



## LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

CS 2: Trung Tâm 133 Xuân 68

CS 3: Trung tâm 168 Mai Thúc Loan

CS4: Trung Tâm THPT Nguyễn Trường Tộ

# **BÀI GIẢNG CHƯƠNG 4**

## **TOÁN 11-CÁNH DIỀU**

### **QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN**



**TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ**

**(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)**

## MỤC LỤC

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| CHƯƠNG IV. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG ..... | 4  |
| BÀI 1: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN .....                        | 4  |
| A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....                                      | 4  |
| B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....                                 | 7  |
| Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.....                                 | 7  |
| 1. Phương pháp.....                                                           | 7  |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                          | 7  |
| 3. Bài tập trắc nghiệm .....                                                  | 11 |
| Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.....                       | 11 |
| 1. Phương pháp.....                                                           | 11 |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                          | 11 |
| Dạng 3. Thiết diện.....                                                       | 14 |
| 1. Phương pháp.....                                                           | 14 |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                          | 15 |
| Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy .....                      | 16 |
| 1. Phương pháp.....                                                           | 16 |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                          | 17 |
| Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng. ....                       | 20 |
| C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA .....                                          | 22 |
| D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....                                                   | 27 |
| BÀI 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN .....                       | 49 |
| A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....                                      | 49 |
| B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....                                 | 50 |
| Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy .....                  | 50 |
| 1. Phương pháp.....                                                           | 50 |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                          | 50 |
| Dạng 2. Tìm giao điểm và thiết diện của hình chóp .....                       | 53 |
| 1. Phương pháp.....                                                           | 53 |

|                                                                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                                                         | 53        |
| C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA .....                                                                         | 56        |
| D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....                                                                                  | 59        |
| <b>BÀI 3: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG .....</b>                                                       | <b>75</b> |
| A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM .....                                                                            | 75        |
| B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....                                                                | 76        |
| Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy .....                                                 | 76        |
| 1. Phương pháp.....                                                                                          | 76        |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                                                         | 76        |
| Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng.....      | 79        |
| 1. Phương pháp.....                                                                                          | 79        |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                                                         | 80        |
| C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA .....                                                                         | 83        |
| D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....                                                                                  | 85        |
| <b>BÀI 4: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG .....</b>                                                                  | <b>96</b> |
| A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM .....                                                                            | 96        |
| B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA .....                                                                         | 96        |
| <b>BÀI 5: HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP .....</b>                                                                | <b>99</b> |
| A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM .....                                                                            | 99        |
| B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA .....                                                                         | 100       |
| C. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP .....                                                               | 103       |
| Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song.....                                                              | 103       |
| 1. Phương pháp.....                                                                                          | 103       |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                                                         | 103       |
| Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng ..... | 106       |
| 1. Phương pháp.....                                                                                          | 106       |
| 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng .....                                                                         | 106       |
| D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....                                                                                  | 109       |

**BÀI 6: PHÉP CHIẾU SONG SONG.HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN**

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| .....                                                        | 125 |
| A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM .....                            | 125 |
| B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN .....                               | 127 |
| Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian..... | 127 |
| 1. Phương pháp .....                                         | 127 |
| 2. Các ví dụ .....                                           | 127 |
| Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song..... | 129 |
| 1. Phương pháp .....                                         | 129 |
| 2. Các ví dụ .....                                           | 129 |
| C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA .....                         | 130 |
| D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....                                  | 132 |

## CHƯƠNG IV. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

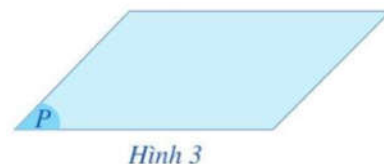
### BÀI 1: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

#### A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

##### I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

###### 1. Mặt phẳng

Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành và dùng các chữ cái đặt trong dấu ngoặc đơn  $()$  để đặt tên cho mặt phẳng ấy. Ví dụ: mặt phẳng  $(P)$  (Hình 3) mặt phẳng  $(Q)$ , mặt phẳng  $(\alpha)$ , mặt phẳng  $(\beta)$ ,...

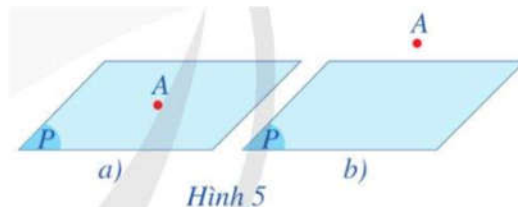


Trong thực tiễn có nhiều ví dụ minh họa cho mặt phẳng. Chẳng hạn: tấm gương phẳng, mặt bàn, bảng treo tường, ... Cho ta hình ảnh một phần mặt phẳng trong không gian.

###### 2. Điểm thuộc mặt phẳng

**Nhận xét:** Với mỗi điểm  $A$  và mặt phẳng  $(P)$ , chỉ xảy ra một trong hai khả năng sau:

- Điểm  $A$  thuộc mặt phẳng  $(P)$ , ta kí hiệu  $A \in (P)$  (Hình 5a).
- Điểm  $A$  không thuộc mặt phẳng  $(P)$  hay  $A$  nằm ngoài  $(P)$ , ta kí hiệu  $A \notin (P)$  (Hình 5b).



###### 3. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

###### a) Khái niệm

Một cách tổng quát, ta quy ước:

Hình được vẽ trong mặt phẳng để giúp ta hình dung được về một hình trong không gian gọi là *hình biểu diễn* của hình không gian đó.

###### b) Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

Để việc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian được thuận lợi và thống nhất, ta quy ước như sau:

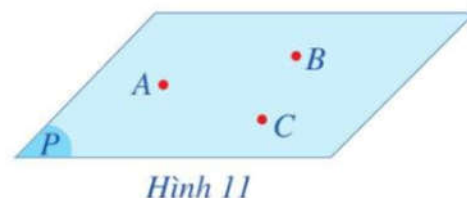
- 1) Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng;
- 2) Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau);
- 3) Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng;
- 4) Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

**Chú ý:** Các quy tắc khác sẽ được đề cập sau.

#### II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

##### Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.



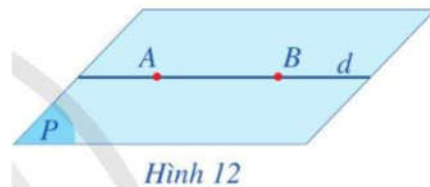
### Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Như vậy, mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Mặt phẳng đó được kí hiệu  $mp(ABC)$  hay đơn giản là  $(ABC)$  (Hình 11).

### Tính chất 3

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.



Như vậy, nếu một đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm phân biệt  $A, B$  của mặt phẳng  $(P)$  thì mọi điểm của đường thẳng  $d$  đều nằm trong mặt phẳng  $(P)$ . Khi đó, ta nói  $d$  nằm trong  $(P)$ , hoặc  $(P)$  chứa  $d$ , hoặc  $(P)$  đi qua  $d$ , kí hiệu:

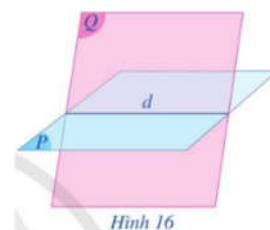
$d \subset (P)$  hay  $(P) \supset d$  (Hình 12).

### Tính chất 4

Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

### Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Nếu hai mặt phẳng phân biệt  $(P)$  và  $(Q)$  có điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất  $d$  chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng  $d$  đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ , kí hiệu  $d = (P) \cap (Q)$  (Hình 16).



### Nhận xét:

- Có thể xác định giao tuyến của hai mặt phẳng bằng cách đi tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến cần tìm.
- Để tìm giao điểm của đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$  (với giả thiết  $a$  cắt  $(P)$ ), ta có thể làm như sau:
  - Chọn một đường thẳng  $b$  thích hợp trong mặt phẳng  $(P)$  và tìm giao điểm  $M$  của hai đường thẳng  $a$  và  $b$ . Khi đó,  $M$  là giao điểm cần tìm.

### Tính chất 6

Trên mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

## III. MỘT SỐ CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG

### Định lí 1

Cho điểm  $A$  không thuộc đường thẳng  $d$ . Khi đó, qua điểm  $A$  và đường thẳng  $d$  có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu  $mp(A, d)$  hoặc  $(A, d)$ .

### Định lí 2

Cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cắt nhau. Khi đó, qua  $a$  và  $b$  có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu  $mp(a, b)$ .

**Nhận xét:** Từ Tính chất 2 và hai định lý trên, ta thấy mặt phẳng hoàn toàn được xác định theo một trong ba cách sau:

- Đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.
- Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

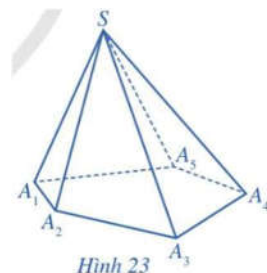
## IV. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

### 1. Hình chóp

Trong mặt phẳng  $(P)$ , cho đa giác  $A_1A_2...A_n$  ( $n \geq 3$ ). Lấy điểm  $S$  nằm ngoài  $(P)$ . Nối  $S$  với các đỉnh  $A_1, A_2, ..., A_n$  ta được  $n$  tam giác:  $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ . Hình gồm đa giác  $A_1A_2...A_n$  và  $n$  tam giác  $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$  gọi là *hình chóp*, kí hiệu  $S.A_1A_2...A_n$ .

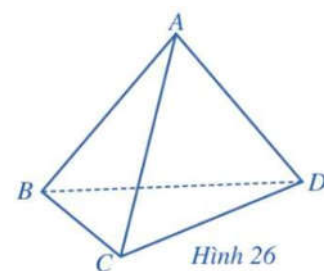
#### Chú ý

- Trong hình chóp  $S.A_1A_2...A_n$ 
  - Điểm  $S$  gọi là *đỉnh*;
  - Đa giác  $A_1A_2...A_n$  gọi là *mặt đáy*;
  - Các cạnh của mặt đáy gọi là *cạnh đáy*, các đoạn thẳng  $SA_1, SA_2, ..., SA_n$  gọi là các *cạnh bên*;
  - Các tam giác  $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$  gọi là các *mặt bên*.
- Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là *hình chóp tam giác*, *hình chóp tứ giác*, *hình chóp ngũ giác*, ... Hình 23 minh họa cho hình chóp ngũ giác  $S.A_1A_2A_3A_4A_5$ .



### 2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Hình gồm bốn tam giác  $ABC, ACD, ABD$  và  $BCD$  gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn là *tứ diện*), kí hiệu là  $ABCD$ .



#### Chú ý

- Trong hình tứ diện  $ABCD$  (Hình 26)
  - Các điểm  $A, B, C, D$  gọi là *các đỉnh*.
  - Các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DA, CA, BD$  gọi là *các cạnh*. Hai cạnh không có điểm chung gọi là *hai cạnh đối diện*.
  - Các tam giác  $ABC, ACD, ABD, BCD$  gọi là các *mặt*.
  - Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.

- Hình tứ diện có các mặt là tam giác đều là *hình tứ diện đều*.
- Mỗi hình chóp tam giác là một hình tứ diện. Ngược lại, nếu ta quy định rõ đỉnh và mặt đáy trong một hình tứ diện thì hình tứ diện đó trở thành hình chóp tam giác.

**Nhận xét:** Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chỉ ra ba điểm đó cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

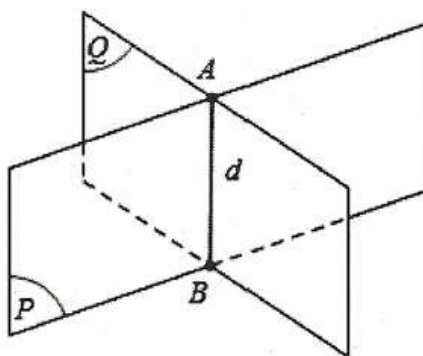
## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

### Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

#### 1. Phương pháp

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta đi tìm hai điểm chung của chúng.

Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó chính là giao tuyến



**Chú ý:** Điểm chung của hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  thường được tìm như sau:

- Tìm hai đường thẳng  $a$  và  $b$  lần lượt thuộc mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cùng nằm trong một mặt phẳng  $(R)$ .
- Giao điểm  $M = a \cap b$  chính là điểm chung của mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

#### 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy là tứ giác lồi  $ABCD$  có các cạnh đối không song song với nhau. Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $SA$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| a. $(SAC)$ và $(SBD)$ | b. $(SAB)$ và $(SCD)$ |
| c. $(SBC)$ và $(SAD)$ | d. $(BCM)$ và $(SAD)$ |
| e. $(CDM)$ và $(SAB)$ | f. $(BDM)$ và $(SAC)$ |

**Giải**

a. Trong mp (ABCD):

$$\left. \begin{array}{l} AC \cap BD = \{O\} \\ AC \subset (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

Mà  $S \in (SAC) \cap (SBD)$  nên  $SO = (SAC) \cap (SBD)$ .

b. Trong (ABCD) ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB \cap CD = \{F\} \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow F \in (SAB) \cap (SCD)$$

Mà  $S \in (SAB) \cap (SCD)$  nên  $SF = (SAB) \cap (SCD)$ .

c. Trong (ABCD) ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BC \cap AD = \{E\} \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$$

Mà  $S \in (SAD) \cap (SBC)$  nên  $SE = (SAD) \cap (SBC)$ .

d. Ta có:  $M \in (MBC) \cap (SAD)$

$$E \in BC \cap AD \Rightarrow E \in (MBC) \cap (SAD)$$

Nên  $ME = (MBC) \cap (SAD)$ .

e. Ta có:  $M \in (MCD) \cap (SAB)$

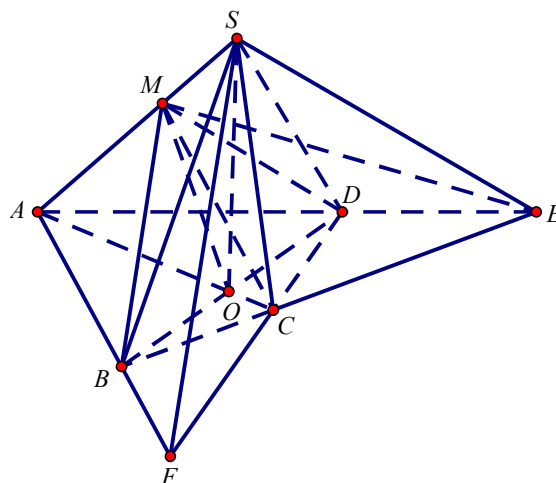
$$F = AB \cap CD \Rightarrow F \in (MCD) \cap (SAB)$$

Vậy  $MF = (MCD) \cap (SAB)$ .

f. Ta có:  $M \in (BDM) \cap (SAC)$

$$O \in (BDM) \cap (SAC)$$

Do đó  $MO = (BDM) \cap (SAC)$ .



**Ví dụ 2.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, AD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (ABN) và (CDM);

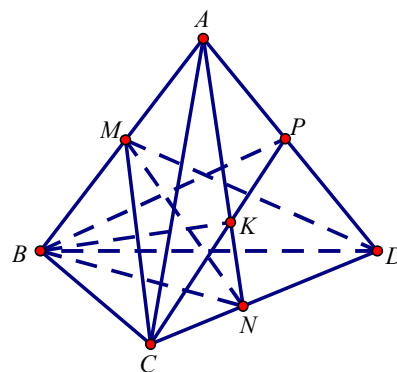
b. (ABN) và (BCP).

**Giải**

a. Ta có  $M$  và  $N$  là hai điểm chung của hai mặt phẳng  $(ABN)$  và  $(CDM)$ , nên giao tuyến của hai mặt phẳng này chính là đường thẳng  $MN$ .

b. Trong mặt phẳng  $(ACD)$ :  $AN$  cắt  $CP$  tại  $K$ . Do đó  $K$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(BCP)$  và  $(ABN)$ .

Mà  $B$  cũng là điểm chung của hai mặt phẳng này nên giao tuyến của chúng là đường thẳng  $BK$ .

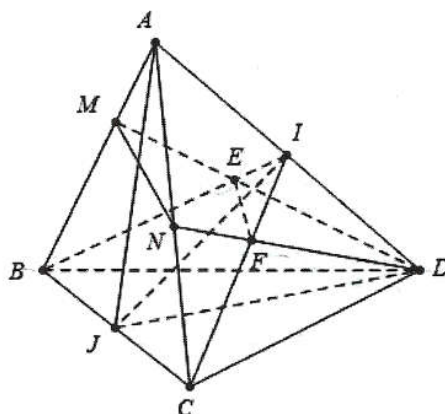


**Ví dụ 3.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(JAD)$ .

b) Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $AB$ , điểm  $N$  nằm trên cạnh  $AC$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(DMN)$ .

Lời giải



a) Ta có:  $I \in AD \Rightarrow I \in (JAD) \cap (IBC)$ .

$J \in BC \Rightarrow J \in (JAD) \cap (IBC)$ .

Do đó  $IJ = (IBC) \cap (JAD)$ .

b) Trong mặt phẳng  $(ABC)$  gọi  $E = DM \cap IB$  suy ra  $E \in (DMN) \cap (IBC)$ .

Trong mặt phẳng  $(ACD)$  gọi  $F = DN \cap IC$  suy ra  $F \in (DMN) \cap (IBC)$ .

Do đó  $EF = (DMN) \cap (IBC)$ .

**Ví dụ 4.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Điểm  $M$  nằm bên trong tam giác  $ABD$ , điểm  $N$  nằm bên trong tam giác  $ACD$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a)  $(AMN)$  và  $(BCD)$ .

b)  $(DMN)$  và  $(ABC)$ .

**Lời giải**

a) Trong mặt phẳng  $(ABD)$  gọi  $Q = AM \cap BD$ .

Khi đó  $Q \in (AMN) \cap (BCD)$ .

Tương tự gọi  $P = AN \cap CD \Rightarrow P = (AMN) \cap (BCD)$ .

Do vậy  $PQ = (AMN) \cap (BCD)$ .

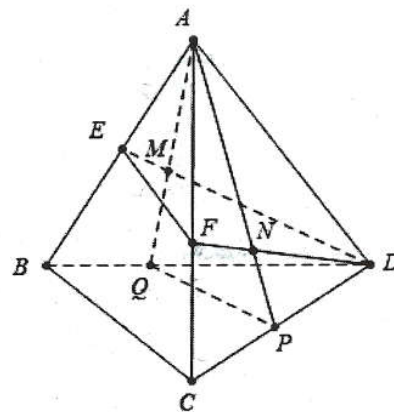
b) Trong mặt phẳng  $(ABD)$  gọi  $E = DM \cap AB$  suy ra

$E \in (DMN) \cap (ABC)$ .

trong mặt phẳng  $(ACD)$  gọi  $F = DN \cap AC$  suy ra

$F \in (DMN) \cap (ABC)$ .

Do đó  $EF = (DMN) \cap (ABC)$ .

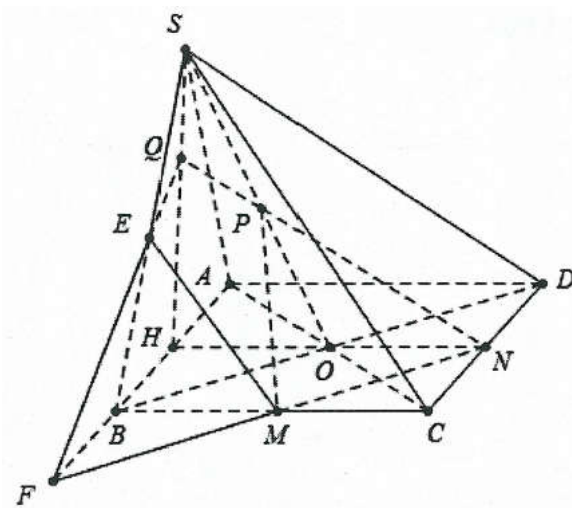


**Ví dụ 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ , gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$  và  $SO$ . Tìm giao tuyến của

a) Mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(SAB)$ .

b) Mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(SBC)$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $H = NO \cap AB$ , trong mặt phẳng  $(SHN)$  dựng  $NP$  cắt  $SH$  tại  $Q \Rightarrow Q \in (MNP) \cap (SAB)$ .

Gọi  $F = NM \cap AB \Rightarrow F \in (MNP) \cap (SAB)$ .

Do đó  $QF = (SAB) \cap (MNP)$ .

b) Trong mặt phẳng  $(SAB)$ , gọi  $E = QF \cap SB \Rightarrow E = (SBC) \cap (MNP)$

Do đó  $ME = (MNP) \cap (SBC)$ .

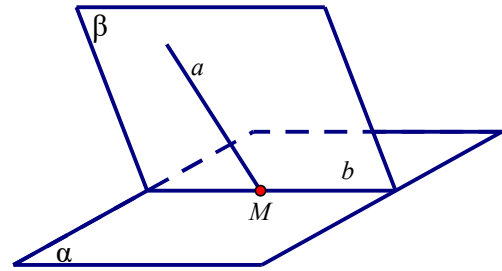
## 3. Bài tập trắc nghiệm

## Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

## 1. Phương pháp

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ , ta tìm giao điểm của  $a$  và một đường thẳng  $b$  nằm trong  $(\alpha)$ .

$$\left. \begin{array}{l} a \cap b = M \\ b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow M = a \cap (\alpha)$$

*Phương pháp:*

- Bước 1: Xác định mp( $\beta$ ) chứa  $a$ .
- Bước 2: Tìm giao tuyến  $b = (\alpha) \cap (\beta)$ .
- Bước 3: Trong  $(\beta)$ :  $a \cap b = M$ , mà  $b \subset (\alpha)$ , suy ra  $M = a \cap (\alpha)$ .

## 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

**Ví dụ 1.** Cho tứ giác ABCD (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ . S là điểm không nằm trên  $(\alpha)$ .

- a. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).
- b. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).
- c. Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

**Giải**

- a. \* Giao tuyến của mặt mp(SAC) và mp(SBD): Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$$

Từ (1) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAC) và mp(SBD).

$$\left. \begin{array}{l} O \in AC \\ AC \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \quad \left. \begin{array}{l} O \in BD \\ BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SBD) \quad \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra O là điểm chung thứ hai của mp(SAC) và mp(SBD).

Vậy  $SO = (SAC) \cap (SBD)$ .

\* Giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD): Gọi E là giao điểm của AB và CD. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (3)$$

Từ (3) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAB) và mp(SCD).

$$\left. \begin{array}{l} E \in AB \\ AB \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAB) \quad \left. \begin{array}{l} E \in CD \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SCD) \quad \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \quad (4)$$

Từ (4) suy ra E là điểm chung thứ hai của mp(SAB) và mp(SCD).

Vậy:  $SE = (SAB) \cap (SCD)$ .

b. Trong mp(SBD), hai đường thẳng SO, BN cắt nhau tại P, ta có:

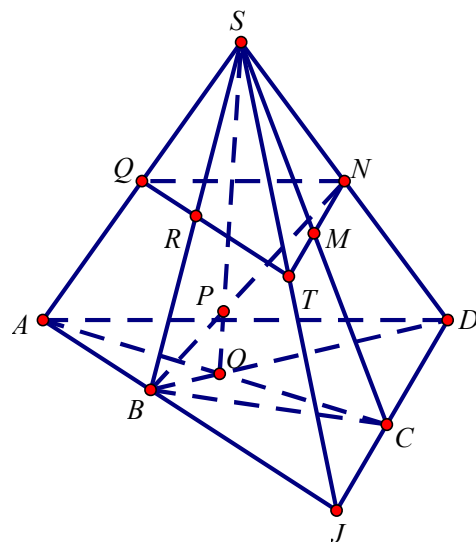
$$\left\{ \begin{array}{l} P \in BN \\ P \in SO \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow P \in (SAC) \Rightarrow P \text{ là giao điểm của BN và } (SAC).$$

Vậy P là giao điểm cần tìm.

c. Chứng minh bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng:

• Trong mp(SCD), gọi T là giao điểm của MN và SE. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên  $MN \parallel CD$ . Xét tam giác SDE, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel CD \\ N \text{ là trung điểm của SD} \end{array} \right\} \Rightarrow T \text{ là trung điểm của SE}.$$



- Tương tự, QR là đường trung bình của tam giác SAB nên  $QR \parallel AB$ . Xét tam giác SAE, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} QR \parallel AB \\ Q \text{ là trung điểm của SA} \end{array} \right\} \Rightarrow QR \text{ đi qua trung điểm T của SE.}$$

Như vậy, bốn điểm M, N, Q, R nằm trong mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau TN và TQ nên chúng đồng phẳng.

**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng  $(\alpha)$ , cho tứ giác ABCD. Gọi S là điểm không thuộc  $(\alpha)$ , M là điểm nằm trong tam giác SCD.

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).
- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

**Giải**

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD): Gọi N là giao điểm của SM và CD, gọi E là giao điểm của AN và BD. Rõ ràng  $mp(SAM) \equiv mp(SAN)$ . Ta có:

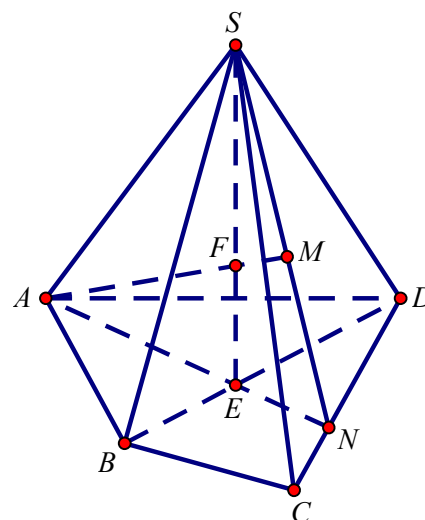
$$\left. \begin{array}{l} E \in AN \Rightarrow E \in (SAM) \\ E \in BD \Rightarrow E \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAM) \cap (SBD) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S \in (SAM) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $SE = (SAM) \cap (SBD)$ .

- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD). Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (SAM) \supset AM \\ (SAM) \cap (SBD) = SE \\ F \in AM \cap SE \subset (SAM) \end{array} \right\} \Rightarrow F = AM \cap (SBD)$$



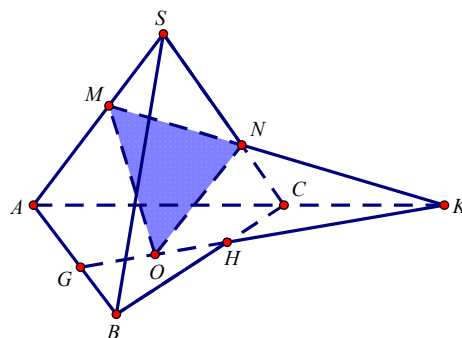
**Ví dụ 3.** Cho tứ diện SABC. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

**Giải**

Trong mp(SAC):  $MN \cap AC = \{K\}$ , mà  $MN \subset (OMN)$  nên  $\{K\} = AC \cap (OMN)$ .

Trong mp(ABC):  $OK \cap BC = \{H\}$ , mà  $OK \subset (OMN)$  nên  $\{H\} = BC \cap (OMN)$ .

Ta có:  $OK \cap AB = \{G\}$ , mà  $OK \subset (OMN)$  nên  $\{G\} = AB \cap (OMN)$ .



**Ví dụ 4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

- Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).
- Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

**Giải**

a. Ta có  $EF \subset (SBF)$ .

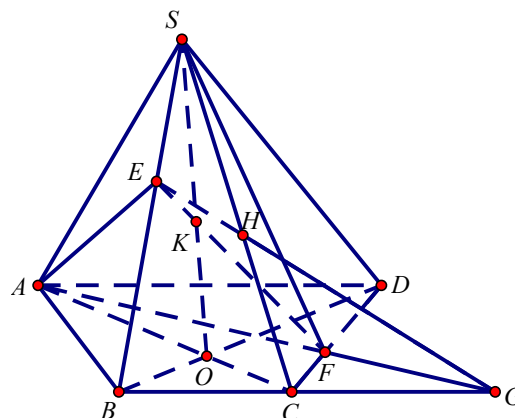
Trong mp(ABCD):  $BF \cap AC = \{O\}$ , suy ra  $(SAC) \cap (SBF) = SO$ .

Trong mp(SBF):  $EF \cap SO = \{K\}$ , mà  $SO \subset (SAC)$ , suy ra  $\{K\} = EF \cap (SAC)$ .

b. Trong mp(ABCD):  $AF \cap BC = \{G\}$ , mà  $AF \subset (AEF)$ , suy ra  $\{G\} = BC \cap (AEF)$ .

Khi đó:  $(AEF) \equiv (AEG)$ .

Trong mp(SBC):  $EG \cap SC = \{H\}$ , mà  $EG \subset (AEF)$ , suy ra  $\{H\} = SC \cap (AEF)$ .



