1;x=-\frac{1}{2};x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$.

• **TH2:**Xét $x\in[-\frac{1}{4};+\infty)$

Từ bảng biến thiên hàm số f(x) suy ra tập giá trị của hàm số f(x) khi này là $[-\frac{17}{16};+\infty)$.

Xét $f(x)>x\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x-1>x$

$$\Leftrightarrow x>\frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$$f(x)<x\underset{x\geq-\frac{1}{4}}{\Longleftrightarrow}x^2+\frac{1}{2}x-1<x$$

$$\underset{x\geq-\frac{1}{4}}{\Longleftrightarrow}-\frac{1}{4}\leq x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$$f(x)\geq-\frac{1}{4}\overset{x\geq-\frac{1}{4}}{\longleftrightarrow}x^2+\frac{1}{2}x-1\geq-\frac{1}{4}$$

$$\overset{x\geq-\frac{1}{4}}{\longleftrightarrow}x\geq\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$$

$$f(x)<-\frac{1}{4}\overset{x\geq-\frac{1}{4}}{\longleftrightarrow}x<\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$$

+Với $-\frac{1}{4}\leq x<\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$ thì

$f(x)<-\frac{1}{4}\leq x$

+Với $\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\leq x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ thì

$$-\frac{1}{4}\leq f(x)<g(x)=x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

Nên theo **kết quả 2 mở rộng** có

$f_{1982}(x)<g_{1982}(x)$.

Thật vậy

do hàm số y=f(x) và y=g(x) cùng đồng biến trên miền H= $\left[-\frac{1}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ và theo trên có:

Với $\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\leq x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ thì

$$-\frac{1}{4}\leq f(x)<g(x)=x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

do hàm số y=f(x) đồng biến trên $[-\frac{1}{4};+\infty)$ nên $f_2(x)=f\big(f(x)\big)<f(g(x))$

Do $f(x)<g(x)$ khi $-\frac{1}{4}\leq x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ nên:

$f\big(g(x)\big)<g\big(g(x)\big)=g_2(x)$

Do vậy $f_2(x)<g_2(x)$

Bằng quy nạp có $f_{1982}(x)<g_{1982}(x)=x$

+Với $x>\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ thì $f(x)>x=g(x)>\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

Theo kết quả 2 suy ra $f_{1982}(x)>g_{1982}(x)=$ x

+Với $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ là nghiệm của PT đã cho.

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm là

$x=-1;x=-\frac{1}{2};x=\frac{1-\sqrt{17}}{4};x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Thí dụ 37. Giải bất phương trình:

$1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}>\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}$

Lời giải.

ĐK: $-1+2\sqrt{-3+2x}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{13}{8}$

Xét $1+\sqrt{-3+2x} > \sqrt[3]{6+x}$ (*)

Đặt $\sqrt[3]{6+x}=a>1$

$(*) \Leftrightarrow 1+\sqrt{2a^3-15}>a$

$\Leftrightarrow \sqrt{2a^3-15}>a-1$

$\Leftrightarrow 2a^3-15>(a-1)^2$

$\Leftrightarrow (a-2)(2a^2+3a+8)>0 \leftrightarrow a>2$

$\Rightarrow x>2$

Vậy $1+\sqrt{-3+2x}>\sqrt[3]{6+x} \Leftrightarrow x>2$

Tương tự

$1+\sqrt{-3+2x}<\sqrt[3]{6+x}$

$\underset{x\geq\frac{13}{8}}{\Longleftrightarrow} \frac{13}{8}\leq x<2$

Xét $f(x)=1+\sqrt{-3+2x}, g(x)=\sqrt[3]{6+x}$

BPT đã cho trở thành: $f_2(x)>g_2(x)$

+Với $x>2$ thì $f(x)>g(x)>2$

Theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$

* Xét $f(x)=1+\sqrt{-3+2x}\geq\frac{13}{8}\Leftrightarrow x\geq\frac{217}{128}$

$$f(x)=1+\sqrt{-3+2x}<\frac{13}{8}\Leftrightarrow\frac{13}{8}\leq x<\frac{217}{128}$$

+ Với $\frac{13}{8}\leq x<\frac{217}{128}$ thì

$f_2(x)<f_2\left(\frac{217}{128}\right)=\frac{3}{2}$

$<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{\frac{61}{8}}}=g_2\left(\frac{13}{8}\right)\leq g_2(x)$

+ Với $\frac{217}{128}\leq x<2$ thì theo trên có

$\frac{13}{8}\leq f(x)<g(x)<2$

Ta chứng minh: $f_2(x)<g_2(x)$

(kết quả 2 mở rộng)

Thật vậy

Do trên có

$\frac{13}{8}\leq f(x)<g(x)<2$

Mà f(x) đồng biến nên

$f_2(x)=f(f(x))>f(g(x))$

Áp dụng kết quả

$\frac{13}{8}\leq x<2$ có $f(x)<g(x)$

Thì từ

$\frac{13}{8}\leq f(x)<g(x)<2$ ta có:

$f(g(x))>g(g(x))=g_2(x)$

Từ đó suy ra: $f_2(x)<g_2(x)$

+ với x=2 thì $f_2(x)=g_2(x)$

Vậy nghiệm BPT đã cho là: $x>2$

Thí dụ 38. Giải bất phương trình:

$1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}\leq\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{14+x}}$

Lời giải.

ĐK: $-1+2\sqrt{-3+2x}\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{13}{8}$

Xét $1+\sqrt{-3+2x}>\sqrt[4]{14+x}$ (*)

Đặt $\sqrt[4]{14+x}=a>1$

$(*)\Leftrightarrow 1+\sqrt{2a^4-31}>a$

$\Leftrightarrow\sqrt{2a^4-31}>a-1$

$\Leftrightarrow 2a^4-31>(a-1)^2$

$\Leftrightarrow (a-2)(2a^3+4x^2+7a+16)>0 \leftrightarrow a>2$

$\Rightarrow x>2$

Vậy $1+\sqrt{-3+2x}>\sqrt[4]{14+x} \Leftrightarrow x>2$

Tương tự

$1+\sqrt{-3+2x}<\sqrt[4]{14+x}$

$\underset{x\geq\frac{13}{8}}{\Longleftrightarrow}\frac{13}{8}\leq x<2$

Xét $f(x)=1+\sqrt{-3+2x}, g(x)=\sqrt[4]{14+x}$

BPT đã cho trở thành: $f_2(x)\leq g_2(x)$

+Với $x>2$ thì $f(x)>g(x)>2$

Theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$

* Xét $f(x)=1+\sqrt{-3+2x}\geq\frac{13}{8}\Leftrightarrow x\geq\frac{217}{128}$

$$f(x)=1+\sqrt{-3+2x}<\frac{13}{8}\Leftrightarrow\frac{13}{8}\leq x<\frac{217}{128}$$

+ Với $\frac{13}{8}\leq x<\frac{217}{128}$ thì

$f_2(x)<f_2\left(\frac{217}{128}\right)=\frac{3}{2}$

$<\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{\frac{125}{8}}}=g_2\left(\frac{13}{8}\right)\leq g_2(x)$

+ Với $\frac{217}{128}\leq x<2$ thì theo trên có

$\frac{13}{8}\leq f(x)<g(x)<2$

Ta chứng minh: $f_2(x)<g_2(x)$

(kết quả 2 mở rộng)

Thật vậy

Do trên có

$\frac{13}{8}\leq f(x)<g(x)<2$

Mà f(x) đồng biến nên

$f_2(x)=f(f(x))>f(g(x))$

Áp dụng kết quả

$\frac{13}{8}\leq x<2$ có $f(x)<g(x)$

Thì từ

$\frac{13}{8}\leq f(x)<g(x)<2$ ta có:

$f(g(x))>g(g(x))=g_2(x)$

Từ đó suy ra: $f_2(x)<g_2(x)$

+ với x=2 thì $f_2(x)=g_2(x)$

Vậy nghiệm BPT đã cho là: $\frac{13}{8}\leq x\leq 2$

Các BPT tương tự:

$1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}\geq\sqrt[4]{8+4.\sqrt[4]{8+4x}}$

$1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}\geq\sqrt[4]{6+5.\sqrt[4]{6+5x}}$

$1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}\leq\sqrt[3]{4+2.\sqrt[3]{4+2x}}$

$1+\sqrt{-1+2\sqrt{-3+2x}}\leq\sqrt[3]{2+3.\sqrt[3]{2+3x}}$

Thí dụ 39. Giải bất phương trình:

$2+\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{-\sqrt{2}+x}}>\sqrt{-2+4\sqrt{-2+4x}}$

Lời giải.

ĐK: $x\geq\sqrt{2}$.

Xét $2+\sqrt{-\sqrt{2}+x}>\sqrt{-2+4x}$

$\Leftrightarrow ..\Leftrightarrow x<2+\sqrt{2}$.

Tương tự $2+\sqrt{-\sqrt{2}+x}<\sqrt{-2+4x}$

$\Leftrightarrow x>2+\sqrt{2}$

BPT đã cho có dạng: $f_2(x)>g_2(x)$

Xét $f(x)=2+\sqrt{-\sqrt{2}+x}; g(x)=\sqrt{-2+4x}$

+Với $x > 2+\sqrt{2}$ thì

$2+\sqrt{2} < f(x) < g(x)$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) < g_2(x)$

+Với $\sqrt{2} \le x < 2+\sqrt{2}$ thì

$2+\sqrt{2} > f(x) > g(x) \ge \sqrt{4\sqrt{2}-2} > \sqrt{2}$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) > g_2(x)$

Nghiệm BPT là $\sqrt{2} \le x < 2+\sqrt{2}$

Thí dụ 40. Giải bất phương trình:

$1+\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{2x-1}}}} > x$

Lời giải.

ĐK: $x \ge \frac{1}{2}$.

Xét $1+\sqrt{2x-1} > x \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} > x-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<0 \\ \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2x-1 > (x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x < 2+\sqrt{2}$

Tương tự $1+\sqrt{2x-1} < x$

$\Leftrightarrow x > 2+\sqrt{2}$

BPT đã cho có dạng: $f_4(x) > g_4(x)$

Xét $f(x) = 1+\sqrt{2x-1}; g(x) = x$

là các hàm số đồng biến .

+Với $x > 2+\sqrt{2}$ thì

$2+\sqrt{2} < f(x) < g(x)$

Theo kết quả 2 suy ra $f_4(x) < g_4(x)$

+Với $\frac{1}{2} \le x < 2+\sqrt{2}$ thì

$2+\sqrt{2} > f(x) > g(x) \ge \frac{1}{2}$

Theo kết quả 2 suy ra $f_4(x) > g_4(x)$

+Với $x = 2+\sqrt{2}$ thì $f_4(x) = g_4(x)$

Nghiệm BPT là $\frac{1}{2} \le x < 2+\sqrt{2}$

Thí dụ 41. Giải bất phương trình:

$\sqrt[4]{5+12.\sqrt[4]{5+12.\sqrt[4]{5+12x}}} < x$

Lời giải.

ĐK: $x \ge -\frac{5}{12}$.

Xét $\sqrt[4]{5+12x} > x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ 5+12x > x^4 \end{cases} \end{array}\right. .$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ 0 > (x^2-2x-1)(x^2+2x+5) \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x < 1+\sqrt{2}$

Tương tự $\sqrt[4]{5+12x} < x$

$\Leftrightarrow x > 1+\sqrt{2}$

BPT đã cho có dạng: $f_4(x) < g_4(x)$

Xét $f(x) = \sqrt[4]{5+12x}; g(x) = x$

là các hàm số đồng biến .

+Với $x > 1+\sqrt{2}$ thì

$1+\sqrt{2} < f(x) < g(x)$

Theo kết quả 2 suy ra $f_4(x) < g_4(x)$

+Với $-\frac{5}{12} \le x < 1+\sqrt{2}$ thì

$1+\sqrt{2} > f(x) > g(x) \ge \frac{-5}{12}$

Theo kết quả 2 suy ra $f_4(x) > g_4(x)$

+Với $x = 1+\sqrt{2}$ thì $f_4(x) = g_4(x)$

Nghiệm BPT là $x > 1+\sqrt{2}$

Thí dụ 42. Giải bất phương trình:

$\sqrt[3]{2+5\sqrt{1+2\sqrt[3]{2+5\sqrt{1+2x}}}} \ge x$

Lời giải.

