SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 10 THPT**
HÀ TĨNH	**NĂM HỌC 2023-2024**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN**
(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)	Thời gian làm bài: **150** phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình $2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=x^2+mx+3m-2$, đường thẳng $(d): y=x+m$ (m là tham số) và hai điểm $A(-1;-1)$, $B(2;2)$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho A,B,M,N là bốn đỉnh của một hình bình hành.

Câu 2. *(5,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình sau có đúng 4 nghiệm nguyên: $\begin{cases} x^2-10x+21\ge 0 \\ x^2-(2m+1)x+4m-2\le 0 \end{cases}$.

b) Gọi E là tập các ước nguyên dương của số 129600. Chọn ngẫu nhiên 2 phần tử của tập E. Tính số cách chọn để tích của chúng là một số chia hết cho 3.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABM. Điểm $D(7;-2)$ nằm trên đoạn MC sao cho $GD=GA$. Cho biết điểm A có hoành độ nhỏ hơn 4 và đường thẳng AG có phương trình $3x-y-13=0$. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình đường thẳng AB.

b) Cho tam giác ABC cân tại A và có trực tâm H nằm trên đường tròn nội tiếp của tam giác. Tính $\cos A$.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+4x+a\right|$ trên đoạn $[1;3]$. Tìm tất cả các giá trị của a để $M+2m=34$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Có bao nhiêu cách tô màu các cạnh của lục giác lồi $ABCDEF$ sao cho mỗi cạnh được tô bởi một trong sáu màu khác nhau và hai cạnh kề nhau (chung đỉnh) thì khác màu?

---------------------------HẾT---------------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

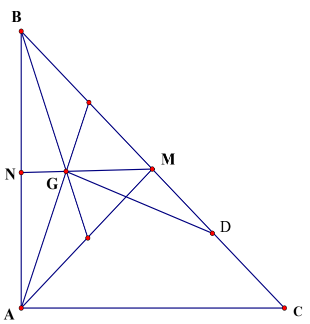
Họ và tên thí sinh: …………………………………………… Số báo danh: …………………

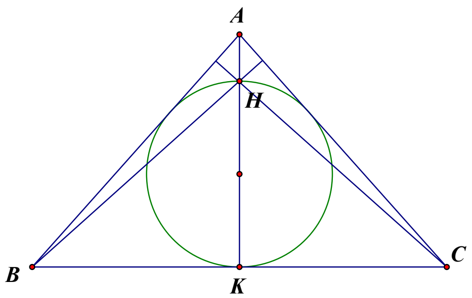
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
NĂM HỌC 2023-2024
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 10

Lưu ý: ***Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều cho điểm tương ứng***

Câu	*Nội dung*	*Điểm*
Câu 1a **2,5 điểm**	Điều kiện xác định: $2x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow \lvert x\rvert \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$	**0,75**
	Phương trình đã cho tương đương $2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=4(2x^2-1)+2x^2+3x-2$	**0,75**
	Đặt $t=\sqrt{2x^2-1}\,(t\ge 0)$ ta có $4t^2-2(3x+1)t+2x^2+3x-2=0$ (1) $\Delta'=(3x+1)^2-4(2x^2+3x-2)=x^2-6x+9=(x-3)^2$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3x+1+x-3}{4}=\frac{2x-1}{2} \\ t=\frac{3x+1-x+3}{4}=\frac{x+2}{2}\end{array}\right.$	**0,5**
	*) Với $\sqrt{2x^2-1}=\frac{2x-1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-1}=2x-1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 4(2x^2-1)=(2x-1)^2\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 4x^2+4x-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$ (TMĐK)	**0,25**
	*) Với $\sqrt{2x^2-1}=\frac{x+2}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-1}=x+2\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 4(2x^2-1)=(x+2)^2\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 7x^2-4x-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x=\frac{2\pm 2\sqrt{15}}{7}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm 2\sqrt{15}}{7}$ Đối chiếu đk ta được nghiệm $x=\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$, $x=\frac{2-2\sqrt{15}}{7}$, $x=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$	**0,25**
Câu 1b **3,5 điểm**	Phương trình hoành độ giao điểm: $$x^2+(m-1)x+2m-2=0$$	**0,75**
	ĐK phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Delta>0\Leftrightarrow m^2-10m+9>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>9\end{array}\right.$	**0,75**
	Phương trình đường thẳng AB: $y=x$. Gọi $M(x_1;x_1+m),N(x_2;x_2+m)$, Theo Vi-ét $x_1+x_2=-m+1; x_1x_2=2m-2$	**0,75**
	Nhật xét AB cùng phương với d và $AB=3\sqrt{2}$	**0,5**
	Do 4 điểm A,B,M,N là 4 đỉnh của một hình bình hành nên $MN=AB\Leftrightarrow \sqrt{2(m^2-10m+9)}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=10\end{array}\right.$	**0,5**