### **Dạng 3. Thiết diện**

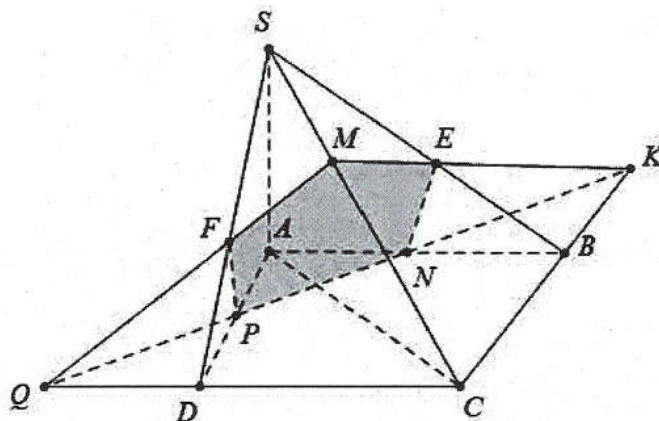
#### **1. Phương pháp**

Tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt cắt với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm. Mỗi đoạn giao tuyến là cạnh của thiết diện.

## 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ ,  $M$  là một điểm trên cạnh  $SC$ ,  $N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AD$ . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(MNP)$ .

*Lời giải*



Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  gọi  $Q = NP \cap CD$  và  $K = NP \cap BC$

Trong  $mp(SBC)$  gọi  $E = SB \cap KM$ , trong  $mp(SAD)$  gọi  $F = SD \cap QM$ .

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(MNP)$  là ngũ giác  $NEMFP$ .

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ , cạnh bằng  $a$ . Kéo dài  $BC$  một đoạn  $CE = a$ . Kéo dài  $BD$  một đoạn  $DF = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng  $(MEF)$ .

b) Tính diện tích của thiết diện.

*Lời giải*

a) Trong  $mp(ABC)$ : Dựng  $ME$  cắt  $AC$  tại  $I$ .

Trong  $mp(ABD)$ : Dựng  $MF$  cắt  $AD$  tại  $J$ .

Từ đó thiết diện của tứ diện với  $mp(MEF)$  là  $\Delta MIJ$ .

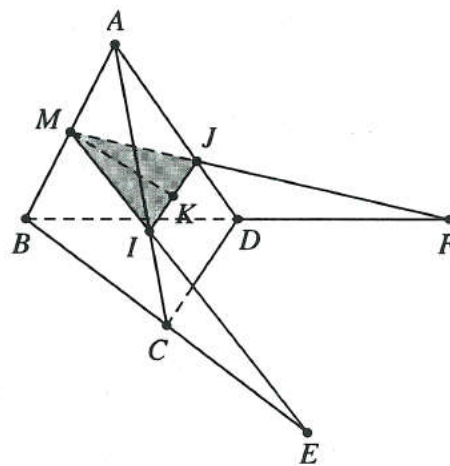
b) Theo cách dựng thì  $I$  và  $J$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABE$  và  $ABF$

$$\Rightarrow \begin{cases} AI = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{3} \\ AJ = \frac{2}{3} AD = \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{tam giác } AIJ \text{ đều} \Rightarrow IJ = \frac{2a}{3}.$$

Mặt khác  $AI = AJ$  nên  $\Delta AMI = \Delta AMJ \Rightarrow MI = MJ$ .

$$\text{Trong } \Delta AMI, MI = \sqrt{MA^2 + IA^2 - 2MA \cdot IA \cdot \cos A} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

$$S_{\Delta MIJ} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot 2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a^2}{6}.$$



**Ví dụ 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang với đáy lớn  $AD$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $SB$ . Tìm thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng  $(AMD)$ .

**Giải**

Trong  $mp(ABCD)$ :  $AB \cap CD = \{E\}$ .

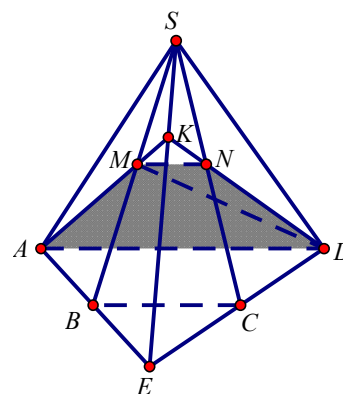
Trong  $mp(SAB)$ :  $AM \cap SE = \{K\}$ .

Do đó  $mp(AMD) \equiv mp(AKD)$ .

Trong  $mp(SCD)$ :  $KD \cap SC = \{N\}$

Do đó  $MN = (AMD) \cap (SBC)$ ,  $ND = (AMD) \cap (SCD)$ .

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác  $AMND$ .

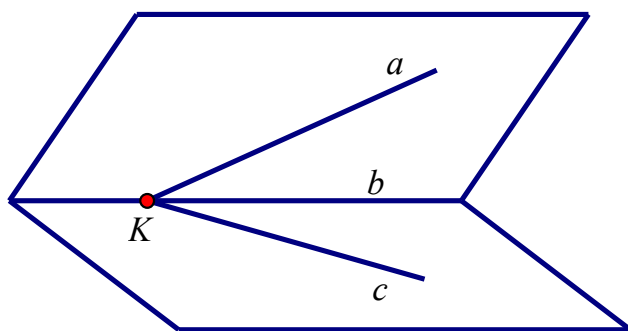


#### **Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy**

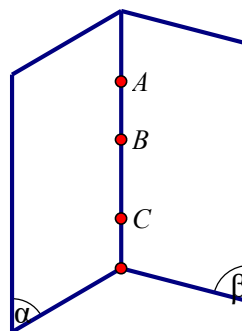
##### **1. Phương pháp**

- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau và giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ 3 (Hình a).

- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (Hình b).



Hình a.

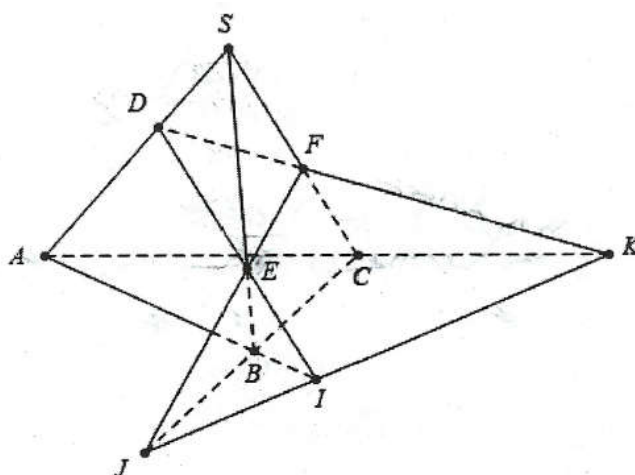


Hình b.

## 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện  $S.ABC$ . Trên các cạnh  $SA, SB, SC$  lần lượt lấy các điểm  $D, E$  và  $F$  sao cho  $DE$  cắt  $AB$  tại  $I, EF$  cắt  $BC$  tại  $J, FD$  cắt  $CA$  tại  $K$ . Chứng minh  $I, J, K$  thẳng hàng.

Lời giải



Ta có:  $I = DE \cap AB \Rightarrow \begin{cases} I \in (DEF) \\ I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow I \in \text{giao tuyến của hai mặt phẳng } (DEF) \text{ và } (ABC).$

Tương tự  $J = EF \cap BC \Rightarrow J$  thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng  $(DEF)$  và  $(ABC)$ .

$K = FD \cap AC \Rightarrow K$  thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng  $(DEF)$  và  $(ABC)$ .

Do đó  $I, J, K$  thẳng hàng do cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng  $(DEF)$  và  $(ABC)$ .

**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ ,  $S$  là điểm không thuộc  $(ABCD)$ ,  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của đoạn  $AB$  và  $SC$ .

a) Xác định giao điểm  $I = AN \cap (SBD)$ .

b) Xác định giao điểm  $J = MN \cap (SBD)$ .

c) Chứng minh  $I, J, B$  thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Gọi  $O = AC \cap BD$  và  $I = AN \cap SO$

Khi đó  $I \in SO \Rightarrow I \in (SBD) \Rightarrow I = AN \cap (SBD)$

b) Gọi  $E = CM \cap BD$

Trong mặt phẳng  $(SCM)$  gọi  $J = MN \cap SE$

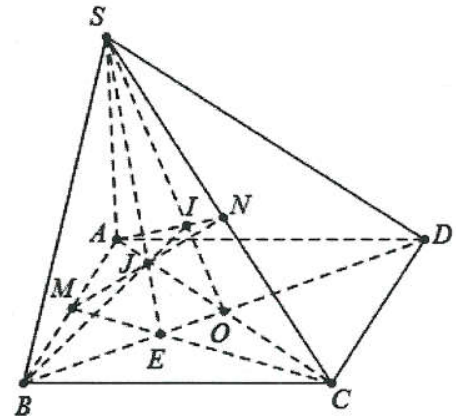
Khi đó  $J = MN \cap (SBD)$ .

c) Các điểm  $I, J, B$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $AI, MN, AM$  nên  $I, J, B \in mp(AMN)$

Mặt khác các điểm  $I, J, B \in mp(SBD)$

Do đó  $I, J, B$  thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(AMN)$

và  $(SBD) \Rightarrow I, J, B$  thẳng hàng.



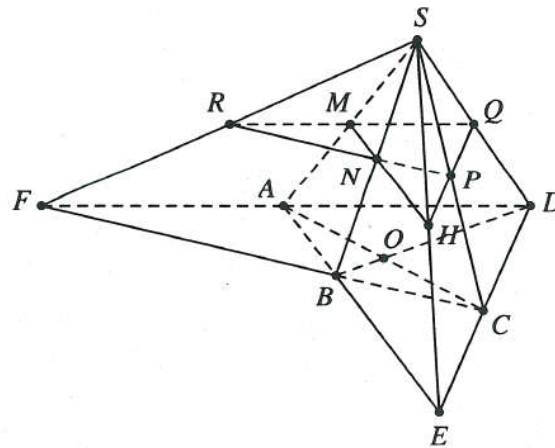
**Ví dụ 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm của  $SA, SB, SC$ .

a) Tìm giao điểm  $Q = SD \cap (MNP)$ .

b) Giả sử  $MN \cap PQ = H$ . Chứng minh  $S, H, E$  thẳng hàng.

c) Chứng minh  $SF, MQ, NP$  đồng qui.

**Lời giải**



a) Qua  $P$  kẻ đường thẳng  $d \parallel CD$ , cắt  $SD$  tại  $Q \Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$

b) Ta có  $(SAB) \cap (SCD) = A$

Lại có  $MN \cap PQ = H$  mà  $\begin{cases} MN \subset (SAB) \\ PQ \subset (SCD) \end{cases} \longrightarrow (SAB) \cap (SCD) = H$

Mặt khác  $AB \cap CD = E$  mà  $\begin{cases} AB \subset (SAD) \\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \longrightarrow (SAB) \cap (SCD) = E$

$\Rightarrow S, H, E$  thẳng hàng

c) Ta có  $(SAD) \cap (SBC) = SF$

Lại có  $(SBC) \cap (MNPQ) = NP, (SAD) \cap (MNPQ) = MQ$

Suy ra ba đường thẳng  $SF, NP, MQ$  đồng quy.

**Ví dụ 4.** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $I, J$  và  $K$  lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh  $SB, SC$  và  $AB$ , sao cho  $IJ$  không song song với  $BC$ ,  $IK$  không song song với  $SA$ .

a. Tìm giao điểm  $D$  của  $(IJK)$  và  $BC$ .

b. Gọi  $E$  là giao điểm của  $DK$  và  $AC$ . Chứng minh ba đường thẳng  $SA, KI, EJ$  đồng quy.

### Lời giải

a. Trong  $mp(SBC)$ :  $IJ \cap BC = \{D\}$  (do  $IJ$  không song song với  $BC$ ).

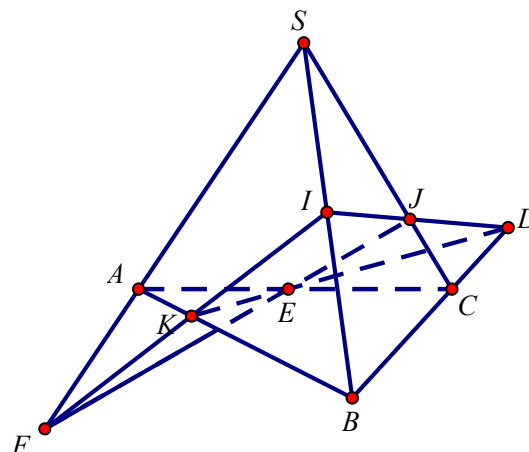
Mà  $IJ \subset (IJK)$  nên  $D = (IJK) \cap BC$ .

b. Ta có  $IK$  không song song với  $SA$  nên trong  $mp(ABC)$ :  $IK \cap SA = \{F\}$ .

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} IK \cap SA = \{F\} \\ IK \subset (IJK), SA \subset (SAC) \\ EJ = (IJK) \cap (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow F \in EJ.$$

Vậy ba đường thẳng  $SA, IK, EJ$  đồng quy.



**Ví dụ 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  không là hình thang. Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $K$  là một điểm trên cạnh  $SD$ .

a. Tìm giao điểm  $E$  của mặt phẳng  $(ABK)$  với  $CD$ .

b. Tìm giao điểm  $F$  của mặt phẳng  $(ABK)$  với  $SC$ .

c. Chứng minh các đường thẳng  $AF, BK$  và  $SO$  đồng quy.

### Lời giải

a. Trong mp(ABCD):  $AB \cap CD = \{E\}$ .

Mà  $AB \subset (ABK)$  nên  $E \in (ABK) \cap CD$ .

b. Ta có:  $(ABK) \equiv (AEK)$

Trong mp(SCD):  $EK \cap SC = \{F\}$ .

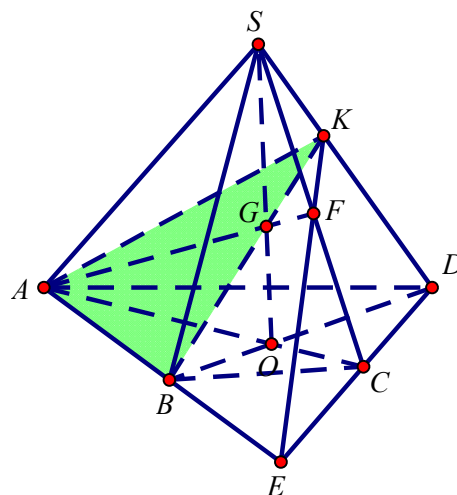
Mà  $EK \subset (ABK)$  nên  $F \in (ABK) \cap SC$ .

c. Trong mp(ABK):  $AF \cap BK = \{G\}$ .

Mà  $AF \subset (SAC)$ ,  $BK \subset (SBD)$

nên  $G \in (SAC) \cap (SBD) = SO$ .

Vậy ba đường thẳng AF, BK và SO đồng quy.



### Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng.

#### 1. Phương pháp

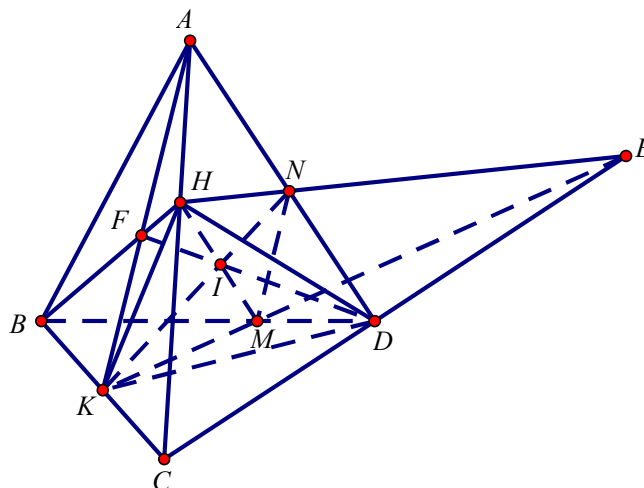
Áp dụng kết quả: 
$$\left. \begin{array}{l} I = a \cap b \\ a \subset (P), b \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array} \right\} \Rightarrow I \in c$$

#### 2. Các ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện ABCD. Gọi K là trung điểm của cạnh BC, H là một điểm cố định trên cạnh AC. Mặt phẳng (P) di động chứa HK, cắt các cạnh BD và AD lần lượt tại M và N.

- Giả sử cho trước điểm M không là trung điểm của BD, hãy xác định điểm N.
- Tìm tập hợp giao điểm I của hai đường HM và KN khi M di động trên cạnh BD.

**Giải**



a. Trong mp(BCD):  $KM \cap CD = \{E\}$ .

Trong mp(ACD):  $HE \cap AD = \{N\}$ .

Mà  $HE \subset (P)$  nên  $N = AD \cap (P)$  là điểm cần tìm.

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} I = HM \cap KN \\ HM \subset (HBD) \\ KN \subset (AKD) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in (HBD) \cap (AKD) \quad (1)$$

Trong mp(ABC):  $BH \cap AK = \{F\} \Rightarrow F \in (HBD) \cap (AKD)$

Mà  $D \in (HBD) \cap (AKD)$ , nên  $DF = (HBD) \cap (AKD)$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra I chạy trên đường thẳng cố định DF.

*Giới hạn:*

Cho  $M \rightarrow D$  thì  $N \rightarrow D$ . Khi đó  $I \rightarrow D$ .

Cho  $M \rightarrow B$  thì  $N \rightarrow A$ . Khi đó  $I \rightarrow F$ .

Vậy tập hợp điểm I là đoạn DF.

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và AC, sao cho MN không song song với BC. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

- Chứng minh EF luôn đi qua điểm cố định.
- Tìm tập hợp giao điểm của ME và NF.
- Tìm tập hợp giao điểm của MF và NE.

**Giải**

a. Trong  $mp(ABC)$ :  $MN \cap BC = K$ .

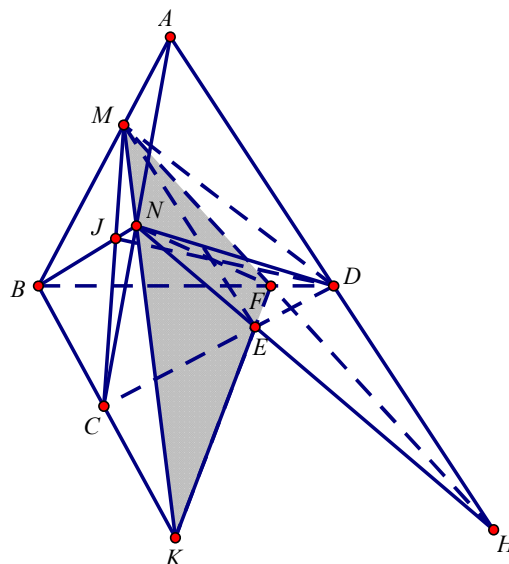
Khi đó  $K$  là điểm chung của  $(BCD)$  và  $(P)$ , mà  $EF$  là giao tuyến của  $(BCD)$  và  $(P)$  nên  $EF$  đi qua điểm  $K$  cố định.

b. Gọi  $I$  là giao điểm của  $ME$  và  $NF$  thì  $I$  là điểm chung của  $(NBD)$  và  $(MCD)$ , suy ra  $I$  thuộc giao tuyến  $DJ$  của  $mp(MCD)$  và  $(NBD)$ .

Giới hạn: Tập hợp cần tìm là đoạn  $DJ$ .

c. Gọi  $H$  là giao điểm của  $MF$  và  $NE$  thì  $H$  là điểm chung của  $(ABD)$  và  $(ACD)$ , suy ra  $H$  thuộc giao tuyến  $AD$  của  $mp(ABD)$  và  $mp(ACD)$ .

Giới hạn: Tập hợp điểm cần tìm là đường thẳng  $AD$  trừ đi đoạn  $AD$ .



### C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

**Bài 1.** Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là thước dẹt dài (Hình 28). Công dụng của thước dẹt này là gì? Giải thích.



Hình 28

Lời giải

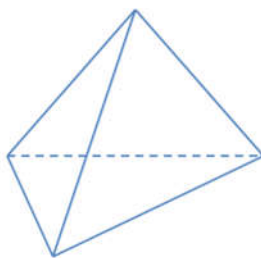
Thước dẹt làm cho mặt lớp vữa phẳng và dải mộc cùng nằm trên mặt phẳng.

**Bài 2.** Hình 29 là hình ảnh của chặn giấy bằng gỗ có bốn mặt phân biệt là các tam giác. Vẽ hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ đó.



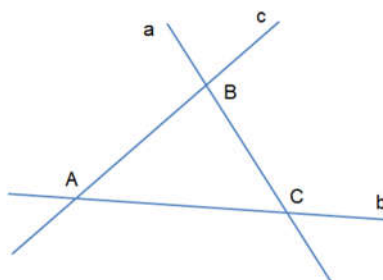
Hình 29

Lời giải



**Bài 3.** Cho ba đường thẳng  $a, b, c$  không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng ba đường thẳng  $a, b, c$  cùng đi qua một điểm, hay còn gọi là ba đường thẳng đồng quy.

Lời giải



Giả sử: Đường thẳng  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $C$ .

Đường thẳng  $a$  và  $c$  cắt nhau tại  $B$ .

Đường thẳng  $b$  và  $c$  cắt nhau tại  $A$ .

trong đó,  $A, B, C$  không đồng quy (1)

Khi đó:  $B$  và  $C$  thuộc đường thẳng  $a$

Mặt khác:  $B$  thuộc đường thẳng  $c, C$  thuộc đường thẳng  $b$

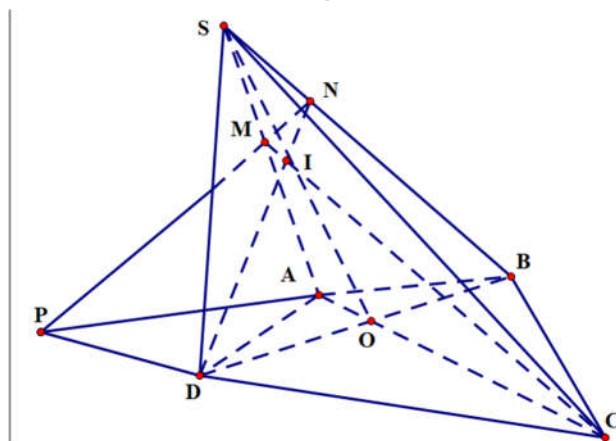
Suy ra:  $BC$  thuộc  $mp$  chứa đường thẳng  $b$  và  $c$ .

Do đó: Đường thẳng  $a$  thuộc  $mp(b, c)$  nên ba đường thẳng này đồng quy (trái với (1)).

Kết luận: Ba đường thẳng  $a, b, c$  cùng đi qua một điểm.

**Bài 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$  và  $AB$  cắt  $CD$  tại  $P$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $SA$  ( $M$  khác  $S, M$  khác  $A$ ). Gọi  $N$  là giao điểm của  $MP$  và  $SB, I$  là giao điểm của  $MC$  và  $DN$ . Chứng minh rằng  $S, O, I$  thẳng hàng.

Lời giải



Ta có:  $DN$  thuộc  $(SBD)$  và  $MC$  thuộc  $(SAC)$

Mà  $MC$  cắt  $DN$  tại  $I$  nên  $I$  là giao điểm của  $(SBD)$  và  $(SAC)$ .

Ta có:  $S$  và  $O$  cùng thuộc hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(SAC)$ .

Theo tính chất 4: Các điểm  $S, O, I$  đều thuộc giao điểm của hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(SAC)$ .

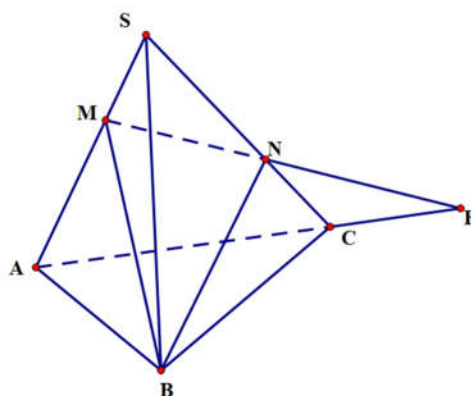
Vậy ba điểm  $S, O, I$  thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các cạnh  $SA, SC$  sao cho  $MA = 2MS, NS = 2NC$ .

a) Xác định giao điểm của  $MN$  với mặt phẳng  $(ABC)$ .

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(BMN)$  với mặt phẳng  $(ABC)$ .

**Lời giải**



a)  $\Delta SAC$  có:  $MN$  cắt  $AC$  tại  $E$  mà  $AC$  thuộc  $(ABC)$

Do đó:  $E$  là giao điểm của  $MN$  và  $(ABC)$ .

b) Ta có:  $B$  thuộc hai mặt phẳng  $(BMN)$  và  $(ABC)$

$E$  thuộc hai mặt phẳng  $(BMN)$  và  $(ABC)$

Suy ra:  $BE$  là giao tuyến của hai mặt phẳng trên.

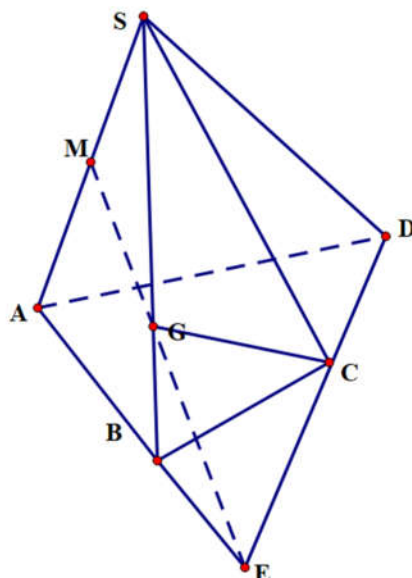
**Bài 6.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy không là hình thang. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ .

a) Xác định giao điểm của  $CD$  với mặt phẳng  $(SAB)$ .

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MCD)$  và  $(SBC)$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $E$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$

Vì  $AB$  thuộc mặt phẳng  $(SAB)$  nên  $E$  là giao điểm của  $CD$  và  $(SAB)$ .

b) Ta có:  $S$  thuộc hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

$E$  thuộc hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

Suy ra:  $SE$  là giao tuyến của hai mặt phẳng trên.

c) Trong  $(SAB)$ , gọi  $G$  là giao điểm của  $ME$  và  $SB$ .

Mà  $SB$  thuộc  $(SBC)$ ,  $ME$  thuộc  $(MCD)$ .

Do đó,  $G$  thuộc hai mặt phẳng  $(MCD)$  và  $(SBC)$ .

Ta có:  $C$  thuộc hai mặt phẳng  $(MCD)$  và  $(SBC)$ .

Vậy  $CG$  là giao tuyến của hai mặt phẳng trên.

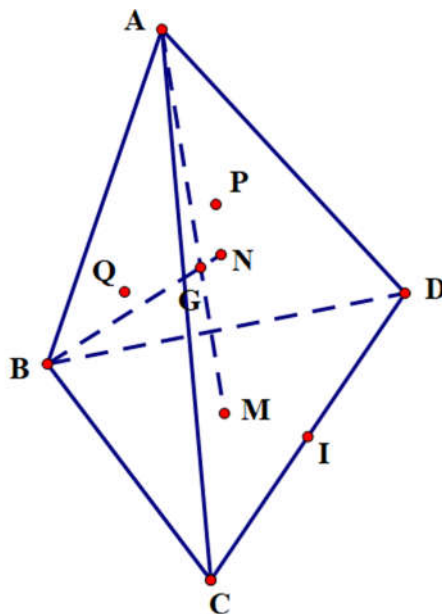
**Bài 7.** Cho hình tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $CD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $BCD, CDA$ .

a) Chứng minh rằng các điểm  $M, N$  thuộc mặt phẳng  $(ABI)$ .

b) Gọi  $G$  là giao điểm của  $AM$  và  $BN$ . Chứng minh rằng:  $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$ .

c) Gọi  $P, Q$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $DAB, ABC$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $CP, DQ$  cùng đi qua điểm  $G$  và  $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải**



a) Ta có:  $M$  là trọng tâm của  $\triangle BCD$ , mà  $I$  là trung điểm của  $CD$

Nên:  $M$  nằm trên trung tuyến  $BI$  (1)

Ta có:  $N$  là trọng tâm của  $\triangle ACD$ , mà  $I$  là trung điểm của  $CD$

Nên:  $N$  nằm trên trung tuyến  $AI$  (2)

Từ (1)(2) suy ra:  $M$  và  $N$  thuộc  $(ABI)$ .

b) Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AG, BG$ .

Ta có:  $HK // AB$

Mà  $AB // MN$

Suy ra:  $MN // HK$ .