ĐK: $x \ge -\frac{1}{2}$.

Xét $\sqrt[3]{2+5\sqrt{1+2x}} > x \Leftrightarrow 5\sqrt{1+2x} > x^3-2$

$\Leftrightarrow 0 > x^3-5x-2+5(x-\sqrt{1+2x})$

$\Leftrightarrow 0 > (x+2)(x^2-2x-1)+5\left(x+\sqrt{1+2x}\right)$

$\Leftrightarrow 0 > \left(x-\sqrt{1+2x}\right)\left[(x+2)\left(x+\sqrt{1+2x}\right)+5\right]$

$\Leftrightarrow 0 > \left(x-\sqrt{1+2x}\right)\left[(x+1)^2+4+(x+2)\sqrt{1+2x}\right]$

$\Leftrightarrow 0 > x-\sqrt{1+2x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+2x} > x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ 1+2x < x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x < 1+\sqrt{2}$

Tương tự

$\sqrt[3]{2+5\sqrt{1+2x}} < x \Leftrightarrow x > 1+\sqrt{2}$

Xét $f(x) = \sqrt[3]{2+5\sqrt{1+2x}}; g(x) = x$

là các hàm số đồng biến. BPT có dạng:

$f_2(x) \ge g_2(x)$

+Với $x > 1+\sqrt{2}$ thì

$1+\sqrt{2} < f(x) < g(x)$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) < g_2(x)$

+Với $-\frac{1}{2} \le x < 1+\sqrt{2}$ thì

$1+\sqrt{2} > f(x) > g(x) \ge \frac{-1}{2}$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x = 1+\sqrt{2}$ thì $f_2(x) = g_2(x)$

Nghiệm BPT là $-\frac{1}{2} \le x \le 1+\sqrt{2}$

Thí dụ 43. Giải bất phương trình:

$\sqrt{2+4\sqrt{-1+2\sqrt{2+4\sqrt{-1+2x}}}} \ge x$

Lời giải.

ĐK: $x \ge \frac{1}{2}$.

Xét $\sqrt{2+4\sqrt{-1+2x}} > x \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1} > x^2-2$

$\Leftrightarrow 0 > x^2-4x+2+4(x-1-\sqrt{2x-1})$

$\Leftrightarrow 0 > \left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)\left(x-1+\sqrt{2x-1}\right)$
$+4(x-1-\sqrt{2x-1})$

$\Leftrightarrow 0 > \left(x-1-\sqrt{2x-1}\right)\left[x+3+\sqrt{2x-1}\right]$

$\Leftrightarrow 0 > x-1-\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} > x-1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x < 1 \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x < (x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 2+\sqrt{2}$

Tương tự

$\sqrt{2+4\sqrt{-1+2x}} < x \Leftrightarrow x > 2+\sqrt{2}$

Xét $f(x) = \sqrt{2+4\sqrt{-1+2x}}; g(x) = x$

là các hàm số đồng biến. BPT có dạng:

$f_2(x) \ge g_2(x)$

+Với $x > 2+\sqrt{2}$ thì

$2+\sqrt{2} < f(x) < g(x)$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) < g_2(x)$

+Với $\frac{1}{2} \le x < 2+\sqrt{2}$ thì

$2+\sqrt{2} > f(x) > g(x) \ge \frac{1}{2}$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x = 2+\sqrt{2}$ thì $f_2(x) = g_2(x)$

Nghiệm BPT là $\frac{1}{2} \le x \le 2+\sqrt{2}$

Thí dụ 44. Giải bất phương trình:

$\sqrt{1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}} + \sqrt{1+2\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x+1}} > x$

Lời giải.

ĐK: $x \ge -\frac{1}{2}$.

Xét $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1} > x$(*)

+Với $x < 0$ là nghiệm của (*)

+Với $x \ge 0$

(*) $\Leftrightarrow 3x+2+2\sqrt{(x+1)(2x+1)} > x^2$

(*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(2x+1)} > x^2-3x-2$(**)

+Với $\frac{3+\sqrt{17}}{2} > x \ge 0$ thì VP(**)<0<VT

+Với $x \ge \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

(**) $\Leftrightarrow 4(2x^2+3x+1) > \left(x^2-3x-2\right)^2$

$\Leftrightarrow 0 < x^2(x^2-6x-3) \Leftrightarrow 0 < (x^2-6x-3)$

$3+2\sqrt{3} > x \ge \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

Vậy $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1} > x$

$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{3} > x \ge -\frac{1}{2}$

Tương tự $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1} < x$

$\Leftrightarrow x > 3+2\sqrt{3}$

Xét $f(x) = \sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}; g(x) = x$

là các hàm số đồng biến. BPT có dạng:

$f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x > 3+2\sqrt{3}$ thì

$3+2\sqrt{3} < f(x) < g(x)$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) < g_2(x)$

+Với $-\frac{1}{2} \le x < 3+2\sqrt{3}$ thì

$3+2\sqrt{3} > f(x) > g(x) \ge 0$

Theo kết quả 2 suy ra $f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x = 3 + 2\sqrt{3}$ thì $f_2(x) = g_2(x)$

Nghiệm BPT là $-\frac{1}{2} \le x < 3 + 2\sqrt{3}$.

Thí dụ 44. Giải bất phương trình:

$$\log_2\left(1+3^{\log_4\left(1+9^x\right)}\right) > 4x.$$

Lời giải

BPT tương đương

$log_{16}\left(1 + 9^{log_{16}(1+9^x)}\right) > x$ (1)

Có $f(x) = log_{16}(1 + 9^x)$ và g(x)=x

là các hàm số đồng biến.

BPT(1) có dạng

$f_2(x) > g_2(x)$

Xét $log_{16}(1 + 9^x) > x$

$\Leftrightarrow 1 + 9^x > 16^x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^x + \left(\frac{9}{16}\right)^x > 1 = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Tương tự

$log_{16}(1 + 9^x) < x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

+Với $x > \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{2} < f(x) < g(x)$

Theo kết quả 2 ta được

$f_2(x) < g_2(x)$

+Với $x < \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{2} > f(x) > g(x)$

Theo kết quả 2 ta được

$f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x = \frac{1}{2}$ thì $f_2(x) = g_2(x)$.

Nghiệm BPT đã cho là $x < \frac{1}{2}$.

Thí dụ 45. Cho x là số thực thỏa mãn $x \le 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}}} \ge 1 - \sqrt[8]{1-x}$$

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$ và $g(x) = 1 - \sqrt{1-x}$

là các hàm số cùng đồng biến trên nửa khoảng

$(-\infty;1]$ và có tập giá trị lần lượt là $(0;1]$, $(-\infty;1]$

Xét $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} > 1 - \sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 1 > \left(1 - \sqrt{1-x}\right)\left(1 + \sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow 1 > x$

Với mọi x thỏa mãn $x < 1$ ta có $f(x) > g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_3(x) > g_3(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}}} > 1 - \sqrt[8]{1-x}$$

Với x=1 dễ thấy

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}}} = 1 - \sqrt[8]{1-x}$$

Vậy $\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}}} \ge 1 - \sqrt[8]{1-x}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Chú ý:

$g_1(x) = 1 - \sqrt{1-x}$

$g_2(x) = 1 - \sqrt{1-\left(1-\sqrt{1-x}\right)} = 1 - \sqrt[4]{1-x}$

$g_3(x) = 1 - \sqrt{1-\left(1-\sqrt[4]{1-x}\right)} = 1 - \sqrt[8]{1-x}$

Thí dụ 46.

1)Cho $a \geq 0$ và $b \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-b}}}}}} \geq 1 - \sqrt[4]{a^7}.\sqrt[8]{1-b}$$

2)Cho $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{1+x^4.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^4.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^4.\sqrt{1-x}}}}}} \geq 1 - x^7.\sqrt[8]{1-x}$$

3)Cho $x \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{1+x^8.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^8.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^8.\sqrt{1-x}}}}}} \geq 1 - x^{14}.\sqrt[8]{1-x}$$

Lời giải

1)Dễ thấy $a = 0$ hoặc $b = 1$ thì

$$\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-b}}}}}} = 1 = 1 - \sqrt[4]{a^7}.\sqrt[8]{1-b}$$

Xét $a > 0$ và $b < 1$

$f(b) = \frac{1}{1+a.\sqrt{1-b}}$ và $g(b) = 1 - \sqrt{1-b}$

là các hàm số cùng đồng biến trên khoảng

$(-\infty;1)$ và có tập giá trị lần lượt là $(0;1)$, $(-\infty;1)$

Xét $\frac{1}{1+a.\sqrt{1-b}} > 1 - b\sqrt{1-b}$

$\Leftrightarrow 1 > \left(1 - a.\sqrt{1-b}\right)\left(1 + a.\sqrt{1-b}\right)$

$\Leftrightarrow 1 > 1 - a^2(1-b)$ (luôn đúng)

Với mọi b thỏa mãn $b < 1$ ta có $f(b) > g(b)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_3(b) > g_3(b)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-b}}}}}} > 1 - \sqrt[4]{a^7}.\sqrt[8]{1-b}$$

Vậy

$$\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-\frac{1}{1+a.\sqrt{1-b}}}}}} \geq 1 - \sqrt[4]{a^7}.\sqrt[8]{1-b}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 0\ V\ b = 1$.

2) Áp dụng kết quả câu 1 với

$a = x^4;\ b = x$ ta được:

$$\frac{1}{1+x^4.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^4.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^4.\sqrt{1-x}}}}}} \geq 1 - x^7.\sqrt[8]{1-x}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0\ V\ x = 1$.

2) Áp dụng kết quả câu 1 với

$a = x^8;\ b = x$ ta được:

$$\frac{1}{1+x^8.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^8.\sqrt{1-\frac{1}{1+x^8.\sqrt{1-x}}}}}} \geq 1 - x^{14}.\sqrt[8]{1-x}$$

Thí dụ 47. Cho $a \geq 1$; $b \geq 0$ và $c \leq a$. Chứng minh

$$\frac{a}{1+b.\sqrt{a-\frac{a}{1+b.\sqrt{a-c}}}} \geq 1 - b.\sqrt{a-1+b\sqrt{a-c}}$$

Lời giải

Dễ thấy $b=0$ hoặc $c=a$ thì

$$\frac{a}{1+b.\sqrt{a-\frac{a}{1+b.\sqrt{a-c}}}}=a\geq 1-b.\sqrt{a-1}$$

$$\geq 1-b.\sqrt{a-1+b\sqrt{a-c}}$$

+Xét $b>0$ và $c<a$

$f(c)=\frac{a}{1+b.\sqrt{a-c}}$ và $g(c)=1-b.\sqrt{a-c}$

là các hàm số cùng đồng biến trên khoảng

$(-\infty;a)$ và có tập giá trị lần lượt là $(0;a)$, $(-\infty;a)$

Xét $\frac{a}{1+b.\sqrt{a-c}}>1-b.\sqrt{a-c}$

$\Leftrightarrow a>(1-b.\sqrt{a-c})(1+b.\sqrt{a-c})$

$\Leftrightarrow a>1-b^2(a-c)$

(luôn đúng vì $1-b^2(a-c)<1\leq a$)

ta có $f(c)>g(c)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_2(c)>g_2(c)$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{1+b.\sqrt{a-\frac{a}{1+b.\sqrt{a-c}}}}>1-b.\sqrt{a-1+b\sqrt{a-c}}$$

Vậy

$$\frac{a}{1+b.\sqrt{a-\frac{a}{1+b.\sqrt{a-c}}}}\geq 1-b.\sqrt{a-1+b\sqrt{a-c}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b=0\ V\ c=a$.

Tác giả: Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du số 1,Bắc Ninh.

