

CÁC DẠNG TOÁN CÓ YẾU TỐ MAX- MIN TRONG BÀI TOÁN THỂ TÍCH

Giáo viên: Hoàng Xuân Bính

Nhóm giáo viên tiếp sức Chinh phục kỳ thi THPT 2021

Trong đề thi thử nhiều năm gần đây và cả đề thi chính thức của bộ giáo dục năm 2016-2017, chúng ta thấy xuất hiện các dạng bài toán cực trị về thể tích của khối đa diện. Đây cũng là dạng bài tập mà khiến nhiều học sinh gặp khó khăn về việc tiếp cận và tìm lời giải.

Do đó để giúp học sinh có một cách nhìn khác và hệ thống về dạng bài tập này, tôi xin gửi tới các quý thầy cô và học sinh chuyên đề: “Các dạng toán có yếu tố max-min trong bài toán thể tích”.

1. Lý thuyết:

a) Một số phương pháp chung để giải quyết các bài toán cực trị về thể tích:

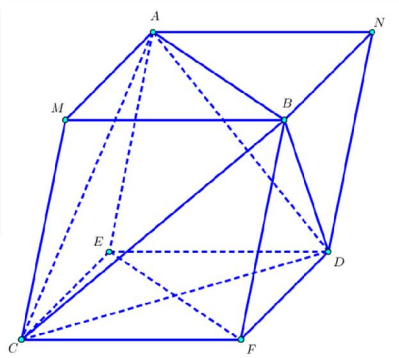
- Thông thường để giải quyết một bài toán cực trị về thể tích thì mục tiêu đầu tiên của chúng ta chính là thiết lập được các yếu tố cơ bản của công thức tính thể tích là tìm được chiều cao, diện tích đáy của khối chóp hoặc lăng trụ ấy.
- Sau khi đã xác định được công thức của thể tích thì ta có thể sử dụng một trong ba phương pháp sau đây:
 - + Phương pháp 1: Khảo sát hàm số 1 biến.
 - + Phương pháp 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức cổ điển: Cauchy, Cauchy Schwarz,...
 - + Phương pháp 3: Có thể sử dụng đánh giá bằng hình học (ví dụ so sánh hình chiếu với hình xiên...)

b) Một số kết quả thường được sử dụng trong các bài toán cực trị

Bài toán 1: Cho tứ diện $ABCD$ có góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng φ , khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng d . Khi đó thể tích của $ABCD$ được tính bởi công thức:

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi.$$

Chứng minh



Với tứ diện $ABCD$ đã cho, ta dựng hình hộp $AMBN.ECFD$ như hình vẽ

$$\text{Ta có: } V_{ABCD} = V_{\text{hộp}} - 4.V_{D.ABN} = V_{\text{hộp}} - 4.\frac{1}{6}V_{\text{hộp}} = \frac{1}{3}V_{\text{hộp}}.$$

$d = d(AB; CD) = h$ là chiều cao của hình hộp.

$$S_{\text{đáy}} = \frac{1}{2}CD.EF.\sin \varphi = \frac{1}{2}AB.CD.\sin \varphi$$

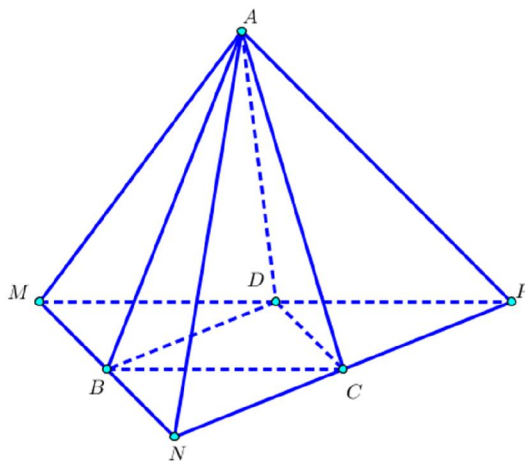
$$\text{Do đó: } V_{ABCD} = \frac{1}{3}.V_{\text{hộp}} = \frac{1}{3}.h.S_{\text{đáy}} = \frac{1}{3}.d.\frac{1}{2}.AB.CD.\sin \varphi = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin \varphi \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$. Khi đó thể tích của

$ABCD$ được tính bởi công thức:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Chứng minh



Ta dựng các điểm M, N, P sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, NP, MP . Khi đó: $AB = CD = \frac{1}{2}MN$ nên tam giác AMN vuông tại A .

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\triangle ANP, \triangle AMP$ đều vuông tại A .

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AMNP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot AM \cdot AN \cdot AP$ trong đó:

$$AM^2 + AN^2 = 4a^2, AN^2 + AP^2 = 4b^2, AP^2 + AM^2 = 4c^2 \text{ nên ta có:}$$

$$AM = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}, AN = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, AP = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Suy ra: } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Bài toán 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và một mặt phẳng (P) bất kì cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' .

$$\text{Đặt } x = \frac{SA}{SA'}, y = \frac{SB}{SB'}, z = \frac{SC}{SC'}, t = \frac{SD}{SD'}.$$

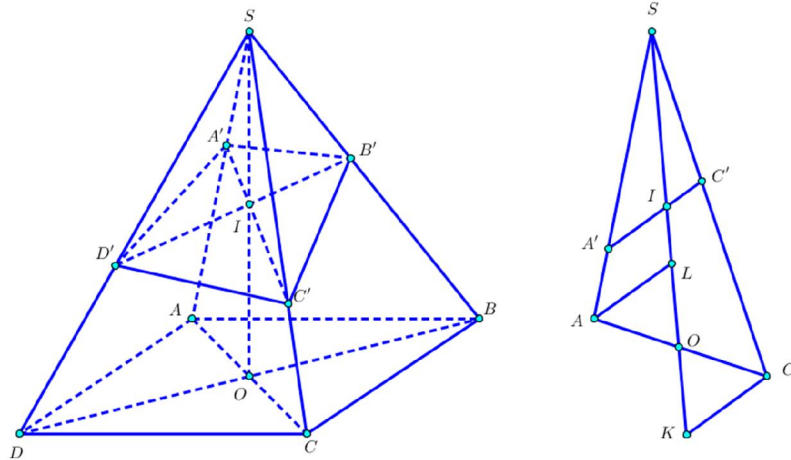
Khi đó ta luôn có hai kết quả sau đây:

$$x + z = y + t \quad (1)$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x + y + z + t}{4xyzt} \quad (2).$$

Chú ý điều kiện: $x, y, z, t \geq 1$

Chứng minh



(1) Chứng minh: $x + z = y + t$.

Kẻ $AK \parallel A'C', K \in SO$ và $CJ \parallel A'C', J \in SO$.

Ta có $\frac{SA}{SA'} = \frac{SK}{SI}$.

Và $\frac{SC}{SC'} = \frac{SJ}{SI} \Rightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SK}{SI} + \frac{SJ}{SI} = \frac{SK + SJ}{SI} = \frac{(SO - OK) + (SO + OJ)}{SI} = \frac{2SO}{SI}$ (1)

(do $AK \parallel CJ \Rightarrow \frac{OK}{OJ} = \frac{OA}{OC} = 1 \Rightarrow OK = OJ$)

Tương tự ta cũng tính được $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SI}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow x + z = y + t$.