Theo định lý Ta-lét, ta có:  $\frac{GM}{GH} = \frac{GN}{GK} = \frac{MN}{HK}$  (1)

Ta có:  $\frac{HK}{AB} = \frac{1}{2}, \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$

Do đó:  $\frac{MN}{AB} : \frac{HK}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MN}{HK} = \frac{2}{3}$  (2)

(1)(2) suy ra:  $\frac{GM}{GH} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH = \frac{1}{2}GA \Rightarrow \frac{GM}{\frac{1}{2}GA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GM}{GA} = \frac{1}{3}$

Chứng minh tương tự ta được:  $\frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$ .

c) Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, BD$

$\triangle AHD$  có:  $\frac{HM}{HD} = \frac{HQ}{HA} = \frac{1}{3}$

Suy ra:  $QM // AD$

Do đó:  $\triangle QGM$  đồng dạng với  $\triangle DGA$

Nên  $D, G, Q$  thẳng hàng

Ta có:  $QM // AD$  nên  $\frac{QM}{AD} = \frac{HM}{HD} = \frac{HQ}{HA} = \frac{1}{3}$

Mà  $\frac{QM}{AD} = \frac{QG}{GD}$

Do đó:  $\frac{QG}{GD} = \frac{1}{3}$

Chúng minh tương tự ta được:  $\frac{GP}{GC} = \frac{1}{3}$

Suy ra điều cần chứng minh.

## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
- B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
- D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

**Lời giải**

**Chọn C**

- A sai. Qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.
- B sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

**Câu 2:** Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- A. 6.                                      B. 4.                                      C. 3.                                      D. 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Khi đó, với 4 điểm không đồng phẳng ta tạo được tối đa  $C_4^3 = 4$  mặt phẳng.

**Câu 3:** Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Ba điểm phân biệt.
- B. Một điểm và một đường thẳng.
- C. Hai đường thẳng cắt nhau.
- D. Bốn điểm phân biệt.

**Lời giải**

**Chọn C**

- A sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.

- B sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

**Câu 4:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác  $ABCD$ ?

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 0.

Lời giải

Chọn A

4 điểm  $A, B, C, D$  tạo thành 1 tứ giác, khi đó 4 điểm  $A, B, C, D$  đã đồng phẳng và tạo thành 1 mặt phẳng duy nhất là mặt phẳng  $(ABCD)$ .

**Câu 5:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Nếu 3 điểm  $A, B, C$  là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  thì  $A, B, C$  thẳng hàng.
- B. Nếu  $A, B, C$  thẳng hàng và  $(P), (Q)$  có điểm chung là  $A$  thì  $B, C$  cũng là 2 điểm chung của  $(P)$  và  $(Q)$ .
- C. Nếu 3 điểm  $A, B, C$  là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  phân biệt thì  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- D. Nếu  $A, B, C$  thẳng hàng và  $A, B$  là 2 điểm chung của  $(P)$  và  $(Q)$  thì  $C$  cũng là điểm chung của  $(P)$  và  $(Q)$ .

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng phân biệt không song song với nhau thì chúng có duy nhất một giao tuyến.

- A sai. Nếu  $(P)$  và  $(Q)$  trùng nhau thì 2 mặt phẳng có vô số điểm chung. Khi đó, chưa đủ điều kiện để kết luận  $A, B, C$  thẳng hàng.
- B sai. Có vô số đường thẳng đi qua  $A$ , khi đó  $B, C$  chưa chắc đã thuộc giao tuyến của  $(P)$  và  $(Q)$ .
- C sai. Hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  phân biệt giao nhau tại 1 giao tuyến duy nhất, nếu 3 điểm  $A, B, C$  là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng thì  $A, B, C$  cùng thuộc giao tuyến.

- Câu 6:** Trong mặt phẳng  $(\alpha)$ , cho 4 điểm  $A, B, C, D$  trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm  $S$  không thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$ . Có mấy mặt phẳng tạo bởi  $S$  và 2 trong 4 điểm nói trên?
- A. 4.                                      B. 5.                                      C. 6.                                      D. 8.

Lời giải

Chọn C

Với điểm  $S$  không thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$  và 4 điểm  $A, B, C, D$  thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$ , ta có  $C_4^2$  cách chọn 2 trong 4 điểm  $A, B, C, D$  cùng với điểm  $S$  lập thành 1 mặt phẳng xác định. Vậy số mặt phẳng tạo được là 6.

- Câu 7:** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$  trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?
- A. 10.                                      B. 12.                                      C. 8.                                      D. 14.

Lời giải

Chọn A

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Ta có  $C_5^3$  cách chọn 3 điểm trong 5 điểm đã cho để tạo được 1 mặt phẳng xác định. Số mặt phẳng tạo được là 10.

- Câu 8:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?
- A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.  
B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.  
C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.  
D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Nếu 2 mặt phẳng trùng nhau, khi đó 2 mặt phẳng có vô số điểm chung và chung nhau vô số đường thẳng.

- Câu 9:** Cho 3 đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. 3 đường thẳng trên đồng quy.  
B. 3 đường thẳng trên trùng nhau.  
C. 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác.

D. Các khẳng định ở A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

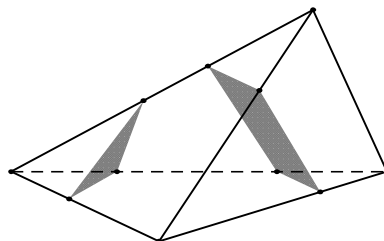
- B sai. Nếu 3 đường thẳng trùng nhau thì chúng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.
- C sai. Nếu 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác khi đó sẽ tạo được 3 điểm phân biệt không thẳng hàng (là 3 đỉnh của tam giác), chúng lập thành 1 mặt phẳng xác định, 3 đường thẳng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.

Câu 10: Thiết diện của 1 tứ diện có thể là:

- A. Tam giác.                      B. Tứ giác.  
C. Ngũ giác.                      D. Tam giác hoặc tứ giác.

Lời giải

Chọn D



Khi thiết diện cắt 3 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 3 giao tuyến. Ba giao tuyến lập thành 1 hình tam giác.

Khi thiết diện cắt cả 4 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 4 giao tuyến. Bốn giao tuyến lập thành 1 hình tứ giác.

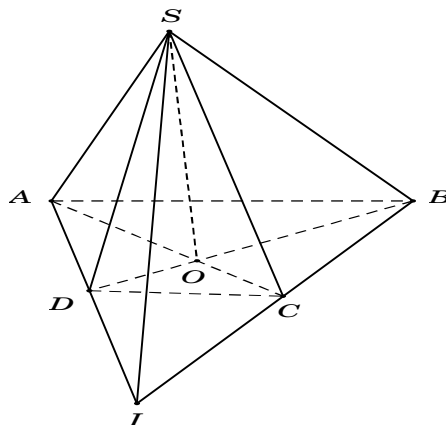
Thiết diện không thể là ngũ giác vì thiết diện có 4 mặt, số giao tuyến tối đa là 4.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hình chóp S.ABCD có 4 mặt bên.  
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$  là  $SO$  ( $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ).  
C. Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$  là  $SI$  ( $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ ).  
D. Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  là đường trung bình của  $ABCD$

Lời giải

Chọn D



- Hình chóp  $S.ABCD$  có 4 mặt bên:  $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$ . Do đó A đúng.
- $S$  là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$ .

$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \text{ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng } (SAC) \text{ và } (SBD).$$

$\longrightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$ . Do đó B đúng.

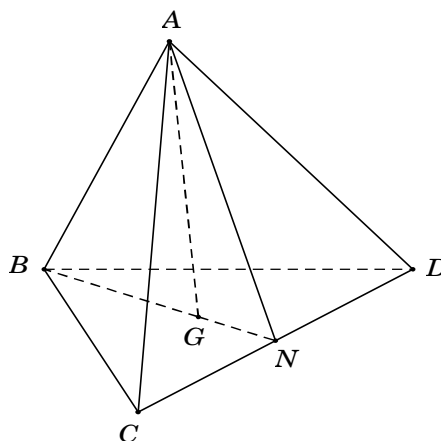
- Tương tự, ta có  $(SAD) \cap (SBC) = SI$ . Do đó C đúng.
  - $(SAB) \cap (SAD) = SA$  mà SA không phải là đường trung bình của hình thang ABCD
- Do đó D sai.

**Câu 12:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Giao tuyến của mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(GAB)$  là:

- A.**  $AM$  ( $M$  là trung điểm của  $AB$ ).      **B.**  $AN$  ( $N$  là trung điểm của  $CD$ ).  
**C.**  $AH$  ( $H$  là hình chiếu của  $B$  trên  $CD$ ).      **D.**  $AK$  ( $K$  là hình chiếu của  $C$  trên  $BD$ ).

**Lời giải**

**Chọn B**



- $A$  là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(GAB)$ .
- Ta có  $BG \cap CD = N \longrightarrow \begin{cases} N \in BG \subset (ABG) \Rightarrow N \in (ABG) \\ N \in CD \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow N$  là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(GAB)$ .

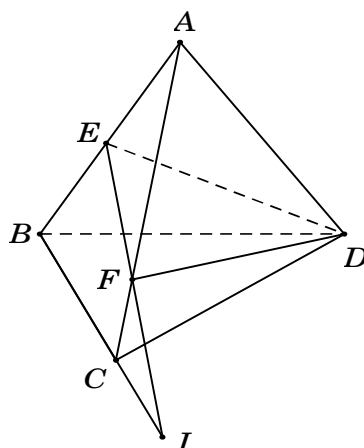
Vậy  $(ABG) \cap (ACD) = AN$ .

**Câu 13:** Cho điểm  $A$  không nằm trên mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa tam giác  $BCD$ . Lấy  $E, F$  là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh  $AB, AC$ . Khi  $EF$  và  $BC$  cắt nhau tại  $I$ , thì  $I$  **không** phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

- A.**  $(BCD)$  và  $(DEF)$ .    **B.**  $(BCD)$  và  $(ABC)$ .    **C.**  $(BCD)$  và  $(AEF)$ .    **D.**  $(BCD)$  và  $(ABD)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



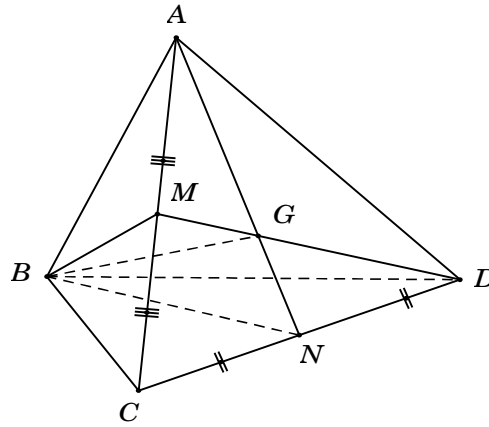
Điểm  $I$  là giao điểm của  $EF$  và  $BC$  mà  $\begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = (BCD) \cap (DEF) \\ I = (BCD) \cap (ABC) \\ I = (BCD) \cap (AEF) \end{cases}$ .

**Câu 14:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, CD$ . Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(ABN)$  là:

- A.** đường thẳng  $MN$ .  
**B.** đường thẳng  $AH$  ( $H$  là trực tâm tam giác  $ACD$ ).  
**C.** đường thẳng  $BG$  ( $G$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ ).  
**D.** đường thẳng  $AM$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



- $B$  là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(ABN)$ .
- Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, CD$  nên suy ra  $AN, DM$  là hai trung tuyến của tam giác  $ACD$ . Gọi  $G = AN \cap DM$   
 $\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$  là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(ABN)$ .

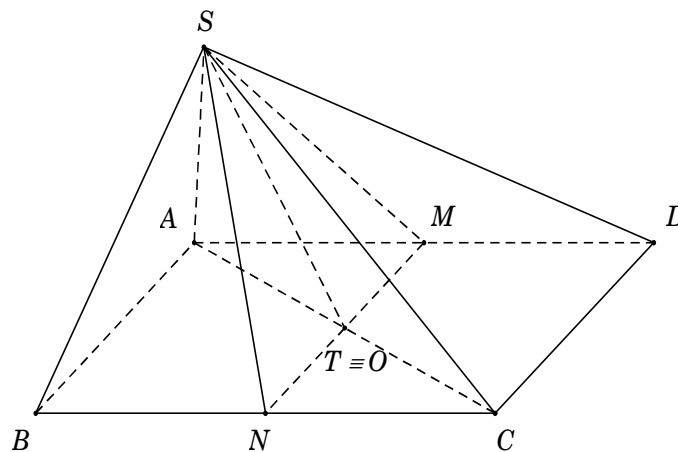
Vậy  $(ABN) \cap (MBD) = BG$ .

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $BC$ . Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SMN)$  và  $(SAC)$  là:

- A.  $SD$ .
- B.  $SO$  ( $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ ).
- C.  $SG$  ( $G$  là trung điểm  $AB$ ).
- D.  $SF$  ( $F$  là trung điểm  $CD$ ).

**Lời giải**

**Chọn B**



- $S$  là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng  $(SMN)$  và  $(SAC)$ .

- Gọi  $O = AC \cap BD$  là tâm của hình bình hành.

Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  gọi  $T = AC \cap MN$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in MN \subset (SMN) \Rightarrow O \in (SMN) \end{cases} \Rightarrow O$  là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng  $(SMN)$  và  $(SAC)$ .

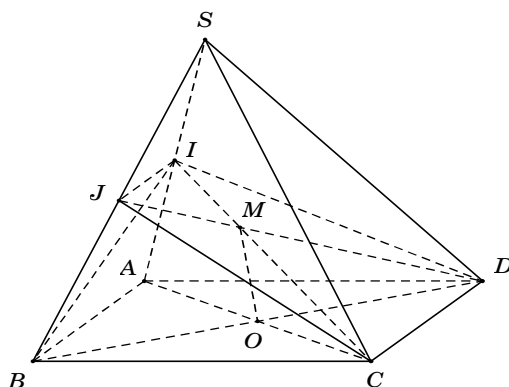
Vậy  $(SMN) \cap (SAC) = SO$ .

**Câu 16:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $IJCD$  là hình thang. B.  $(SAB) \cap (IBC) = IB$ .  
 C.  $(SBD) \cap (JCD) = JD$ . D.  $(IAC) \cap (JBD) = AO$  ( $O$  là tâm  $ABCD$ ).

**Lời giải**

**Chọn D**



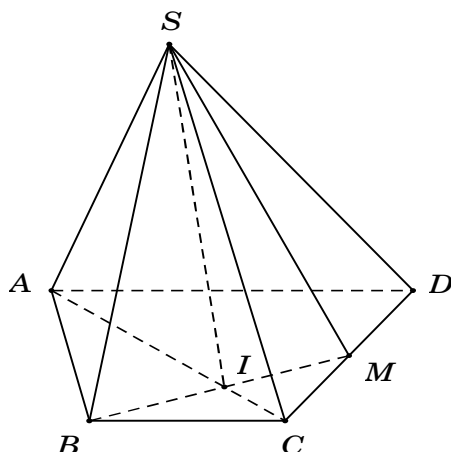
- Ta có  $IJ$  là đường trung bình của tam giác  $SAB \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD \Rightarrow IJ \parallel CD$   
 $\Rightarrow IJCD$  là hình thang. Do đó A đúng.
- Ta có  $\begin{cases} IB \subset (SAB) \\ IB \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (IBC) = IB$ . Do đó B đúng.
- Ta có  $\begin{cases} JD \subset (SBD) \\ JD \subset (JBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (JBD) = JD$ . Do đó C đúng.
- Trong mặt phẳng  $(IJCD)$ , gọi  $M = IC \cap JD \Rightarrow (IAC) \cap (JBD) = MO$ . Do đó D sai.

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Gọi  $M$  là trung điểm  $CD$ . Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MSB)$  và  $(SAC)$  là:

- A.  $SI$  ( $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BM$ ).  
 B.  $SJ$  ( $J$  là giao điểm của  $AM$  và  $BD$ ).  
 C.  $SO$  ( $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ).  
 D.  $SP$  ( $P$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$ ).

## Lời giải

Chọn A



- $S$  là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng  $(MSB)$  và  $(SAC)$ .
- Ta có  $\begin{cases} I \in BM \subset (SBM) \Rightarrow I \in (SBM) \\ I \in (AC) \in (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow I$  là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng  $(MSB)$  và  $(SAC)$ .

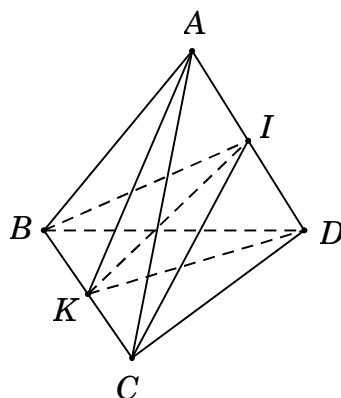
Vậy  $(MSB) \cap (SAC) = SI$ .

**Câu 18:** Cho 4 điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Giao tuyến của  $(IBC)$  và  $(KAD)$  là:

- A.  $IK$ .                      B.  $BC$ .                      C.  $AK$ .                      D.  $DK$ .

## Lời giải

Chọn A



Điểm  $K$  là trung điểm của  $BC$  suy ra  $K \in (IBC) \Rightarrow IK \subset (IBC)$ .

Điểm  $I$  là trung điểm của  $AD$  suy ra  $I \in (KAD) \Rightarrow IK \subset (KAD)$ .

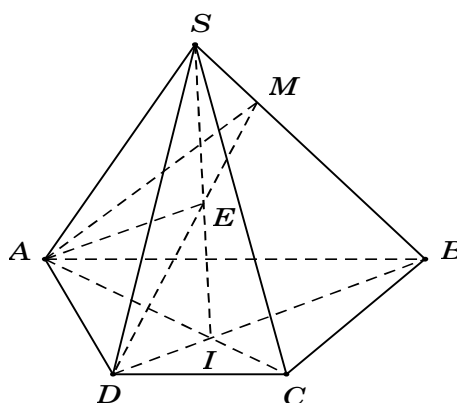
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(KAD)$  là  $IK$ .

**Câu 19:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AB \parallel CD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Trên cạnh  $SB$  lấy điểm  $M$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(ADM)$  và  $(SAC)$ .

- A.  $SI$ .
- B.  $AE$  ( $E$  là giao điểm của  $DM$  và  $SI$ ).
- C.  $DM$ .
- D.  $DE$  ( $E$  là giao điểm của  $DM$  và  $SI$ ).

Lời giải

Chọn B



Ta có  $A$  là điểm chung thứ nhất của  $(ADM)$  và  $(SAC)$ . Trong mặt phẳng  $(SBD)$ , gọi  $E = SI \cap DM$ .

Ta có:

- $E \in SI$  mà  $SI \subset (SAC)$  suy ra  $E \in (SAC)$ .
- $E \in DM$  mà  $DM \subset (ADM)$  suy ra  $E \in (ADM)$ .

Do đó  $E$  là điểm chung thứ hai của  $(ADM)$  và  $(SAC)$ .

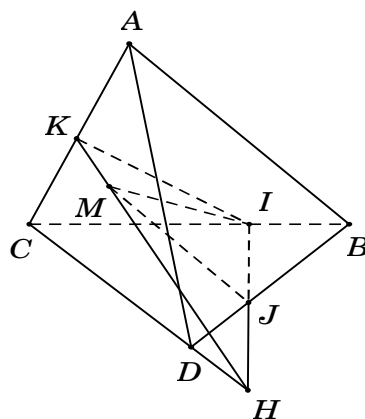
Vậy  $AE$  là giao tuyến của  $(ADM)$  và  $(SAC)$ .

**Câu 20:** Cho tứ diện  $ABCD$  và điểm  $M$  thuộc miền trong của tam giác  $ACD$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là hai điểm trên cạnh  $BC$  và  $BD$  sao cho  $IJ$  không song song với  $CD$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là giao điểm của  $IJ$  với  $CD$  của  $MH$  và  $AC$ . Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(IJM)$  là:

- A.  $KI$ .
- B.  $KJ$ .
- C.  $MI$ .
- D.  $MH$ .

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng  $(BCD)$ ,  $IJ$  cắt  $CD$  tại  $H \Rightarrow H \in (ACD)$ .

Điểm  $H \in IJ$  suy ra bốn điểm  $M, I, J, H$  đồng phẳng.

Nên trong mặt phẳng  $(IJM)$ ,  $MH$  cắt  $IJ$  tại  $H$  và  $MH \subset (IJM)$ .

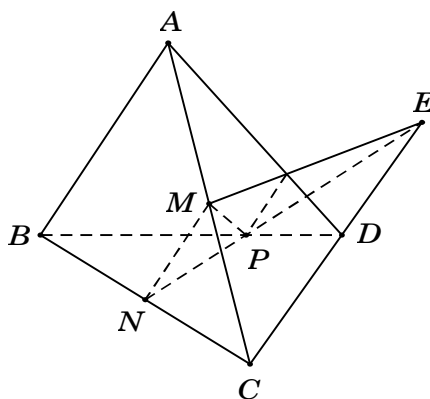
Mặt khác  $\begin{cases} M \in (ACD) \\ H \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow MH \subset (ACD)$ . Vậy  $(ACD) \cap (IJM) = MH$ .

**Câu 21:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Trên đoạn  $BD$  lấy điểm  $P$  sao cho  $BP = 2PD$ . Giao điểm của đường thẳng  $CD$  và mặt phẳng  $(MNP)$  là giao điểm của

- A.**  $CD$  và  $NP$ .      **B.**  $CD$  và  $MN$ .      **C.**  $CD$  và  $MP$ .      **D.**  $CD$  và  $AP$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



**Cách 1.** Xét mặt phẳng  $BCD$  chứa  $CD$ . Do  $NP$  không song song  $CD$  nên  $NP$  cắt  $CD$  tại  $E$ .

Điểm  $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$ . Vậy  $CD \cap (MNP)$  tại  $E$ .

**Cách 2.** Ta có  $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$  suy ra  $NP, CD$  đồng phẳng.

Gọi  $E$  là giao điểm của  $NP$  và  $CD$  mà  $NP \subset (MNP)$  suy ra  $CD \cap (MNP) = E$ .

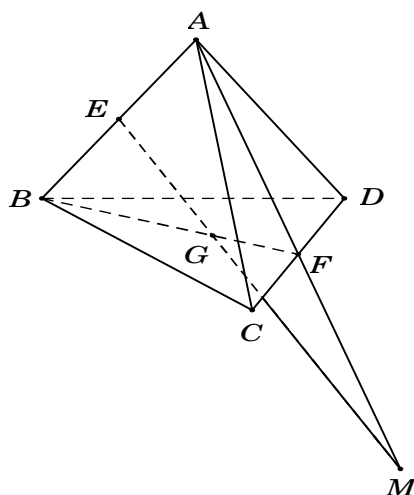
Vậy giao điểm của  $CD$  và  $mp(MNP)$  là giao điểm  $E$  của  $NP$  và  $CD$ .

**Câu 22:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Giao điểm của đường thẳng  $EG$  và mặt phẳng  $(ACD)$  là:

- A. điểm  $F$ .
- B. giao điểm của đường thẳng  $EG$  và  $AF$ .
- C. giao điểm của đường thẳng  $EG$  và  $AC$ .
- D. giao điểm của đường thẳng  $EG$  và  $CD$ .

Lời giải

Chọn B



Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ ,  $F$  là trung điểm của  $CD \Rightarrow G \in (ABF)$ .

Ta có  $E$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow E \in (ABF)$ .

Gọi  $M$  là giao điểm của  $EG$  và  $AF$  mà  $AF \subset (ACD)$  suy ra  $M \in (ACD)$ .

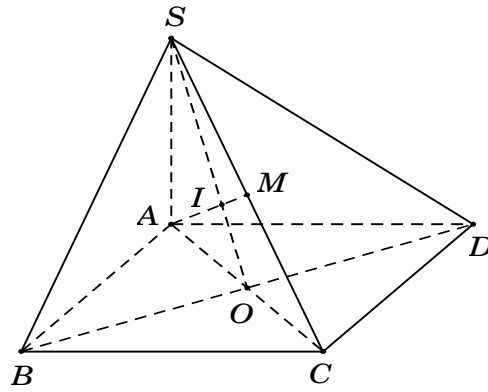
Vậy giao điểm của  $EG$  và  $mp(ACD)$  là giao điểm  $M = EG \cap AF$ .

**Câu 23:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  với mặt phẳng  $(SBD)$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $\vec{IA} = -2\vec{IM}$ .
- B.  $\vec{IA} = -3\vec{IM}$ .
- C.  $\vec{IA} = 2\vec{IM}$ .
- D.  $IA = 2,5IM$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$  suy ra  $O$  là trung điểm của  $AC$ .

Nối  $AM$  cắt  $SO$  tại  $I$  mà  $SO \subset (SBD)$  suy ra  $I = AM \cap (SBD)$ .

Tam giác  $SAC$  có  $M, O$  lần lượt là trung điểm của  $SC, AC$ .

Mà  $I = AM \cap SO$  suy ra  $I$  là trọng tâm tam giác  $SAC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM \Leftrightarrow IA = 2IM$ .

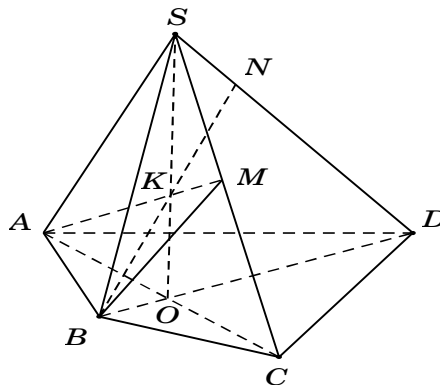
Điểm  $I$  nằm giữa  $A$  và  $M$  suy ra  $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{IM}$ .

**Câu 24:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AC$  và  $BD$  giao nhau tại  $O$  và một điểm  $S$  không thuộc mặt phẳng  $(ABCD)$ . Trên đoạn  $SC$  lấy một điểm  $M$  không trùng với  $S$  và  $C$ . Giao điểm của đường thẳng  $SD$  với mặt phẳng  $(ABM)$  là:

- A. giao điểm của  $SD$  và  $AB$ .
- B. giao điểm của  $SD$  và  $AM$ .
- C. giao điểm của  $SD$  và  $BK$  (với  $K = SO \cap AM$ ).
- D. giao điểm của  $SD$  và  $MK$  (với  $K = SO \cap AM$ ).

**Lời giải**

**Chọn C**



- Chọn mặt phẳng phụ  $(SBD)$  chứa  $SD$ .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABM)$ .

Ta có  $B$  là điểm chung thứ nhất của  $(SBD)$  và  $(ABM)$ .

Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $O = AC \cap BD$ . Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , gọi  $K = AM \cap SO$ . Ta có:

- $K \in SO$  mà  $SO \subset (SBD)$  suy ra  $K \in (SBD)$ .
- $K \in AM$  mà  $AM \subset (ABM)$  suy ra  $K \in (ABM)$ .

Suy ra  $K$  là điểm chung thứ hai của  $(SBD)$  và  $(ABM)$ .

Do đó  $(SBD) \cap (ABM) = BK$ .

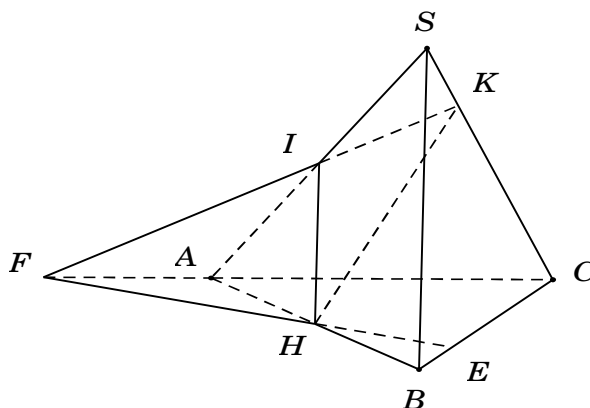
- Trong mặt phẳng  $(SBD)$ , gọi  $N = SD \cap BK$ . Ta có:
  - $N \in BK$  mà  $BK \subset (ABM)$  suy ra  $N \in (ABM)$ .
  - $N \in SD$ .

Vậy  $N = SD \cap (ABM)$ .

- Câu 25:** Cho bốn điểm  $A, B, C, S$  không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi  $I, H$  lần lượt là trung điểm của  $SA, AB$ . Trên  $SC$  lấy điểm  $K$  sao cho  $IK$  không song song với  $AC$  ( $K$  không trùng với các đầu mút). Gọi  $E$  là giao điểm của đường thẳng  $BC$  với mặt phẳng  $(IHK)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $E$  nằm ngoài đoạn  $BC$  về phía  $B$ .
  - B.  $E$  nằm ngoài đoạn  $BC$  về phía  $C$ .
  - C.  $E$  nằm trong đoạn  $BC$ .
  - D.  $E$  nằm trong đoạn  $BC$  và  $E \neq B, E \neq C$ .

Lời giải

Chọn D



- Chọn mặt phẳng phụ  $(ABC)$  chứa  $BC$ .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(IHK)$ .

Ta có  $H$  là điểm chung thứ nhất của  $(ABC)$  và  $(IHK)$ .

Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , do  $IK$  không song song với  $AC$  nên gọi  $F = IK \cap AC$ . Ta có

- $F \in AC$  mà  $AC \subset (ABC)$  suy ra  $F \in (ABC)$ .
- $F \in IK$  mà  $IK \subset (IHK)$  suy ra  $F \in (IHK)$ .

Suy ra  $F$  là điểm chung thứ hai của  $(ABC)$  và  $(IHK)$ .

Do đó  $(ABC) \cap (IHK) = HF$ .

• Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , gọi  $E = HF \cap BC$ . Ta có

- $E \in HF$  mà  $HF \subset (IHK)$  suy ra  $E \in (IHK)$ .
- $E \in BC$ .

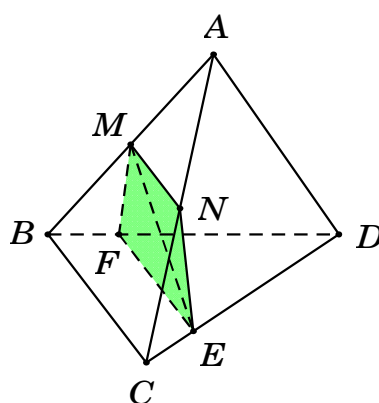
Vậy  $E = BC \cap (IHK)$ .

**Câu 26:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $AC$ ,  $E$  là điểm trên cạnh  $CD$  với  $ED = 3EC$ . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(MNE)$  và tứ diện  $ABCD$  là:

- A. Tam giác  $MNE$ .
- B. Tứ giác  $MNEF$  với  $F$  là điểm bất kì trên cạnh  $BD$ .
- C. Hình bình hành  $MNEF$  với  $F$  là điểm trên cạnh  $BD$  mà  $EF \parallel BC$ .
- D. Hình thang  $MNEF$  với  $F$  là điểm trên cạnh  $BD$  mà  $EF \parallel BC$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Tam giác  $ABC$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$ .

Suy ra  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$ .

Từ  $E$  kẻ đường thẳng  $d$  song song với  $BC$  và cắt  $BD$  tại  $F \Rightarrow EF \parallel BC$ .

Do đó  $MN \parallel EF$  suy ra bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng và  $MNEF$  là hình thang.

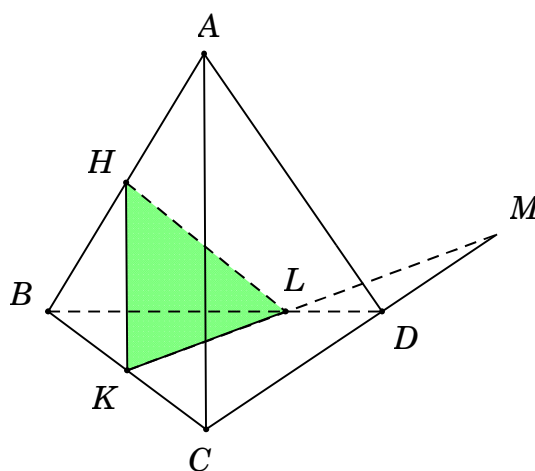
Vậy hình thang  $MNEF$  là thiết diện cần tìm.

**Câu 27:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC$ . Trên đường thẳng  $CD$  lấy điểm  $M$  nằm ngoài đoạn  $CD$ . Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng  $(HKM)$  là:

- A. Tứ giác  $HKMN$  với  $N \in AD$ .
- B. Hình thang  $HKMN$  với  $N \in AD$  và  $HK \parallel MN$ .
- C. Tam giác  $HKL$  với  $L = KM \cap BD$ .
- D. Tam giác  $HKL$  với  $L = HM \cap AD$ .

Lời giải

Chọn C



Ta có  $HK, KM$  là đoạn giao tuyến của  $(HKM)$  với  $(ABC)$  và  $(BCD)$ .

Trong mặt phẳng  $(BCD)$ , do  $KM$  không song song với  $BD$  nên gọi  $L = KM \cap BD$ .

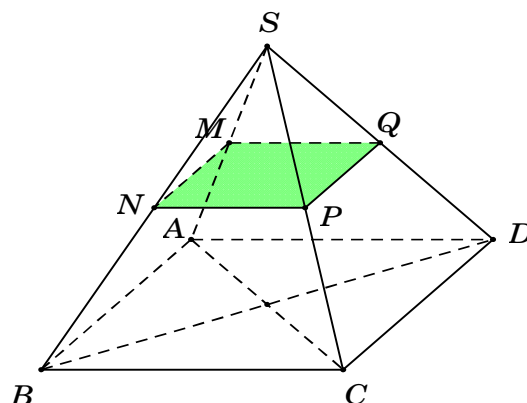
Vậy thiết diện là tam giác  $HKL$ .

**Câu 28:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$  ( $a > 0$ ). Các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, SC$ . Mặt phẳng  $(MNP)$  cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

- A.  $a^2$ .
- B.  $\frac{a^2}{2}$ .
- C.  $\frac{a^2}{4}$ .
- D.  $\frac{a^2}{16}$ .

Lời giải

Chọn C



Gọi  $Q$  là trung điểm của  $SD$ .

Tam giác  $SAD$  có  $M, Q$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SD$  suy ra  $MQ \parallel AD$ .

Tam giác  $SBC$  có  $N, P$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SC$  suy ra  $NP \parallel BC$ .

Mặt khác  $AD \parallel BC$  suy ra  $MQ \parallel NP$  và  $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$  là hình vuông.

Khi đó  $M, N, P, Q$  đồng phẳng  $\Rightarrow (MNP)$  cắt  $SD$  tại  $Q$  và  $MNPQ$  là thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  với mp  $(MNP)$ .

Vậy diện tích hình vuông  $MNPQ$  là  $S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{a^2}{4}$ .

**Câu 29:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Mặt phẳng  $(GCD)$  cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

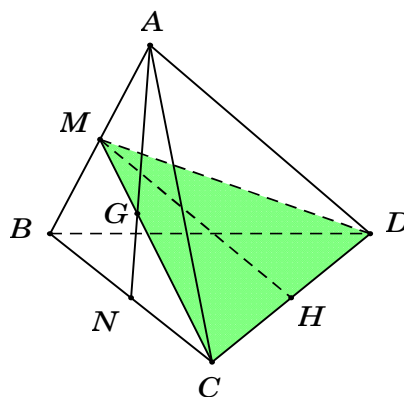
B.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ .

C.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ .

D.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Lời giải

Chọn B



Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  suy ra  $AN \cap MC = G$ .

Để thấy mặt phẳng  $(GCD)$  cắt đường thẳng  $AB$  tại điểm  $M$ .

Suy ra tam giác  $MCD$  là thiết diện của mặt phẳng  $(GCD)$  và tứ diện  $ABCD$ .

Tam giác  $ABD$  đều, có  $M$  là trung điểm  $AB$  suy ra  $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Tam giác  $ABC$  đều, có  $M$  là trung điểm  $AB$  suy ra  $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của  $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot CD$

Với  $MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Vậy  $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ .

**Câu 30:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có độ dài các cạnh bằng  $2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AC, BC$ ;  $P$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Mặt phẳng  $(MNP)$  cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A.  $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$ .

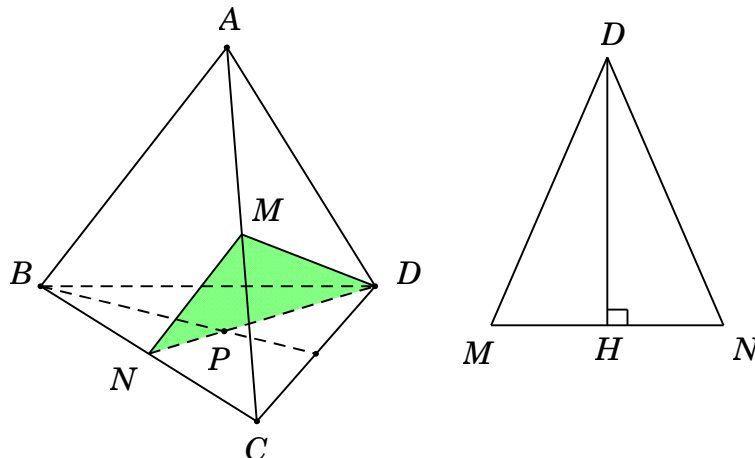
B.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ .

C.  $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$ .

D.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác  $BCD$  có:  $P$  là trọng tâm,  $N$  là trung điểm  $BC$ . Suy ra  $N, P, D$  thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác  $MND$ .

Xét tam giác  $MND$ , ta có  $MN = \frac{AB}{2} = a$ ;  $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Do đó tam giác  $MND$  cân tại  $D$ .

Gọi  $H$  là trung điểm  $MN$  suy ra  $DH \perp MN$ .

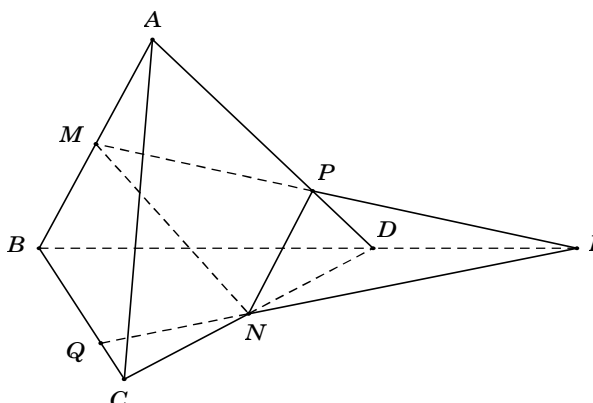
$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle MND} = \frac{1}{2} MN \cdot DH = \frac{1}{2} MN \cdot \sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2 \sqrt{11}}{4}.$$

**Câu 31:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  cắt  $AD, BC$  lần lượt tại  $P$  và  $Q$ . Biết  $MP$  cắt  $NQ$  tại  $I$ . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A.  $I, A, C$ .                      B.  $I, B, D$ .                      C.  $I, A, B$ .                      D.  $I, C, D$ .

Lời giải

Chọn B



Ta có  $(ABD) \cap (BCD) = BD$ .

Lại có  $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I$  thuộc giao tuyến của  $(ABD)$  và  $(BCD)$

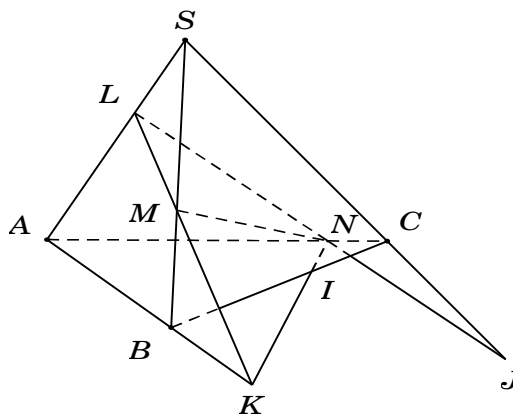
$\Rightarrow I \in BD \Rightarrow I, B, D$  thẳng hàng.

**Câu 32:** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $L, M, N$  lần lượt là các điểm trên các cạnh  $SA, SB$  và  $AC$  sao cho  $LM$  không song song với  $AB$ ,  $LN$  không song song với  $SC$ . Mặt phẳng  $(LMN)$  cắt các cạnh  $AB, BC, SC$  lần lượt tại  $K, I, J$ . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A.  $K, I, J$ .                      B.  $M, I, J$ .                      C.  $N, I, J$ .                      D.  $M, K, J$ .

Lời giải

Chọn B



Ta có

- $M \in SB$  suy  $M$  là điểm chung của  $(LMN)$  và  $(SBC)$ .
- $I$  là điểm chung của  $(LMN)$  và  $(SBC)$ .
- $J$  là điểm chung của  $(LMN)$  và  $(SBC)$ .

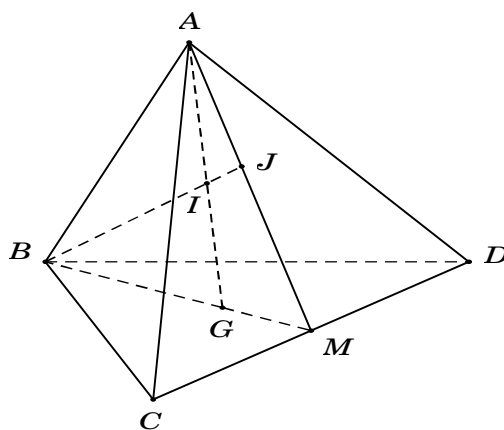
Vậy  $M, I, J$  thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của  $(LMN)$  và  $(SBC)$ .

**Câu 33:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ ,  $M$  là trung điểm  $CD$ ,  $I$  là điểm ở trên đoạn thẳng  $AG$ ,  $BI$  cắt mặt phẳng  $(ACD)$  tại  $J$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $AM = (ACD) \cap (ABG)$ .  
 B.  $A, J, M$  thẳng hàng.  
 C.  $J$  là trung điểm của  $AM$ .  
 D.  $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$ .

### Lời giải

Chọn C



Ta có  $A$  là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(GAB)$ .

Do  $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow M$  là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(GAB)$ .

$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM \longrightarrow A$  đúng.

Ta có  $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$  đồng phẳng.

$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$  thẳng hàng  $\longrightarrow B$  đúng.

Ta có  $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ) \longrightarrow D$  đúng.

Điểm  $I$  di động trên  $AG$  nên  $J$  có thể không phải là trung điểm của  $AM$

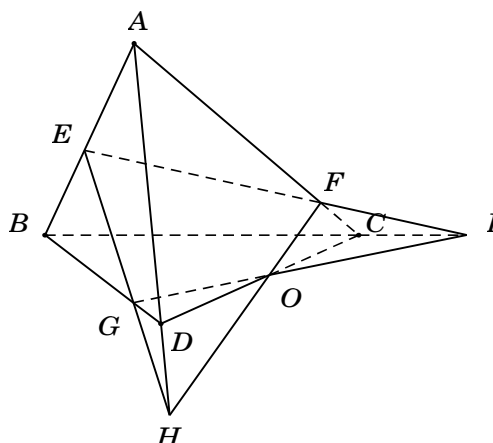
$\longrightarrow C$  sai.

**Câu 34:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $E, F, G$  là các điểm lần lượt thuộc các cạnh  $AB, AC, BD$  sao cho  $EF$  cắt  $BC$  tại  $I$ ,  $EG$  cắt  $AD$  tại  $H$ . Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

**A.**  $CD, EF, EG$ .      **B.**  $CD, IG, HF$ .      **C.**  $AB, IG, HF$ .      **D.**  $AC, IG, BD$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ ; đồng thời  $d_3$  là giao tuyến  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .

Gọi  $O = HF \cap IG$ . Ta có

- $O \in HF$  mà  $HF \subset (ACD)$  suy ra  $O \in (ACD)$ .
- $O \in IG$  mà  $IG \subset (BCD)$  suy ra  $O \in (BCD)$ .

Do đó  $O \in (ACD) \cap (BCD)$ . (1)

Mà  $(ACD) \cap (BCD) = CD$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $O \in CD$ .

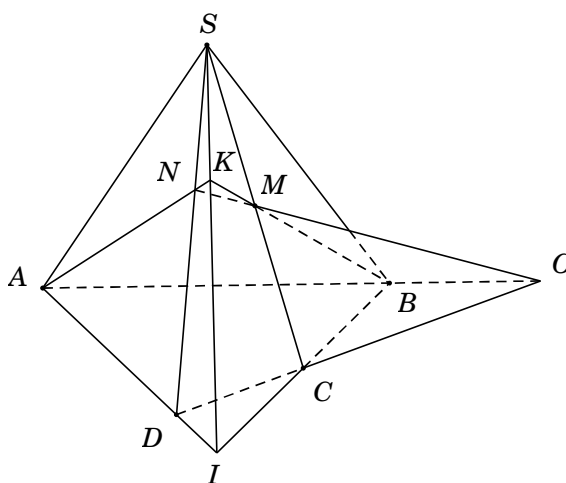
Vậy ba đường thẳng  $CD, IG, HF$  đồng quy.

**Câu 35:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  không phải là hình thang. Trên cạnh  $SC$  lấy điểm  $M$ . Gọi  $N$  là giao điểm của đường thẳng  $SD$  với mặt phẳng  $(AMB)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Ba đường thẳng  $AB, CD, MN$  đôi một song song.
- B. Ba đường thẳng  $AB, CD, MN$  đôi một cắt nhau.
- C. Ba đường thẳng  $AB, CD, MN$  đồng quy.
- D. Ba đường thẳng  $AB, CD, MN$  cùng thuộc một mặt phẳng.

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $I = AD \cap BC$ . Trong mặt phẳng  $(SBC)$ , gọi  $K = BM \cap SI$ . Trong mặt phẳng  $(SAD)$ , gọi  $N = AK \cap SD$ .

Khi đó  $N$  là giao điểm của đường thẳng  $SD$  với mặt phẳng  $(AMB)$ .

Gọi  $O = AB \cap CD$ . Ta có:

- $O \in AB$  mà  $AB \subset (AMB)$  suy ra  $O \in (AMB)$ .
- $O \in CD$  mà  $CD \subset (SCD)$  suy ra  $IJ, MN, SE$ .

Do đó  $O \in (AMB) \cap (SCD)$ . (1)

Mà  $(AMB) \cap (SCD) = MN$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $O \in MN$ . Vậy ba đường thẳng  $AB, CD, MN$  đồng quy.

## Bài 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

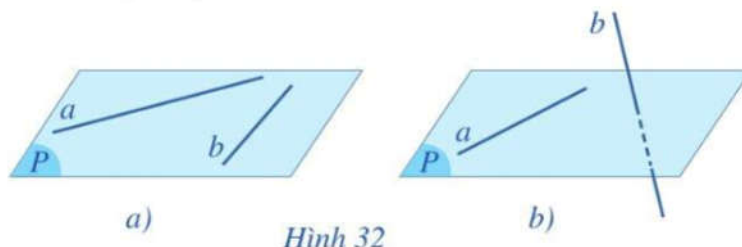
### A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

#### I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT

Trong mục này, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả sử hai đường thẳng là phân biệt.

**Nhận xét:** Cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  phân biệt trong không gian. Khi đó chỉ xảy ra một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa  $a$  và  $b$ . Khi đó ta nói  $a$  và  $b$  *đồng phẳng* (Hình 32a).

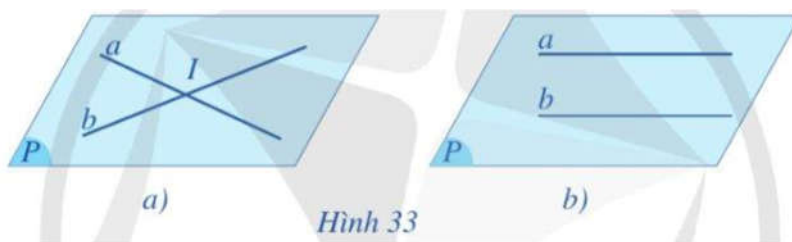


Hình 32

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa  $a$  và  $b$ . Khi đó ta nói  $a$  và  $b$  *chéo nhau*, hay  $a$  *chéo với*  $b$  (Hình 32b).

Khi hai đường thẳng  $a$  và  $b$  (phân biệt) đồng phẳng, ta đã biết có hai khả năng xảy ra:

- $a$  và  $b$  có một điểm chung duy nhất  $I$ . Ta nói  $a$  và  $b$  *cắt nhau tại*  $I$  và kí hiệu là  $a \cap b = \{I\}$ . Ta còn có thể viết  $a \cap b = I$  (Hình 33a).



Hình 33

- $a$  và  $b$  không có điểm chung. Ta nói  $a$  và  $b$  *song song với nhau* và kí hiệu là  $a \parallel b$  (Hình 33b).

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

**Nhận xét:** Cho hai đường thẳng song song  $a$  và  $b$ . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu là  $\text{mp}(a, b)$ .

### II. TÍNH CHẤT

#### Định lí 1

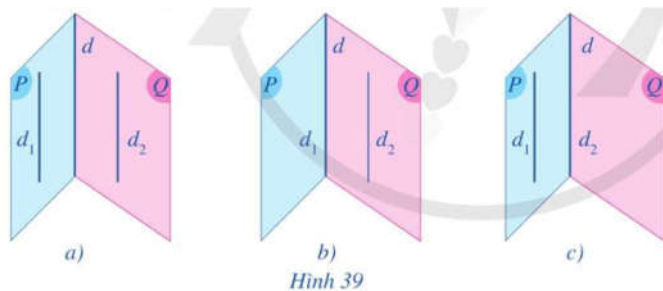
Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

**Định lí 2** (về giao tuyến của ba mặt phẳng).

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy, hoặc đôi một song song với nhau.

Từ Định lí 2, ta suy ra hệ quả sau:

**Hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó (Hình 39).



### Định lý 3

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Khi hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cùng song song với đường thẳng  $c$ , ta kí hiệu  $a//b//c$  và gọi là ba đường thẳng song song.

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

### Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy

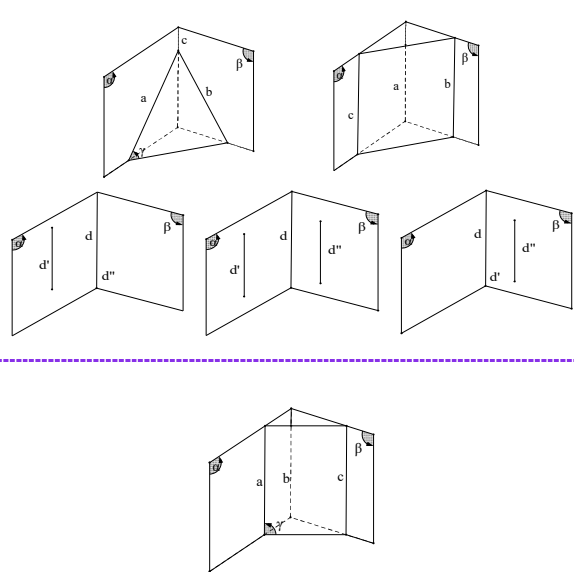
#### 1. Phương pháp

- Nếu ba mp phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

❖ **Hệ quả:** Nếu hai mp phân biệt lần lượt chứa hai đt song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đt đó hoặc trùng với một trong hai đt đó.

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases} a \neq b \\ a // c \Rightarrow a // b \\ b // c \end{cases}$$



#### 2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q, R, S là bốn điểm lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA. CMR nếu bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng thì:

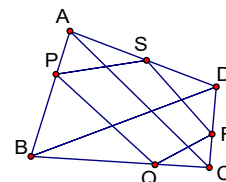
a) PQ, SR, AC hoặc song song hoặc đồng quy.

b) PS, RQ, BD hoặc song song hoặc đồng quy.

**Lời giải**

Theo định lý về giao tuyến của 3 mặt phẳng.

- Nếu  $PQ \parallel SR$  thì  $PQ \parallel SR \parallel AC$ .
- Nếu  $PQ$  cắt  $SR$  tại  $I$  thì  $AC$  đi qua  $I$ .



**Ví dụ 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC$  và  $AC$ . Trên cạnh  $PD$  lấy điểm  $P$  sao cho  $DP = 2PB$ .

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(MNP)$  với các mặt phẳng  $(ABD), (BCD)$ .
- Trên cạnh  $AD$  lấy điểm  $Q$  sao cho  $DQ = 2QA$ . Chứng minh:  $PQ$  song song với mặt phẳng  $(ABC)$ , ba đường thẳng  $DC, QN, PM$  đồng quy.

**Lời giải**

1) Do đó:

$$\begin{cases} MN \subset (MNP) \\ AB \subset (ABD) \Rightarrow (MNP) \cap (ABD) = Px \parallel AB \parallel MN \\ MN \parallel AB \end{cases}$$

Xác định giao tuyến của  $(MNP)$  và  $(BCD)$ :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (BCD)$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow P \in (MNP) \cap (BCD)$$

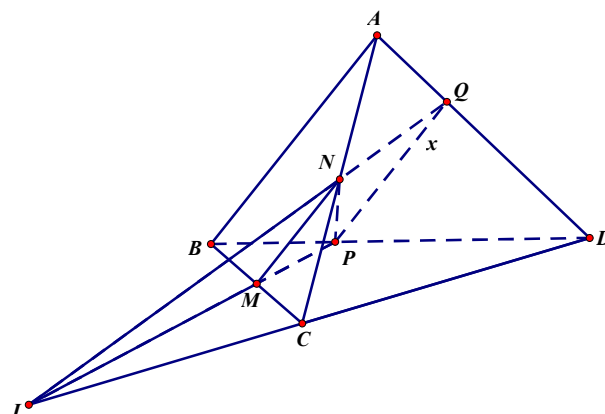
Vậy  $(MNP) \cap (BCD) = MP$  là giao tuyến cần tìm

Chứng minh  $PQ$  song song với mặt phẳng  $(ABC)$ :

$$\text{Vì } \frac{DQ}{QA} = \frac{DP}{PB} \text{ nên } PQ \parallel AB. \text{ Do đó: } \begin{cases} PQ \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel (ABC)$$

2) Ta có:  $Q \in (MNP)$ . Do đó:

- $(MNP) \cap (ACD) = QN$
- $(MNP) \cap (BCD) = PM$
- $(ACD) \cap (BCD) = CD$
- Vì  $\frac{CM}{MB} \neq \frac{DP}{PB}$  nên  $DC$  cắt  $PM$  tại  $I$ .
- Vậy  $DC, QN, PM$  đồng quy



**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $SB$ .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$
- Chứng minh:  $ON$  song song với mặt phẳng  $(SAD)$
- Tìm giao điểm của đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SAC)$

**Lời giải**

- Xét 2 mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$

Ta có:  $S$  là điểm chung của 2 mặt phẳng

Mặt khác:

$$\begin{cases} AB // CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

Suy ra giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng qua  $S_x$  qua  $S$  và song song với  $AB$  và  $CD$ .

- Xét tam giác  $SBD$ , ta có:

$$ON // SD \quad (\text{Vì } O, N \text{ lần lượt là trung điểm } BD \text{ và } SB)$$

$$\text{Mà } SD \subset (SAD)$$

Suy ra  $ON$  song song mặt phẳng  $(SAD)$

- Xét mặt phẳng  $(ABCD)$

Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BM$

Xét 2 mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBM)$

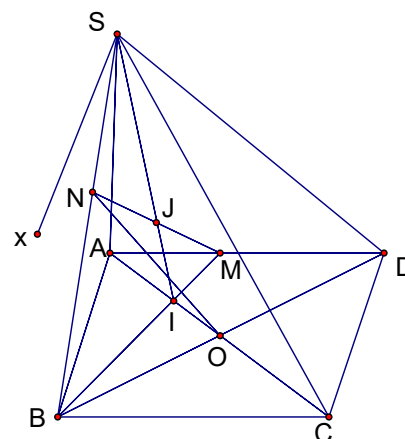
$$\text{Ta có: } (SAC) \cap (SBM) = SI$$

Gọi  $J$  là giao điểm của  $SI$  và  $MN$

Khi đó:

$$\begin{cases} J \in SI \subset (SAC) \Rightarrow J \in (SAC) \\ J \in MN \end{cases}$$

Vậy  $J$  là giao điểm của  $MN$  và mặt phẳng  $(SAC)$



**Dạng 2. Tìm giao điểm và thiết diện của hình chóp**

**1. Phương pháp**

**2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Câu 1:** Cho hình chóp  $S.ABC$ , gọi  $M, P$  và  $I$  lần lượt là trung điểm của  $AB, SC$  và  $SB$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MP$  và song song với  $AC$  và cắt các cạnh  $SA, BC$  tại  $N, Q$ .

- Chứng minh đường thẳng  $BC$  song song với mặt phẳng  $(IMP)$ .
- Xác định thiết diện của  $(\alpha)$  và hình chóp. Thiết diện này là hình gì?
- Tìm giao điểm của đường thẳng  $CN$  và mặt phẳng  $(SMQ)$ .

**Lời giải**

- a) Có  $IP$  là đường trung bình của  $\triangle SBC \Rightarrow IP \parallel BC$

mà  $IP \subset (IMP) \Rightarrow BC \parallel (IMP)$ .

- b) Có  $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ (ABC) \supset AC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ \parallel AC, Q \in BC$ .

- Có  $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (SAC) \supset AC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = PN \parallel AC, N \in SA$ .