Thí dụ 48. Cho $0\leq x\leq 1$. Chứng minh

$$\frac{2}{2+\sqrt{1-\frac{2}{2+\sqrt{1-x}}}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{2}{2+\sqrt{1-x}}$ và $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[0;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{2}{3};1\right]$, $[0;1]$

Xét $\frac{2}{2+\sqrt{1-x}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

Đặt $\sqrt{1-x}=a\in[0;1]$

Suy ra

$$\frac{2}{2+a}\geq\sqrt{1-a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{(2+a)^2}\geq 1-a$$

$\Leftrightarrow(2+a)^2(1-a)\leq 4\Leftrightarrow -a^2(3+a)\leq 0(l\text{đ})$

Với mọi $x\in[0;1]$ ta có $f(x)\geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_2(x)\geq g_2(x)$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{2+\sqrt{1-\frac{2}{2+\sqrt{1-x}}}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Thí dụ 49. Cho $m\geq 2$ và $0\leq x\leq 1$. Chứng minh

$$\frac{m}{m+\sqrt{1-\frac{m}{m+\sqrt{1-x}}}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{m}{m+\sqrt{1-x}}$ và $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[0;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{m}{m+1};1\right]$, $[0;1]$

Xét $\frac{m}{m+\sqrt{1-x}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

Đặt $\sqrt{1-x}=a\in[0;1]$

Suy ra

$$\frac{m}{m+a}\geq\sqrt{1-a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{m^2}{(m+a)^2}\geq 1-a$$

$$\Leftrightarrow(m+a)^2(1-a)\leq m^2$$

$$\Leftrightarrow a[m(2-m)+a(1-2m-a)]\leq 0(lđ)$$

Với mọi $x\in[0;1]$ ta có $f(x)\geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$$f_2(x)\geq g_2(x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{m}{m+\sqrt{1-\frac{m}{m+\sqrt{1-x}}}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Thí dụ 50. Cho $m\geq 2n>0$ và $0\leq x\leq 1$. Chứng minh

$$\frac{m}{m+n.\sqrt{1-\frac{m}{m+n.\sqrt{1-x}}}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{m}{m+n.\sqrt{1-x}}$ và $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[0;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{m}{m+n};1\right]$, $[0;1]$

Xét $\frac{m}{m+n.\sqrt{1-x}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

Đặt $\sqrt{1-x}=a\in[0;1]$

Suy ra

$$\frac{m}{m+na}\geq\sqrt{1-a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{m^2}{(m+na)^2}\geq 1-a$$

$$\Leftrightarrow(m+na)^2(1-a)\leq m^2$$

$$\Leftrightarrow a[m(2n-m)+an(n-2m-an)]\leq 0(lđ)$$

Với mọi $x\in[0;1]$ ta có $f(x)\geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$$f_2(x)\geq g_2(x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{m}{m+n.\sqrt{1-\frac{m}{m+n.\sqrt{1-x}}}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Thí dụ 51. Cho $x\leq 1$. Chứng minh

$$\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}}}}}\geq 2-\sqrt[8]{2-x}$$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}$ và $g(x)=2-\sqrt{2-x}$

là các hàm số cùng đồng biến trên $(-\infty;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $(0;1]$ và $(-\infty;1]$

Xét $\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}\geq 2-\sqrt{2-x}$

Đặt $\sqrt{2-x}=a\geq 1$

Suy ra

$$\frac{2}{1+a}\geq 2-a$$

$$\Leftrightarrow(2-a)(1+a)\leq 2$$

$$\Leftrightarrow a(1-a)\leq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Với mọi $x\leq 1$ ta có $f(x)\geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$$f_2(x)\geq g_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}}}}} \geq 2-\sqrt[8]{2-x}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Thí dụ 52. Cho $-2 \leq x \leq 2$. Chứng minh

$$\frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}}} \geq \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}$ và $g(x)=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[-2;2]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{2}{3};2\right]$, $[0;\sqrt{2}]$

Xét $\frac{2}{1+\sqrt{2-x}} \geq \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$

Đặt $\sqrt{2-x}=a \in [0;2]$

Suy ra

$$\frac{2}{1+a} \geq \sqrt{2-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(1+a)^2} \geq 2-a$$

$$\Leftrightarrow (1+a)^2(2-a) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -(a-1)^2(2+a) \leq 0 (lđ)$$

Với mọi $x \in [-2;2]$ ta có $f(x) \geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có: $f_2(x) \geq g_2(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+\sqrt{2-\frac{2}{1+\sqrt{2-x}}}} \geq \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Thí dụ 53.

a)Cho $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

b)Cho $x \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \sqrt[3]{1-\sqrt{1-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Lời giải

a)Xét $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}$ và $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[0;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$, $[0;1]$

Xét $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}} \geq \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{1-\sqrt{1-x}}.\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow 1 \geq x \ (luôn\ đúng)$$

Với mọi $x \in [0;1]$ ta có $f(x) \geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_2(x) \geq g_2(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Tổng quát

Cho $0 \leq x \leq 1$ và k,i là các số nguyên dương. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[2k]{1+\sqrt[2i]{1-\frac{1}{\sqrt[2k]{1+\sqrt[2i]{1-x}}}}}} \geq \sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{1-\sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{1-x}}}}$$

Chẳng hạn:

1)Cho $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \sqrt[4]{1-\sqrt{1-\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x}}}}$$

2)Cho $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[6]{1+\sqrt[8]{1-\frac{1}{\sqrt[6]{1+\sqrt[8]{1-x}}}}}} \geq \sqrt[6]{1-\sqrt[8]{1-\sqrt[6]{1-\sqrt[8]{1-x}}}}$$

Chứng minh

Xét $f(x)=\frac{1}{\sqrt[2k]{1+\sqrt[2i]{1-x}}}$ và $g(x)=\sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[0;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{1}{\sqrt[2k]{2}};1\right]$, $[0;1]$

Xét $\frac{1}{\sqrt[2k]{1+\sqrt[2i]{1-x}}} \geq \sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{1-x}}.\sqrt[2k]{1+\sqrt[2i]{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{(1-x)^2}}$ $(luôn\ đúng)$

Với mọi $x \in [0;1]$ ta có $f(x) \geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_2(x) \geq g_2(x)$ hay

$$\frac{1}{\sqrt[2k]{1+\sqrt[2i]{1-\frac{1}{\sqrt[2k]{1+\sqrt[2i]{1-x}}}}}} \geq \sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{1-\sqrt[2k]{1-\sqrt[2i]{1-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

b)Xét $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}}$ và $g(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên nửa khoảng $(-\infty;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $(0;1]$, $(-\infty;1]$

Xét $\frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}} \geq \sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}.\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow 1 \geq x$ $(luôn\ đúng)$

Với mọi $x \in (-\infty;1]$ ta có $f(x) \geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_2(x) \geq g_2(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \sqrt[3]{1-\sqrt{1-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Tổng quát

Cho $x \leq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[2k+1]{1+\sqrt[2i]{1-\frac{1}{\sqrt[2k+1]{1+\sqrt[2i]{1-x}}}}}}$$

$$\geq \sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{1-\sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{1-x}}}}$$

Chứng minh

Xét $f(x)=\frac{1}{\sqrt[2k+1]{1+\sqrt[2i]{1-x}}}$

và $g(x)=\sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên $(-\infty;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $(0;1]$, $(-\infty;1]$

Xét $\frac{1}{\sqrt[2k+1]{1+\sqrt[2i]{1-x}}}\geq\sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1\geq\sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{1-x}}.\sqrt[2k+1]{1+\sqrt[2i]{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1\geq\sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{(1-x)^2}}$ $(luôn\ đúng)$

Với mọi $x\in(-\infty;1]$ ta có $f(x)\geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_2(x)\geq g_2(x)$ hay

$$\frac{1}{\sqrt[2k+1]{1+\sqrt[2i]{1-\frac{1}{\sqrt[2k+1]{1+\sqrt[2i]{1-x}}}}}}$$

$$\geq\sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{1-\sqrt[2k+1]{1-\sqrt[2i]{1-x}}}}$$

Thí dụ 54. Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}\geq\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Lời giải

Đk:$x\in[0;1]$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$ và $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[0;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $[0;1]$

Xét $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}>\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1>\sqrt{1-\sqrt{1-x}}\left(1+\sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow 1>\sqrt{1-\sqrt{1-x}}.\sqrt{1+\sqrt{1-x}}.\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1>\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1>x.\left(1+\sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow 1-x>x.\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow (1-x)^2>x^2(1-x)\ \ với\ x<1$

$\Leftrightarrow 1-x>x^2\Leftrightarrow 0>x^2+x-1$

$\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Tương tự

$\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}<\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

$\Leftrightarrow 1>x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

+Với $0\leq x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ta có $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>f(x)>g(x)\geq 0$ nên theo kết quả 2 thì $f_2(x)>g_2(x)$.

+Với $1>x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ta có $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<f(x)<g(x)<1$ nên theo kết quả 2 thì $f_2(x)<g_2(x)$.

+Với x=1 V $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $f_2(x)=g_2(x)$.

BPT đã cho có dạng:

$f_2(x) \geq g_2(x)$.

Suy ra

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}} \geq \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \{1\}$$

Thí dụ 55. Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}}$$

Lời giải

Đk:$x \in [0;1]$

Dễ thấy $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}$ và $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên đoạn $[0;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};1\right]$, $[0;1]$

Xét $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}} > \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

Đặt $\sqrt{1-x}=a \in [0;1]$

Ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2+a}} > \sqrt{1-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2+a} > 1-a$$

$$\Leftrightarrow 1 > (1-a)(2+a)$$

$$\Leftrightarrow a^2+a-1>0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}=a > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow 0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}} > \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}} < \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

+Với $0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ta có $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > f(x) > g(x) \geq 0$ nên theo kết quả 2 thì $f_2(x) > g_2(x)$.

+Với $1 \geq x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ta có $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < f(x) < g(x) < 1$ nên theo kết quả 2 thì $f_2(x) < g_2(x)$.

+Với $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $f_2(x)=g_2(x)$.

Như vậy

BPT đã cho có dạng:

$f_2(x) \geq g_2(x)$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Thí dụ 56. Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}$$

Lời giải

Đk:$x \in (-\infty;1]$

Dễ thấy $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}$ và $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$

là các hàm số cùng đồng biến trên $(-\infty;1]$

và có tập giá trị lần lượt là $(0;\frac{1}{\sqrt{2}}],(0;1]$

BPT đã cho có dạng:

$f_2(x) \geq g_2(x)$

Xét $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}} > \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$

Đặt $\sqrt{1-x} = a \in [0;1]$

Ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2+a}} > \frac{1}{1+a}$$

$$\Leftrightarrow 1+a > \sqrt{2+a}$$

$$\Leftrightarrow (1+a)^2 > 2+a \Leftrightarrow\Leftrightarrow a^2+a-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = a > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}} > \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}} < \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

+Với $x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ta có $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > f(x) > g(x)$ nên theo kết quả 2 thì $f_2(x) > g_2(x)$.

+Với $1 \geq x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ta có $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < f(x) < g(x) \leq 1$ nên theo kết quả 2 thì $f_2(x) < g_2(x)$.

+Với $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $f_2(x) = g_2(x)$.

Như vậy

BPT đã cho :

$f_2(x) \geq g_2(x)$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Chú ý:

Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}} \leq 1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}$$

HD: BPT tương đương

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}}} \geq \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}}}$$

Thí dụ 57. Cho $1 \leq x \leq 2$. Chứng minh

$$3-\frac{4}{3+\sqrt{2-\frac{4}{3+\sqrt{2-\frac{4}{3+\sqrt{x-1}}}}}} \geq x$$

Lời giải

Xét $f(x) = 3-\frac{4}{3+\sqrt{x-1}}$ và $g(x) = x$

là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$

và có tập giá trị lần lượt là $\left[\frac{5}{4};2\right]$ và $[1;2]$

Xét $3-\frac{4}{3+\sqrt{x-1}} \geq x$

Đặt $\sqrt{x-1}=a \in [0;1]$

Suy ra

$$3-\frac{4}{3+a} \geq a^2+1$$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (1-a)(a^2+4a+2) \leq 0$ (luôn đúng)

Với mọi $x \in [1;2]$ ta có $f(x) \geq g(x)$ nên theo kết quả 2 ta có:

$f_3(x) \geq g_3(x)$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{4}{3+\sqrt{2-\frac{4}{3+\sqrt{2-\frac{4}{3+\sqrt{x-1}}}}}} \geq x$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=2$.