(2) Chứng minh: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x + y + z + t}{4xyzt}$

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.A'C'D'}}{2V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.A'C'B'}}{2V_{S.ACB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SB'}{SB}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{t} \right) = \frac{y+t}{2xyzt} = \frac{x+y+z+t}{4xyzt}$ (do $x + z = y + t$)

Chú ý: Qua bài toán 3 này, ta có một kết quả nếu $A'C'$ cắt trung tuyến SO tại I thì ta

luôn có: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}$

c) Bất đẳng thức Cauchy: Trong dạng bài toán này, ta còn thường sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

- Bất đẳng thức Cauchy cho hai số: Với $a, b \geq 0$ thì ta luôn có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

- Bất đẳng thức Cauchy cho ba số: với $a, b, c \geq 0$ thì ta luôn có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

2. Bài tập minh họa:

Để làm rõ các phương pháp ở trên, tác giả xin chia các dạng bài toán về 1 trong bốn dạng cơ bản:

- + Dạng 1: Các bài toán cực trị về tứ diện hoặc chóp tam giác.
- + Dạng 2: Các bài toán cực trị về chóp tứ giác
- + Dạng 3: Các bài toán cực trị về hình hộp
- + Dạng 4: Các bài toán thực tế

2.1 Dạng 1: Các bài toán cực trị về tứ diện hoặc hình chóp tam giác.

Ta xét các dạng toán thường gặp như sau:

Dạng 1: Tứ diện có 5 cạnh độ dài bằng nhau và 1 cạnh còn lại có độ dài thay đổi hoặc tứ diện có 1 cặp cạnh chéo nhau có độ dài thay đổi và 4 cạnh còn lại có độ dài bằng nhau.

Dạng 2: Tứ diện có một cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau hoặc có một cạnh bên chính là đoạn vuông góc chung của 1 cặp cạnh chéo nhau.

Dạng 3: Tứ diện có 1 đỉnh mà tại đỉnh đó độ dài 3 cạnh chung đỉnh không đổi và hai góc có số đo cố định, góc còn lại có số đo chưa xác định.

Dạng 4: Tứ diện được phân tích thành hai tứ diện nhỏ có chung mặt đáy và có 1 cạnh bên vuông góc với mặt đáy chung đó.

Dạng 5: Sử dụng tính chất đồng phẳng của 4 điểm.

Dạng 6: Tứ diện gần đều.

a) Dạng 1: Tứ diện có 5 cạnh độ dài bằng nhau và 1 cạnh còn lại có độ dài thay đổi hoặc tứ diện có 1 cặp cạnh chéo nhau có độ dài thay đổi và 4 cạnh còn lại có độ dài bằng nhau.

Nhận xét: Các bài toán về cực trị tứ diện thuộc dạng 1 thường tương đối quen thuộc đối với học sinh: Xét tứ diện $ABCD$ có 5 cạnh độ dài bằng nhau và 1 cạnh còn lại có độ dài thay đổi hoặc tứ diện có 1 cặp cạnh chéo nhau có độ dài thay đổi và 4 cạnh còn lại có độ dài bằng nhau thì ta nghĩ ngay tới việc sử dụng kết quả của bài toán 1. Vì khi đó có 1 cặp cạnh chéo nhau luôn vuông góc với nhau và đoạn vuông góc chung của hai cạnh này chính là đoạn thẳng nối hai trung điểm của chúng.

Ta xét ví dụ đầu tiên:

Ví dụ 1: (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$

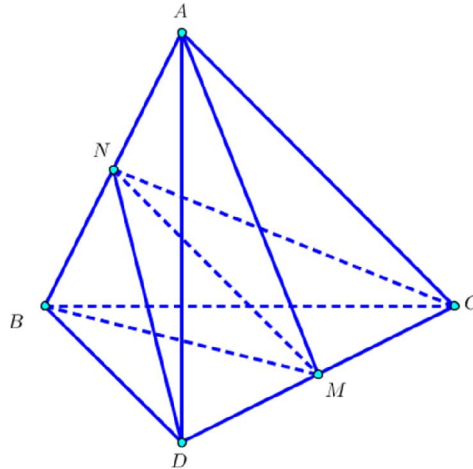
B. $x = \sqrt{14}$

C. $x = 3\sqrt{2}$

D. $x = 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp MB \\ CD \perp MA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (MAB) \Rightarrow \begin{cases} CD \perp MN \\ CD \perp AB \end{cases}.$$

Tam giác MAB cân tại M nên $MN \perp AB$.

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) = \frac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot MN \cdot \sin 90^\circ \\ &= \frac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} x \cdot \sqrt{36 - x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left[\frac{x^2 + (36 - x^2)}{2} \right] = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

Vậy với $x = 3\sqrt{2}$ thì V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$.

Ví dụ 2: (Thi thử chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2020-2021) Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh bằng a . Độ dài CD thay đổi. Tính giá trị lớn nhất đạt được của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a^3}{8}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

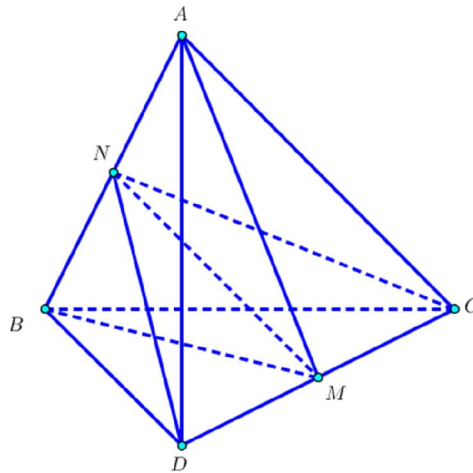
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Phân tích: Trong ví dụ này, từ dữ kiện của bài toán ta suy ra được ngay một kết quả quan trọng là $AB = BC = AC = AD = BD$ còn độ dài của cạnh CD thì thay đổi cho nên cách thực hiện sẽ được thực hiện tương tự như ví dụ 1.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp MB \\ CD \perp MA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (MAB) \Rightarrow \begin{cases} CD \perp MN \\ CD \perp AB \end{cases}.$$

Tam giác MAB cân tại M nên $MN \perp AB$.

Do tam giác BCD cân có đường cao BM nên $BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$ với $CD = x$.

$$\text{Trong tam giác } BMN \text{ có : } BN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; MN = \sqrt{BM^2 - BN^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4}}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4}} \leq \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4} \right) = \frac{a^3}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{x^2}{4} = \frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{a^3}{8}$ khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ví dụ 3: (Chuyên Ngữ Hà Nội, năm học 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = 2x$ (trong đó a là hằng số và x thay đổi thỏa mãn $0 < x < a\sqrt{3}$). Tính thể tích lớn nhất của hình chóp $S.ABC$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3}{6}$.

B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $V_{\max} = \frac{a^3}{8}$.

D. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Phân tích: Trong bài toán này ta hoàn toàn có thể áp dụng cách giải giống ví dụ trên, tuy nhiên ta phát hiện có hai nhận xét từ đề bài như sau:

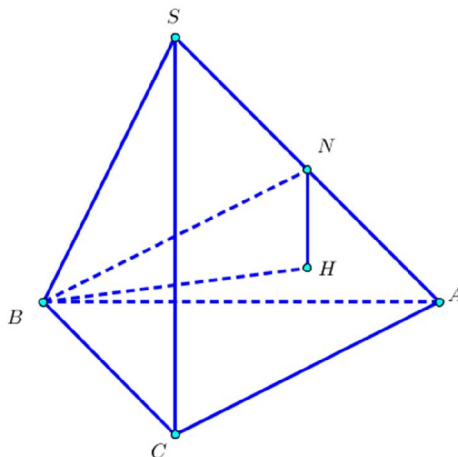
+ Nhận xét 1: Nếu ta lấy đỉnh B làm đỉnh và mặt (SAC) làm mặt đáy tương ứng để tính thể tích của hình chóp thì ta thấy S_{SAC} luôn không đổi do 3 cạnh $SA = SB = AC = a$.