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành  $MNPQ$ . Thật vậy dễ dàng chứng minh  $Q, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $SA$ . Do đó  $\overline{MQ} = \overline{NP} = \frac{1}{2} \overline{AC}$

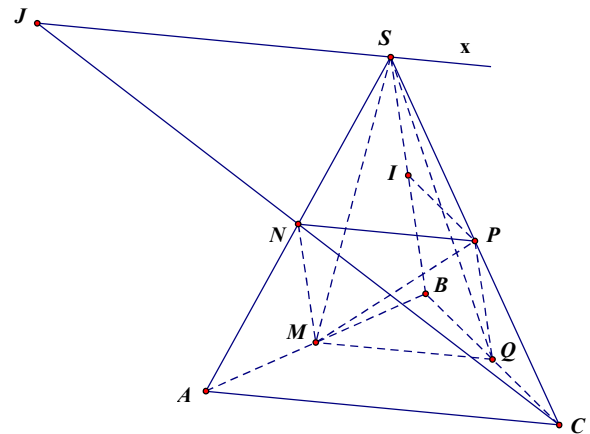
- c) Chọn mặt phẳng  $(SAC)$  chứa  $NC$ . Tìm giao tuyến của  $(SAC)$  và  $(SMQ)$ :

- Có  $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SMQ) \\ AC \parallel MQ; AC \subset (SAC), MQ \subset (SMQ) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SMQ) = Sx \parallel AC \parallel MQ$

Trong mp $(SAC)$  gọi  $J = CN \cap Sx$ , có  $\begin{cases} J \in CN \\ J \in Sx \subset (SMQ) \end{cases} \Rightarrow J = CN \cap (SMQ)$ .

**Câu 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $CD$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M, N$  và song song với đường thẳng  $AC$ .

- a) Tìm giao tuyến của  $(\alpha)$  với mp $(ABCD)$ .



- b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với  $mp(\alpha)$  .
- c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  .

**Lời giải**

a) Có  $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel AC \subset (ABCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = NE \parallel AC; E \in AD .$$

b) Có MN là đường trung bình của  $\Delta SCD \Rightarrow MN \parallel SD$  .

Trong  $mp(ABCD)$  gọi  $F = BD \cap NE$  .

Có  $\begin{cases} F \in (\alpha) \cap (SBD) \\ MN \parallel SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SBD) \end{cases}$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Fx \parallel MN \parallel SD$$

Trong  $mp(SBD)$  gọi  $H = Fx \cap SB$  , vì  $\begin{cases} H \in SB \\ H \in Fx \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow H = SB \cap (\alpha)$  .

c) Có  $\begin{cases} E \in (\alpha) \cap (SAD) \\ MN \parallel SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = EK \parallel SD; K \in SA$  .

Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là ngũ giác MNEKH.

**Câu 3:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với  $AB \parallel CD$  . Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).
- b) Tìm giao điểm của SB và (IMN).
- c) Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp S.ABCD.

**Lời giải**

a) Có  $I \in (IMN) \cap (SAC)$  (1).

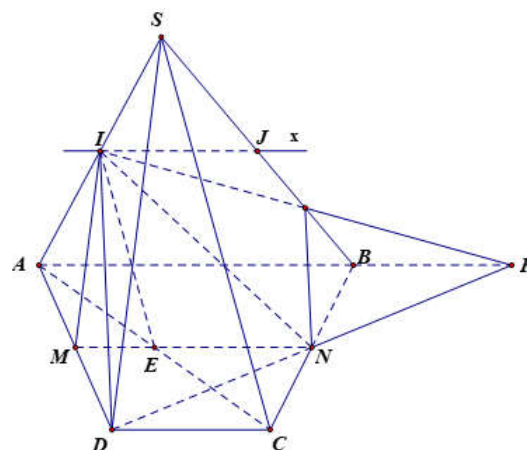
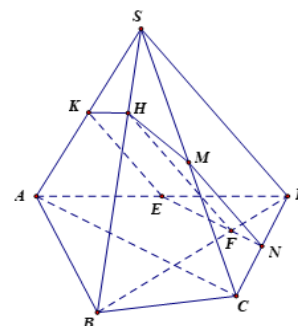
Trong  $mp(ABCD)$  gọi

$$E = MN \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in MN \subset (IMN) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E \in (IMN) \cap (SAC) \text{ (2)} .$$

Từ (1) và (2) suy ra  $(IMN) \cap (SAC) = EI$  .

b) Có MN là đường trung bình của hình thang ABCD  $\Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$  .



$$\text{Có } \begin{cases} I \in (IMN) \cap (SAB) \\ MN \parallel AB \\ MN \subset (IMN); AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (IMN) \cap (SAB) = Ix \parallel MN \parallel AB.$$

$$\text{c) Trong mp}(SAB) \text{ gọi } J = Ix \cap SB \Rightarrow \begin{cases} J \in SB \\ J \in Ix \subset (IMN) \end{cases} \Rightarrow J = SB \cap (IMN).$$

$$I \in (IDN) \cap (SAB) \quad (3)$$

$$\text{Trong mp}(ABCD) \text{ gọi } K = DN \cap AB \Rightarrow \begin{cases} K \in DN \subset (IDN) \\ K \in AB \subset (SAB) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K \in (IDN) \cap (SAB) \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra  $(IDN) \cap (SAB) = IK$

Trong mp(SAB) gọi  $P = IK \cap SB \Rightarrow$  thiết diện cần tìm là tứ giác MNPI.

**Câu 4:** Cho chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và  $N$  là trung điểm  $SA$ .

a) Tìm giao điểm của  $AC$  và mặt phẳng  $(SBD)$

b) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(NBC)$ . Thiết diện là hình gì?

**Lời giải**

1) Gọi  $O$  là giao điểm giữa  $AC$  và  $BD$ . Khi đó:

$$\begin{cases} O \in AC \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$$

Vậy  $O$  là giao điểm của  $AC$  và mặt phẳng  $(SBD)$

2) Ta có:

$$+ (NBC) \cap (ABCD) = BC$$

$$+ (NBC) \cap (SBC) = BC$$

$$+ (NBC) \cap (SAB) = NB$$

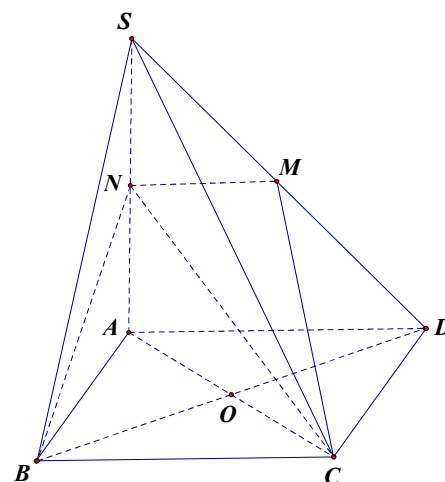
$$+ \begin{cases} N \in (NBC) \\ N \in (SAD) \end{cases} \quad (1)$$

$$(NBC) \supset BC \parallel AD \subset (SAD) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) \& (2) } \Rightarrow (NBC) \cap (SAD) = NM \parallel AD \parallel BC$$

$$+ (NBC) \cap (SCD) = MC$$

Vậy thiết diện là hình thang  $MNCD$



## C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

**Bài 1.** Quan sát phòng học của lớp và nêu lên hình ảnh của hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.

### Lời giải

- Hình ảnh hai đường thẳng song song: mép bảng trên và mép bảng dưới
- Hình ảnh hai đường thẳng cắt nhau: hai đường chân tường liền kề nhau
- Hình ảnh hai đường thẳng chéo nhau: cột dọc và chân tường đối diện

**Bài 2.** Quan sát Hình 43 và cho biết vị trí tương đối của hai trong ba cột tuabin gió có trong hình.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

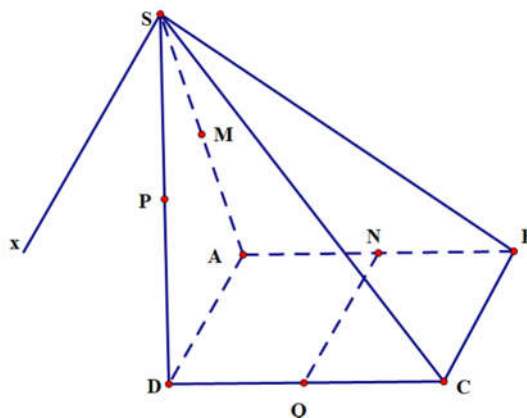
Hình 43

### Lời giải

Ba cột tuabin gió đôi một song song với nhau.

**Bài 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA, AB, SD$ . Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau:  $(SAD)$  và  $(SBC)$ ;  $(MNP)$  và  $(ABCD)$

### Lời giải



Ta có:  $S$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$

Từ  $S$  kẻ  $Sx$  sao cho  $Sx // AD // BC$ . Vậy  $Sx$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .

Ta có:  $M, P$  là trung điểm của  $SA, SD$ . Suy ra  $MP // AD // BC$

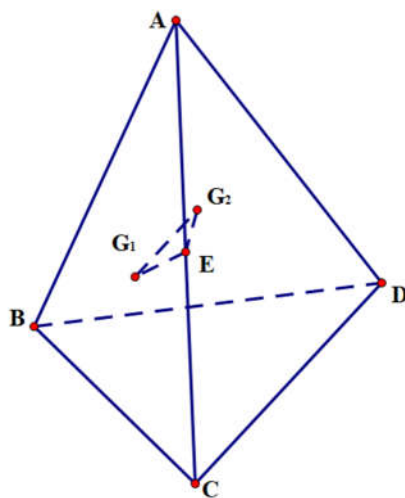
Có:  $N$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(ABCD)$

Từ  $N$  kẻ  $NQ$  sao cho  $NQ // AD$ .

Vậy  $NQ$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(ABCD)$ .

**Bài 4.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G_1, G_2$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC$  và  $ABD$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $G_1G_2$  song song với đường thẳng  $CD$ .

Lời giải



Gọi  $E$  là trung điểm  $AB$

Ta có:  $G_1$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$

Suy ra:  $\frac{EG_1}{EC} = \frac{1}{3} (1)$

Ta có:  $G_2$  là trọng tâm của  $\triangle ABD$

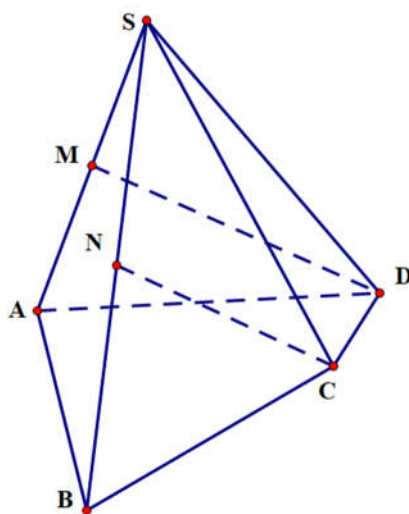
Suy ra:  $\frac{EG_2}{ED} = \frac{1}{3} (2)$

Từ (1)(2) suy ra:  $\triangle ECD$  có  $\frac{EG_1}{EC} = \frac{EG_2}{ED}$

Theo định lí Ta-lét, suy ra:  $G_1G_2 \parallel CD$

**Bài 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AB$  là đáy lớn và  $AB = 2CD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA$  và  $SB$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $NC$  song song với đường thẳng  $MD$ .

Lời giải



Ta có:  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN // AB$

Mà:  $AB // CD$

Suy ra:  $MN // CD$  (1)

Ta có:  $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$  mà  $AB = 2CD$

Suy ra:  $\frac{MN}{2CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = CD$  (2)

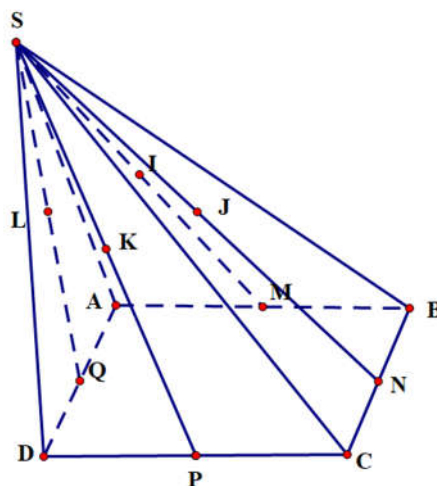
Từ (1)(2) suy ra:  $MNCD$  là hình bình hành

Do đó:  $NC // MD$ .

**Bài 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ ;  $I, J, K, L$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $SM, SN, SP, SQ$ .

- Chứng minh rằng bốn điểm  $I, J, K, L$  đồng phẳng và tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành.
- Chứng minh rằng  $IK // BC$ .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IJKL)$  và  $(SBC)$ .

**Lời giải**



a)  $\triangle ABC$  có  $M$  và  $N$  là trung điểm của  $AB, BC$ . nên  $MN // AC$ . (1)

$\triangle ACD$  có  $P$  và  $Q$  là trung điểm của  $CD, DA$ . nên  $PQ // AC$ . (2)

$\triangle SMN$  có  $I$  và  $J$  là trung điểm  $SN$  nên  $IJ // MN$  (3)

$\triangle SPQ$  có  $L$  và  $K$  là trung điểm

Từ (1)(2)(3)(4) suy ra  $IJ // LK$ . Do đó:  $I, J, K, L$  đồng phẳng.

Ta có:  $\frac{MN}{AC} = \frac{QP}{AC} = \frac{1}{2}$

$$\frac{IJ}{MN} = \frac{LK}{PQ} = \frac{1}{2}$$

Từ (6)(7) suy ra:  $IJ = LK$  mà  $IJ // LK$

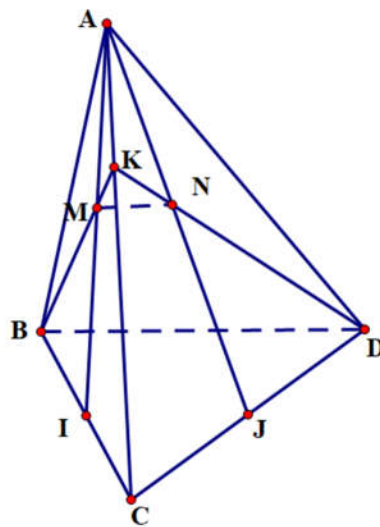
Do đó:  $IJKL$  là hình bình hành.

b) Ta có:  $M, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$

Suy ra:  $MP // BC$  (1)

**Bài 7.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CD$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $K$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $BK$  và  $AI$ ,  $N$  là giao điểm của  $DK$  và  $AJ$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $MN$  song song với đường thẳng  $BD$ .

**Lời giải**



Giả sử  $K$  là trung điểm của  $AC$

Suy ra:  $M, N$  lần lượt là trọng tâm của  $\triangle ABC$  và  $\triangle ACD$ .

Do đó:  $\triangle KBD$  có  $\frac{KM}{KB} = \frac{KN}{KD} = \frac{1}{3}$

Suy ra:  $MN \parallel BD$

Trường hợp  $K$  bất kỳ cũng chứng minh được  $MN \parallel BD$ .

## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

**Câu 2:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
- B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
- C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
- D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

## Lời giải

## Chọn D

- A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.
- B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

**Câu 3:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

## Lời giải

## Chọn C

**Câu 4:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
- B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
- D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

## Lời giải

## Chọn B

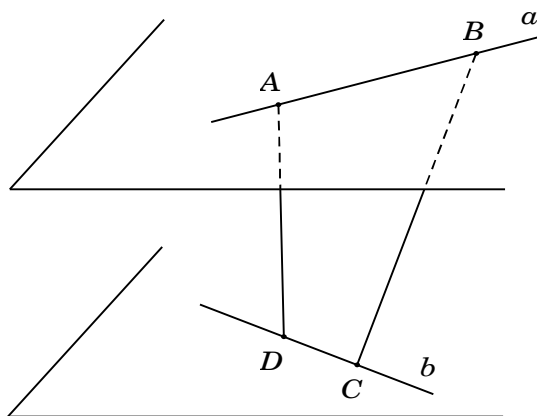
- A sai. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không có điểm chung.
- C sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.
- D sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó song song.

**Câu 5:** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ . Lấy  $A, B$  thuộc  $a$  và  $C, D$  thuộc  $b$ . Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$  ?

- A. Có thể song song hoặc cắt nhau.
- B. Cắt nhau.
- C. Song song với nhau.
- D. Chéo nhau.

## Lời giải

## Chọn D



Theo giả thiết,  $a$  và  $b$  chéo nhau  $\Rightarrow a$  và  $b$  không đồng phẳng.

Giả sử  $AD$  và  $BC$  đồng phẳng.

- Nếu  $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a; b)$ . Mà  $a$  và  $b$  không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm  $I$ .
- Nếu  $AD \parallel BC \Rightarrow a$  và  $b$  đồng phẳng (Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều giả sử là sai. Do đó  $AD$  và  $BC$  chéo nhau.

**Câu 6:** Cho ba mặt phẳng phân biệt  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  có  $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$ ;  $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$ ;  $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$ . Khi đó ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$ :

- |                             |                                            |
|-----------------------------|--------------------------------------------|
| <b>A.</b> Đôi một cắt nhau. | <b>B.</b> Đôi một song song.               |
| <b>C.</b> Đồng quy.         | <b>D.</b> Đôi một song song hoặc đồng quy. |

**Lời giải**

**Chọn D**

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

**Câu 7:** Trong không gian, cho 3 đường thẳng  $a, b, c$ , biết  $a \parallel b$ ,  $a$  và  $c$  chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng  $b$  và  $c$ :

- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| <b>A.</b> Trùng nhau hoặc chéo nhau. | <b>B.</b> Cắt nhau hoặc chéo nhau.   |
| <b>C.</b> Chéo nhau hoặc song song.  | <b>D.</b> Song song hoặc trùng nhau. |

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả sử  $b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$  (mâu thuẫn với giả thiết).

**Câu 8:** Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt  $a, b, c$  trong đó  $a \parallel b$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Nếu  $a \parallel c$  thì  $b \parallel c$ .

- B. Nếu  $c$  cắt  $a$  thì  $c$  cắt  $b$ .
- C. Nếu  $A \in a$  và  $B \in b$  thì ba đường thẳng  $a, b, AB$  cùng ở trên một mặt phẳng.
- D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua  $a$  và  $b$ .

Lời giải

Chọn B

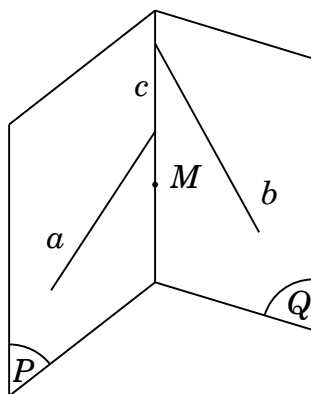
Nếu  $c$  cắt  $a$  thì  $c$  cắt  $b$  hoặc  $c$  chéo  $b$ .

**Câu 9:** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a, b$  và điểm  $M$  ở ngoài  $a$  và ngoài  $b$ . Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua  $M$  cắt cả  $a$  và  $b$ ?

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 0.                                      D. Vô số.

Lời giải

Chọn A



Gọi  $(P)$  là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng  $a$  và  $M$ ;  $(Q)$  là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng  $b$  và  $M$ .

Giả sử  $c$  là đường thẳng qua  $M$  cắt cả  $a$  và  $b$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} c \in (P) \\ c \in (Q) \end{cases} \Rightarrow c = (P) \cap (Q).$$

Vậy chỉ có 1 đường thẳng qua  $M$  cắt cả  $a$  và  $b$ .

**Câu 10:** Trong không gian, cho 3 đường thẳng  $a, b, c$  chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 0.                                      D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi  $M$  là điểm bất kì nằm trên  $a$ .

Giả sử  $d$  là đường thẳng qua  $M$  cắt cả  $b$  và  $c$ . Khi đó,  $d$  là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi  $M$  và  $b$  với mặt phẳng tạo bởi  $M$  và  $c$ .

Với mỗi điểm  $M$  ta được một đường thẳng  $d$ .

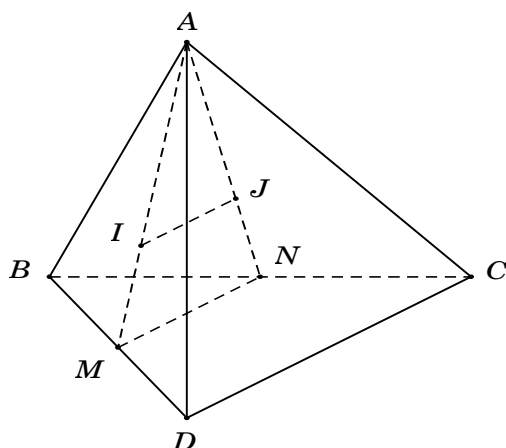
Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng  $a, b, c$ .

**Câu 11:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC$  và  $ABD$ . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A.  $IJ$  song song với  $CD$ .
- B.  $IJ$  song song với  $AB$ .
- C.  $IJ$  chéo  $CD$ .
- D.  $IJ$  cắt  $AB$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, BD$ .

$\Rightarrow MN$  là đường trung bình của tam giác  $BCD \Rightarrow MN \parallel CD$  (1)

$I, J$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC$  và  $ABD \Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$  (2)

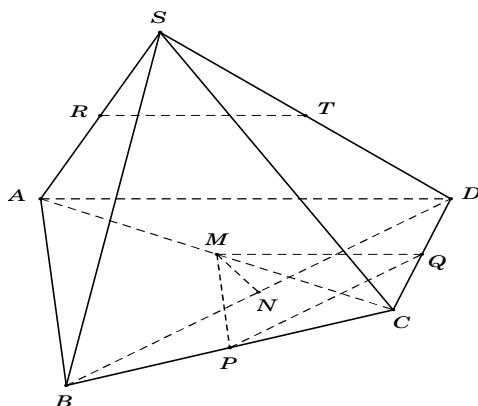
Từ (1) và (2) suy ra:  $IJ \parallel CD$ .

**Câu 12:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AD$  không song song với  $BC$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, T$  lần lượt là trung điểm  $AC, BD, BC, CD, SA, SD$ . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

- A.  $MP$  và  $RT$ .
- B.  $MQ$  và  $RT$ .
- C.  $MN$  và  $RT$ .
- D.  $PQ$  và  $RT$ .

Lời giải

Chọn B



Ta có:  $M, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AC, CD$

$\Rightarrow MQ$  là đường trung bình của tam giác  $CAD \Rightarrow MQ \parallel AD$  (1)

Ta có:  $R, T$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SD$

$\Rightarrow RT$  là đường trung bình của tam giác  $SAD \Rightarrow RT \parallel AD$  (2)

Từ (1),(2) suy ra:  $MQ \parallel RT$ .

**Câu 13:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $I, J, E, F$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB, SC, SD$ . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với  $IJ$ ?

A.  $EF$ .

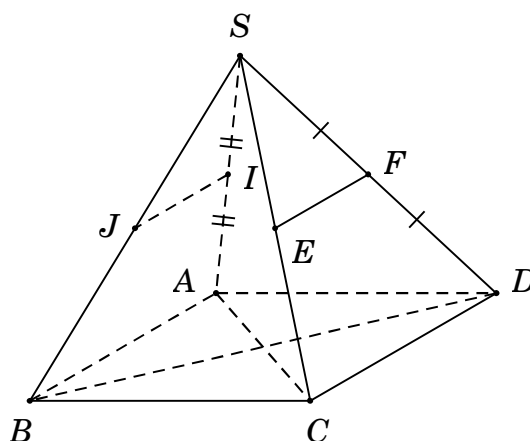
B.  $DC$ .

C.  $AD$ .

D.  $AB$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có  $IJ \parallel AB$  (tính chất đường trung bình trong tam giác  $SAB$ ) và  $EF \parallel CD$  (tính chất đường trung bình trong tam giác  $SCD$ ).

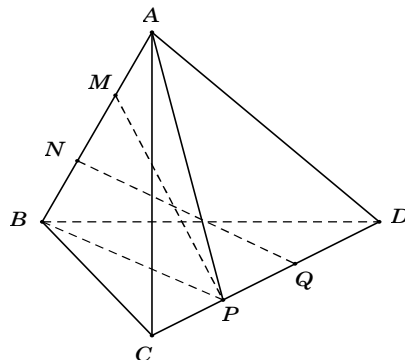
Mà  $CD \parallel AB$  (đáy là hình bình hành)  $\longrightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$ .

**Câu 14:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng  $AB$ ;  $P, Q$  là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng  $CD$ . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng  $MP, NQ$ .

- A.  $MP \parallel NQ$ .                      B.  $MP \equiv NQ$ .  
C.  $MP$  cắt  $NQ$ .                      D.  $MP, NQ$  chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Xét mặt phẳng  $(ABP)$ .

Ta có:  $M, N$  thuộc  $AB \Rightarrow M, N$  thuộc mặt phẳng  $(ABP)$ .

Mặt khác:  $CD \cap (ABP) = P$ .

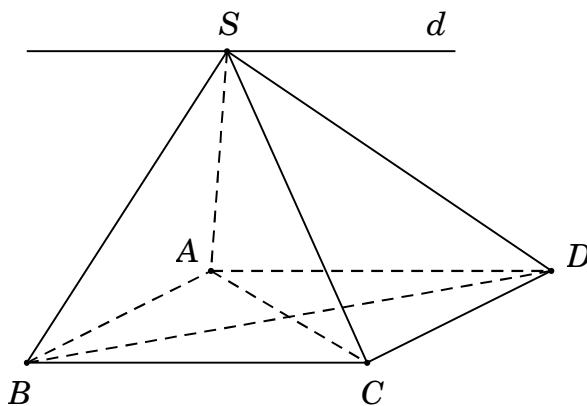
Mà:  $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M, N, P, Q$  không đồng phẳng.

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $d$  qua  $S$  và song song với  $BC$ .                      B.  $d$  qua  $S$  và song song với  $DC$ .  
C.  $d$  qua  $S$  và song song với  $AB$ .                      D.  $d$  qua  $S$  và song song với  $BD$ .

Lời giải

Chọn A

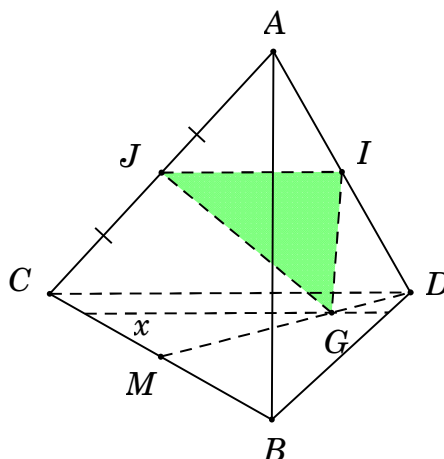


$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = S \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \longrightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC \quad (\text{với } d \equiv Sx).$$

- Câu 16:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  theo thứ tự là trung điểm của  $AD$  và  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(GIJ)$  và  $(BCD)$  là đường thẳng:
- A. qua  $I$  và song song với  $AB$ .                      B. qua  $J$  và song song với  $BD$ .  
C. qua  $G$  và song song với  $CD$ .                      D. qua  $G$  và song song với  $BC$ .

Lời giải

Chọn C

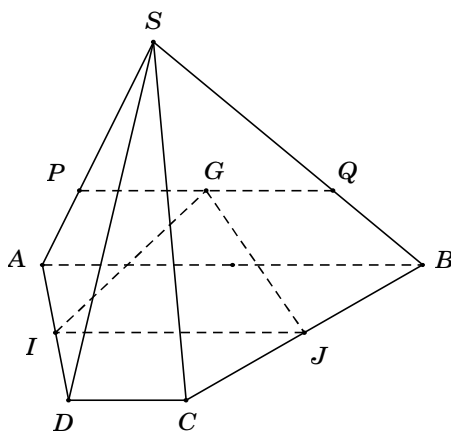


$$\text{Ta có } \begin{cases} (GIJ) \cap (BCD) = G \\ IJ \subset (GIJ), CD \subset (BCD) \\ IJ \parallel CD \end{cases} \longrightarrow (GIJ) \cap (BCD) = Gx \parallel IJ \parallel CD.$$

- Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang với các cạnh đáy là  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAB$ . Giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(IJG)$  là
- A.  $SC$ .  
B. đường thẳng qua  $S$  và song song với  $AB$ .  
C. đường thẳng qua  $G$  và song song với  $DC$ .  
D. đường thẳng qua  $G$  và cắt  $BC$ .

Lời giải

Chọn C



Ta có:  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$

$\Rightarrow IJ$  là đường trung bình của hình thang  $ABCD \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD$ .

Gọi  $d = (SAB) \cap (IJG)$

Ta có:  $G$  là điểm chung giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(IJG)$

Mặt khác:  $\begin{cases} (SAB) \supset AB; (IJG) \supset IJ \\ AB \parallel IJ \end{cases}$

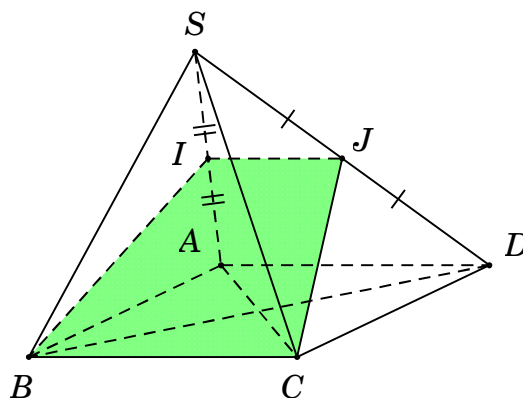
$\Rightarrow$  Giao tuyến  $d$  của  $(SAB)$  và  $(IJG)$  là đường thẳng qua  $G$  và song song với  $AB$  và  $IJ$ .