Thí dụ 58. Cho $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$$tan\left(\frac{\pi}{4}sin\left(tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\right)\right) \leq sin(sinx)$$

Lời giải

Xét $f(x)=tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)$ và $g(x)=sinx$ có

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi}{4}cosx}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)} \geq 0$$

$g'(x)=cosx \geq 0$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

Đặt $sinx=t \in [0;1]$

$$tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)-sinx=h(t)=tan\left(\frac{\pi}{4}t\right)-t$$

$h'(t)=\frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)}-1$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

$h'(0).h'(1)<0$ suy ra $h'(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0;1).

$$h''(t)=\frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)}{cos^3\left(\frac{\pi}{4}t\right)} \geq 0$$

suy ra $h'(t)$ đồng biến và $h'(t)=0$ có đúng nhất 1 nghiệm. Suy ra h(t) có 2 khoảng đơn điệu (h(x) là hàm số lõm trên $[0;1]$.)

t	0	t_0	1
h(t)	0	$h(t_0)$	0

Suy ra $h(t) \leq 0, \forall t \in [0;1]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)-sinx \leq 0, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right) \leq sinx$

Vậy $f(x) \leq g(x);, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \leq g_2(x)$

$$\Leftrightarrow tan\left(\frac{\pi}{4}sin\left(tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\right)\right) \leq sin(sinx)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Tương tự

Cho $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$. Chứng minh

$$tan\left(\frac{\pi}{4}sin\left(tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\right)\right) \geq sin(sinx)$$

Thí dụ 59. Cho $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh

$$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right) \leq x$$

Lời giải Xét $f(x)=tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ và $g(x)=sinx$ có

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}>0$$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[0;1]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

$h(x) = tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x$

$h'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} - 1$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

$h'(0).h'(1)<0$ suy ra $h'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0;1).

$h''(x) = \frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{cos^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)} \geq 0$

suy ra $h'(x)$ đồng biến và $h'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm. Suy ra h(x) có 2 khoảng đơn điệu (hay rõ hơn là h(x) hàm số lõm trên $[0;1]$.)

x	0	x_0	1
h(x)	0 ↘	$h(x_0)$	↗ 0

Suy ra $h(x) \leq 0, \forall x \in [0;1]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x \leq 0, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq x$

Vậy $f(x) \leq g(x); \forall x \in [0;1]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \leq g_3(x)$

Hay

$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right) \leq x$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0; x = 1$

Tương tự

Cho $-1 \leq x \leq 0$. Chứng minh

$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right) \geq x$

Thí dụ 60. Cho $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh

$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right) \leq \sqrt{2}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}sin\frac{\pi}{4}x\right)$

Lời giải

Xét $f(x) = tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ và $g(x) = \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ có

$f'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} > 0$

$g'(x) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) > 0$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[0;1]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

$h(x) = tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

$h'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4}cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

$h''(x) = \frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{cos^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \geq 0$

suy ra $h'(x)$ đồng biến và $h'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm x_0 trên khoảng $(0;1)$.. Suy ra h(x) có 2 khoảng đơn điệu và là hàm số lõm trên $[0;1]$.

x	0	x_0	1
h(x)	0 ↘	$h(x_0)$	↗ 0

Suy ra $h(x) \leq 0, \forall x \in [0;1]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x \leq 0, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq x$

Vậy $f(x) \leq g(x); \forall x \in [0;1]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$ hay

$$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right) \le \sqrt{2}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}sin\frac{\pi}{4}x\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0; x = 1$

Tương tự

Cho $-1 \le x \le 0$. Chứng minh

$$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right) \ge \sqrt{2}sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}sin\frac{\pi}{4}x\right)$$

Thí dụ 61. Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh

$$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(sin\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right) \ge x$$

Lời giải Xét $f(x) = \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ và $g(x) = x$ có

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) > 0$$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[0; 1]$ cùng có tập giá trị là $[0; 1]$

$h(x) = \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x$

$h'(x) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$

$h'(0).h'(1)<0$ suy ra $h'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0;1).

$h''(x) = -\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \le 0$

suy ra $h'(x)$ nghịch biến và $h'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng (0;1). Suy ra h(x) có 2 khoảng đơn điệu (h(x) là hàm số lồi trên $[0; 1]$)

x	0	x_0	1
h(x)	0	h(x_0)	0

Suy ra $h(x) \ge 0, \forall x \in [0; 1]$

Suy ra

$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x \ge 0, \forall x \in [0; 1]$

Suy ra $\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \ge x, \forall x \in [0; 1]$

Vậy $f(x) \ge g(x); \forall x \in [0; 1]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \ge g_3(x)$

Hay

$$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(sin\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right) \ge x$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0; x = 1$

Tương tự

Cho $-1 \le x \le 0$. Chứng minh

$$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(sin\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right) \le x$$

Thí dụ 62. Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh

$$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right) \le 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$$

Lời giải

Xét $f(x) = tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ và $g(x) = 2sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ có

$$f'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} > 0$$

$$g'(x) = \frac{\pi}{3}cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) > 0$$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[0; 1]$ cùng có tập giá trị là $[0; 1]$

$h(x) = tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 2sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

$h'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} - \frac{\pi}{3}cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

$$h''(x)=\frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{cos^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)}+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\geq 0$$

$h'(0).h'(1)<0$ suy ra $h'(x)=0$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng (0;1).

Suy ra h(x) có 2 khoảng đơn điệu (hay hàm số h(x) lõm trên $[0;1]$ nếu ta biết kiến thức về hàm lồi,lõm)

x	0	x_0	1
h(x)	0	h(x_0)	0

Suy ra $h(x)\leq 0,\forall x\in[0;1]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-2sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\leq 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\leq 2sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

Vậy $f(x)\leq g(x);\forall x\in[0;1]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x)\leq g_3(x)$ hay

$$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right)\leq 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0;x=1$

Tương tự

Cho $-1\leq x\leq 0$. Chứng minh

$$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right)\geq 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$$

Thí dụ 63. Cho $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$$tan\left(\frac{\pi}{4}sin\left(tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\right)\right)\leq 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)\right)\right)$$

Lời giải

Xét $f(x)=tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)$ và $g(x)=2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)$ có

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi}{4}cosx}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)}\geq 0$$

$$g'(x)=\frac{\pi}{3}cos\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)cosx\geq 0$$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

Đặt $sinx=t\in[0;1]$

$$tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)-2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)=$$

$$h(t)=tan\left(\frac{\pi}{4}t\right)-2sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$h'(t)=\frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)}-\frac{\pi}{3}cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

$h'(0).h'(1)<0$ suy ra $h'(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0;1).

$$h''(t)=\frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)}{cos^3\left(\frac{\pi}{4}t\right)}+\frac{\pi^2}{18}sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\geq 0$$

suy ra $h'(t)$ đồng biến và $h'(t)=0$ có đúng nhất 1 nghiệm. Suy ra h(t) có 2 khoảng đơn điệu (h(x) là hàm số lõm trên $[0;1]$.)

t	0	t_0	1
h(t)	0	h(t_0)	0

Suy ra $h(t)\leq 0,\forall t\in[0;1]$

Suy ra

$$tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)-2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)\leq 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\leq 2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)$

Vậy $f(x) \le g(x);, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$

$\Leftrightarrow tan\left(\frac{\pi}{4}sin\left(tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\right)\right) \le 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)\right)\right)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0\ Vx = \frac{\pi}{2}$.

Cho $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$. Chứng minh

$tan\left(\frac{\pi}{4}sin\left(tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\right)\right) \le 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)\right)\right)$

Thí dụ 64. Cho $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$\tan\left(\frac{\pi}{4}\sin\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)\right) \le \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right)$

Lời giải

Xét $f(x) = tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)$ và $g(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}sinx\right)$ có

$f'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}cosx}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)} \ge 0$

$g'(x) = \frac{\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}sinx\right)cosx \ge 0$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

Đặt $sinx = t \in [0;1]$

$tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right) - sin\left(\frac{\pi}{2}sinx\right) =$

$h(t) = tan\left(\frac{\pi}{4}t\right) - sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$h'(t) = \frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)} - \frac{\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

$h'(0).h'(1)<0$ suy ra $h'(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0;1).

$h''(t) = \frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)}{cos^3\left(\frac{\pi}{4}t\right)} + \frac{\pi^2}{4}sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \ge 0$

suy ra $h'(t)$ đồng biến và $h'(t) = 0$ có đúng nhất 1 nghiệm. Suy ra h(t) có 2 khoảng đơn điệu (h(x) là hàm số lõm trên [0; 1].)

t	0	t_0	1
h(t)	0 ↘	$h(t_0)$	↗ 0

Suy ra $h(t) \le 0, \forall t \in [0;1]$

Suy ra

$tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right) - sin\left(\frac{\pi}{2}sinx\right) \le 0, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Suy ra $tan\left(\frac{\pi}{4}sinx\right) \le sin\left(\frac{\pi}{2}sinx\right)$

Vậy $f(x) \le g(x);, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$

$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\sin\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)\right) \le \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0\ Vx = \frac{\pi}{2}$.

Thí dụ 65. Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh

$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right) \le \sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$

Lời giải

Xét $f(x) = tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ và $g(x) = \sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ có

$f'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} > 0$

$$g'(x) = \frac{\frac{\pi}{6}.\sqrt{3}}{cos^2\left(\frac{\pi}{6}x\right)} > 0$$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

Xét

$$tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) \le \sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

$$\Leftrightarrow tan\left(\frac{3\pi}{12}x\right) \le \sqrt{3}tan\left(\frac{2\pi}{12}x\right) \quad (*)$$

Đặt $\frac{\pi}{12}x = t \in \left[0;\frac{\pi}{12}\right]$

Suy ra $tant \in \left[0; tan\frac{\pi}{12}\right]$

$$\Leftrightarrow tant \in [0; 2-\sqrt{3}]$$

$$(*) \Leftrightarrow tan(3t) \le \sqrt{3}tan(2t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3tant - tan^3t}{1-3tan^2t} \le \sqrt{3}.\frac{2tant}{1-tan^2t}$$

$$\Leftrightarrow tant\left(\frac{3-tan^2t}{1-3tan^2t} - \frac{2\sqrt{3}}{1-tan^2t}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow tant.\frac{tan^4t + \left(6\sqrt{3}-4\right)tan^2t + 3 - 2\sqrt{3}}{(1-3tan^2t)(1-tan^2t)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow tant.\frac{tan^4t + \left(6\sqrt{3}-4\right)tan^2t + 3 - 2\sqrt{3}}{(1-3tan^2t)(1-tan^2t)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow tant.\frac{\left(tan^2t - \left(2-\sqrt{3}\right)^2\right)\left(3+2\sqrt{3}+tan^2t\right)}{(1-3tan^2t)(1-tan^2t)} \le 0$$

luôn đúng vì $tant \in [0; 2-\sqrt{3}]$

Suy ra

$$tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) \le \sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right), \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Vậy $f(x) \le g(x); \forall x \in [0;1]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$ hay

$$tan\left(\frac{\pi}{4}tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right) \le \sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0\ Vx = 1$.

Thí dụ 66. Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh

$$sin\left(\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi}{2}x\right) \ge \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)$$

Lời giải

Xét $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ và $g(x) = \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ có

$$f'(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} > 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{\pi}{4}.\sqrt{2}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} > 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[0;1]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

Xét

$$sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ge \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \ge \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\left[cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \ge 0 \quad (*)$$

Do $\frac{\pi}{4}x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ nên $sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \ge 0$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra (*) đúng.

Vậy $f(x) \ge g(x); \forall x \in [0;1]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \ge g_2(x)$ hay

$$sin\left(\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi}{2}x\right) \ge \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0\ Vx=1$.

Theo kết quả 2 có

$f_3(x)\geq g_3(x)$ hay

$$sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}sinx\right)\right)\right)$$
$$\geq \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{4}sinx\right)\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0\ Vx=1$.

Thí dụ 67. Cho $0\leq x\leq 1$. Chứng minh

$$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\geq 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$$

Lời giải

Xét $f(x)=\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ và $g(x)=2sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ có

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi}{4}.\sqrt{2}}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(x)=\frac{\frac{\pi}{6}}{cos^2\left(\frac{\pi}{6}x\right)}>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Suy ra f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ cùng có tập giá trị là $[0;1]$

Xét

$$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\geq 2sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

$$\Leftrightarrow sin\left(3.\frac{\pi}{12}x\right)\geq\sqrt{2}sin\left(2.\frac{\pi}{12}x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)-4\left(sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right)^3$$
$$\geq 2\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)$$

$$\Leftrightarrow sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\left[3-4\left(sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right)^2-2\sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\left[-1+4\left(cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right)^2-2\sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\left(cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\left(cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\geq 0\ (*)$$

Do $\frac{\pi}{12}x\in\left[0;\frac{\pi}{12}\right]$ nên $sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\geq 0$

$$cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\geq cos\frac{\pi}{12}=cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Suy ra (*) đúng.