	Với $m=0$ thì AB trùng d nên không thỏa mãn. Vậy $m=10$	**0,25**
Câu 2a **3,0 điểm**	Ta có $x^2-7x+21\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 3\\ x\ge 7\end{array}\right.$	**0,75**
	$x^2-(2m+1)x+4m-2\le 0\Leftrightarrow (x-2)(x-2m+1)\le 0$	**0,5**
	*) Nếu $2m-1=2\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ thì $(2)\Leftrightarrow (x-2)^2\le 0\Leftrightarrow x=2$. Khi đó hệ có một nghiệm $x=2$. Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ không thỏa mãn.	**0,5**
	*) Nếu $2m-1<2\Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $[2m-1;2]$. Để hệ đã cho có đúng 4 nghiệm nguyên thì $-2<2m-1\le -1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m\le 0$	**0,5**
	*) Nếu $2m-1>2\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $[2;2m-1]$. Để hệ đã cho có đúng 4 nghiệm nguyên thì $8\le 2m-1<9\Leftrightarrow \dfrac{9}{2}\le m<5$ **Kết luận**: $-\dfrac{1}{2}<m\le 0$ hoặc $\dfrac{9}{2}\le m<5$	**0,5**
Câu 2b **2,0 điểm**	Phân tích $129600=2^6.3^4.5^2$	**0,5**
	Các ước chia hết cho 3 có dạng $3^a.2^b.5^c$ với a,b,c là các số tự nhiên thỏa mãn $1\le a\le 4, 0\le b\le 6, 0\le c\le 2$. Có 4 cách chọn a, 7 cách chọn b, 3 cách chọn c Số các ước là 4.7.3=84	**0,5**
	Các ước không chia hết cho 3 có dạng $2^b.5^c$ với b,c là các số tự nhiên thỏa mãn $0\le b\le 6, 0\le c\le 2$. Có 7 cách chọn b, 3 cách chọn c Số các ước là .7.3=21	**0,5**
	Để chọn ra hai số chia hết cho 3 ta có hai TH - TH1: cả hai số đều chia hết cho 3, số cách chọn là $C_{84}^2=3486$	**0,25**
	- TH2: Một số chia hết cho 3 còn số kia không chia hết cho 3, số cách chọn là $84.21=1764$ Vậy tổng số cách chọn là 5250.	**0,25**
Câu 3a **3,0 điểm**	 Do ΔABC vuông cân tại A và có AM là đường trung tuyến nên $MA=MB\Rightarrow \Delta MAB$ vuông cân tại M. Do G là trọng tâm ΔABM nên $GA=GB$. Kết hợp giả thiết có $GA=GB=GD$ suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD suy ra $\widehat{AGD}=2\widehat{ABD}=2.45^0=90^0\Rightarrow DG\perp AG$	**0,75**
	$\Rightarrow DG=d(D;AG)=\dfrac{\lvert 3.7-(-2)-13\rvert}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}\quad \Rightarrow AD=GD\sqrt{2}=\sqrt{20}$	**0,75**
	Ta có $A\in AG$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 4 nên có được $A(a;3a-13)$ với $a<4$ Từ $AD=\sqrt{20}\Leftrightarrow (a-7)^2+(3a-11)^2=20\Leftrightarrow 10a^2-80a+150=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5\\ a=3\end{array}\right.$	**0,5**