**Câu 18:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $I$  là trung điểm  $SA$ . Thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(IBC)$  là:

- A. Tam giác  $IBC$ .
- B. Hình thang  $IBCJ$  ( $J$  là trung điểm  $SD$ ).
- C. Hình thang  $IGBC$  ( $G$  là trung điểm  $SB$ ).
- D. Tứ giác  $IBCD$ .

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \begin{cases} (IBC) \cap (SAD) = I \\ BC \subset (IBC), AD \subset (SAD) \longrightarrow (IBC) \cap (SAD) = Ix \parallel BC \parallel AD \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

Trong mặt phẳng  $(SAD)$ :  $Ix \parallel AD$ , gọi  $Ix \cap SD = J \longrightarrow IJ \parallel BC$

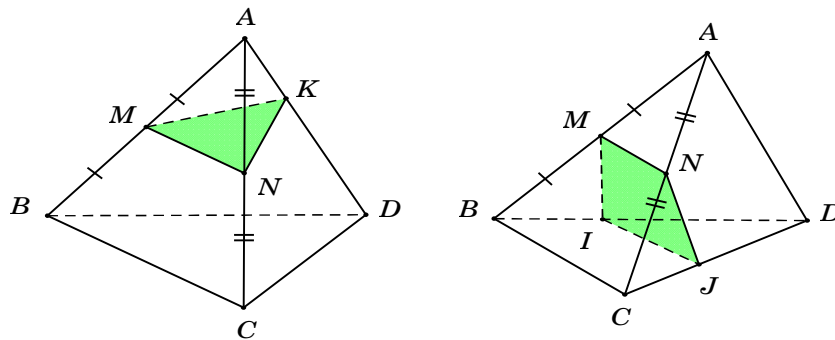
Vậy thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(IBC)$  là hình thang  $IBCI$ .

**Câu 19:** Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm  $AB$  và  $AC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  cắt tứ diện  $ABCD$  theo thiết diện là đa giác  $(T)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $(T)$  là hình chữ nhật.
- B.  $(T)$  là tam giác.
- C.  $(T)$  là hình thoi.
- D.  $(T)$  là tam giác; hình thang hoặc hình bình hành.

**Lời giải**

**Chọn D**



Trường hợp  $(\alpha) \cap AD = K$

$\longrightarrow (T)$  là tam giác  $MNK$ . Do đó A và C sai.

Trường hợp  $(\alpha) \cap (BCD) = IJ$ , với  $I \in BD, J \in CD$ ;  $I, J$  không trùng  $D$ .

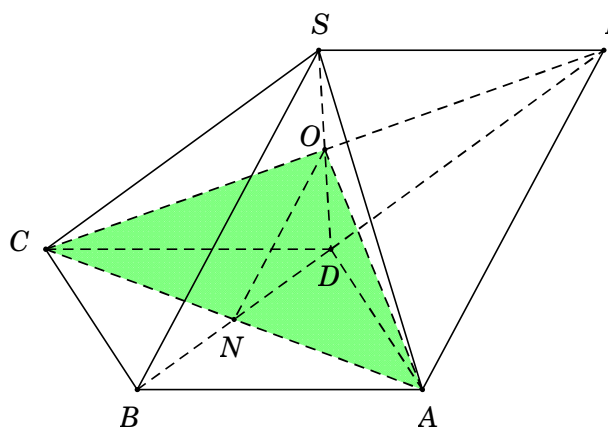
$\longrightarrow (T)$  là tứ giác. Do đó B đúng.

**Câu 20:** Cho hai hình vuông  $ABCD$  và  $CDIS$  không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác  $SAC$  cân tại  $S$ ,  $SB = 8$ . Thiết diện của mặt phẳng  $(ACI)$  và hình chóp  $S.ABCD$  có diện tích bằng:

- A.  $6\sqrt{2}$ .
- B.  $8\sqrt{2}$ .
- C.  $10\sqrt{2}$ .
- D.  $9\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $O = SD \cap CI$ ;  $N = AC \cap BD$ .

$\Rightarrow O, N$  lần lượt là trung điểm của  $DS, DB \Rightarrow ON = \frac{1}{2}SB = 4$ .

Thiết diện của  $mp(ACI)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là tam giác  $\triangle OCA$ .

Tam giác  $\triangle SAC$  cân tại  $S \Rightarrow SC = SA \Rightarrow \triangle SDC = \triangle SDA$

$\Rightarrow CO = AO$  (cùng là đường trung tuyến của 2 định tương ứng)  $\Rightarrow \triangle OCA$  cân tại  $O$

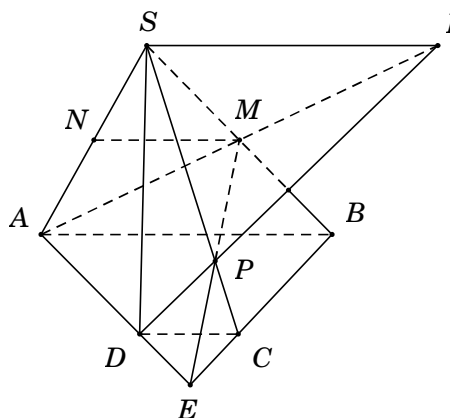
$\Rightarrow S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2}ON.AC = \frac{1}{2}.4.4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ .

**Câu 21:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với đáy lớn  $AB$  đáy nhỏ  $CD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $SB$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $SC$  và  $(AND)$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN$  và  $DP$ . Hỏi tứ giác  $SABI$  là hình gì?

- A.** Hình bình hành.      **B.** Hình chữ nhật.  
**C.** Hình vuông.        **D.** Hình thoi.

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $E = AD \cap BC$ ,  $P = NE \cap SC$ . Suy ra  $P = SC \cap (AND)$ .

Ta có

- $S$  là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ ;
- $I = DP \cap AN \Rightarrow I$  là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

Suy ra  $SI = (SAB) \cap (SCD)$ . Mà  $AB \parallel CD \longrightarrow SI \parallel AB \parallel CD$ .

Vì  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $SAB$  và chứng minh được cũng là đường trung bình của tam giác  $SAI$  nên suy ra  $SI = AB$ .

Vậy  $SABI$  là hình bình hành.

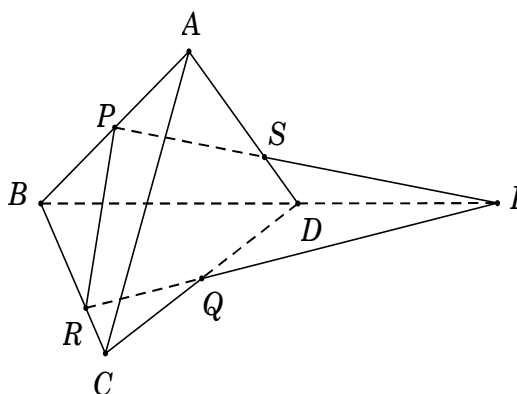
**Câu 22:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Các điểm  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ; điểm  $R$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BR = 2RC$ . Gọi  $S$  là giao điểm của mặt phẳng  $(PQR)$  và cạnh  $AD$ .

Tính tỉ số  $\frac{SA}{SD}$ .

- A. 2.                      B. 1.                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{1}{3}$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi  $I$  là giao điểm của  $BD$  và  $RQ$ . Nối  $P$  với  $I$ , cắt  $AD$  tại  $S$ .

Xét tam giác  $BCD$  bị cắt bởi  $IR$ , ta có  $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}$ .

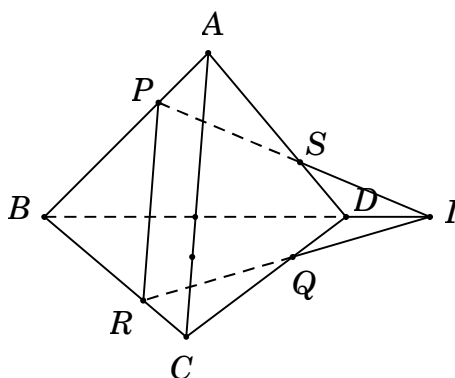
Xét tam giác  $ABD$  bị cắt bởi  $PI$ , ta có  $\frac{AS}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SD} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SD} = 2$ .

**Câu 23:** Cho tứ diện  $ABCD$  và ba điểm  $P, Q, R$  lần lượt lấy trên ba cạnh  $AB, CD, BC$ . Cho  $PR \parallel AC$  và  $CQ = 2QD$ . Gọi giao điểm của  $AD$  và  $(PQR)$  là  $S$ . Chọn khẳng định đúng?

- A.  $AD = 3DS$ .                      B.  $AD = 2DS$ .                      C.  $AS = 3DS$ .                      D.  $AS = DS$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi  $I$  là giao điểm của  $BD$  và  $RQ$ . Nối  $P$  với  $I$ , cắt  $AD$  tại  $S$ .

Ta có  $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1$  mà  $\frac{CQ}{QD} = 2$  suy ra  $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{RC}{BR}$ .

Vì  $PR$  song song với  $AC$  suy ra  $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB}$ .

Lại có  $\frac{SA}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} = 2 \longrightarrow AD = 3DS$ .

**Câu 24:** Gọi  $G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $A'$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Tính tỉ số  $\frac{GA}{GA'}$ .

A. 2.

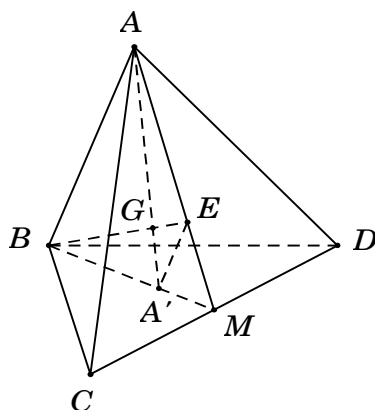
B. 3.

C.  $\frac{1}{3}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $E$  là trọng tâm của tam giác  $ACD$ ,  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

Nối  $BE$  cắt  $AA'$  tại  $G$  suy ra  $G$  là trọng tâm tứ diện.

Xét tam giác  $MAB$ , có  $\frac{ME}{MA} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3}$  suy ra  $A'E \parallel AB \Rightarrow \frac{A'E}{AB} = \frac{1}{3}$ .

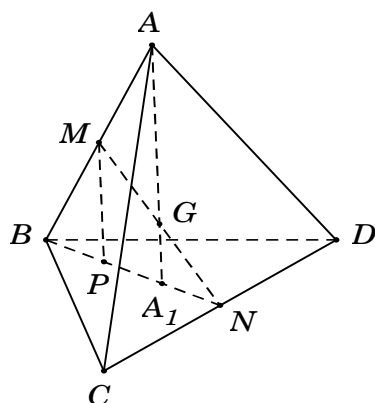
Khi đó, theo định lí Talet suy ra  $\frac{A'E}{AB} = \frac{A'G}{AG} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GA'} = 3$ .

**Câu 25:** Cho tứ diện  $ABCD$  trong đó có tam giác  $BCD$  không cân. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $G$  là trung điểm của đoạn  $MN$ . Gọi  $A_1$  là giao điểm của  $AG$  và  $(BCD)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $A_1$  là tâm đường tròn tam giác  $BCD$ .
- B.  $A_1$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $BCD$ .
- C.  $A_1$  là trực tâm tam giác  $BCD$ .
- D.  $A_1$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ .

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng  $(ABN)$  cắt mặt phẳng  $(BCD)$  theo giao tuyến  $BN$ .

Mà  $AG \subset (ABN)$  suy ra  $AG$  cắt  $BN$  tại điểm  $A_1$ .

Qua  $M$  dựng  $MP \parallel AA_1$  với  $M \in BN$ .

Có  $M$  là trung điểm của  $AB$  suy ra  $P$  là trung điểm  $BA_1 \Rightarrow BP = PA_1$  (1).

Tam giác  $MNP$  có  $MP \parallel GA_1$  và  $G$  là trung điểm của  $MN$ .

$\Rightarrow A_1$  là trung điểm của  $NP \Rightarrow PA_1 = NA_1$  (2).

Từ (1),(2) suy ra  $BP = PA_1 = A_1N \Rightarrow \frac{BA_1}{BN} = \frac{2}{3}$  mà  $N$  là trung điểm của  $CD$ .

Do đó,  $A_1$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ .





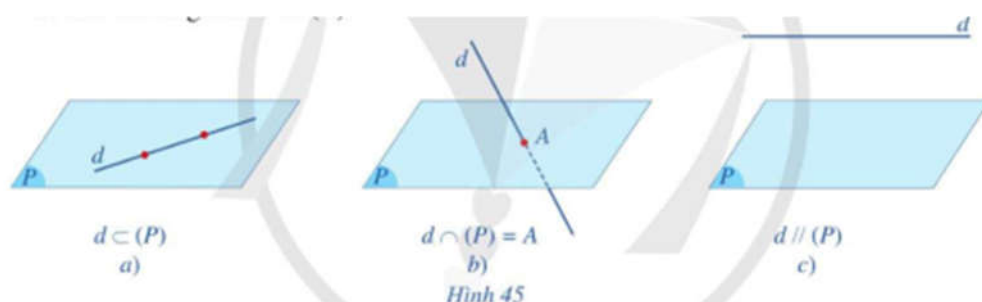
## BÀI 3: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

#### I. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

*Nhận xét:* Có ba khả năng có thể xảy ra đối với số điểm chung của  $d$  và  $(P)$  (Hình 45) là:

- $d$  và  $(P)$  có từ hai điểm trở lên. Khi đó đường thẳng  $d$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  hay  $(P)$  chứa  $d$  và kí hiệu là  $d \subset (P)$  hay  $(P) \supset d$  (Hình 45a).
- $d$  và  $(P)$  có một điểm chung duy nhất  $A$ . Khi đó ta nói  $d$  và  $(P)$  cắt nhau tại điểm  $A$  và kí hiệu là  $d \cap (P) = \{A\}$  hay  $d \cap (P) = A$  (Hình 45b).
- $d$  và  $(P)$  không có điểm chung. Khi đó ta nói  $d$  song song với  $(P)$  hay  $(P)$  song song với  $d$  và kí hiệu là  $d // (P)$  hay  $(P) // d$  (Hình 45c).

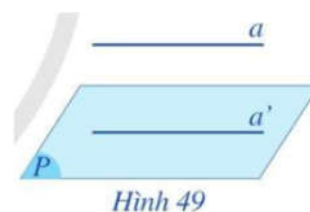


Đường thẳng được gọi là song song với mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung

#### II. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT

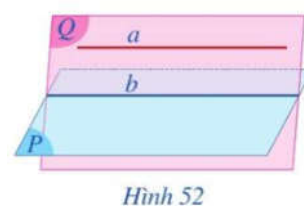
**Định lí 1** (dấu hiệu nhận biết một đường thẳng song song với một mặt phẳng) (Hình 49)

Nếu đường thẳng  $a$  không nằm trong mặt phẳng  $(P)$  và  $a$  song song với đường thẳng  $a'$  nằm trong  $(P)$  thì  $a$  song song với  $(P)$ .



**Định lí 2** (Tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng) (Hình 52):

Cho đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(P)$ . Nếu mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $a$  và cắt  $(P)$  theo giao tuyến  $b$  thì  $b$  song song với  $a$ .



- Trong trường hợp tổng quát, ta có hệ quả của Định lí 2:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

*Chú ý:* Cho hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

### Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy

#### 1. Phương pháp

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Nếu không có sẵn đường thẳng  $b$  trong mặt phẳng  $(P)$  thì ta tìm đường thẳng  $b$  bằng cách chọn một mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $a$  và cắt  $(P)$ , giao tuyến của  $(P)$  và  $(Q)$  chính là đường thẳng  $b$  cần tìm.

#### 2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

**Ví dụ 1.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$ .

- Chứng minh  $OO'$  song song với các mặt phẳng  $(ADF)$  và  $(BCE)$ .
- Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABD$  và  $ABF$ . Chứng minh  $GG' \parallel (DCEF)$ .

**Giải**

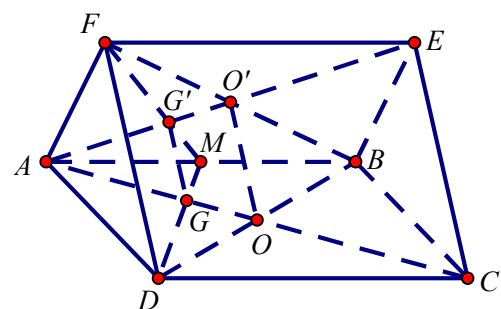
- Ta có  $OO'$  là đường trung bình của tam giác  $ACE$  và tam giác  $BDF$  nên:  $OO' \parallel CE$  và  $OO' \parallel DF$ .  
Mà  $CE \subset (BCE)$ ,  $DF \subset (ADF)$  nên  $OO' \parallel (BCE)$  và  $OO' \parallel (ADF)$ .

- Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta có:

$$\frac{AG}{AO} = \frac{AG'}{AO'} = \frac{2}{3}$$

Vậy  $GG' \parallel OO'$  và  $OO' \parallel CE$  nên  $GG' \parallel CE$ .

Mà  $CE \subset (DCEF)$  nên  $GG' \parallel (DCEF)$ .



**Ví dụ 2.** Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ .  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ .

Chứng minh  $MG \parallel (ACD)$ .

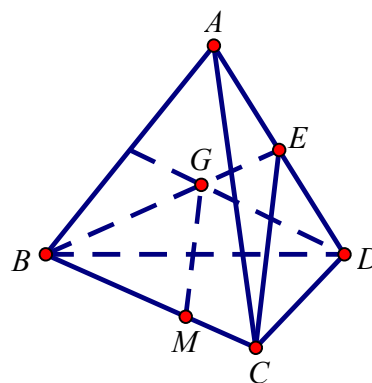
**Giải**

Gọi E là trung điểm của AD. Ta có:  $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$  (do G là trọng tâm của tam giác ABD).

Mà  $\frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$  (do  $MB = 2MC$ ) nên  $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC}$ .

Suy ra  $MG \parallel CE$ .

Mà  $CE \subset (ACD)$  do đó  $MG \parallel (ACD)$ .



**Ví dụ 3.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD. Chứng minh rằng  $MN \parallel (ABD)$  và  $MN \parallel (ACD)$ .

**Giải**

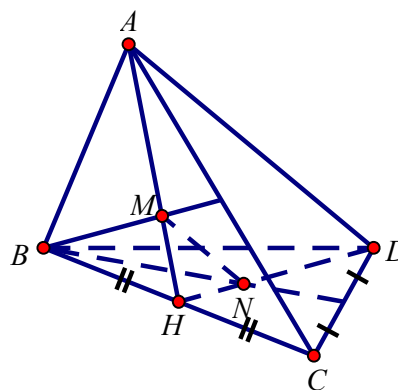
Gọi H là trung điểm của BC, ta có:  $M \in AH, N \in DH$ . Do đó:

$\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3}$  (tính chất trọng tâm tam giác)  $\Rightarrow MN \parallel AD$ .

Như vậy:

$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ABD)$

$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ACD)$



**Ví dụ 4.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC;  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD, cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

**Giải**

Ta có:  $\left. \begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{array} \right\} \Rightarrow MQ \parallel AB \quad (1)$

Tương tự, ta có:  $NP \parallel AB$

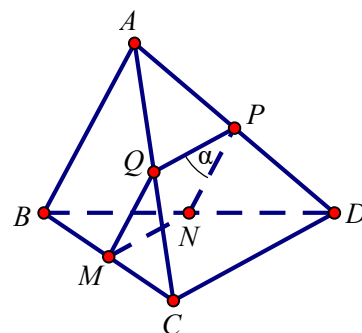
(2)

$$\left. \begin{array}{l} CD \parallel (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel CD \quad (3)$$

Tương tự, ta có:  $MN \parallel CD$  (4)

Từ (1) và (2) suy ra:  $MQ \parallel NP$  (5)

Từ (3) và (4) suy ra:  $PQ \parallel MN$  (6)



Từ (5) và (6) suy ra MNPQ là hình bình hành.

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành; F, G lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Chứng minh rằng FG song song với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB, SC song song với mặt phẳng (FGE).

**Giải**

a. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} FG \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow FG \parallel (SAD)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:  $FG \parallel (SBC)$

b. Gọi  $(EFG) \cap SD = H$ . Ta có:

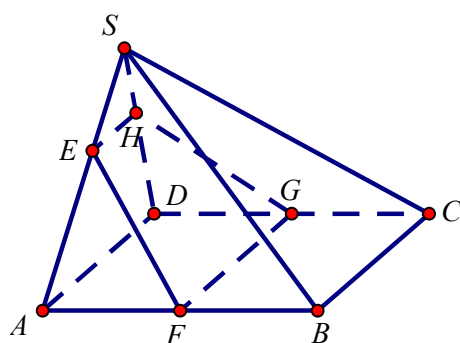
$$\left. \begin{array}{l} (ABCD) \cap (EFG) = FG \\ (ABCD) \cap (SAD) = AD \\ (SAD) \cap (EFG) = EH \\ FG \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow EH \parallel AD \parallel FG$$

Suy ra H là trung điểm của SD.

Như vậy:

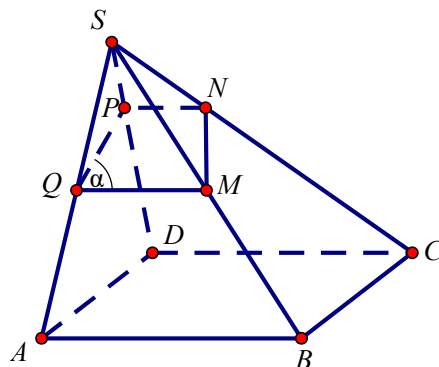
$$\left. \begin{array}{l} GH \parallel SC \text{ (tính chất đường trung bình)} \\ HG \subset (EFG) \end{array} \right\} \Rightarrow SC \parallel (EFG).$$

Tương tự, ta có:  $SB \parallel (EFG)$ .



**Ví dụ 6.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh SB, song song với cạnh AB, cắt các cạnh SA, SD, SC lần lượt tại Q, P và N. Hãy xác định hình tính của tứ giác MNPQ?

**Lời giải**



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ M \in (\alpha) \cap (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel AB \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\left. \begin{array}{l} DC \parallel AB \Rightarrow DC \parallel QM^{(1)} \\ QM \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow DC \parallel (\alpha)$$

Như vậy:

$$\left. \begin{array}{l} DC \parallel (\alpha) \\ PN = (\alpha) \cap (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PN \parallel DC \quad (2)$$

Từ (\*) và (2) suy ra MNPQ là hình bình thang.

**Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng**

### 1. Phương pháp

Ngoài hai cách đã đề cập ở Bài 1 và Bài 2 ta có hai cách sau để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cách 1. Dùng định lí 2.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Cách 2. Dùng hệ quả 2.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Tìm thiết diện là tìm các đoạn giao tuyến theo phương pháp tìm giao tuyến được nêu ở trên, cho đến khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

## 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

- Chứng minh  $MN \parallel (SBC)$ ,  $SB \parallel (OMN)$ ,  $SC \parallel (OMN)$ .
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN). Thiết diện là hình gì?

**Giải**

a. Ta có  $MN \parallel AD$  (MN là đường trung bình của tam giác SAD) và  $AD \parallel BC$  (tứ giác ABCD là hình bình hành), suy ra  $MN \parallel BC$ .

Mà  $BC \subset (SBC)$  nên  $MN \parallel (SBC)$ .

Ta có:  $ON \parallel SB$  (ON là đường trung bình của tam giác SBD) nên  $ON \subset (OMN)$ .

Do đó:  $SB \parallel (OMN)$ .

Ta có  $OM \parallel SC$  (OM là đường trung bình của  $\Delta SAC$ ) và  $OM \subset (OMN)$ .

Vậy  $SC \parallel (OMN)$ .

b. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Từ đó có:  $PQ \parallel AD$ , suy ra  $PQ \parallel MN$ .

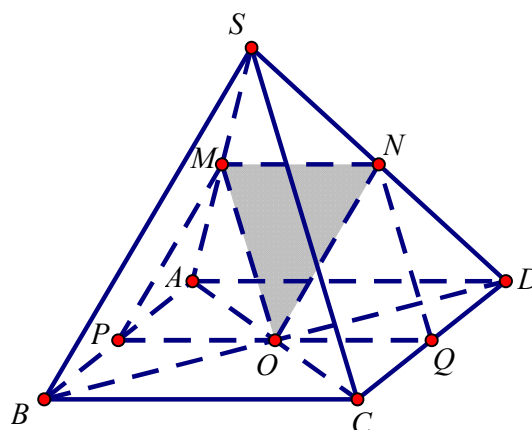
Vậy MN và PQ đồng phẳng, nghĩa là  $(OMN) \equiv (MNPQ)$ .

Ta có thiết diện do mp(OMN) cắt hình chóp là hình thang MNPQ ( $MN \parallel PQ$ ).

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với AB và CD.

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD).
- Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

**Giải**



a. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (P) \cap (ICD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ICD) = Mx \parallel CD.$$

Trong mp(ICD) ta có Mx cắt IC tại E và cắt ID tại F.

Suy ra  $EF = (P) \cap (ICD)$ .

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ E \in (P) \cap (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = Ey \parallel AB.$$

Trong mp(ABC) ta có Ey cắt BC tại P và cắt AC tại S.

Suy ra  $PS = (P) \cap (ABC)$ .

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ F \in (P) \cap (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABD) = Ft \parallel AB.$$

Trong mp(ABD) ta có Ft cắt BD tại Q và cắt AD tại R.

Suy ra  $QR = (P) \cap (ABD)$ .

Khi đó:  $PQ = (P) \cap (CBD)$  và  $RS = (P) \cap (ACD)$ .

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác PQRS.

Theo chứng minh trên ta có thể suy ra được:  $PS \parallel AB, QR \parallel AB$  nên  $PS \parallel QR$ .

(1)

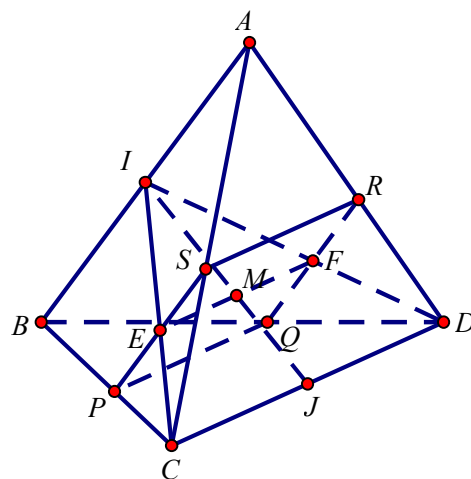
Mặt khác, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ RS = (P) \cap (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel CD$$

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ PQ = (P) \cap (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel CD$$

$$\left. \begin{array}{l} RS \parallel CD \\ PQ \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel PQ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện PQRS là hình bình hành.



**Ví dụ 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm bất kì trên  $SB, CD$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $MN$  và song song với  $SC$ .

- Tìm các giao tuyến của  $(P)$  với các mặt phẳng  $(SBC), (SCD), (SAC)$ .
- Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(P)$ .

**Lời giải**

a) Trong mặt phẳng  $(SBC)$ , từ  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $SC$  cắt  $BC$  tại  $Q$ .

Trong mặt phẳng  $(SCD)$ , từ  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $SC$  cắt  $SD$  tại  $P$ .

Khi đó giao tuyến của  $(P)$  với  $(SBC)$  và  $(SCD)$  lần lượt là  $MQ$  và  $NP$ .

Gọi  $I = AC \cap NQ$ . Từ  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $SC$  cắt  $SA$  tại  $H$ .

Khi đó  $(P) \cap (SAC) = IH$ .

b) Thiết diện của mặt phẳng  $(P)$  với khối chóp là ngũ giác  $MQNPH$ .

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC$ ,  $H, K$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $SAC, SBC$ .

- Chứng minh  $AB \parallel (SMN), HK \parallel (SAB)$ .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(CHK)$  và  $(ABC)$ .
- Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $MN$  và  $(P) \parallel SC$ . Thiết diện là hình gì?