+ Nhận xét 2: $\triangle SAB$ cũng là tam giác đều nên nếu ta lấy N là trung điểm của SA thì $BN \perp SA$ do đó khi ta hạ $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \leq BN$ (Tính chất đường vuông góc với đường xiên) với BN có độ dài không đổi. Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv N$

Do đó, ta sẽ thực hiện lời giải như sau:

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAC) . Gọi N là trung điểm của SA . Khi đó $V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = \frac{1}{3} S_{SAC} \cdot BH$.

Do tam giác SAC có diện tích không đổi là $S_{SAC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi và chỉ khi BH lớn nhất. Lại có nên $BH \leq BN$. Do đó thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv N$ hay tam giác BNC vuông tại N .

$$BN = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là: $V = \frac{1}{3} S_{SAC} \cdot BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$.

b) Dạng 2: Tứ diện có một cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau hoặc có một cạnh bên chính là đoạn vuông góc chung của 1 cặp cạnh chéo nhau.

Ví dụ 4: Cho đoạn thẳng AB cố định trong không gian và có độ dài $AB = 2$. Qua các điểm A và B lần lượt kẻ các đường thẳng Ax và By chéo nhau thay đổi nhưng luôn vuông góc với đoạn thẳng AB . Trên các đường thẳng đó lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM + 2BN = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$.

A. $V_{\max} = \frac{1}{3}$.

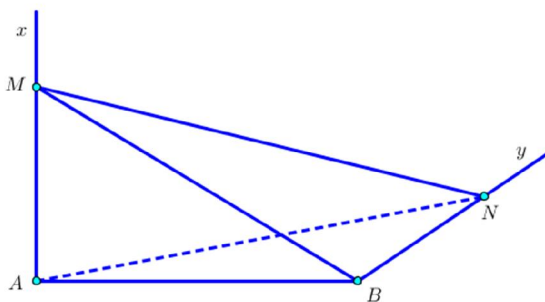
B. $V_{\max} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

C. $V_{\max} = \frac{3}{8}$.

D. $V_{\max} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

$$V_{ABMN} = \frac{1}{6} AM \cdot BN \cdot AB \cdot \sin(Ax, By).$$

Suy ra $V \leq \frac{1}{6} AM \cdot 2BN \leq \frac{1}{6} \left(\frac{AM + 2BN}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}$ (do $\sin(\widehat{Ax, By}) \leq 1$ và bất đẳng thức Cauchy).

Vậy $V_{\max} = \frac{3}{8}$, dấu bằng xảy ra khi $Ax \perp By$, $AM = \frac{3}{2}$ và $BN = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S di động không trùng với A . Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt là H, K . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{32}$.

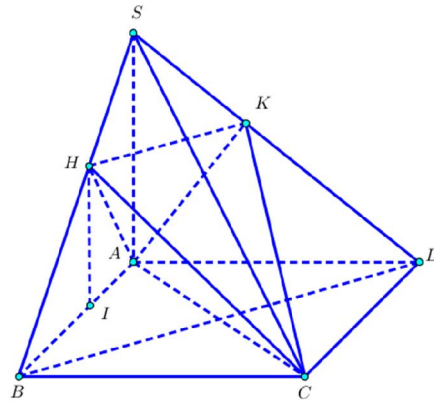
B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $V_{ACHK} = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot HK \cdot d(AC, HK) \cdot \sin(\angle AC, HK)$

Đặt $SA = x (x > 0)$. Khi đó: $HK \parallel BD$ và $\frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} = \frac{x^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow HK = \frac{x^2 \cdot a\sqrt{2}}{x^2 + a^2}$

Ta có: $d(HK; AC) = d(HK; (ABCD)) = HI$ với $HI \perp AB, HI \parallel SA \Rightarrow HI \perp (ABCD)$.

Mà: $\frac{IH}{SA} = \frac{HB}{SB} = 1 - \frac{SH}{SB} = \frac{a^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow IH = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$

Khi đó $V_{ACHK} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{x^2 a\sqrt{2}}{a^2 + x^2} \cdot \frac{a^2 x}{a^2 + x^2} = \frac{a^4}{3} \cdot \frac{x^3}{(a^2 + x^2)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $a^2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} \geq 4 \sqrt[4]{a^2 \cdot \left(\frac{x^2}{3}\right)^3}$ do đó

$(a^2 + x^2)^2 \geq 16 \cdot a \cdot \frac{x^3}{3\sqrt{3}}$ hay $V_{ACHK} \leq \frac{\sqrt{3}a^3}{16}$.

Vậy thể tích khối tứ diện $ACHK$ lớn nhất bằng $V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$ khi $x = a\sqrt{3}$

c) Dạng 3: Tứ diện có 1 đỉnh mà tại đỉnh đó độ dài 3 cạnh chung đỉnh không đổi và hai góc có số đo cố định, góc còn lại có số đo chưa xác định.

Nhận xét: Với dạng tứ diện như này, ta sử dụng một công thức sau:

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \gamma$ thì ta có công thức tính thể tích như sau: $V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$

Ví dụ 6: Cho x là các số thực dương. Xét các hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = x$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất, giá trị của x bằng.

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

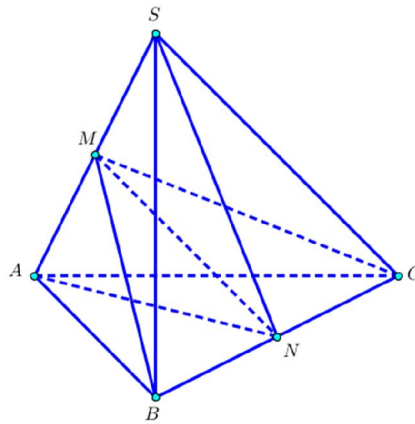
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Bài toán này cũng chính là một dạng bài toán của dạng 1 nên không trình bày lại ở đây (các bạn đọc và các em học sinh tự thực hiện).

Cách 2: Bây giờ ta xét tại đỉnh B , ta có $BA = BS = BC = 1$ và $\widehat{ABC} = \widehat{SBC} = 60^\circ$, $\widehat{ABS} = \alpha$ thay đổi.

Khi đó, nếu áp dụng công thức tính thể tích của dạng 3, ta có lời giải như sau:

$$V_{BASC} = \frac{1^3}{6} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ - \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha} + \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{9}{16} - \left(\cos \alpha - \frac{1}{4}\right)^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{8}$$

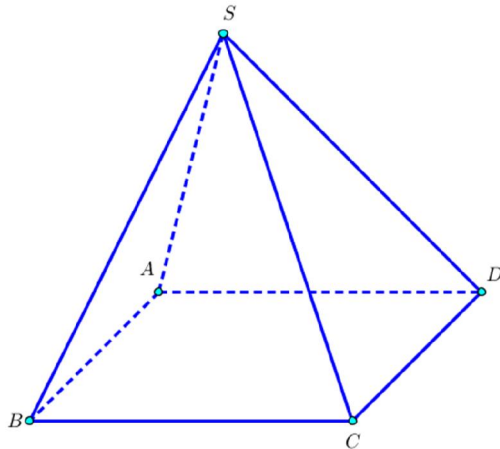
Vậy giá trị lớn nhất của hình chóp $S.ABC$ là $\frac{1}{8}$ khi $\cos \alpha = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow x^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Nhận xét: Ta thấy khi áp dụng công thức tính nhanh của thể tích ở trên thì giúp cho chúng ta tiếp cận một lời giải tương đối ngắn gọn.