	chọn được $a=3\Rightarrow A(3;-4)$	
	Gọi N trung điểm AB có ΔANG vuông tại N suy ra $\tan\widehat{NAG}=\frac{GN}{NA}=\frac{\frac{1}{3}MN}{MN}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \cos\widehat{NAG}=\frac{3}{\sqrt{10}}$	**0,25**
	Gọi $\vec{n}_{AB}(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véc tơ pháp tuyến đường thẳng AB ta có $\left\|\cos\left(\widehat{\vec{n}_{AB};\vec{n}_{AG}}\right)\right\|=\cos\widehat{NAG}\Leftrightarrow \frac{\|3a-b\|}{\sqrt{10\left(a^2+b^2\right)}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\Leftrightarrow \|3a-b\|=3\sqrt{\left(a^2+b^2\right)}\Leftrightarrow 3ab-4b^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3a-4b=0 \end{array}\right.$ *) Nếu $b=0$ chọn $a=1$ phương trình đường thẳng AB: $x-3=0$ *) Nếu $3a-4b=0$ chọn $a=4;b=3$ phương trình đường thẳng AB: $4x-3y-24=0$	**0,5**
	TH này có $d(D;AB)=2<d(D;AG)=\sqrt{10}$ nên không thỏa mãn Vậy phương trình đường thẳng AB là $x-3=0$.	**0,25**
Câu 3b **2,0 điểm**	 Gọi K là chân đường cao đỉnh A. Tam giác ABC cân tại A nên $b=c$. +) $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(b-\frac{a}{2})\tan\frac{A}{2}$ (1)	**0,75**
	+) $2r=HK=BK.\tan HBK=BK.\tan\frac{A}{2}=\frac{a}{2}\tan\frac{A}{2}$ (2)	**0,75**
	Từ (1) và (2) suy ra $2b-a=\frac{a}{2}\Rightarrow a=\frac{4b}{3}$	**0,25**
	Do đó $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2b^2-\frac{16b^2}{9}}{2b^2}=\frac{1}{9}$.	**0,25**
Câu 4a **2,0 điểm**	Đặt $f(x)=x^2+4x+a$. Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[1;3]$ ta có $\min\limits_{[1;3]} f(x)=a+5,\max\limits_{[1;3]} f(x)=a+21$	**0,5**
	TH1: Nếu $(a+21)(a+5)\le 0\Rightarrow -21\le a\le -5$ thì $m=0,M=\max\left\{\|a+5\|;\|a+21\|\right\}$ Theo giả thiết $M+2m=34$ nên có 2 khả năng -KN1: $\begin{cases} \|a+5\|=34 \\ \|a+5\|\ge\|a+21\| \end{cases}\Leftrightarrow a=-39$ (KTM) -KN2: $\begin{cases} \|a+21\|=34 \\ \|a+21\|\ge\|a+5\| \end{cases}\Leftrightarrow a=13$ (KTM)	**0,5**

	TH2: $a>-5\Leftrightarrow a+21>a+5>0\Rightarrow M=a+21,m=a+5$ Theo bài ra ta có $a+21+2\left(a+5\right)=34\Leftrightarrow a=1$ (TM)	**0,5**
	TH3: $a<-21\Rightarrow a+5<a+21<0\Rightarrow M=-a-5,m=-a-21$ Theo bài ra ta có $-a-5+2\left(-a-21\right)=34\Leftrightarrow a=-27$ (TM) Kết luận $a=1,a=-27$	**0,5**
Câu 5 **2,0 điểm**	**Trường hợp 1:** *AB, CD, EF* cùng màu. Chọn màu cho các cạnh này: có 6 cách. Khi đó mỗi cạnh *BC, DE, FA* có 5 cách chọn màu (khác 1 màu của 2 cạnh kề). Suy ra trường hợp này có 6.5^3 cách tô.	**0,5**
	Trường hợp 2: *AB, CD, EF* đôi một khác màu. Chọn màu cho các cạnh này: lần lượt có 6, 5, 4 cách. Khi đó mỗi cạnh *BC, DE, FA* có 4 cách chọn màu (khác 2 màu của 2 cạnh kề). Suy ra trường hợp này có $6.5.4.4^3$ cách tô.	**0,5**
	Trường hợp 3: Trong *AB, CD, EF* có 2 cạnh cùng màu - Khả năng 1: *AB, CD* cùng màu và chúng khác màu *E*F. Chọn màu cho *AB* và *CD*: có 6 cách. Chọn màu cho *EF*: có 5 cách. Chọn màu cho *BC*: có 5 cách (khác 1 màu của 2 cạnh kề) Chọn màu cho *DE* và *FA*: mỗi cạnh có 4 cách (khác 2 màu của 2 cạnh kề) Suy ra khả năng này có $6.5.5.4^2$ cách tô.	**0,5**
	- Khả năng 2: *AB, EF* cùng màu và chúng khác màu *CD* Tương tự KN1, có $6.5.5.4^2$ cách tô. - Khả năng 3: *CD, EF* cùng màu và chúng khác màu *AD*. Tương tự KN1, có $6.5.5.4^2$ cách tô. Vậy tổng số cách tô cần tìm là: $6.5^3+6.5.4.4^3+3.6.5.5.4^2=15630$.	**0,5**