Vậy $f(x)\geq g(x);\forall x\in[0;1]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x)\geq g_2(x)$ hay

$$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\geq 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0\ Vx=1$.

Theo kết quả 2 có

$f_3(x)\geq g_3(x)$ hay

$$\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right)$$
$$\geq 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0\ Vx=1$.

Các bài tập tương tự

1.Cho $0\leq x\leq 1$. Chứng minh

$$\sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)\right)\leq x$$

2.Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)\right) \le x$$

3.Cho $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$$\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}\sin x\right)\right)\right) \le \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right)$$

4.Cho $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$$\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}\sin x\right)\right)\right)$$

$$\le 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)\right)\right)$$

5.Cho $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right)\right)\right) \le \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right)$$

6.Cho $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right)\right)\right)$$

$$\le 2sin\left(\frac{\pi}{3}sin\left(2sin\left(\frac{\pi}{6}sinx\right)\right)\right)$$

7.Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right) \le \sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$$

8.Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)\right)$$

$$\le \sqrt{3}tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)\right)$$

Thí dụ 68. Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2^x} \le 2\sqrt{-2+3\sqrt{3x-2}}$$

Lời giải

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2^x} \le 2\sqrt{-2+3\sqrt{3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2^x} \le \sqrt{-2+3\sqrt{3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2^{x-1}-1} \le \sqrt{-2+3\sqrt{3x-2}}$$

Xét $f(x) = 2^{x-1}$ và $g(x) = \sqrt{3x-2}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $h(x) = 2^{x-1} - \sqrt{3x-2}$

$$h'(x) = 2^{x-1}ln2 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$h''(x) = 2^{x-1}(ln2)^2 + \frac{9}{4(3x-2)\sqrt{3x-2}} > 0$$

Suy ra $h'(x)$ là hàm số đồng biến trên $[1;2]$

Mà $h'(1)h'(2) < 0$

Suy ra $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất

BBT

x	1	x_0	2
h(x)	0	$h(x_0)$	0

Chú ý: nếu biết hàm lồi,lõm thì chỉ cần $h''(x) = 2x-1ln22+94(3x-2)3x-2>0$

Suy ra h(x) là hàm lõm trên đoạn $[1;2]$ ta suy ra bbt ở trên.

Suy ra

$$h(x) = 2^{x-1} - \sqrt{3x-2} \le 0. \forall x \in [1;2]$$

Suy ra $f(x) \geq g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \geq g_2(x)$ hay

$\Leftrightarrow 2^{2^{x-1}-1} \leq \sqrt{-2+3\sqrt{3x-2}}$

Vậy

$(\sqrt{2})^{2^x} \leq 2\sqrt{-2+3\sqrt{3x-2}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2\ Vx = 1$.

Thí dụ 69. Cho $1 \leq x \leq 2$. Chứng minh

$2^{2^{x-1}-1} \geq \frac{2}{3-\frac{2}{3-x}}$

Lời giải

Xét $f(x) = 2^{x-1}$ và $g(x) = \frac{2}{3-x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $h(x) = 2^{x-1} - \frac{2}{3-x}$

$h'(x) = 2^{x-1}ln2 - \frac{2}{(3-x)^2}$

$h''(x) = 2^{x-1}(ln2)^2 - \frac{4}{(3-x)^3} < 2(ln2)^2 - \frac{4}{3} < 0$

Suy ra $h'(x)$ là hàm số nghịch biến trên $[1;2]$

Mà $h'(1)h'(2) < 0$

Suy ra $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất

BBT

x	1	x_0	2
h(x)	0	h(x_0)	0

Chú ý: nếu biết hàm lồi,lõm thì chỉ cần h''(x)<0

Suy ra h(x) là hàm lồi trên đoạn $[1;2]$ ta suy ra bbt ở trên.

Suy ra

$h(x) = 2^{x-1} - \frac{2}{3-x} \leq 0. \forall x \in [1;2]$

Suy ra $f(x) \geq g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \geq g_2(x)$ hay

$2^{2^{x-1}-1} \geq \frac{2}{3-\frac{2}{3-x}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0\ Vx = 1$.

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \geq g_3(x)$ hay

$2^{2^{2^{x-1}-1}-1} \geq \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-x}}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2\ Vx = 1$.

Thí dụ 70. Cho $1 \leq x \leq 2$. Chứng minh

$2^{2^{x-1}-1} \geq \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}$

Lời giải

Xét $f(x) = 2^{x-1}$ và $g(x) = \frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $h(x) = 2^{x-1} - \frac{1}{7}x^3 - \frac{6}{7}$

$h'(x) = 2^{x-1}ln2 - \frac{3}{7}x^2$

$h''(x) = 2^{x-1}(ln2)^2 - \frac{6}{7}x$

$h'''(x) = 2^{x-1}(ln2)^3 - \frac{6}{7} < 2(ln2)^3 - \frac{6}{7} < 0$

Suy ra $h''(x)$ nghịch biến trên $[1;2]$

Suy ra

$h^{''(x)} = 2^{x-1}(ln2)^2 - \frac{6}{7}x$

$\leq h''(1) = (ln2)^2 - \frac{6}{7} < 0$

Suy ra $h'(x)$ là hàm số nghịch biến trên $[1;2]$

Mà $h'(1)h'(2) < 0$

Suy ra $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất

BBT

x	1	x_0	2
h(x)	0	h(x_0)	0

Chú ý: nếu biết hàm lồi,lõm thì chỉ cần chứng minh h''(x)<0

Suy ra h(x) là hàm lồi trên đoạn $[1;2]$ ta suy ra bbt ở trên. Suy ra

$h(x) = 2^{x-1} - \frac{1}{7}x^3 - \frac{6}{7} \leq 0. \forall x \in [1;2]$

Suy ra $f(x) \geq g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \geq g_2(x)$ hay

$2^{2^{x-1}-1} \geq \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2\ Vx = 1.$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \geq g_3(x)$ hay

$2^{2^{2^{x-1}-1}-1} \geq \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3 - \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2\ Vx = 1.$

Thí dụ 71. Cho $1 \leq x \leq 2$. Chứng minh

$\sqrt{-2+3\sqrt{-2+3x}} \leq \sqrt[4]{-14+15\sqrt[4]{-14+15x}}$

Lời giải

Xét $f(x) = \sqrt{-2+3x}$ và $g(x) = \sqrt[4]{-14+15x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\sqrt{-2+3x} \leq \sqrt[4]{-14+15x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-2+3x}\right)^4 \leq \left(\sqrt[4]{-14+15x}\right)^4$

$\Leftrightarrow (-2+3x)^2 \leq -14+15x$

$\Leftrightarrow 9(x-1)(x-2) \leq 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \geq g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \geq g_2(x)$ hay

$\sqrt{-2+3\sqrt{-2+3x}} \leq \sqrt[4]{-14+15\sqrt[4]{-14+15x}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0\ Vx = 1.$

Thí dụ 72. Cho $1 \leq x \leq 2$. Chứng minh

$\sqrt{-2+3\sqrt{-2+3x}} \leq \sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$

Lời giải

Xét $f(x) = \sqrt{-2+3x}$ và $g(x) = \sqrt[3]{-6+7x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\sqrt{-2+3x} \leq \sqrt[3]{-6+7x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-2+3x}\right)^6 \leq \left(\sqrt[3]{-6+7x}\right)^6$

$\Leftrightarrow (-2+3x)^3 \leq (-6+7x)^2$

$\Leftrightarrow ((x-1)(x-2)(27x-22) \le 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \le g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$ hay

$$\sqrt{-2+3\sqrt{-2+3x}} \le \sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2\ Vx = 1.$

Thí dụ 73. Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$\sqrt{-2+3\sqrt{-2+3x}} \le \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}+2.\sqrt{-\frac{7}{4}+2x}}$$

Lời giải

Xét $f(x) = \sqrt{-2+3x}$ và $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{7}{4}+2x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\sqrt{-2+3x} \le \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{7}{4}+2x}$

$$\Leftrightarrow -2+3x \le -\frac{3}{2}+2x+\sqrt{-\frac{7}{4}+2x}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2} \le \sqrt{-\frac{7}{4}+2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \le -\frac{7}{4}+2x$$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \le 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \le g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$ hay

$$\sqrt{-2+3\sqrt{-2+3x}} \le \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}+2.\sqrt{-\frac{7}{4}+2x}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2\ Vx = 1.$

Thí dụ 74. Cho $2 \le x \le 3$. Chứng minh

$$\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5x}} \le 1 + \sqrt{-2+3.\sqrt{-5+3x}}$$

Lời giải

Xét $f(x) = \sqrt{-6+5x}$ và $g(x) = 1 + \sqrt{-5+3x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[2;3]$ cùng có tập giá trị là $[2;3]$

Xét $\sqrt{-6+5x} \le 1 + \sqrt{-5+3x}$

$$\Leftrightarrow -6+5x \le -4+3x+2\sqrt{-5+3x}$$

$$\Leftrightarrow -2+2x \le 2\sqrt{-5+3x}$$

$$\Leftrightarrow -1+x \le \sqrt{-5+3x}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \le -5+3x$$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) \le 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \le g(x); \forall x \in [2;3]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$ hay

$$\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5x}} \le 1 + \sqrt{-2+3.\sqrt{-5+3x}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2\ Vx = 3$

Thí dụ 75. Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}$$

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$ và $g(x) = \frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\geq\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{21}(3x+2)(x-1)(x-2)\geq 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x)\geq g(x);\forall x\in[1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x)\geq g_3(x)$ hay

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\geq\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\,Vx=2$

Thí dụ 76. Cho $1\leq x\leq 4$. Chứng minh

$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2\geq\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$

Lời giải

Xét $f(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2$ và $g(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;4]$ cùng có tập giá trị là $[1;4]$

Xét $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2\geq\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow -45(x-1)(x-4)\geq 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x)\geq g(x);\forall x\in[1;4]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x)\geq g_3(x)$ hay

$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2\geq\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\,Vx=4$

Thí dụ 77. Cho $1\leq x\leq 2$. Chứng minh

$(x-2)^{27}+2\geq\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\geq(x-1)^{27}+1$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$ và $g(x)=(x-1)^3+1$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\geq(x-1)^3+1$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{7}(2x-1)(x-1)(x-2)\geq 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x)\geq g(x);\forall x\in[1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x)\geq g_3(x)$ hay

$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\geq(x-1)^{27}+1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\,Vx=2$

*Xét $f(x)=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$ và $h(x)=(x-2)^3+2$

Dễ thấy f(x) và h(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\leq(x-2)^3+2$

$\Leftrightarrow -\frac{6}{7}(x-4)(x-1)(x-2)\leq 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x)\leq h(x);\forall x\in[1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x)\leq h_3(x)$ hay

$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\leq(x-2)^{27}+2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\,Vx=2$

Bài toán:

Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$(x-2)^{27}+2 \ge \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7} \ge (x-1)^{27}+1$$

Ta đưa về bài toán 2 biến như sau:

Cho a,b là số thực không âm thỏa mãn

$a^2+2b^2 \le 3ab$. Chứng minh

$$(a-2b)^{27}+2b^{27} \ge \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}a^3+\frac{6}{7}b^3\right)^3+\frac{6}{7}b^9\right)^3+\frac{6}{7}b^{27} \ge (a-b)^{27}+b^{27}$$

HD:Xét $b=0$ thay vào giả thiết được $a^2 \le 0$

Suy ra $a=0$. Thay vào BĐT thấy đúng.