Để tiếp tục rõ hơn, ta xét đến ví dụ tiếp theo sau :

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), các cạnh còn lại đều bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{a}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}^+$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a^2 - 2b < 30$.

B. $a^2 - 8b = 20$.

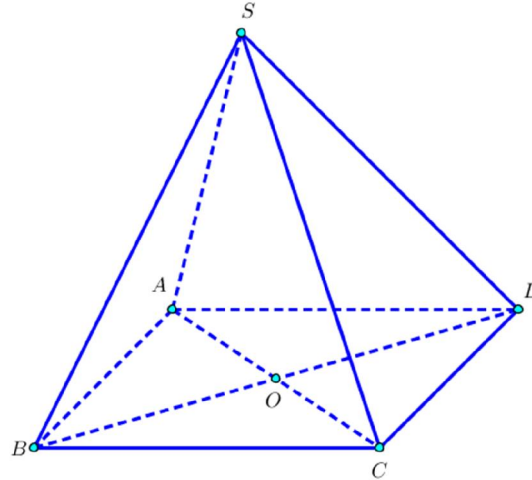
C. $b^2 - a < -2$.

D. $2a - 3b^2 = -1$.

Phân tích: Đây là một bài toán hình chóp tứ giác, tuy nhiên khi ta chuyển đổi $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD}$ thì việc xử lý bài toán trở nên rất quen thuộc giống ví dụ 6 ở trên vì khi đó tại đỉnh A ta thấy có ba cạnh có số đo không đổi đồng thời có hai góc bằng 60° và một góc còn lại chưa xác định. Đây là một nhận xét quan trọng giúp chúng ta có lời giải như sau:

Lời giải

Chọn B



$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{S.ABCD} &= 2V_{S.ABD} \\ &= 2 \cdot \frac{AB \cdot AS \cdot AD}{6} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ - \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha} \end{aligned}$$

Với $\widehat{BAS} = \widehat{DAS} = 60^\circ, \widehat{BAD} = \alpha$.

Khi đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{16} - \left(\cos \alpha - \frac{1}{4}\right)^2} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Khi đó:

$$BD = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AC = 2AO = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ nên}$$

$$SO^2 = \frac{SA^2 + SC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{SB^2 + SD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Rightarrow SC = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Dạng 4: Tứ diện được phân tích thành hai tứ diện nhỏ có chung mặt đáy và có 1 cạnh bên vuông góc với mặt đáy chung đó.

Ví dụ 8: (Đề thi thử Chuyên Hà Nam, năm học 2020-2021) Cho tam giác OAB đều cạnh $2a$. Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB . Gọi N là giao điểm của EF và d . Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

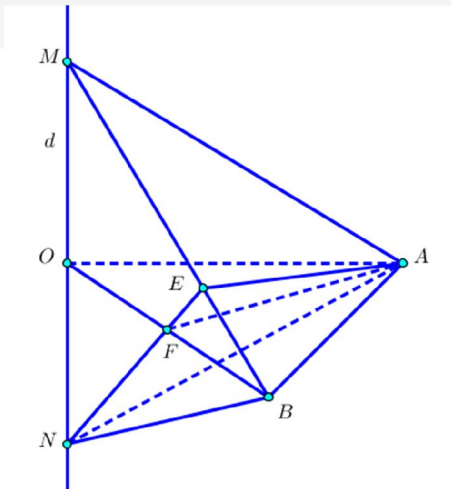
B. $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $x = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Giả thiết $\triangle OAB$ đều cạnh $2a$ nên F là trung điểm của OB do đó $OF = a$.

Ta có $AF \perp OB, AF \perp MO \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$ mà $MB \perp AE$ suy ra $MB \perp (AEF)$. Do đó $MB \perp EF$ suy ra $\triangle OBM \sim \triangle ONF$ do đó

$$\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OF} \Rightarrow ON = \frac{OB \cdot OF}{OM} = \frac{2a \cdot a}{x} = \frac{2a^2}{x}.$$

$$\text{Thể tích: } V_{ABMN} = V_{ABOM} + V_{ABON} = \frac{1}{3} S_{OAB} (OM + ON)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} \left(x + \frac{2a^2}{x} \right) \geq \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{2a^2} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = \frac{2a^2}{x} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$

e) **Dạng 5: Sử dụng tính chất đồng phẳng của 4 điểm.**

Ta có phát biểu như sau: Cho tam giác ABC và một điểm O bất kì. Điều kiện cần và đủ để điểm $M \in (ABC)$ là $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x + y + z = 1$ và ngoài ra x, y, z không phụ thuộc vào điểm O . Đồng thời với x, y, z không âm thì điểm M thuộc miền tam giác ABC . (Phần chứng minh công thức này xin nhường lại cho các bạn đọc và các em học sinh tự tìm hiểu)

Áp dụng kết quả của phát biểu trên, ta sẽ đi tìm lời giải của một bài toán hay như sau:

Ví dụ 9: Cho hình chóp $SABC$ có thể tích là V , gọi M, H, I theo thứ tự là trung điểm BC, AM, SH một mặt phẳng qua I cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A', B', C' . Thể tích của khối chóp $SA'B'C'$ có giá trị lớn nhất là

A. $\frac{V}{5}$.

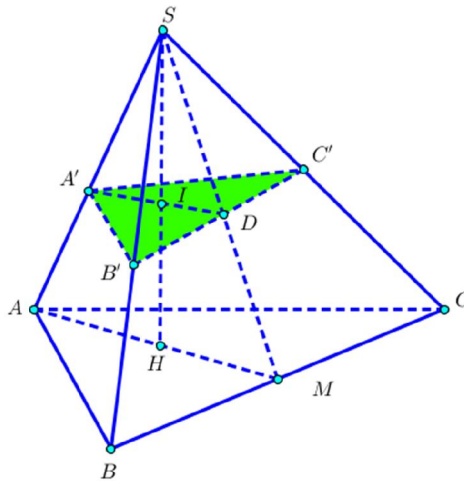
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{V}{2}$.

D. $\frac{27V}{256}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \overrightarrow{SI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SH} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SM}) = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \right) \Rightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{SA} + \frac{1}{8} \overrightarrow{SB} + \frac{1}{8} \overrightarrow{SC}$$

$$\text{Đặt } \frac{SA}{SA'} = x, \frac{SB}{SB'} = y, \frac{SC}{SC'} = z \text{ suy ra } \overrightarrow{SI} = \frac{x}{4} \overrightarrow{SA'} + \frac{y}{8} \overrightarrow{SB'} + \frac{z}{8} \overrightarrow{SC'} \text{ do bốn điểm } I, A', B', C'$$

$$\text{đồng phẳng nên } \frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + z = 8.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{xyz} \Rightarrow V_{SA'B'C'} = \frac{V}{xyz}.$$

$$\text{Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của } P = xyz \text{ với giả thiết } \begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x, y, z \geq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } 2x + y + z = 8 \Rightarrow 8 \geq 2x + 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Lại có } (y-1)(z-1) \geq 0 \Rightarrow yz \geq y + z - 1 = 7 - 2x > 0 \text{ thay vào ta được}$$

$P = xyz \geq x(7-2x) = -2x^2 + 7x = f(x)$ lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[1;3]$ ta được

$f(x) \geq 3$ do đó giá trị lớn nhất của $V_{SA'B'C'}$ là $\frac{V}{3}$.

g) Dạng 6: Tứ diện gần đều.