**Lời giải**

a) Dễ thấy  $MN$  là đường trung bình trong tam giác  $SAB$  do đó  $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel (SMN)$

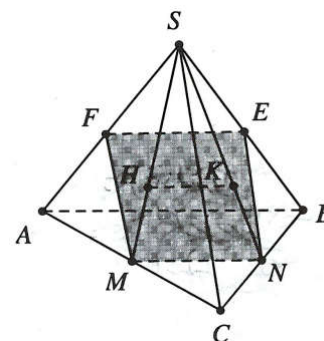
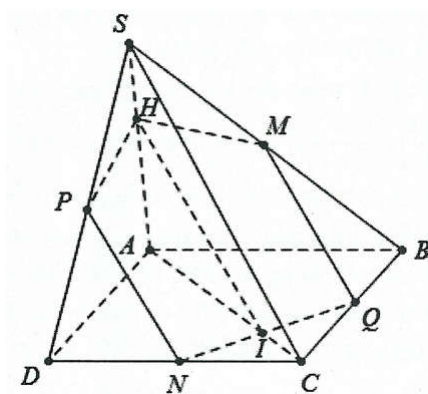
$H, K$  là trọng tâm của tam giác  $SAC, SBC$  suy ra

$$\frac{SH}{SM} = \frac{SK}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK \parallel MN \parallel AB \Rightarrow HK \parallel (SAB).$$

b) Do  $HK \parallel AB$  nên giao tuyến của  $(CAB)$  và  $(CHK)$  là đường thẳng qua  $C$  và song song với  $HK$  và  $AB$ .

c) Qua  $M$  dựng  $MF \parallel SC$  ( $F \in SA$ ) thì  $MF$  là đường trung bình trong tam giác  $SCA \Rightarrow F$  là trung điểm của  $SA$ .

Tương tự dựng  $NE \parallel SC$  ( $E \in SB$ ) thì  $E$  là trung điểm của  $SB$ .



Khi đó thiết diện là hình bình hành  $MNEF$  vì có  $MN // EF$ ,  $MN = EF = \frac{AB}{2}$ .

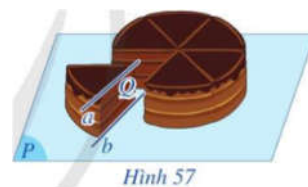
### C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

**Bài 1.** Trong phòng học của lớp, hãy nêu những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng.

#### Lời giải

Những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng: mép cột dọc với bảng; xà ngang trần nhà với mặt sàn; ...

**Bài 2.** Trong Hình 57, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gọi nên hình ảnh mặt phẳng  $(Q)$  và mặt phẳng  $(P)$ ; mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng  $a$  và  $b$  trong đó  $a$  song song với mặt phẳng  $(P)$ . Cho biết hai đường thẳng  $a, b$  có song song với nhau hay không.

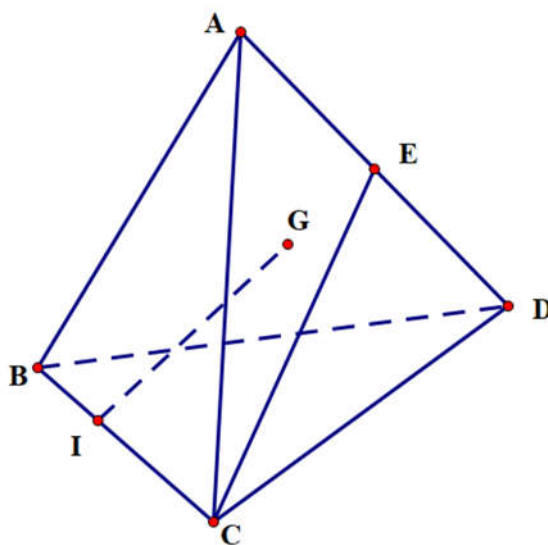


#### Lời giải

Hai đường thẳng  $a, b$  có song song với nhau vì  $a$  song song với  $(P)$  mà  $(Q)$  cắt  $(P)$  tại giao tuyến  $b$ .

**Bài 3.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ , điểm  $I$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BI = 2IC$ . Chứng minh rằng  $IG$  song song với mặt phẳng  $(ACD)$ .

#### Lời giải



$\triangle BCE$  có:  $E$  là trung điểm  $AD$

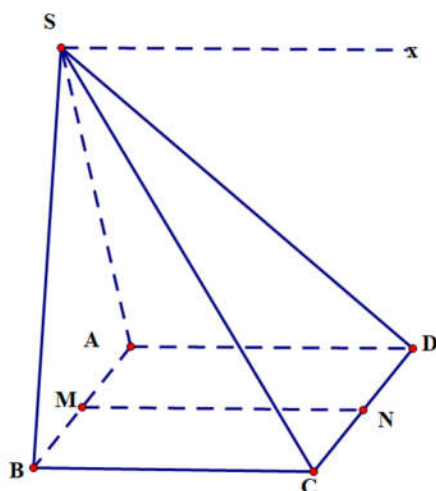
Suy ra:  $\frac{BG}{BE} = \frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$

Do đó:  $IG // CE$  mà  $CE$  thuộc  $(ACD)$

Suy ra:  $IG // (ACD)$ .

**Bài 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $MN$  song song với giao tuyến  $d$  của hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SAD)$ .

#### Lời giải



Ta có:  $Sx$  là giao tuyến  $(SAD)$  và  $(SBC)$  sao cho  $Sx // AD // BC$  (1)

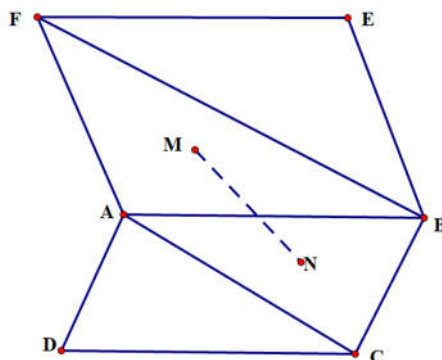
Có:  $M, N$  là trung điểm của  $AB, CD$

Suy ra:  $MN // AD // BC$  (2)

Từ (1)(2) suy ra:  $MN // Sx$ .

**Bài 5.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi  $M, N$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ABF$  và  $ABC$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $MN$  song song với mặt phẳng  $(ACF)$ .

Lời giải



Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$

$\Delta ABF$  có:  $M$  là trọng tâm nên  $\frac{IM}{IF} = \frac{1}{3}$  (1)

$\Delta ABC$  có:  $N$  là trọng tâm nên  $\frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$  (2)

(1)(2) suy ra  $\Delta ICF$  có:  $\frac{IM}{IF} = \frac{IN}{IC}$

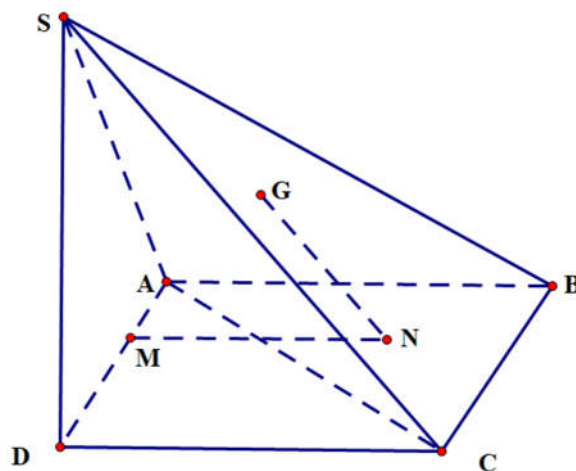
Suy ra:  $MN // CF$  mà  $CF$  thuộc  $(ACF)$  nên  $MN // (ACF)$ .

**Bài 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $AD$  sao cho  $AD = 3AM$ . Gọi  $G, N$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $SAB, ABC$ .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

b) Chứng minh rằng  $MN$  song song với mặt phẳng  $(SCD)$  và  $NG$  song song với mặt phẳng  $(SAC)$ .

Lời giải



a)  $S$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  mà  $AB // CD$

Từ  $S$  kẻ  $Sx$  sao cho  $Sx // AB // CD$  nên  $Sx$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

b) Gọi  $I, K$  là trung điểm của  $BC, AC$  mà hai đường chéo của hình bình tại trung điểm mỗi đường

Suy ra  $K$  là trung điểm của  $BD$

$$\Delta DAB \text{ có: } \frac{DN}{DB} = \frac{DK + KN}{DB} = \frac{\frac{1}{2}DB + \frac{1}{6}DB}{DB} = \frac{2}{3} = \frac{DM}{DA}.$$

Suy ra:  $MN // AB$ . mà  $AB // CD$ .

Do đó:  $MN // CD$ . nên  $MN // (SCD)$ .

Gọi  $E$  là trung điểm của  $AB$

$G$  là trọng tâm  $\Delta SAB$ . nên  $\frac{EG}{SE} = \frac{1}{3}$

$N$  là trọng tâm  $\Delta ABC$  nên  $\frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$

$\Delta ESC$  có:  $\frac{EG}{SE} = \frac{EN}{EC}$ . suy ra  $GN // SC$  mà  $SC$  thuộc  $(SAC)$ . Do đó:  $GN // (SAC)$ .

## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Cho đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$  trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của  $a$  và  $(P)$ ?

A. 2.

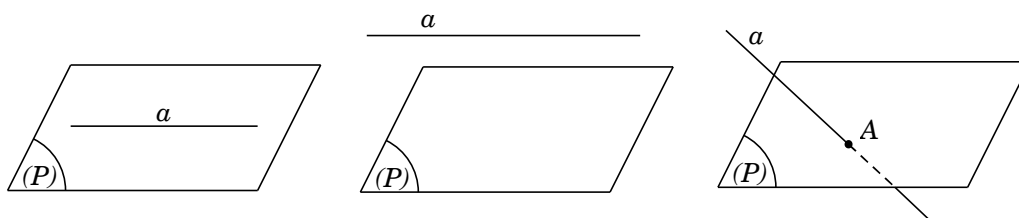
B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B



Có 3 vị trí tương đối của  $a$  và  $(P)$ , đó là:  $a$  nằm trong  $(P)$ ,  $a$  song song với  $(P)$  và  $a$  cắt  $(P)$ .

**Câu 2:** Cho hai đường thẳng phân biệt  $a, b$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ . Giả sử  $a \parallel b$ ,  $b \parallel (\alpha)$ . Khi đó:

- A.  $a \parallel (\alpha)$ .                      B.  $a \subset (\alpha)$ .  
C.  $a$  cắt  $(\alpha)$ .                      D.  $a \parallel (\alpha)$  hoặc  $a \subset (\alpha)$ .

**Lời giải**

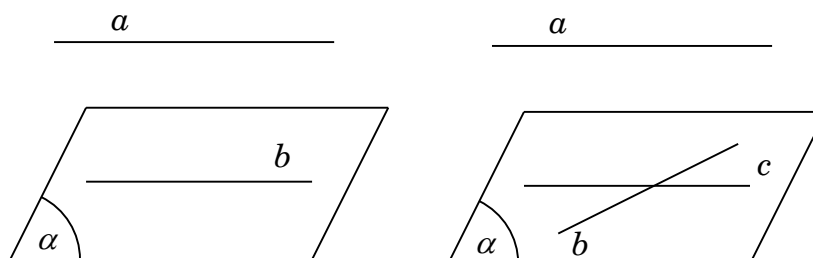
**Chọn D**

**Câu 3:** Cho hai đường thẳng phân biệt  $a, b$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ . Giả sử  $a \parallel (\alpha)$ ,  $b \subset (\alpha)$ . Khi đó:

- A.  $a \parallel b$ .                      B.  $a, b$  chéo nhau.  
C.  $a \parallel b$  hoặc  $a, b$  chéo nhau.                      D.  $a, b$  cắt nhau.

**Lời giải**

**Chọn C**



Vì  $a \parallel (\alpha)$  nên tồn tại đường thẳng  $c \subset (\alpha)$  thỏa mãn  $a \parallel c$ . Suy ra  $b, c$  đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

- Nếu  $b$  song song hoặc trùng với  $c$  thì  $a \parallel b$ .
- Nếu  $b$  cắt  $c$  thì  $b$  cắt  $(\beta) \equiv (a, c)$  nên  $a, b$  không đồng phẳng. Do đó  $a, b$  chéo nhau.

**Câu 4:** Cho đường thẳng  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ . Giả sử  $b \not\subset (\alpha)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu  $b \parallel (\alpha)$  thì  $b \parallel a$ .  
B. Nếu  $b$  cắt  $(\alpha)$  thì  $b$  cắt  $a$ .  
C. Nếu  $b \parallel a$  thì  $b \parallel (\alpha)$ .

D. Nếu  $b$  cắt  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  chứa  $b$  thì giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là đường thẳng cắt cả  $a$  và  $b$ .

Lời giải

Chọn C

- A sai. Nếu  $b \parallel (\alpha)$  thì  $b \parallel a$  hoặc  $a, b$  chéo nhau.
- B sai. Nếu  $b$  cắt  $(\alpha)$  thì  $b$  cắt  $a$  hoặc  $a, b$  chéo nhau.
- D sai. Nếu  $b$  cắt  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  chứa  $b$  thì giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là đường thẳng cắt  $a$  hoặc song song với  $a$ .

**Câu 5:** Cho hai đường thẳng phân biệt  $a, b$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ . Giả sử  $a \parallel (\alpha)$  và  $b \parallel (\alpha)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a$  và  $b$  không có điểm chung.
- B.  $a$  và  $b$  hoặc song song hoặc chéo nhau.
- C.  $a$  và  $b$  hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
- D.  $a$  và  $b$  chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

**Câu 6:** Cho mặt phẳng  $(P)$  và hai đường thẳng song song  $a$  và  $b$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Nếu  $(P)$  song song với  $a$  thì  $(P)$  cũng song song với  $b$ .
- B. Nếu  $(P)$  cắt  $a$  thì  $(P)$  cũng cắt  $b$ .
- C. Nếu  $(P)$  chứa  $a$  thì  $(P)$  cũng chứa  $b$ .
- D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn B

Gọi  $(Q) \equiv (a, b)$ .

- A sai. Khi  $b = (P) \cap (Q) \Rightarrow b \subset (P)$ .
- C sai. Khi  $(P) \neq (Q) \Rightarrow b \parallel (P)$ .
- Xét khẳng định B, giả sử  $(P)$  không cắt  $b$  khi đó  $b \subset (P)$  hoặc  $b \parallel (P)$ . Khi đó, vì  $b \parallel a$  nên  $a \subset (P)$  hoặc  $a$  cắt  $(P)$  (mâu thuẫn với giả thiết  $(P)$  cắt  $a$ ).

Vậy khẳng định B đúng.

**Câu 7:** Cho  $d \parallel (\alpha)$ , mặt phẳng  $(\beta)$  qua  $d$  cắt  $(\alpha)$  theo giao tuyến  $d'$ . Khi đó:

- A.  $d \parallel d'$ .      B.  $d$  cắt  $d'$ .      C.  $d$  và  $d'$  chéo nhau.      D.  $d \equiv d'$ .

Lời giải

Chọn A

Ta có:  $d' = (\alpha) \cap (\beta)$ . Do  $d$  và  $d'$  cùng thuộc  $(\beta)$  nên  $d$  cắt  $d'$  hoặc  $d \parallel d'$ .

Nếu  $d$  cắt  $d'$ . Khi đó,  $d$  cắt  $(\alpha)$  (mâu thuẫn với giả thiết).

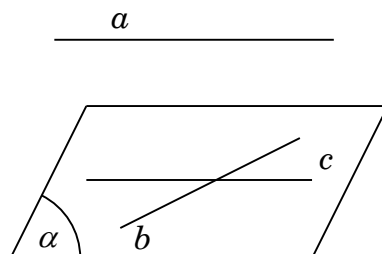
Vậy  $d \parallel d'$ .

**Câu 8:** Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. Vô số.

Lời giải

Chọn D



Gọi  $a$  và  $b$  là 2 đường thẳng chéo nhau,  $c$  là đường thẳng song song với  $a$  và cắt  $b$ .

Gọi  $(\alpha) \equiv (b, c)$ . Do  $a \parallel c \Rightarrow a \parallel (\alpha)$ .

Giả sử  $(\beta) \parallel (\alpha)$ . Mà  $b \in (\alpha) \Rightarrow b \parallel (\beta)$ .

Mặt khác,  $a \parallel (\alpha) \Rightarrow a \parallel (\beta)$ .

Có vô số mặt phẳng  $(\beta) \parallel (\alpha)$ . Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

**Câu 9:** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với  $a$  và  $b$ .  
 B. Có duy nhất một mặt phẳng qua  $a$  và song song với  $b$ .  
 C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm  $M$ , song song với  $a$  và  $b$  (với  $M$  là điểm cho trước).  
 D. Có vô số đường thẳng song song với  $a$  và cắt  $b$ .

Lời giải

Chọn A

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

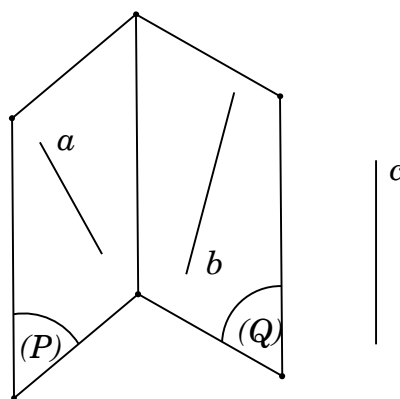
Do đó A sai.

**Câu 10:** Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau  $a, b, c$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $a$ ,  $(Q)$  là mặt phẳng qua  $b$  sao cho giao tuyến của  $(P)$  và  $(Q)$  song song với  $c$ . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Một mặt phẳng  $(P)$ , một mặt phẳng  $(Q)$ .
- B. Một mặt phẳng  $(P)$ , vô số mặt phẳng  $(Q)$ .
- C. Một mặt phẳng  $(Q)$ , vô số mặt phẳng  $(P)$ .
- D. Vô số mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Vì  $c$  song song với giao tuyến của  $(P)$  và  $(Q)$  nên  $c \parallel (P)$  và  $c \parallel (Q)$ .

Khi đó,  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $a$  và song song với  $c$ , mà  $a$  và  $c$  chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $b$  và song song với  $c$ .

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng  $(P)$  và một mặt phẳng  $(Q)$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 11:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $SC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $MN \parallel mp(ABCD)$ .
- B.  $MN \parallel mp(SAB)$ .
- C.  $MN \parallel mp(SCD)$ .
- D.  $MN \parallel mp(SBC)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét tam giác  $SAC$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SC$ .

Suy ra  $MN \parallel AC$  mà  $AC \subset (ABCD) \longrightarrow MN \parallel mp(ABCD)$ .

**Câu 12:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành,  $M$  và  $N$  là hai điểm trên  $SA, SB$  sao cho  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$ . Vị trí tương đối giữa  $MN$  và  $(ABCD)$  là:

- A.  $MN$  nằm trên  $mp(ABCD)$ .                      B.  $MN$  cắt  $mp(ABCD)$ .  
C.  $MN$  song song  $mp(ABCD)$ .                      D.  $MN$  và  $mp(ABCD)$  chéo nhau.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo định lí Talet, ta có  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$  suy ra  $MN$  song song với  $AB$ .

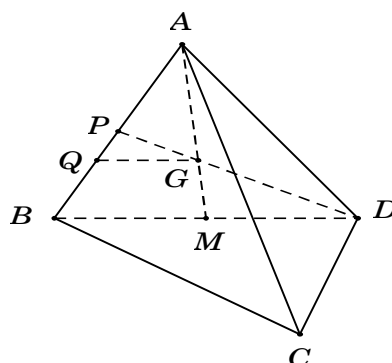
Mà  $AB$  nằm trong mặt phẳng  $(ABCD)$  suy ra  $MN // (ABCD)$ .

**Câu 13:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ ,  $Q$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $AQ = 2QB$ ,  $P$  là trung điểm của  $AB$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $MN // (BCD)$ .                      B.  $GQ // (BCD)$ .  
C.  $MN$  cắt  $(BCD)$ .                      D.  $Q$  thuộc mặt phẳng  $(CDP)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $BD$ .

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABD \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ .

Điểm  $Q \in AB$  sao cho  $AQ = 2QB \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$ . Suy ra  $\frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} \longrightarrow GQ // BD$ .

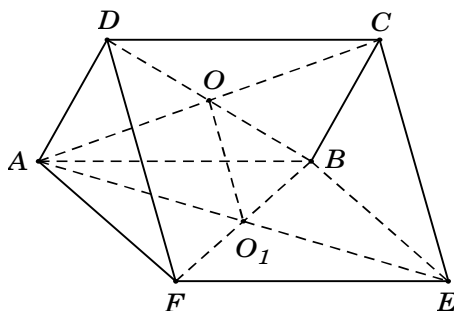
Mặt khác  $BD$  nằm trong mặt phẳng  $(BCD)$  suy ra  $GQ // (BCD)$ .

**Câu 14:** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi  $O, O_1$  lần lượt là tâm của  $ABCD, ABEF$ .  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $OO_1 // (BEC)$ .                      B.  $OO_1 // (AFD)$ .  
C.  $OO_1 // (EFM)$ .                      D.  $MO_1$  cắt  $(BEC)$ .

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác  $ACE$  có  $O, O_1$  lần lượt là trung điểm của  $AC, AE$ .

Suy ra  $OO_1$  là đường trung bình trong tam giác  $ACE \Rightarrow OO_1 \parallel EC$ .

Tương tự,  $OO_1$  là đường trung bình của tam giác  $BFD$  nên  $OO_1 \parallel FD$ .

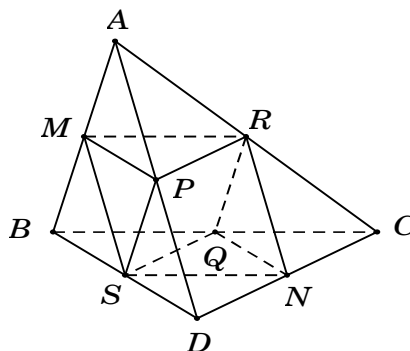
Vậy  $OO_1 \parallel (BEC), OO_1 \parallel (AFD)$  và  $OO_1 \parallel (EFC)$ . Chú ý rằng:  $(EFC) = (EFM)$ .

**Câu 15:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $AC, BD, AB, CD, AD, BC$ . Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

- A.  $P, Q, R, S$ .      B.  $M, P, R, S$ .      C.  $M, R, S, N$ .      D.  $M, N, P, Q$ .

Lời giải

Chọn C



Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS \parallel AC \parallel QR$  suy ra  $P, Q, R, S$  đồng phẳng

Tương tự, ta có được  $PM \parallel BC \parallel NQ$  suy ra  $P, M, N, Q$  đồng phẳng.

Và  $NR \parallel CD \parallel SN$  suy ra  $M, R, S, N$  đồng phẳng.

**Câu 16:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $H$  là một điểm nằm trong tam giác  $ABC$ ,  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $H$  song song với  $AB$  và  $CD$ . Mệnh đề nào sau đây đúng về thiết diện của  $(\alpha)$  của tứ diện?

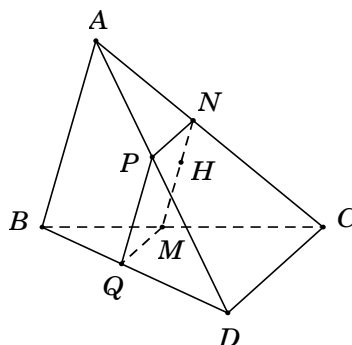
- A. Thiết diện là hình vuông.      B. Thiết diện là hình thang cân.

C. Thiết diện là hình bình hành.

D. Thiết diện là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn C



Qua  $H$  kẻ đường thẳng  $(d)$  song song  $AB$  và cắt  $BC, AC$  lần lượt tại  $M, N$ .

Từ  $N$  kẻ  $NP$  song song với  $CD$  ( $P \in CD$ ). Từ  $P$  kẻ  $PQ$  song song với  $AB$  ( $Q \in BD$ ).

Ta có  $MN \parallel PQ \parallel AB$  suy ra  $M, N, P, Q$  đồng phẳng và  $AB \parallel (MNPQ)$ .

Suy ra  $MNPQ$  là thiết diện của  $(\alpha)$  và tứ diện.

Vậy thiết diện là hình bình hành.

**Câu 17:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng 10.  $M$  là điểm trên  $SA$  sao cho  $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  song song với  $AB$  và  $CD$ , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:

A.  $\frac{400}{9}$ .

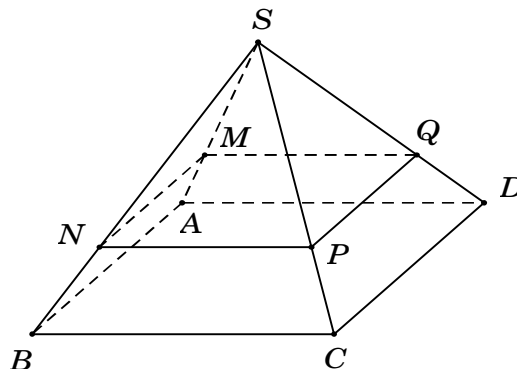
B.  $\frac{20}{3}$ .

C.  $\frac{4}{9}$ .

D.  $\frac{16}{9}$ .

Lời giải

Chọn A



Ta có  $(\alpha) \parallel AB$  và  $CD$  mà  $A, B, C, D$  đồng phẳng suy ra  $(\alpha) \parallel (ABCD)$ .

Giả sử  $(\alpha)$  cắt các mặt bên  $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$  lần lượt tại các điểm  $N, P, Q$  với  $N \in SB, P \in SC, Q \in SD$  suy ra  $(\alpha) \equiv (MNPQ)$ .

Khi đó  $MN \parallel AB \Rightarrow MN$  là đường trung bình tam giác  $SAB \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{2}{3}$ .

Tương tự, ta có được  $\frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} = \frac{2}{3}$  và  $MNPQ$  là hình vuông.

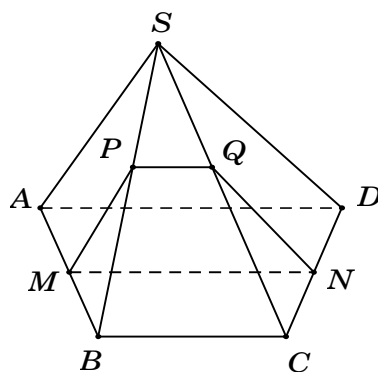
Suy ra  $S_{MNPQ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABCD} = \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{4}{9} \cdot 10 \cdot 10 = \frac{400}{9}$ .

**Câu 18:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình thang cân đáy lớn  $AD$ .  $M, N$  lần lượt là hai trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .  $(P)$  là mặt phẳng qua  $MN$  và cắt mặt bên  $(SBC)$  theo một giao tuyến. Thiết diện của  $(P)$  và hình chóp là

**A.** Hình bình hành.      **B.** Hình thang.      **C.** Hình chữ nhật.      **D.** Hình vuông

**Lời giải**

**Chọn B**



Xét hình thang  $ABCD$ , có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ .

Suy ra  $MN$  là đường trung bình của hình thang  $ABCD \Rightarrow MN \parallel BC$ .

Lấy điểm  $P \in SB$ , qua  $P$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  và cắt  $BC$  tại  $Q$ .

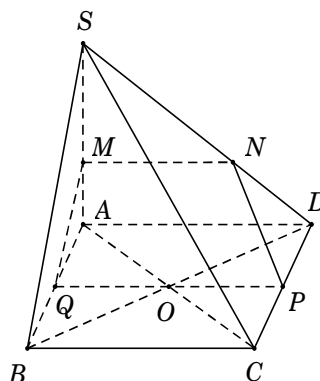
Suy ra  $(P) \cap (SBC) = PQ$  nên thiết diện  $(P)$  và hình chóp là tứ giác  $MNPQ$  có  $MN \parallel PQ \parallel BC$ . Vậy thiết diện là hình thang  $MNPQ$ .

**Câu 19:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc cạnh  $SA$  (không trùng với  $S$  hoặc  $A$ ).  $(P)$  là mặt phẳng qua  $OM$  và song song với  $AD$ . Thiết diện của  $(P)$  và hình chóp là

**A.** Hình bình hành.      **B.** Hình thang.      **C.** Hình chữ nhật.      **D.** Hình tam giác.

**Lời giải**

**Chọn B**



Qua  $M$  kẻ đường thẳng  $MN \parallel AD$  và cắt  $SD$  tại  $N \Rightarrow MN \parallel AD$ .

Qua  $O$  kẻ đường thẳng  $PQ \parallel AD$  và cắt  $AB, CD$  lần lượt tại  $Q, P \Rightarrow PQ \parallel AD$ .

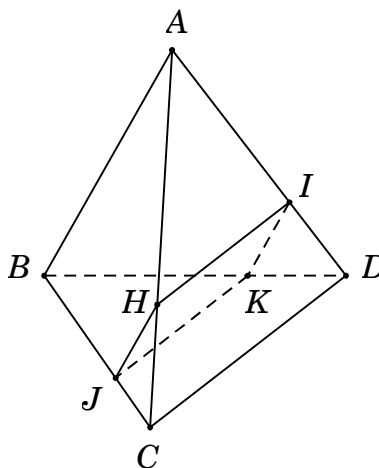
Suy ra  $MN \parallel PQ \parallel AD \longrightarrow M, N, P, Q$  đồng phẳng  $\Rightarrow (P)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là hình thang  $MNPQ$ .