Xét $b \ne 0$.

$$a^2+2b^2 \le 3ab \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2-3\frac{a}{b}+2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{a}{b} \le 2$$

Chia 3 vế BĐT

$$(a-2b)^{27}+2b^{27} \ge \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}a^3+\frac{6}{7}b^3\right)^3+\frac{6}{7}b^9\right)^3+\frac{6}{7}b^{27} \ge (a-b)^{27}+b^{27}$$

cho b^{27} và đặt $\frac{a}{b}=x \in [1;2]$được

$$(x-2)^{27}+2 \ge \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7} \ge (x-1)^{27}+1$$

Thí dụ 78. Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$(x-2)^{27}+2 \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^{27}+1$$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ và $g(x)=(x-1)^3+1$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^3+1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(3x-1)(x-1)(x-2) \ge 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \ge g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \ge g_3(x)$ hay

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^{27}+1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1 \; Vx=2$

*Xét $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ và $h(x)=(x-2)^3+2$

Dễ thấy f(x) và h(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3} \le (x-2)^3+2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(3x-10)(x-1)(x-2) \le 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \le h(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \le h_3(x)$ hay

$$(x-2)^{27}+2 \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1 \; Vx=2$

Tương tự

1.Cho a,b là số thực không âm thỏa mãn

$a^2+2b^2 \le 3ab$. Chứng minh

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}b^2\right)^2+\frac{2}{3}b^4\right)^2+\frac{2}{3}b^8 \ge (a-b)^8+b^8$$

2.Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$(x-2)^{125}+2 \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^{125}+1$$

Lời giải

1)Xét $b=0$ thay vào giả thiết được $a^2 \le 0$

Suy ra $a=0$. Thay vào BĐT thấy đúng.

Xét $b \ne 0$.

$a^2+2b^2 \le 3ab \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\frac{a}{b} + 2 \le 0$

$\Leftrightarrow 1 \le \frac{a}{b} \le 2$

Chia 2 vế BĐT

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}b^2\right)^2+\frac{2}{3}b^4\right)^2+\frac{2}{3}b^8 \ge (a-b)^8+b^8$

cho b^8 được

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge \left(\frac{a}{b}-1\right)^8+1$

Đặt $\frac{a}{b}=x \in [1;2]$. BĐT cần chứng minh trở thành

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^8+1$

Xét $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ và $g(x)=(x-1)^2+1$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^2+1$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}(x-1)(x-2) \ge 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \ge g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \ge g_3(x)$ hay

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^8+1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ Vx=2$

Vậy

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}b^2\right)^2+\frac{2}{3}b^4\right)^2+\frac{2}{3}b^8 \ge (a-b)^8+b^8$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ a=b\ Va=2b$

2)

Xét $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ và $g(x)=(x-1)^5+1$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^5+1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(3x^3-6x^2+6x-1) \ge 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x(3x^2-6x+5)+x-1) \ge 0$

luôn đúng

Suy ra $f(x) \ge g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \ge g_3(x)$ hay

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge (x-1)^{125}+1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ Vx=2$

*Xét $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ và $h(x)=(x-2)^5+2$

Dễ thấy f(x) và h(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3} \le (x-2)^5+2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(3x^3-21x^2+51x-46) \le 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)[3x^2(x-2)+15x(1-x)+36x-46] \le 0$

luôn đúng

Suy ra $f(x) \le h(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \le h_3(x)$ hay

$$(x-2)^{125}+2 \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ V\ x=2$

Thí dụ 79. Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$(x-2)^9+2 \ge \frac{1}{15}\left(\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}\right)^4+\frac{14}{15} \ge (x-1)^9+1$$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}$ và $g(x)=(x-1)^3+1$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15} \ge (x-1)^3+1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{15}(x-1)(x-2)(x^2-12x+7) \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{15}(x-1)(x-2)\big((x-1)(x-11)-1\big) \ge 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \ge g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \ge g_2(x)$ hay

$\frac{1}{15}\left(\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}\right)^4+\frac{14}{15} \ge (x-1)^9+1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ Vx=2$

*Xét $f(x)=\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}$và $h(x)=(x-2)^3+2$

Dễ thấy f(x) và h(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15} \le (x-2)^3+2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{15}(x-1)(x-2)(x^2-12x+52) \le 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \le h(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le h_2(x)$ hay

$$(x-2)^9+2 \ge \frac{1}{15}\left(\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}\right)^4+\frac{14}{15}$$

Thí dụ 80. Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$$\frac{1}{15}\left(\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}\right)^4+\frac{14}{15} \le \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7} \le (x-2)^9+2$$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}$ và $g(x)=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15} \le \frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{105}(x-1)(x-2)(7x^2+6x+4) \le 0$

luôn đúng

Suy ra $f(x) \le g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le g_2(x)$ hay

$\frac{1}{15}\left(\frac{1}{15}x^4+\frac{14}{15}\right)^4+\frac{14}{15} \ge (x-1)^9+1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ Vx=2$

*Xét $g(x)=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$ và $h(x)=(x-2)^3+2$

Dễ thấy f(x) và h(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7} \le (x-2)^3+2$

$\Leftrightarrow -\frac{6}{7}(x-1)(x-2)(x-4) \le 0$ luôn đúng

Suy ra $g(x) \le h(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_2(x) \le h_2(x)$ hay

$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7} \le (x-2)^9+2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ Vx=2$

Thí dụ 81. Cho $1 \le x \le 2$. Chứng minh

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ và $g(x)=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$ cùng có tập giá trị là $[1;2]$

Xét $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3} \ge \frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{21}(3x+2)(x-1)(x-2) \ge 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \ge g(x); \forall x \in [1;2]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \ge g_3(x)$ hay

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \ge \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ V\ x=2$

Thí dụ 82. Cho $1 \le x \le 8$. Chứng minh

$x \ge \left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3 \ge \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{8}{9}$

Lời giải

+Xét $f(x)=\left(\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)^3$ và $g(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;8]$ cùng có tập giá trị là $[1;8]$

Xét $\left(\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)^3 \ge \frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3087}(9x-100)(x-1)(x-8) \ge 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \ge g(x); \forall x \in [1;8]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \ge g_3(x)$ hay

$\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3 \ge \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{8}{9}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ V\ x=8$

+ Xét $f(x)=\left(\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)^3$ và $h(x)=x$

Dễ thấy f(x) và h(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;8]$ cùng có tập giá trị là $[1;8]$

Xét $\left(\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)^3 \le x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{343}(x+27)(x-1)(x-8) \le 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \le g(x); \forall x \in [1;8]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \le h_3(x)$ hay

$\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3 \le x$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ V\ x=8$

Thí dụ 83. Cho $-3 \le x \le 1$. Chứng minh

$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7} \ge x \ge \sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}}$

Lời giải

+Xét $f(x)=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$ và $g(x)=x$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[-3;1]$ cùng có tập giá trị là $[-3;1]$

Xét $\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7} \ge x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7}(x+3)(x-1)(x-2) \geq 0$ luôn đúng

Suy ra $f(x) \geq g(x); \forall x \in [-3;1]$

Theo kết quả 2 có

$f_3(x) \geq g_3(x)$ hay

$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7} \geq x$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1\ V\ x = -3$

+Xét $h(x) = \sqrt[3]{-6+7x}$ và $g(x) = x$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[-3;1]$ cùng có tập giá trị là $[-3;1]$

Xét $\sqrt[3]{-6+7x} \leq x$

$\Leftrightarrow -6+7x \leq x^3$

$\Leftrightarrow -(x+3)(x-1)(x-2) \leq 0$ luôn đúng

Suy ra $h(x) \leq g(x); \forall x \in [-3;1]$

Theo kết quả 2 có

$h_3(x) \geq g_3(x)$ hay

$x \geq \sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1\ V\ x = -3$

Thí dụ 84. Giải phương trình:

$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7} = \sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}}$

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$ và $g(x) = \sqrt[3]{-6+7x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên R.

PT đã cho có dạng: $f_3(x) = g_3(x)$

Xét $f(x) - g(x) = \frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}-\sqrt[3]{-6+7x}$

$= \frac{1}{7}x^3 - x + \frac{6}{7} + x - \sqrt[3]{-6+7x}$

$= \frac{1}{7}(x+3)(x-1)(x-2)$
$+ \frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^2+x\sqrt[3]{-6+7x}+\left(\sqrt[3]{-6+7x}\right)^2}$

$= (x+3)(x-1)(x-2)\left[\frac{1}{7}+\frac{1}{x^2+x\sqrt[3]{-6+7x}+\left(\sqrt[3]{-6+7x}\right)^2}\right]$

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra

+Với $x < -3$ thì

$f(x) < g(x) < -3$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $-3 < x < 1$ thì

$1 > f(x) > g(x) > -3$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $1 < x < 2$ thì

$1 < f(x) < g(x) < 2$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 2$ thì

$f(x) > g(x) > 2$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $x = -3\ V\ x = 1\ V\ x = 2$ thì $f_3(x) = g_3(x)$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm:

$x = -3\ V\ x = 1\ V\ x = 2.$

Thí dụ 85. Giải phương trình:

$\frac{1}{13}\left(\frac{1}{13}x^3+\frac{12}{13}\right)^3+\frac{12}{13} = \sqrt[3]{-12+13\sqrt[3]{-12+13x}}$

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{1}{13}x^3+\frac{12}{13}$ và $g(x)=\sqrt[3]{-12+13x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên R.

PT đã cho có dạng: $f_2(x)=g_2(x)$

Xét $f(x)-g(x)=\frac{1}{13}x^3+\frac{12}{13}-\sqrt[3]{-12+13x}$

$=\frac{1}{13}x^3-x+\frac{12}{13}+x-\sqrt[3]{-12+13x}$

$=\frac{1}{13}(x+4)(x-1)(x-3)$
$+\frac{(x+4)(x-1)(x-3)}{x^2+x\sqrt[3]{-12+13x}+\left(\sqrt[3]{-12+13x}\right)^2}$

$=(x+4)(x-1)(x-4)\left[\frac{1}{13}+\frac{1}{x^2+x\sqrt[3]{-12+13x}+\left(\sqrt[3]{-12+12x}\right)^2}\right]$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4		1		2	$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra

+Với $x<-4$ thì

$f(x)<g(x)<-4$

Theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$

+Với $-4<x<1$ thì

$1>f(x)>g(x)>-4$

Theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$

+Với $1<x<3$ thì

$1<f(x)<g(x)<3$

Theo kết quả 2 có $f_2(x)<g_2(x)$

+Với $x>3$ thì $f(x)>g(x)>3$

Theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$

+Với $x=-4\ V\ x=1\ V\ x=3$ thì $f_2(x)=g_2(x)$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm:

$x=-4\ V\ x=1\ V\ x=4.$

Thí dụ 86. Giải phương trình:

$$\left(\sqrt[15]{16}\right)^{\left(\sqrt[15]{16}\right)^{x-1}-1}=\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$$

Lời giải

Xét $f(x)=\left(\sqrt[15]{16}\right)^{x-1}$ và $g(x)=\sqrt[3]{-6+7x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên R. PT đã cho có dạng: $f_2(x)=g_2(x)$

Xét $h(x)=\left(f(x)\right)^3-\left(g(x)\right)^3$

$=\left(\sqrt[5]{16}\right)^{x-1}-7x+6$

$h'(x)=\left(\sqrt[5]{16}\right)^{x-1}ln\left(\sqrt[5]{16}\right)-7=0$

$\Leftrightarrow x=log_{\sqrt[5]{16}}\frac{7}{ln\left(\sqrt[5]{16}\right)}=x_0$

BBT

x	$-\infty$		1		x_0		2		$+\infty$
h(x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	h(x_0)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra

+Với $x<1$ thì $h(x)=\left(f(x)\right)^3-\left(g(x)\right)^3>0$

Suy ra

$1>f(x)>g(x)$

Theo kết quả 2 có $f_2(x)>g_2(x)$

+Với $1<x<2$ thì

$h(x)=\left(f(x)\right)^3-\left(g(x)\right)^3<0$ suy ra

$1 < f(x) < g(x) < 2$

Theo kết quả 2 có $f_2(x) < g_2(x)$

+Với $x > 2$ thì $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^3 > 0$

$f(x) > g(x) > 2$

Theo kết quả 2 có $f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x = 1\ V\ x = 2$ thì $f_2(x) = g_2(x)$

Vậy PT đã cho có 2nghiệm: $x = 1\ V\ x = 2$.

Thí dụ 87. Giải phương trình:

$$(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^x} = \sqrt[3]{-48 + 28\sqrt[3]{-48 + 28x}}$$

Lời giải

Xét $f(x) = (\sqrt{2})^x$ và $g(x) = \sqrt[3]{-48 + 28x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên R.