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = x$, $SB = AC = y$, $SC = AB = z$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$.

B. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

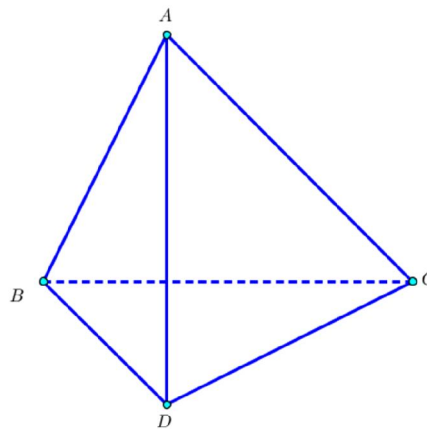
C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Phân tích: Ở ví dụ này, theo dữ kiện của bài toán $SA = BC = x$, $SB = AC = y$, $SC = AB = z$ thì hình chóp đã cho chính là một tứ diện gần đều. Do đó sử dụng kết quả bài toán 3, ta sẽ có hướng xử lý rất gọn như sau:

Lời giải

Chọn C



Thể tích khối tứ diện $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)}$.

Mà $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nên $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(9-2x^2)(9-2y^2)(9-2z^2)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $(9-2x^2)$, $(9-2y^2)$, $(9-2z^2)$ ta có

$$\left[\frac{(9-2x^2) + (9-2y^2) + (9-2z^2)}{3} \right]^3 \geq (9-2x^2)(9-2y^2)(9-2z^2)$$

$$\Leftrightarrow 27 \geq (9-2x^2)(9-2y^2)(9-2z^2) \Rightarrow V \leq \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{27} \Leftrightarrow V \leq \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $V_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, đạt được khi $x = y = z = \sqrt{3}$ khi đó tứ diện đã cho là tứ diện đều.

2.2 Các bài toán cực trị về hình chóp tứ giác

Ta xét các dạng toán thường gặp như sau:

Dạng 1: Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau.

Dạng 2: Sử dụng tỉ số thể tích để xác định cực trị.

Dạng 3: Chóp có chiều cao không đổi.

Dạng 4: Các bài toán liên quan đến khoảng cách, góc

a) Dạng 1: Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau

Phân tích: Trong bài toán ở dạng này thì ta lưu ý đến tính chất nếu hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $SA = SB = SC = SD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

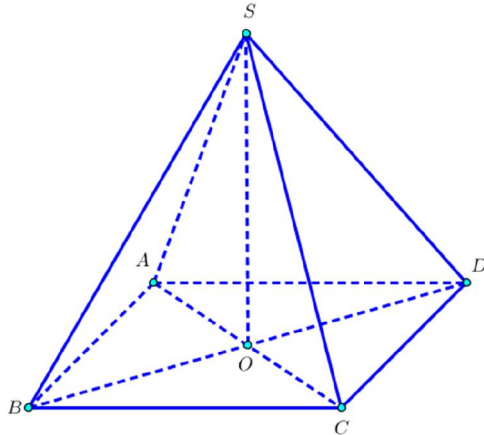
B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta gọi độ dài cạnh $BC = x, x > 0$.

$$\text{Ta có: } BO = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2}; SO = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}; S_{ABCD} = a.x; V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a.x \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2} = \frac{a.x \cdot \sqrt{4a^2 - x^2}}{6} = \frac{a\sqrt{x^2(4a^2 - x^2)}}{6}.$$

Do đó, thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $x^2(4a^2 - x^2)$ đạt giá trị lớn nhất. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, cho 2 số dương: $x^2, (4a^2 - x^2)$.

$$\text{Ta có: } x^2 + (4a^2 - x^2) \geq 2\sqrt{x^2(4a^2 - x^2)} \Rightarrow 2a^2 \geq \sqrt{x^2(4a^2 - x^2)}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.ABCD} \leq \frac{a \cdot 2a^2}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

Vậy, thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{a^3}{3}$ khi $x = a\sqrt{2}$.

b) Dạng 2: Sử dụng tỉ số thể tích để xác định cực trị.

Đối với hình chóp có đáy là hình bình hành, ta chú ý đến kết quả của bài toán 3. Kết quả của bài toán này giúp chúng ta xác định tương đối dễ dàng được tỉ số thể tích của một khối chóp cần tính thể tích theo thể tích của hình chóp ban đầu từ đó xác định được cực trị của thể tích cần tìm.

Ví dụ 12: (Đề thi học kì I, SGD Nam Định, năm học 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy

$ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$.

Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I . (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại

M, N, P . Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị $m+n$ là

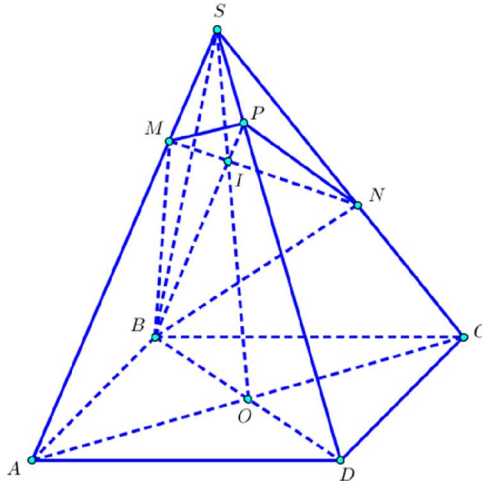
A. $\frac{4}{15}$.

B. $\frac{6}{75}$.

C. $\frac{14}{75}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải



Chọn C

Xét tam giác $\triangle SBD : BP \cap SO = \{I\}$ thì $\frac{SB}{SB} + \frac{SC}{SP} = 2 \cdot \frac{SO}{SI} = 6 (*)$ (theo kết quả của bài

toán 3). Áp dụng kết quả bài toán 3, ta có: $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SN} = \frac{SD}{SP} + \frac{SB}{SB} \Leftrightarrow \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SN} = 6$, Đặt

$$\frac{SA}{SM} = x; \frac{SB}{SB} = y = 1, \frac{SC}{SN} = z, \frac{SD}{SP} = 5 \Rightarrow x + z = y + 1 = 6 \Rightarrow z = 6 - x$$

Ta có $\frac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}} = \frac{x + y + z + t}{4 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot t} = \frac{12}{4 \cdot x \cdot 1 \cdot z \cdot 5} = \frac{3}{5x(6-x)}$ Do $x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow x \in [1; 5]$, xét

$$f(x) = \frac{3}{5x(6-x)} \text{ với } x \in [1; 5] \Rightarrow \frac{1}{15} \leq f(x) \leq \frac{3}{25} \Rightarrow m = \frac{3}{25}; n = \frac{1}{15} \Rightarrow m + n = \frac{14}{75}$$

Chú ý: Để chỉ ra kết quả (*), ta có thể làm như sau:

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác SOD có B, I, P thẳng hàng nên

$$\frac{PS}{PD} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{5}$$

c) **Dạng 3: Chóp có chiều cao không đổi.**

Đối với dạng bài tập này, thường thì việc xác định đường cao của khối chóp cần xác định cực trị tương đối đơn giản, nó cũng thường chính là chiều cao của một khối chóp cho trước. Vì vậy ta chỉ cần xác định được công thức tính diện tích đáy từ đó để xác định cực trị của diện tích này thì cũng đồng thời tìm được cực trị của thể tích khối chóp cần tìm.