PT đã cho có dạng: $f_2(x) = g_2(x)$

Xét $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^3$

$= (\sqrt{2})^x - 28x + 48$

$h'(x) = (\sqrt{2})^x ln(\sqrt{2}) - 28 = 0$

$\Leftrightarrow x = log_{\sqrt{2}} \dfrac{28}{ln(\sqrt{2})} = x_0$

BBT

x	$-\infty$	2	x_0	4	$+\infty$
h(x)	$+\infty$	0	$h(x_0)$	0	$+\infty$

+Với $x < 2$ thì $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^3 > 0$

Suy ra $2 > f(x) > g(x)$

Theo kết quả 2 có $f_2(x) > g_2(x)$

+Với $2 < x < 4$ thì

$h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^3 < 0$ suy ra

$2 < f(x) < g(x) < 4$

Theo kết quả 2 có $f_2(x) < g_2(x)$

+Với $x > 4$ thì $h(x) = (f(x))^3 - (g(x))^3 > 0$

$f(x) > g(x) > 4$

Theo kết quả 2 có $f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x = 2\ V\ x = 4$ thì $f_2(x) = g_2(x)$

Vậy PT đã cho có 2nghiệm: $x = 2\ V\ x = 4$.

Thí dụ 88. *Giải bất phương trình*:

$$(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^x}} > x$$

Lờigiải. Dễ thấy $f(x) = (\sqrt{2})^x$ và $g(x) = x$ cùng đồng biến trên R

BPT có dạng: $f_3(x) > g_3(x)$

Xét $h(x) = (\sqrt{2})^x - x$

$h'(x) = (\sqrt{2})^x ln(\sqrt{2}) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{ln(\sqrt{2})}\right) = x_0$

Bbt

x	$-\infty$	2	x_0	4	$+\infty$
h(x)	$+\infty$	0	$h(x_0)$	0	$+\infty$

+Với $x < 2$ thì $h(x) > 0$

Suy ra

$2 > f(x) > g(x)$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $2 < x < 4$ thì

$h(x) < 0$ suy ra

$2 < f(x) < g(x) < 4$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 4$ thì $h(x) > 0$

$f(x) > g(x) > 4$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $x = 2\ V\ x = 4$ thì $f_3(x) = g_3(x)$

Tập nghiệm BPT đã cho là

$T = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

Thí dụ 89. *Giải bất phương trình:*

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\left(\sqrt[3]{3}\right)^{x}} \le x$$

Lờigiải. Dễ thấy $f(x) = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{x}$ và $g(x) = x$ cùng đồng biến trên R

BPT có dạng: $f_3(x) > g_3(x)$

Xét $h(x) = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{x} - x$

$h'(x) = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{x} ln\left(\sqrt[3]{3}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = log_{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{ln\left(\sqrt[3]{3}\right)}\right) = x_0$

Bbt

x	$-\infty$	3	x_0	27	$+\infty$
h(x)	$+\infty$	0	h(x_0)	0	$+\infty$

+Với $x < 3$ thì $h(x) > 0$

Suy ra

$3 > f(x) > g(x)$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $3 < x < 27$ thì

$h(x) < 0$ suy ra

$3 < f(x) < g(x) < 27$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 27$ thì $h(x) > 0$

$f(x) > g(x) > 27$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $x = 3\ V\ x = 27$ thì $f_3(x) = g_3(x)$

Tập nghiệm BPT đã cho là

$S = [3; 27]$

Thí dụ 90. *Giải bất phương trình:*

$$\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}\right)^3 > x$$

Lờigiải.

Dễ thấy $f(x) = \left(\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}\right)^3$ và $g(x) = x$ cùng đồng biến trên R .

BPT có dạng: $f_3(x) > g_3(x)$

Xét $f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}\right)^3 - x$

$= \frac{1}{343}(x-1)(x-8)(x+27)$

x	$-\infty$	-27	1	8	$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$ 0	+ 0	$-$ 0	+

Suy ra

+Với $x < -27$ thì

$f(x) < g(x) < -27$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $-27 < x < 1$ thì

$1 > f(x) > g(x) > -27$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $1 < x < 8$ thì

$1 < f(x) < g(x) < 8$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 8$ thì

$f(x) > g(x) > 8$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $x = -27\ V\ x = 1\ V\ x = 8$ thì $f_3(x) = g_3(x)$

Vậy PT đã cho có nghiệm:

$x \in (-27; 1) \cup (8; +\infty)$

Thí dụ 91. *Giải phương trình:*

$$\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}\right)^3 = 1 + \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7x-7}}}$$

Lời giải.

ĐK: $x \geq 1$

Dễ thấy $f(x) = \left(\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}\right)^3$ và

$g(x) = 1 + \sqrt{7x-7}$ cùng đồng biến trên $[1; +\infty)$

PT có dạng: $f_3(x) = g_3(x)$

Xét $f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}\right)^3 - 1 - \sqrt{7x-7}$

$$= \left(\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}\right)^3 - x + x - 1 - \sqrt{7x-7}$$

$$= \frac{1}{343}(x-1)(x-8)(x+27) + \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{7}\right)$$

$$= \frac{1}{343}(x-1)(x-8)(x+27) + \sqrt{x-1}.\frac{x-8}{\sqrt{x-1} - \sqrt{7}}$$

Bảng xét dấu

x	1		8		$+\infty$
$f(x) - g(x)$	0	−	0	+	

Suy ra

+Với $1 < x < 8$ thì

$1 < f(x) < g(x) < 8$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 8$ thì

$f(x) > g(x) > 8$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $x = 1\ V\ x = 8$ thì $f_3(x) = g_3(x)$

Vậy PT có 2 nghiệm $x = 1\ V\ x = 8$

Thí dụ 92. *Giải phương trình:*

$$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\right)^2 = 1 + \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3x-3}}}$$

Lời giải.

ĐK: $x \geq 1$

Dễ thấy $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2$ và

$g(x) = 1 + \sqrt{3x-3}$ cùng đồng biến trên $[1; +\infty)$

PT có dạng: $f_3(x) = g_3(x)$

Xét $f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2 - 1 - \sqrt{3x-3}$

$$= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2 - x + x - 1 - \sqrt{3x-3}$$

$$= \frac{1}{9}(x-1)(x-4) + \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{9}(x-1)(x-4) + \sqrt{x-1}.\frac{x-4}{\sqrt{x-1} - \sqrt{7}}$$

Bảng xét dấu

x	1		4		$+\infty$
$f(x) - g(x)$	0	−	0	+	

Suy ra

+Với $1 < x < 4$ thì

$1 < f(x) < g(x) < 4$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 4$ thì

$f(x) > g(x) > 4$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $x = 1\ V\ x = 4$ thì $f_3(x) = g_3(x)$

Vậy PT có 2 nghiệm $x = 1\ V\ x = 4$

$$= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2 - x + x - 1 - \sqrt{3x-3}$$

Thí dụ 93. *Giải phương trình:*
$\frac{x+2^x-1}{2} + (\sqrt{2})^{x+2^x-1} = (\sqrt{3})^{3^x-1}$

Lời giải.

$$\frac{x+2^x-1}{2} + (\sqrt{2})^{x+2^x-1} = (\sqrt{3})^{3^x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x+2^x-1}{2} + 2^{\frac{x+2^x-1}{2}} - 1}{2} = \frac{3^{\frac{3^x-1}{2}} - 1}{2} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2^x-1}{2}$ và $g(x) = \frac{3^x-1}{2}$

là các hàm số đồng biến trên R.

PT(1) có dạng $f_2(x) = g_2(x)$

Xét $h(x) = \frac{x+2^x-1}{2} - \frac{3^x-1}{2} = -\frac{3^x-2^x-x}{2}$

$$h'(x) = -\frac{3^x ln3 - 2^x ln2 - 1}{2}$$

+xét

$$h'(x) = -\frac{3^x ln3 - 2^x ln2 - 1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x ln3 = 2^x ln2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x ln2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - ln3 = 0$$

Do $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x ln2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - ln3$ là hàm số liên tục và nghịch biến

$y(0) = ln2 + 1 - ln3 > 0$ và

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = -ln3 < 0$

nên có $y(a) < 0$

Suy ra $y(0)y(a) < 0$

Do đó $\left(\frac{2}{3}\right)^x ln2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - ln3 = 0$

Có nghiệm duy nhất x_0

Cách khác:Có $y(1) < 0$ suy ra

$y(0)y(1) < 0$

Do đó $\left(\frac{2}{3}\right)^x ln2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - ln3 = 0$

Có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$

+xét

$$h'(x) = -\frac{3^x ln3 - 2^x ln2 - 1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x ln3 < 2^x ln2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x ln2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - ln3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < x_0$$

+xét

$$h'(x) = -\frac{3^x ln3 - 2^x ln2 - 1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x ln3 > 2^x ln2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x ln2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - ln3 < 0$$

$$\Leftrightarrow x > x_0$$

BBT

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
h(x)	$-\infty$	0	$h(x_0)$	0	$-\infty$

Từ bbt suy ra

+Với $x < 0$ thì

$f(x) < g(x) < 0$ nên theo kết quả 2 có

$f_2(x) < g_2(x)$

+Với $0 < x < 1$ thì

$1 > f(x) > g(x) > 0$ nên theo kết quả 2 có

$f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x > 1$ thì

$1 < f(x) < g(x)$ nên theo kết quả 2 có

$f_2(x) < g_2(x)$

+Với $x = 0\ V\ x = 1$ thì $f_2(x) = g_2(x)$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = 0\ V\ x = 1$

Thí dụ 94. *Giải phương trình*:

$\frac{3^x+2x-1}{2} + \left(\sqrt[4]{3}\right)^{3^x+2x-1} = \left(\sqrt[4]{5}\right)^{5^x-1}$

Lời giải.

$$\frac{3^x + 2x - 1}{2} + \left(\sqrt[4]{3}\right)^{3^x+2x-1} = \left(\sqrt[4]{5}\right)^{5^x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2.\frac{2x+3^x-1}{4} + 3^{\frac{2x+3^x-1}{4}} - 1}{4} = \frac{5^{\frac{5^x-1}{4}} - 1}{4} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x+3^x-1}{4}$ và $g(x) = \frac{5^x-1}{4}$

là các hàm số đồng biến trên R.

PT(1) có dạng $f_2(x) = g_2(x)$

Xét $h(x) = \frac{2x+3^x-1}{4} - \frac{5^x-1}{4} = -\frac{5^x-3^x-2x}{4}$

$$h'(x) = -\frac{5^x ln5 - 3^x ln3 - 2}{4}$$

+xét

$$h'(x) = -\frac{5^x ln5 - 3^x ln3 - 2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5^x ln5 = 3^x ln3 + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x ln3 + 2.\left(\frac{1}{5}\right)^x - ln5 = 0$$

Do $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x ln3 + 2.\left(\frac{1}{5}\right)^x - ln5$ là hàm số liên tục và nghịch biến

$y(0) = ln3 + 2 - ln3 > 0$ và

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = -ln5 < 0$

nên có $y(a) < 0$

Suy ra $y(0)y(a) < 0$

Do đó $\left(\frac{3}{5}\right)^x ln3 + 2.\left(\frac{1}{5}\right)^x - ln5 = 0$

Có nghiệm duy nhất x_0

Cách khác:Có $y(1) < 0$ suy ra

$y(0)y(1) < 0$

Do đó $\left(\frac{2}{3}\right)^x ln2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - ln3 = 0$

Có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$

+xét

$$h'(x) = -\frac{5^x ln5 - 3^x ln3 - 2}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow 5^x ln5 < 3^x ln3 + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x ln3 + 2.\left(\frac{1}{5}\right)^x - ln5 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < x_0$$

+xét

$h'(x) = -\dfrac{5^x ln5 - 3^x ln3 - 2}{4} < 0$

$\Leftrightarrow 5^x ln5 > 3^x ln3 + 2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x ln3 + 2.\left(\dfrac{1}{5}\right)^x - ln5 < 0$

$\Leftrightarrow x > x_0$

BBT

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
h(x)	$-\infty$	0 ↗	$h(x_0)$	0 ↘	$-\infty$

Từ bbt suy ra

+Với $x < 0$ thì

$f(x) < g(x) < 0$ nên theo kết quả 2 có

$f_2(x) < g_2(x)$

+Với $0 < x < 1$ thì

$1 > f(x) > g(x) > 0$ nên theo kết quả 2 có

$f_2(x) > g_2(x)$

+Với $x > 1$ thì

$1 < f(x) < g(x)$ nên theo kết quả 2 có

$f_2(x) < g_2(x)$

+Với $x = 0\ V\ x = 1$ thì $f_2(x) = g_2(x)$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = 0\ V\ x = 1$

Thí dụ 95. *Giải bất phương trình*:

$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}\right)^3 + \frac{6}{7} \le x$

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7}$ và $g(x) = x$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên R.