Ví dụ 13: (Quốc học Huế, năm học 2019-2020) Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho MN luôn bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $SAMN$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

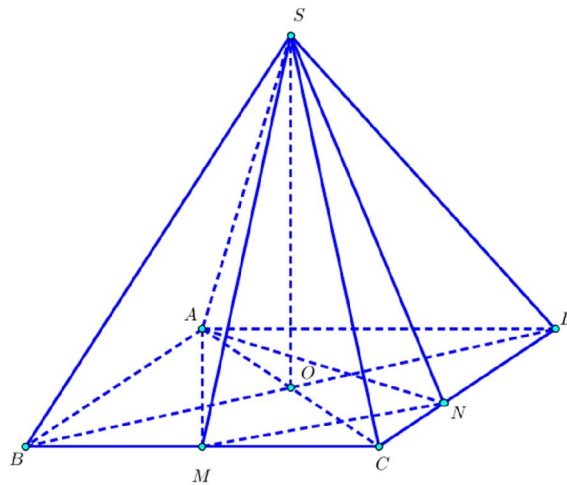
B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{1+\sqrt{2}}{12}$.

D. $\frac{4-\sqrt{2}}{24}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $BM = x$ ($0 \leq x \leq 1$) suy ra ta có $MC = 1 - x$, $CN = \sqrt{2x - x^2}$, $ND = 1 - \sqrt{2x - x^2}$.

Khi đó: $S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{MCN} + S_{NDA}) = 1 - \frac{1}{2} \left(x + (1 - x) \sqrt{2x - x^2} + 1 - \sqrt{2x - x^2} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - x + \sqrt{2x - x^2} - (1 - x) \sqrt{2x - x^2} \right]$$

$$V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{AMN} \text{ với } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó thể tích của khối chóp $S.AMN$ nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích của tam giác AMN nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \left[1 - x + \sqrt{2x - x^2} - (1 - x)\sqrt{2x - x^2} \right]$ với $x \in [0; 1]$.

Đặt $t = 1 - x + \sqrt{2x - x^2}$ vì $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [1; \sqrt{2}]$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{t^2 - 1}{2} \right) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2} (1 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2}; f(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}. \text{ Do đó: } \min_{[1; \sqrt{2}]} f(t) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN(\min)} = \frac{4 - \sqrt{2}}{24}$$

d) Dạng 4: Các bài toán liên quan đến khoảng cách, góc

Trong dạng bài toán này, ta dựa vào điều kiện khoảng cách hoặc góc từ đề bài để xác định chiều cao và diện tích đáy của khối chóp cần tìm từ đó có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy hoặc phương pháp khảo sát hàm số để xác định cực trị của thể tích.

Ta tìm hiểu các ví dụ cụ thể như sau:

Ví dụ 14: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $2a$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $V = 2a^3$.

B. $V = 4a^3$.

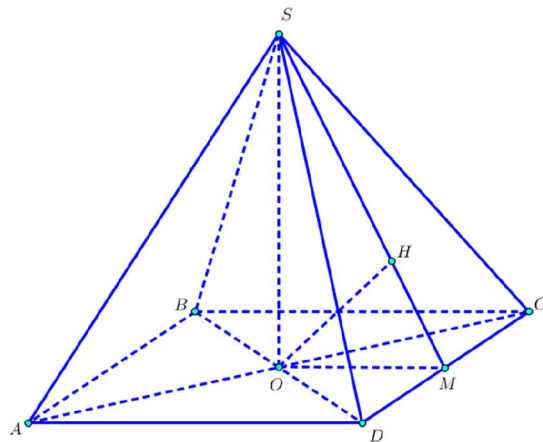
C. $V = 3\sqrt{3}a^3$.

D. $V = 2\sqrt{3}a^3$.

Phân tích: Trong bài toán này thì diện tích đáy và chiều cao của khối chóp đều chưa xác định nên từ điều kiện khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $2a$ ta sẽ xác định hai đại lượng này về theo 1 đại lượng trung gian từ đó mới tìm được công thức tính thể tích và đánh giá thể tích này.

Lời giải

Chọn D



Hạ $OM \perp CD, OH \perp SM$ thì $d(O; (SCD)) = OH = a$

Ta có: $d(A; (SCD)) = 2d(O; (SCD)) = 2OH = 2a \Rightarrow OH = a$.

$$\text{Đặt } AB = x, OM = \frac{x}{2}, SO = h \Rightarrow \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow x^2 = \frac{4a^2h^2}{h^2 - a^2}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{h}{3} x^2 = \frac{4}{3} a^2 \cdot \frac{h^3}{h^2 - a^2} = f(h).$$

Khảo sát hàm $f(h) = \frac{4}{3} a^2 \cdot \frac{h^3}{h^2 - a^2}$ với $h \in (a; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f'(h) = \frac{4}{3} a^2 \cdot \frac{h^2(h^2 - 3a^2)}{[h^2 - a^2]^2}; f'(h) = 0 \Leftrightarrow h^2(h^2 - 3a^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \text{ (l)} \\ h = a\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

h	a	$a\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$	$f(a\sqrt{3})$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{\min} = f(a\sqrt{3}) = \frac{4}{3} a^2 \cdot \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{3a^2 - a^2} = 2\sqrt{3}a^3$$

Ví dụ 15: Xét khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành sao cho tam giác ABC vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$, tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

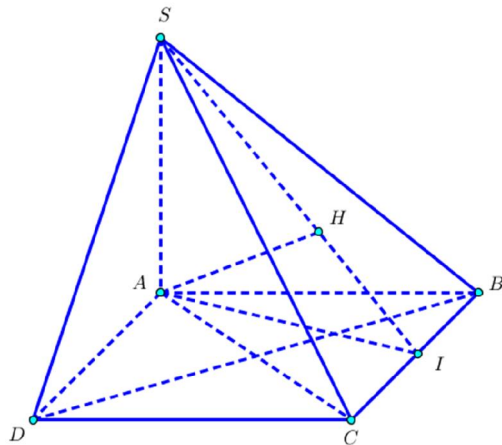
C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Phân tích: Trong bài toán này, để tính giá trị của $\cos \alpha$ nên ta sẽ xác định diện tích đáy và chiều cao của khối chóp theo đại lượng $\cos \alpha$ từ đó đưa về việc sử dụng phương pháp hàm số để xác định cực trị.