BPT đã cho có dạng: $f_3(x) \le g_3(x)$

Xét $f(x) - g(x) = \frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7} - x$

$= \dfrac{1}{7}(x+3)(x-1)(x-2)$

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra

Suy ra

+Với $x < -3$ thì

$f(x) < g(x) < -3$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $-3 < x < 1$ thì

$1 > f(x) > g(x) > -3$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $1 < x < 2$ thì

$1 < f(x) < g(x) < 2$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$

+Với $x > 2$ thì

$f(x) > g(x) > 2$

Theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$

+Với $x = -3\ V\ x = 1\ V\ x = 2$ thì $f_3(x) = g_3(x)$

Vậy tập nghiệm:

$S = (-\infty; -3] \cup [1; 2]$.

Thí dụ 96. *Giải phương trình*:

$\sqrt[3]{-6 + 7\sqrt[3]{-6 + 7\sqrt[3]{-6 + 7x}}} < x$

Lời giải

Xét $f(x)=\sqrt[3]{-6+7x}$ và $g(x)=x$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên R.

PT đã cho có dạng: $f_3(x)=g_3(x)$

Xét $f(x)-g(x)=\sqrt[3]{-6+7x}-x$

$=-\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^2+x\sqrt[3]{-6+7x}+\left(\sqrt[3]{-6+7x}\right)^2}$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra

+Với $x<-3$ thì

$-3>f(x)>g(x)$

Theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$

+Với $-3<x<1$ thì

$-3<f(x)<g(x)<1$

Theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$

+Với $1<x<2$ thì

$2>f(x)>g(x)>1$

Theo kết quả 2 có $f_3(x)>g_3(x)$

+Với $x>2$ thì

$2<f(x)<g(x)$

Theo kết quả 2 có $f_3(x)<g_3(x)$

+Với $x=-3\ V\ x=1\ V\ x=2$ thì $f_3(x)=g_3(x)$

Vậy PT tập nghiệm:

$S=(-3;1)\cup(2;+\infty)$.

Thí dụ 97. *Cho $1\le x\le 2$.Chứng minh*

$\dfrac{2^{2^{x-1}}}{2}\le\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$

Lời giải

Có

$\dfrac{2^{2^{x-1}}}{2}\le\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$

$\Leftrightarrow 2^{2^{x-1}-1}\le\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$

Xét $f(x)=2^{x-1}$ và $g(x)=\sqrt[3]{-6+7x}$

Dễ thấy f(x) và g(x) là các hàm số cùng đồng biến trên $[1;2]$.

Xét $h(x)=f(x)-g(x)=2^{x-1}-\sqrt[3]{-6+7x}$

$h'(x)=2^{x-1}ln2-\dfrac{7}{\left(\sqrt[3]{-6+7x}\right)^2}$

$h''(x)=2^{x-1}(ln2)^2+\dfrac{98}{9\left(\sqrt[3]{-6+7x}\right)^5}>0$

Suy ra hàm số h(x) lõm trên đoạn [1;2]

Mà $h(1)=h(2)=0$

x	1		2
h(x)	0	↘	0

Suy ra $h(x)\le 0;\forall x\in[1;2]$

Do vậy $\forall x\in[1;2]$ có

$1=f(1)\le f(x)\le g(x)=h(2)=2$

(các thí dụ trước tác giả chưa giải thích rõ ở bước này)

Theo kết quả 2 có:

$f_2(x)<g_2(x)$

$\Leftrightarrow 2^{2^{x-1}-1}\le\sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2^{x-1}}}{2} \le \sqrt[3]{-6+7\sqrt[3]{-6+7x}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1\ V\ x=2$

Thí dụ 98. *Giải phương trình*:

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}=\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}|x|+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2$$

Lời giải

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}=\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}|x|+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2$$

Đặt $|x|=t\ge 0$

PT đã cho trở thành

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}t^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}=\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2$$

Ta có $f(t)=\frac{1}{5}t^2+\frac{4}{5}$ và $g(t)=\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)^2$

cùng đồng biến trên $[0;+\infty)$

PT trên có dạng $f_3(t)=g_3(t)$ (1)

Xét $\frac{1}{5}t^2+\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{45}(t-1)(t-4)$

t	0		1		4		$+\infty$
$f(t)-g(t)$		+	0	−	0	+	

Suy ra

+Với $0\le t<1$ thì $1=f(1)>f(t)>g(t)>0$

Theo kết quả 2 có $f_3(t)>g_3(t)$

+Với $1<t<4$ thì

$1<f(t)<g(t)<g(4)=4$

Theo kết quả 2 có $f_3(t)<g_3(t)$

+Với $t>4$ thì $f(t)>g(t)>g(4)=4$

Theo kết quả 2 có $f_3(t)>g_3(t)$

+Với $t=1\ V\ t=4$ thì $f_3(t)=g_3(t)$

Vậy (1) có đúng 2 nghiệm $t=1\ V\ t=4$

Suy ra PT đã cho có đúng 4 nghiệm

$x=\pm 1\ V\ x=\pm 4$

Thí dụ 99. *Giải phương trình*:

$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}x\sqrt{x}+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=t\ge 0$. PT đã cho trở thành

$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}t^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\right)^3+\frac{6}{7}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

Xét $f(x)=\frac{1}{7}t^3+\frac{6}{7}$ và $g(t)=\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}$

Dễ thấy f(t) và g(t) là các hàm số cùng đồng biến trên $[0;+\infty)$.

PT đã cho có dạng: $f_3(t)=g_3(t)$

Xét $f(t)-g(t)=\frac{1}{7}t^3+\frac{6}{7}-\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{21}(3t+2)(t-1)(t-2)$

t	0		1		2		$+\infty$
$f(t)-g(t)$		+	0	−	0	+	

Suy ra

+Với $0\le t<1$ thì $1=f(1)>f(t)>g(t)>0$

Theo kết quả 2 có $f_3(t)>g_3(t)$

+Với $1<t<2$ thì

$1<f(t)<g(t)<g(2)=2$

Theo kết quả 2 có $f_3(t)<g_3(t)$

+Với $t>2$ thì $f(t)>g(t)>g(2)=2$

Theo kết quả 2 có $f_3(t)>g_3(t)$

+Với $t=1\ V\ t=2$ thì $f_3(t)=g_3(t)$

Vậy (1) có đúng 2 nghiệm $t=1\ V\ t=2$

Suy ra PT đã cho có đúng 2 nghiệm

$x=1\ V\ x=4$

Bài tập tương tự

Giải phương trình:

$$\frac{1}{21}\left(\frac{1}{21}\left(\frac{1}{21}x\sqrt{x}+\frac{20}{21}\right)^3+\frac{20}{21}\right)^3+\frac{20}{21}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)^2$$

PT có 2 nghiệm $x=1;x=16$

****

Phần viết thêm do có nhiều dạng toán nên tác giả cũng chưa có thời gian sắp xếp lại thành hệ thống và chỉnh sửa các thí dụ cho gọn gàng hơn. Đặc biệt là tác giả giả chưa kiểm tra hết được những sai sót.Vậy khi đọc bài viết thì những ý tưởng nào hay thì bạn đọc lấy đó làm tham khảo còn chỗ nào chưa hay hoặc sai sót thì có thể chỉnh sửa giúp tác giả hoặc bỏ qua.

Tác giả: Vũ Hồng Phong

31-8-2019

Bài Tập

Bài tập 1.Giải phương trình:

1. $\sqrt{2\sqrt{2x+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{2x+\sqrt{x}}}=x.$

HD: $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x}}$ có PT: $f_2(x)=x.$

2. $\sqrt[3]{1+7\sqrt{-1+\sqrt[3]{1+7\sqrt{-1+x}}}}=x.$

3. $\frac{x-\sqrt{6\sqrt{6x-11}+6\sqrt{x-1}-11}}{\sqrt{\sqrt{6x-11}+\sqrt{x-1}-1}}=1.$

HD: $f(x)=\sqrt{6x+11}+\sqrt{x-1}$

4. $3\sqrt{x^2+1}+\sqrt{10x^2+2-6x\sqrt{x^2+1}}=8x.$

HD: $f(x)=3x+\sqrt{x^2+1}$ có PT: $f_2(x)=x.$

5. $\sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2x}}}=x.$

6. $\log_3\left(1+2\log_3\left(1+2x\right)\right)=x.$

7. $\log\left(1+9\sqrt{\log\left(1+9\sqrt{\log(1+9x)}\right)}\right)=x^2.$

8. $\log_3\left(1+2^{\log_3(1+2^x)}\right)=x.$

9. $\left(2^{x^3}-1\right)^3=\log_2(x+1).$

10. $$\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}}}}}}=2x-1.$$

11. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right)=x.$

HD: Nhận xét $x\in[-1;1]$

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$ có PT: $f_3(x)=x.$

Phương trình có 3 nghiệm $0;\pm1$

12. $x+\sin\left(2x-\sin x\right)=2\sin x.$

Bài tập2. Giải phương trình:

1. $\left(3\left(3x^5-2\right)^5-2\right)^5=\frac{1+2\left(2\left(2x^3-1\right)^3-1\right)^3}{3}.$

2. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}}}.$

3. $1+\left(\sqrt[3]{2}\right)^{1+2^x}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^x}.$

4. $\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}+2}{3\sqrt{3x-2}-2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}-2}{3\sqrt{3x-2}-2}}=1.$

5. $x^3+4x+6+4\sqrt[3]{x^3+4x+4}=3\sqrt[3]{2+3x}.$

6. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right).$

7. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right)$

$=\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)\right).$

8. $1+\log_3(\log_3 3x)=\log_5(4+\log_5(4+x)).$

9. $\sqrt{1+2^{\sqrt{1+2^x}}}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\left(\sqrt[3]{3}\right)}.$

10. $\left(\sqrt[5]{2}\right)^{2^x+3^x}+\left(\sqrt[5]{3}\right)^{2^x+3^x}=\left(\sqrt[5]{5}\right)^{5^x}.$

11. $\left(\sqrt{2}\right)^{(\sqrt{2})^x}=\frac{2^{2^x}}{4}-2.$

12. $2+\log_3\left(1+2^{\log_3\left(1+2^x\right)}\right)$

$=\log_2\left(3^{\log_2\left(\frac{3^x+5^x}{4}\right)}+5^{\log_2\left(\frac{3^x+5^x}{4}\right)}\right).$

Bài tập 3. Giải hệ phương trình:

1. $\begin{cases}\sqrt{2^{2^x}}=2(y+1)\\ 2^{2^y}=2x\end{cases}.$

2. $\begin{cases}3\sqrt{3\sqrt{3x-2}-2}-y=2\\ 2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1}-y\sqrt{y}=1\end{cases}.$

3. $\begin{cases}x=2+\log_2\log_2 y\\ y=2\log_2 z\\ z=2+\log_2\log_2 x\end{cases}.$

4. $\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{1-\sqrt{1-y}}}}}}\\ 1+y\sqrt{x}=y\end{cases}.$

Bài tập 4. Cho $f(x)=2x^2-1;\ g(x)=4x^3-3x;$

$h(x)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}};\ k(x)=x(x-3)^2;$

$u(x)=2\sqrt{x^2-x^4}$. Tìm số nghiệm phương trình:

1) $f_5(x)=h(x).$

2) $g_4(x)=h(x).$

3) $f_4(x)=\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}}{2}.$

4) $k_7(x)=0.$

5) $f_3(x)=h_3(x).$

6) $g_3(x)=h_2(x).$

7) $h_4(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

8) $h_5(x)=h_4(x).$

9) $u_4(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

10) $u_5(x)=\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}}{2}\right|.$

Bài tập 5. Cho $f(x)=\frac{x}{2x+1}$. Giải phương trình :

$a)\sum_{i=1}^{5}f_i(x)=0.$ $b)\prod_{k=1}^{4}f_k(x)=\frac{-1}{7}$

Vũ Hồng Phong (Bất Lự,Hoàn Sơn,Tiên Du,Bắc Ninh)