Chọn A



Ta có: $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC}$ do đó: $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $V_{S.ABC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $AB = AC = x, (x > 0)$. Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2}x$

Gọi I là trung điểm của AB , hạ $AH \perp SI$ tại H

Ta có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIA} = \alpha$ góc nhọn.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Từ đó $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = 3$

Xét tam giác AHI vuông tại H ta có $\cos \alpha = \frac{HI}{AI} \Rightarrow HI = \frac{\sqrt{2}x}{2} \cos \alpha$

Ta có $AH^2 = AI^2 - HI^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \cos^2 \alpha \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{|\sin \alpha|}, AI = \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{3}{|\sin \alpha|}$

Xét tam giác SAI vuông tại A ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{9} - \frac{\sin^2 \alpha}{9} = \frac{\cos^2 \alpha}{9}$

$$\Rightarrow SA = \frac{3}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Do đó: } V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \frac{3}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{2} \frac{18}{\sin^2 \alpha} = \frac{9}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

Đặt $\cos \alpha = t, t \in (0; 1)$ ta có $f(t) = \frac{1}{t(1-t^2)}$

$$f'(t) = \frac{-(t-t^3)'}{(t-t^3)^2} = \frac{-1+3t^2}{(t-t^3)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
f'	-	0	+
f	$+\infty$	$f(\frac{\sqrt{3}}{3})$	$+\infty$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất khi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.3 Các bài toán cực trị về hình hộp

Trong dạng bài tập này thì cách thức để giải quyết bài toán vẫn tương tự như trong dạng bài toán cực trị về hình chóp.

Từ giả thiết bài toán, ta xác định mối quan hệ của đường cao và diện tích đáy của hình hộp theo các đại lượng cho trước và thiết lập công thức tính thể tích về theo 1 đại lượng biến nào đó. Sau đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy hoặc sử dụng phương pháp hàm số để xác định đáp số của bài toán.

Để hiểu rõ hơn, chúng ta sẽ đi tìm hiểu các ví dụ sau đây:

Ví dụ 16: (Chuyên Lê Thánh Tông, Quảng Nam, năm học 2018-2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

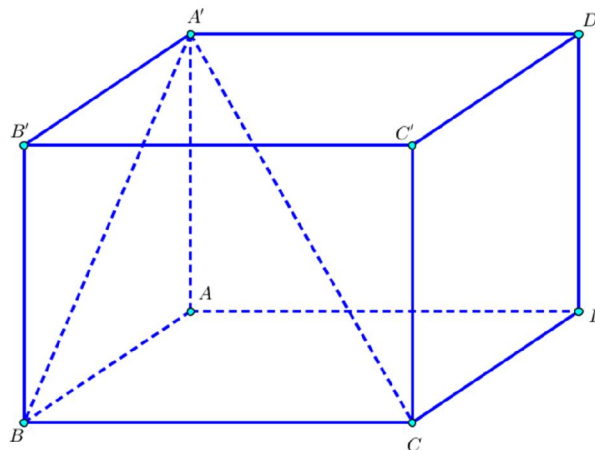
C. $V_{\max} = \frac{1}{2}$.

D. $V_{\max} = \frac{3}{2}$.

Phân tích: Trong bài toán này ta thấy $AD = 1$ không đổi, $AB = x$ thay đổi nên mục tiêu trong bài tập này là ta dựa vào dữ kiện góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° , ta sẽ đi xác định độ dài đường cao của hình hộp chữ nhật theo x . Từ đó tìm được công thức xác định thể tích khối hộp theo biến x và cực trị của thể tích khối hộp đã cho.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC \perp BB'$, $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow A'B$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABB'A') \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ là góc $\widehat{BA'C}$ (vì $\widehat{BA'C}$ nhọn do $\triangle BA'C$ vuông tại B). Suy ra: $\widehat{BA'C} = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } A'B = \frac{BC}{\tan \widehat{BA'C}} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \text{ nên } A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}.$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = x\sqrt{3-x^2} \leq \frac{x^2 + (3-x^2)}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Dấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow x = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x^2 = 3-x^2 = x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 17: (Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Bắc Ninh, năm học 2020-2021) Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (Q) thay đổi song song với mặt đáy lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Qua các điểm M, N, P kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (ABC) tại M', N', P' . Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{8}{27}$.

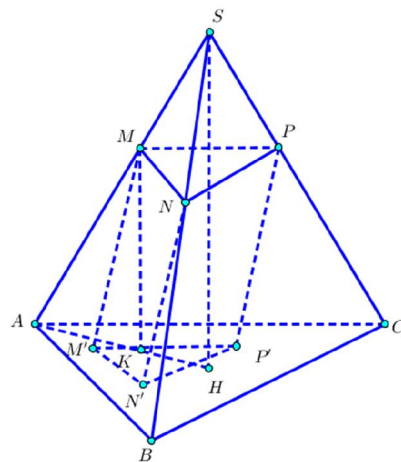
C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Phân tích: Trong bài toán này vì thể tích khối chóp $S.ABC$ đã cho trước cố định bằng 1, nên ý tưởng của chúng ta thực hiện ở bài tập này chính là xác định tỉ số chiều cao và diện tích đáy của khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ với chiều cao và diện tích đáy của khối chóp $S.ABC$, từ đó tìm được công thức tính thể tích của khối lăng trụ này.

Lời giải

Chọn C



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của S, M xuống mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Đặt } \frac{MN}{AB} = x \Rightarrow \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = x \Rightarrow \frac{MK}{SH} = \frac{AM}{SA} = \frac{SA - SM}{SA} = 1 - x, \quad (0 < x < 1).$$

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{MN}{AB} \cdot \frac{MP}{AC} = x^2 \Rightarrow \frac{V_{MNPQ.M'N'Q'}}{V_{S.ABC}} = \frac{MK.S_{MNP}}{\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}} = 3(1-x)x^2 \Rightarrow V_{MNPQ.M'N'Q'} = 3(1-x)x^2.$$

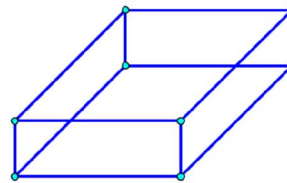
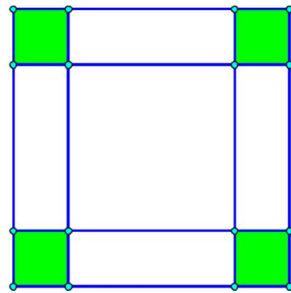
$$V_{MNPQ.M'N'Q'} = \frac{3}{2}(2-2x)x.x \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2-2x+x+x}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 2-2x = x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

2.4 Các bài toán thực tế

Với các bài toán thực tế liên quan đến cực trị thể tích của các khối đa diện thường dẫn đến yêu cầu xác định đúng được các điều kiện về chiều cao, diện tích đáy theo đại lượng biến cần tìm của bài toán. Sau đó dựa vào đánh giá bất đẳng thức Cauchy hoặc sử dụng phương pháp hàm số là sẽ giải quyết được bài toán.

Ví dụ 18: (Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, năm học 2019-2020) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12(cm)$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại để được cái hộp không nắp (tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 4$.

D. $x = 6$.

Lời giải

Chọn A

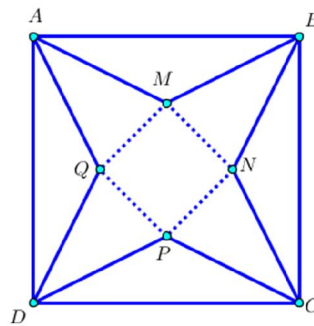
Ta thấy hộp có đáy là hình vuông cạnh $12 - 2x$, đường cao x ($0 < x < 6$).

Ta có: $V = S_d \cdot h = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

Xét $V = f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, $f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(6) = 0 \\ f(2) = 128 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Vậy với $x = 2$ hộp có thể tích lớn nhất.

Ví dụ 19: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 5 dm, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , BNC , CPD và DQA . Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều. Hỏi cạnh đáy của khối chóp bằng bao nhiêu để thể tích của nó là lớn nhất?



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dm.

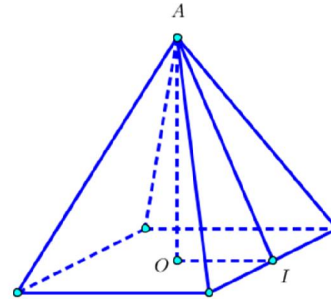
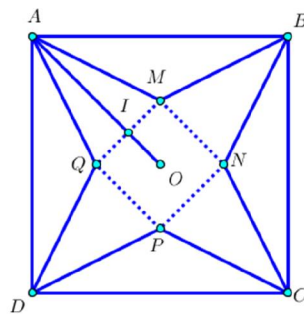
B. $\frac{5}{2}$ dm.

C. $2\sqrt{2}$ dm.

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ dm.

Lời giải

Chọn C



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Ta có $AI = AO - IO = 25\sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp $h = \sqrt{AI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(25\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

Thể tích của khối chóp bằng $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$.

Điều kiện: $1250 - 25\sqrt{2}x > 0 \Rightarrow x < 25\sqrt{2}$.

Xét hàm số $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$ với $0 < x < 25\sqrt{2}$.

Ta có $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4}{2\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}}$.

Có $y' = 0 \Rightarrow 5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4 = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2} = x_0$.

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$	
y'		+	0	-
y		$\frac{4000\sqrt{10}}{3}$		
	0			0

Vậy để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng $20\sqrt{2}$ cm = $2\sqrt{2}$ dm.

3. Bài tập tự luyện:

Câu 1: (Thpt Đông Sơn, Thanh Hóa, năm học 2020-2021) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy ($ABCD$) và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM . Khi M di động trên CD thì thể tích khối chóp $S.ABH$ lớn nhất là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 2: (Thpt Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2020-2021) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (α) chứa AM và cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại P và Q . Gọi V' là thể tích của $S.APMQ$; $\frac{SP}{SB} = x$; $\frac{SQ}{SD} = y$; $(0 < x, y < 1)$. Khi tỉ số $\frac{V'}{V}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị của tổng $x + 3y$.

A. 2.

B. $\frac{1}{6}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 3: (Thpt Nguyễn Trung Thiên, Hà Tĩnh, năm học 2020-2021) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AD (M, N không trùng A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Ký hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Giá trị lớn nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{7}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

B. $4\sqrt{3}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, BC = a\sqrt{3}, \widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB \parallel CD, AB = 2CD, \widehat{ABC} = 45^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB và $SC \perp BC, SC = a$. Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là α . Khi α thay đổi, tìm $\cos \alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABCD$ có giá trị lớn nhất.

A. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7: (Thpt Tiên Du 1, Bắc Ninh, năm học 2020-2021) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì x nhận giá trị nào sau đây?

- A. $x = \frac{\sqrt{35}}{7}$. B. $x = 1$. C. $x = \frac{9}{4}$. D. $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đặt $AM = x, AN = y$. Tìm x, y để diện tích toàn phần của tứ diện $DAMN$ nhỏ nhất.

- A. $x = y = \frac{2}{3}$. B. $x = y = \frac{1}{3}$. C. $x = y = \frac{7}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

Câu 9: (SGD Bình Phước, năm học 2018-2019) Cho x, y là các số thực dương. Xét khối chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi x, y thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$

Câu 10: (Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh, năm học 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x, CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy .

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

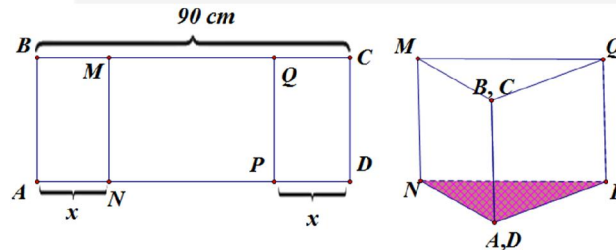
Câu 11: (Chuyên Bắc Giang, năm học 2018-2019) Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, có AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó và $AB = a$. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho $MN = b$. Xác định độ dài đoạn thẳng AM theo a và b sao cho thể tích tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $AM = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{3}$ B. $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$ C. $AM = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$ D. $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{3}}$

Câu 12: (Chuyên Thái Nguyên, năm học 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó $SA \perp (ABC)$, $SC = a$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh C . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì $\sin 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 13: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 90\text{cm}$. Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN, PQ vào phía trong đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ sau đây để được một lăng trụ đứng khuyết hai đáy.



Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là?

- A. $x = 20\text{cm}$. B. $x = 22,5\text{cm}$. C. $x = 25\text{cm}$. D. $x = 30\text{cm}$.

Câu 14: (Thi thử Lô-môn-ô-xốp - Hà Nội, năm học 2019-2020) Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB đều có cạnh bằng 5. Trên đường thẳng Δ vuông góc với (P) tại O lấy điểm C sao cho $OC = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC và OB . Đường thẳng EF và đường thẳng Δ cắt nhau tại D . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + 3b$.

- A. $T = 14$. B. $T = 11$. C. $T = 17$. D. $T = 8$.

Câu 15: (Thpt Quỳnh Lưu, Nghệ An, năm học 2019-2020) Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia $AC, B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là:

- A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 16: (Thpt Hoàng Hoa Thám, Hưng Yên, năm học 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 5SP$. Một mặt phẳng (α) qua AP cắt SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của hình chóp $S.AMNP$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$.

- A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{1}{25}$. C. $\frac{3}{25}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 17: (SGD Bình Phước, năm học 2019-2020) Cho các tia Ox, Oy, Oz cố định đôi một vuông góc nhau. Trên các tia đó lần lượt lấy các điểm A, B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1$ trong đó A, B, C không trùng với O . Giá trị lớn nhất

của thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\frac{1}{m(1+\sqrt{n})^3}$ trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức

$P = m + n$ bằng

- A. 192. B. 150. C. 164. D. 111.

Câu 18: (Chuyên Hà Tĩnh, năm học 2019-2020) Trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến $mp(SBC)$ bằng $2a$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $2a^3$. C. $3\sqrt{3}a^3$. D. $4\sqrt{3}a^3$.

Câu 19: Khi xây nhà, anh Tiến cần xây một bể đựng nước mưa có thể tích $V = 6(m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp ba lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 1.000.000 đ/m² và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà anh Tiến phải trả (làm tròn đến hàng trăm nghìn)?

- A. 22000000 đ. B. 20970000 đ. C. 20965000 đ. D. 21000000 đ.

Câu 20: (Chuyên Bắc Giang, năm học 2018-2019) Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông sao cho thể tích của khối hộp được tạo thành là 8 dm³ và diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài cạnh đáy của mỗi hộp muốn thiết kế là

- A. 2 dm B. $2\sqrt[3]{2}$ dm C. 4 dm D. $2\sqrt{2}$ dm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.D	4.C	5.B	6.B	7.D	8.A	9.D	10.C
11.B	12.D	13.D	14.B	15.A	16.C	17.C	18.A	19.D	20.A