**Câu 20:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt thuộc cạnh  $AD, BC$  sao cho  $IA = 2ID$  và  $JB = 2JC$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $IJ$  và song song với  $AB$ . Thiết diện của  $(P)$  và tứ diện  $ABCD$  là

- A.** Hình thang.      **B.** Hình bình hành.      **C.** Hình tam giác.      **D.** Tam giác đều.

**Lời giải**

**Chọn B**



Giả sử  $(P)$  cắt các mặt của tứ diện  $(ABC)$  và  $(ABD)$  theo hai giao tuyến  $JH$  và  $IK$ .

Ta có  $(P) \cap (ABC) = JH, (P) \cap (ABD) = IK$

$(ABC) \cap (ABD) = AB, (P) \parallel AB \longrightarrow JH \parallel IK \parallel AB$ .

Theo định lí Thalet, ta có  $\frac{JB}{JC} = \frac{HA}{HC} = 2$  suy ra  $\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow IH \parallel CD$ .

Mà  $IH \in (P)$  suy ra  $IH$  song song với mặt phẳng  $(P)$ .

Vậy  $(P)$  cắt các mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $(ABD)$  theo các giao tuyến  $IH, JK$  với  $IH // JK$ .

Do đó, thiết diện của  $(P)$  và tứ diện  $ABCD$  là hình bình hành.

## BÀI 4: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

## I. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

## II. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT

**Định lý 1 (dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song):**

Nếu mặt phẳng  $(P)$  chứa hai đường thẳng cắt nhau  $a, b$  và  $a, b$  cùng song song với mặt phẳng  $(Q)$  thì  $(P)$  song song với  $(Q)$ .

**Định lý 2 (Tính chất về hai mặt phẳng song song):**

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Từ định lý trên, ta có thể chứng minh được các hệ quả sau:

**Hệ quả 1.** Nếu đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(Q)$  thì có duy nhất một mặt phẳng  $(P)$  chứa  $a$  và song song với mặt phẳng  $(Q)$ .

**Hệ quả 2.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

## Định lý 3

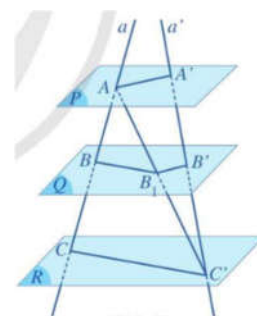
Cho hai mặt phẳng song song  $(P)$  và  $(Q)$ . Nếu mặt phẳng  $(R)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  thì cũng cắt mặt phẳng  $(Q)$  và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.

## III. ĐỊNH LÝ THALES

**Định lý 4 (Định lý Thalès)**

Nếu  $a, b$  là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song  $(P), (Q), (R)$

lần lượt tại các điểm  $A, B, C$  và  $A', B', C'$  thì  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ .



## B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

**Bài 1.** Bạn Chung cho rằng: Nếu mặt phẳng  $(P)$  chứa hai đường thẳng  $a, b$  và  $a, b$  cùng song song với mặt phẳng  $(Q)$  thì  $(P)$  luôn song song với  $(Q)$ . Phát biểu của bạn Chung có đúng không? Vì sao?

## Lời giải

Trường hợp  $a$  cắt  $b$  thì theo dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song thì ý kiến đúng.

Trường hợp  $a$  không cắt  $b$  thì  $a \parallel b$

Ta có:  $a$  thuộc  $(P)$ ,  $a \parallel (Q)$

$b$  thuộc  $(P)$ ,  $b \parallel (Q)$  mà  $a \parallel b$

Do đó:  $(P) \parallel (Q)$ . Vậy ý kiến đúng.

**Bài 2.** Trong mặt phẳng  $(P)$  cho hình bình hành  $ABCD$ . Qua  $A, B, C, D$  lần lượt vẽ bốn đường thẳng  $a, b, c, d$  đôi một song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng  $(P)$ . Một mặt phẳng cắt  $a, b, c, d$  lần lượt tại bốn điểm  $A', B', C', D'$ . Chứng minh rằng  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.

**Lời giải**

Theo định lí 2 ta có: Chỉ có một và một mặt phẳng qua  $A'//(P)$ . Tương tự với các điểm  $B', C', D'$ .

Mà đề bài cho  $A', B', C', D'$  đồng phẳng

Suy ra mặt phẳng chứa  $A', B', C', D'$  song song với  $(P)$

Do đó:  $A'D'//AD, B'C'//BC, AD//BC$

Suy ra:  $A'D'//B'C'$  (1)

Tương tự ta có:  $A'B'//C'D'$  (2)

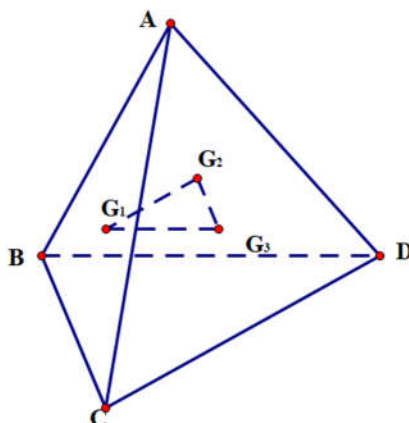
(1)(2) suy ra  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.

**Bài 3.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy  $G_1, G_2, G_3$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC, ACD, ADB$ .

a) Chứng minh rằng  $(G_1G_2G_3) // (BCD)$ .

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(G_1G_2G_3)$  với mặt phẳng  $(ABD)$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $E, F, H$  là trung điểm của  $BC, CD, BD$

Ta có:  $G_1$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ , suy ra  $\frac{AG_1}{AE} = \frac{2}{3}$

$G_3$  là trọng tâm  $\Delta ABD$ , suy ra  $\frac{AG_3}{AH} = \frac{2}{3}$

Suy ra  $\Delta AEH$  có  $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_3}{AH}$  nên  $G_1G_3 // EH$ .

Mà  $EH$  thuộc  $(BCD)$  nên  $G_1G_3 // (BCD)$ .

Tương tự ta có  $G_2G_3 // (BCD)$

Do đó:  $G_1G_2G_3 // (BCD)$ .

b) Ta có:  $G_1G_2G_3 // (BCD)$  nên  $G_1G_2 // BD$

mà  $G_3$  là điểm chung của hai mặt phẳng

Từ  $G_3$  kẻ  $G_3x$  sao cho  $G_3x // BD$ .

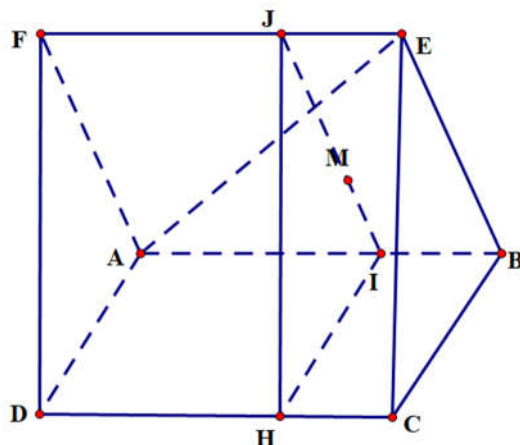
Vậy  $G_3x$  là giao tuyến cần tìm.

**Bài 4.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng  $(AFD) // (BEC)$ .

b) Gọi  $M$  là trọng tâm của tam giác  $ABE$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(AFD)$ . Lấy  $N$  là giao điểm của  $(P)$  và  $AC$ . Tính  $\frac{AN}{NC}$

**Lời giải**



a) Ta có:  $AD \parallel BC$  ( $ABCD$  là hình bình hành)

Mà  $AD$  thuộc  $(AFD)$ ,  $BC$  thuộc  $(BEC)$

Nên  $(AFD) \parallel (BEC)$

b) Trong  $(ABEF)$ , kẻ đường thẳng  $d$  qua  $M \parallel AF$

Ta có:  $d$  cắt  $AB$  tại  $I$ ,  $d$  cắt  $EF$  tại  $J$  (1)

Trong  $(ABCD)$  có  $I$  thuộc  $(P)$  mà  $(P) \parallel (AFD)$

Suy ra từ  $I$  kẻ  $IH \parallel AD$  (2)

(1)(2) suy ra  $(IJH)$  trùng  $(P)$  và  $\parallel (AFD)$

Ta có:  $(P)$  cắt  $AC$  tại  $N$ .  $N$  thuộc  $(ABCD)$ ,  $IH$  thuộc  $(P)$  và  $(ABCD)$ .

Suy ra:  $IH$  cắt  $AC$  tại  $N$

Ta có các hình bình hành  $IBCH$ ,  $IBEJ$

Gọi  $O$  là trung điểm của  $AB$

trọng tâm  $\triangle ABE$ .

Suy ra:  $\frac{MO}{ME} = \frac{1}{2}$

có:  $AB \parallel CD$  suy ra:  $AI \parallel CH$ .

Định lí Ta-lét:  $\frac{AN}{NC} = \frac{AI}{CH}$  mà  $CH = IB$  ( $IBCH$  là hình bình hành)

Suy ra:  $\frac{AN}{NC} = \frac{AI}{IB}$

Ta có:  $AB \parallel EF$  nên  $OI \parallel EJ$

Do đó:  $\frac{OI}{EJ} = \frac{MO}{ME} = \frac{1}{2}$

Mà  $EJ = IB$  ( $IBEJ$  là hình bình hành)

Suy ra:  $\frac{OI}{IB} = \frac{1}{2}$  hay  $IB = 2OI$

Ta có:  $\frac{AN}{NC} = \frac{AI}{IB} = \frac{AO+OI}{2OI}$

Mà  $OA = OB$  (O là trung điểm AB)

Nên  $\frac{AN}{NC} = \frac{OB+OI}{2OI} = 2$

Do đó:  $\frac{AN}{NC} = 2$ .

## BÀI 5: HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

#### I. HÌNH LĂNG TRỤ

##### 1. Định nghĩa

Ta có định nghĩa sau:

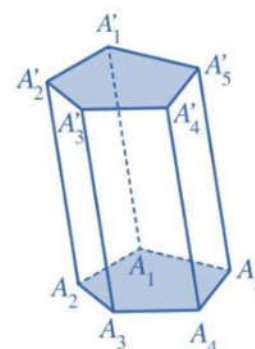
Hình gồm hai đa giác  $A_1A_2 \dots A_n, A_1'A_2' \dots A_n'$  và các hình bình hành

$A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \dots, A_nA_1A_1'A_n'$  được gọi là hình lăng trụ, kí hiệu là  $A_1A_2 \dots A_n.A_1'A_2' \dots A_n'$

*Chú ý:* Nếu đáy của lăng trụ là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình lăng trụ tương ứng gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác (Hình 71),...

Trong hình lăng trụ  $A_1A_2 \dots A_n.A_1'A_2' \dots A_n'$  :

- Hai đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  và  $A_1'A_2' \dots A_n'$  gọi là hai mặt đáy;
- Các hình bình hành  $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \dots, A_nA_1A_1'A_n'$ , gọi là các mặt bên
- Các cạnh của hai mặt đáy gọi là các cạnh đáy;
- Các đoạn thẳng  $A_1A_1', A_2A_2', \dots, A_nA_n'$  gọi là các cạnh bên;
- Các đỉnh của hai mặt đáy gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.



Hình 71

##### 2. Tính chất

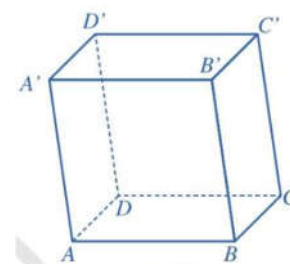
- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

#### II. HÌNH HỘP

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Trong mỗi hình hộp, ta gọi:

- Hai mặt không có đỉnh chung là hai mặt đối diện;
- Hai cạnh song song không nằm trong một mặt là hai cạnh đối diện;
- Hai đỉnh không thuộc cùng một mặt là hai đỉnh đối diện;
- Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện là đường chéo.



##### 2. Tính chất

Hình hộp là một hình lăng trụ nên hình hộp có các tính chất của hình lăng trụ, ngoài ra:

- Các mặt của hình hộp là các hình bình hành.
- Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp song song với nhau.

*Nhận xét:* Ta có thể coi hai mặt đối diện bất kì của một hình hộp là hai mặt đáy của nó.

## B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

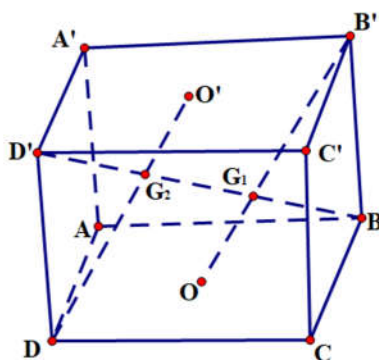
**Bài 1.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ .

a) Chứng minh rằng  $(ACB') // (A'C'D)$ .

b) Gọi  $G_1, G_2$  lần lượt là giao điểm của  $BD'$  với các mặt phẳng  $(ACB')$  và  $(A'C'D)$ . Chứng minh rằng  $G_1, G_2$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ACB'$  và  $A'C'D$ .

c) Chứng minh rằng  $BG_1 = G_1G_2 = D'G_2$ .

**Lời giải**



a) Ta có:  $AD // B'C', AD = B'C'$  nên  $ADC'B'$  là hình bình hành

Suy ra:  $AB' // DC'$  nên  $AB' // (A'C'D)$  (1)

Ta có:  $(ACC'A')$  là hình bình hành nên  $AC // A'C'$ . Suy ra:  $AC // (A'C'D)$  (2)

Mà  $AB', AC$  thuộc  $(ACB')$  (3)

(1)(2)(3) suy ra  $(A'B') // (A'C'D)$

b) Gọi  $O, O'$  lần lượt là tâm hình bình hành  $ABCD, A'B'C'D'$

Trong  $(BDD'B')$ :  $B'O$  cắt  $BD'$  mà  $B'O$  thuộc  $(ACB')$ ,  $BD'$  cắt  $(ACB')$  tại  $G_1$

Suy ra:  $B'O$  cắt  $BD'$  tại  $G_1$

Tương tự ta có:  $DO'$  cắt  $BD'$  tại  $G_2$

Ta có:  $\Delta G_1OB$  đồng dạng với  $\Delta G_1B'D'$  (do  $BD // B'D'$ )

Suy ra:  $\frac{G_1O}{G_1B'} = \frac{OB}{B'D'} = \frac{1}{2}$

Nên:  $\frac{G_1O}{OB'} = \frac{2}{3}$

Do đó:  $G_1$  là trọng tâm  $\Delta ACB'$

Chứng minh tương tự ta có:  $G_2$  là trọng tâm  $\Delta A'C'D$ .

c) Ta có:  $\Delta G_1OB$  đồng dạng với  $\Delta G_1B'D'$

Suy ra:  $\frac{G_1B}{G_1D'} = \frac{OB}{B'D'} = \frac{1}{2}$

Nên:  $G_1B = \frac{1}{3}BD'(1)$

Tương tự ta có:  $\frac{G_2D'}{G_2B} = \frac{OD'}{DB} = \frac{1}{2}$

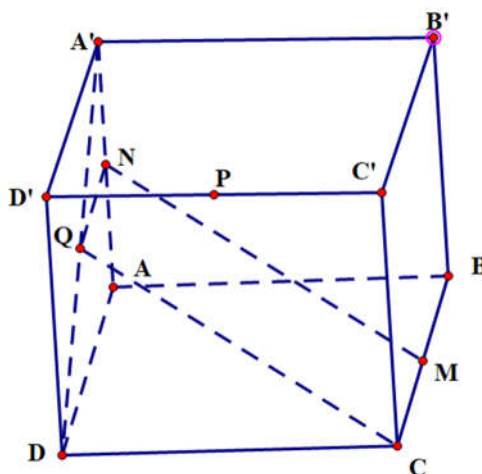
Nên:  $G_2D' = \frac{1}{3}DD'(2)$

(1)(2) suy ra  $G_1B = G_1G_2 = G_2D'$ .

**Bài 2.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, AA', C'D', AD'$ . Chứng minh rằng:

- $NQ \parallel A'D'$  và  $NQ = \frac{1}{2}A'D'$ ;
- Tứ giác  $MNQC$  là hình bình hành;
- $MN \parallel (ACD')$ ;
- $(MNP) \parallel (ACD')$ .

**Lời giải**



a) Ta có: N là trung điểm của  $AA'$  nên  $\frac{AN}{AA'} = \frac{1}{2}$

Q là trung điểm của  $AD'$  nên  $\frac{AQ}{AD'} = \frac{1}{2}$

Theo định lí Ta-lét ta có:  $NQ \parallel A'D'$

Suy ra:  $\frac{NQ}{A'D'} = \frac{AN}{AA'} = \frac{1}{2}$  nên  $NQ = \frac{1}{2}A'D'$

b) Ta có:  $NQ \parallel A'D'$  mà  $A'D' \parallel BC$  nên  $NQ \parallel BC$  hay  $NQ \parallel MC$  (1)

Ta có:  $NQ = \frac{1}{2}A'D'$  mà  $A'D' = BC, MC = \frac{1}{2}BC$  nên  $NQ = MC$  (2)

(1)(2) suy ra:  $MNQC$  là hình bình hành

c) Ta có:  $MNQC$  là hình bình hành nên  $MN \parallel CQ$

Mà CQ thuộc  $(ACD')$

Nên  $MN // (ACD')$

d) Gọi O là trung điểm của AC

$\Delta ACB$  có: O, M là trung điểm của AC, BC

Suy ra:  $OM // AB$  nên  $OM = \frac{1}{2} AB$

Mà  $AB = C'D', D'P = \frac{1}{2} C'D$

Suy ra:  $OM = D'P$  (1)

Ta có:  $OM // AB, AB // C'D'$  nên  $OM // C'D'$  hay  $OM // D'P$  (2)

(1)(2) suy ra OMPD' là hình bình hành. Do đó:  $MP // OD'$

Mà  $OD'$  thuộc  $(ACD')$

Suy ra:  $MP // (ACD')$

Mà MN thuộc  $(ACD')$  (câu c)

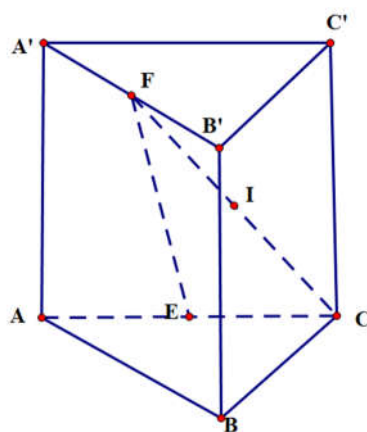
Do đó:  $(MNP) // (ACD')$ .

**Bài 3.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC \cdot A'B'C'$ . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và  $A'B'$ .

a) Chứng minh rằng  $EF // (BCC'B')$ .

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng CF với mặt phẳng  $(AC'B)$ . Chứng minh rằng I là trung điểm đoạn thẳng CF.

**Lời giải**



a) Gọi H là trung điểm của BC

$\Delta ABC$  có: E là trung điểm của AC, H là trung điểm của BC

Suy ra:  $EH // AB$

Mà  $AB // A'B'$

Do đó:  $EH // A'B'$  hay  $EH // B'F$  (1)

Ta có:  $EH // AB$  nên  $\frac{EH}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{2}$

Mà  $AB = A'B', B'F = \frac{1}{2} A'B'$

Nên:  $EH = B'F$  (2)

(1)(2) suy ra:  $EBH'F$  là hình bình hành. Do đó:  $EF \parallel B'H$

Mà  $B'H$  thuộc  $(BCC'B')$

Suy ra:  $EF \parallel (BCC'B')$

b) Gọi  $K$  là trung điểm  $AB$

Dễ dàng chứng minh được  $FKBB'$  là hình bình hành

Ta có:  $FK \parallel B'$

Mà  $BB' \parallel CC'$

Suy ra:  $FK \parallel CC'$  (1)

Ta có:  $FK = BB'$ , mà  $BB' = CC'$

Do đó:  $FK = CC'$  (2)

(1)(2) suy ra  $FKCC'$  là hình bình hành

Mà hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Nên  $C'K$  cắt  $CF$  tại trung điểm của hai đường thẳng

mà  $C'K$  thuộc  $(AC'B)$ ,  $CF$  cắt  $(AC'B)$  tại  $I$  (đề bài)

Do đó:  $I$  là trung điểm của  $CF$ .

### C. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

#### Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

##### 1. Phương pháp

Áp dụng kết quả sau:

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel c, b \parallel d \\ a, b \subset (P) \\ c, d \subset (Q) \\ a \cap b = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

Áp dụng: Chứng minh đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(P)$ .

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

##### 2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD = 2BC$ . Gọi  $E, F, I$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA, AD, SD$ .

a. Chứng minh  $(EFB) \parallel (SCD)$ . Từ đó chứng minh  $CI \parallel (EFB)$ .

b. Tìm giao tuyến của  $(SBC)$  và  $(SAD)$ . Tìm giao điểm  $K$  của  $FI$  với giao tuyến này, chứng minh  $(SBF) \parallel (KCD)$ .

**Giải**



a. Ta có:

$ON \parallel BC$  ( $ON$  là đường trung bình của tam giác  $BCD$ ).

$OM \parallel SC$  ( $OM$  là đường trung bình của tam giác  $SAC$ )

Vì  $OM, ON \subset (OMN)$ ;  $BC, SC \subset (SBC)$  nên  $(OMN) \parallel (SBC)$ .

b. Từ  $E$  kẻ đường thẳng  $EP \parallel AD$  ( $P$  thuộc  $AB$ ) (1)

Khi đó theo tính chất đường phân giác và tam giác cân ta có:

$$\frac{PB}{PA} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AS} = \frac{FB}{FA}$$

Do đó:  $PF \parallel SA$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $(PEF) \parallel (SAD)$ .

Mặt khác  $EF \subset (PEF)$  nên  $EF \parallel (SAD)$ .

Ngoài ra ta có thể dùng định lí Thales để chứng minh  $EF \parallel (SAD)$  như sau:

Theo tính chất đường phân giác và tính chất của tam giác cân ta chứng minh được:

$$\frac{AB}{AS} = \frac{AC}{AD} = \frac{FB}{FS} = \frac{EC}{ED}.$$

Theo định lí Thales ta suy ra ba đường thẳng  $BC$ ,  $EF$  và  $SD$  nằm trong ba mặt phẳng song song, suy ra  $EF$  song song với mặt phẳng chứa  $BC$  và song song với mặt phẳng chứa  $SD$ . Mặt khác  $BC \parallel AD$  nên  $EF$  song song với mặt phẳng  $(SAD)$ .

**Ví dụ 3.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  song song với nhau.

a. Chứng minh hai mặt phẳng  $(BDA')$  và  $(B'D'C)$  song song với nhau.

b. Chứng minh rằng đường chéo  $AC'$  đi qua trọng tâm  $G$  và  $G'$  lần lượt của hai tam giác  $BDA'$  và  $B'D'C$ .

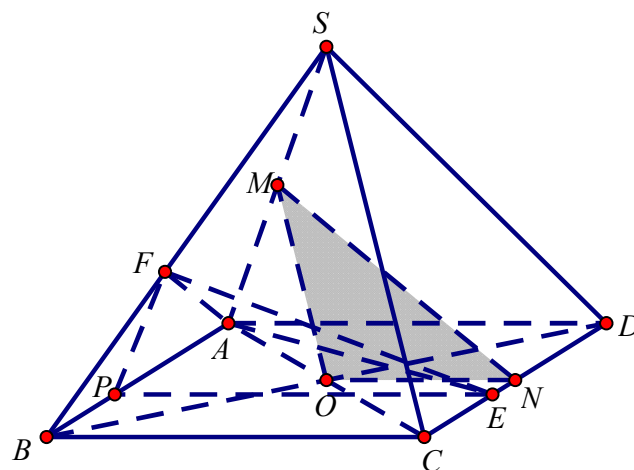
c. Chứng minh  $G$  và  $G'$  chia đoạn  $AC'$  thành ba phần bằng nhau.

**Giải**

a. Ta có:

$A'B \parallel D'C$  (vì tứ giác  $A'BCD'$  là hình bình hành).

$BD \parallel B'D'$  (vì tứ giác  $BB'D'D$  là hình bình hành), suy ra  $mp(BDA') \parallel mp(B'D'C)$ .



b. Gọi  $O$ ,  $O'$  và  $Q$  lần lượt là tâm các hình bình hành  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  và  $AA'C'C$ .

Ta có:  $A'O$  là đường trung tuyến và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BDA'$  nên  $\frac{A'G}{A'O} = \frac{2}{3}$ .

Do đó  $G$  cũng là trọng tâm tam giác  $A'AC$  (vì  $A'O$  là đường trung tuyến của tam giác  $A'AC$ ).

Mà  $AQ$  là đường trung tuyến của tam giác  $A'AC$  nên  $G$  thuộc  $AQ$ ,  $G$  thuộc  $AC'$ .

(1)

Tương tự ta có  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $B'D'C$  và cũng là trọng tâm của tam giác  $A'C'C$ .

Mà  $C'Q$  là đường trung tuyến của tam giác  $A'C'C$  nên  $G'$  thuộc  $C'Q$ . Suy ra  $G'$  thuộc  $AC'$ . (2)

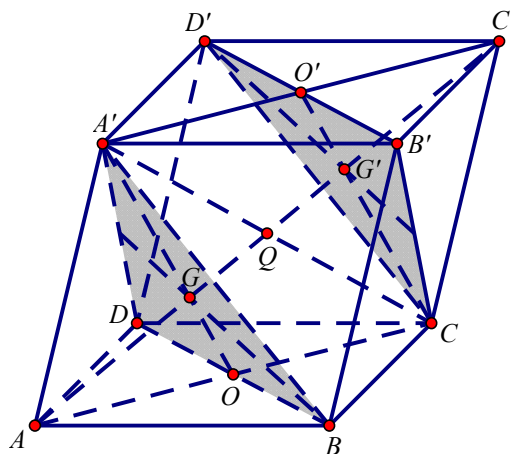
Từ (1) và (2) suy ra đường chéo  $AC'$  đi qua hai trọng tâm  $G$  và  $G'$  lần lượt của hai tam giác  $BDA'$  và  $B'D'C$ .

c. Ta có:

$G$  là trọng tâm tam giác  $A'AC$  nên  $\frac{AG}{AQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AC'} = \frac{1}{3}$  ( $AC' = 2AQ$ ). Suy ra  $AG = \frac{1}{3}AC'$ .

$G'$  là trọng tâm tam giác  $A'C'C$  nên  $\frac{C'G'}{C'Q} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G'}{C'A} = \frac{1}{3}$  ( $AC' = 2C'Q$ ). Suy ra  $C'G' = \frac{1}{3}AC'$ .

Vậy  $AG = GG' = C'G' = \frac{1}{3}AC'$ . Tức là  $G$  và  $G'$  chia đoạn  $AC'$  thành ba phần bằng nhau.



**Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng**

## 1. Phương pháp

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (\alpha) \cap (P) = a \\ (\alpha) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

## 2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ . Gọi  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là mặt phẳng qua điểm  $M$  và lần lượt song song với mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(SAC)$ .

a. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi  $mp(\alpha)$ .

b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi  $mp(\beta)$ .

c. Gọi H và K lần lượt là giao điểm của  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  với AC và BD. Chứng minh tứ giác OHMK là hình bình hành.

**Giải**

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \\ M \in (ABCD) \cap (\alpha) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = MN \parallel BD \quad (N \in AB)$$

Gọi M là trung điểm của AD nên N là trung điểm của AB.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \\ N \in (SAB) \cap (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = NE \parallel SB \quad (E \in SA)$$

Mà N là trung điểm của AB nên E là trung điểm của SA.

Khi đó:  $ME = (\alpha) \cap (SAD)$ .

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MNE.

$$\left. \begin{array}{l} (\beta) \parallel (SAC) \\ (ABCD) \cap (SAC) = AC \\ M \in (ABCD) \cap (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (ABCD) \cap (\beta) = MP \parallel AC \quad (P \in CD)$$

Mà M là trung điểm của AD nên P là trung điểm của CD.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\beta) \parallel (SAC) \\ (SCD) \cap (SAC) = SC \\ P \in (SCD) \cap (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (SCD) \cap (\beta) = PF \parallel SC \quad (F \in SD)$$

Mà P là trung điểm của CD nên F là trung điểm của SD.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MPF.

c. Trong mp(ABCD): AC cắt MN tại H, BD cắt MP tại K. Do MN chứa trong mp( $\alpha$ ) và MP chứa trong mp( $\beta$ ) nên H chính là giao điểm của AC với mp( $\alpha$ ) và K chính là giao điểm của BD với mp( $\beta$ ).

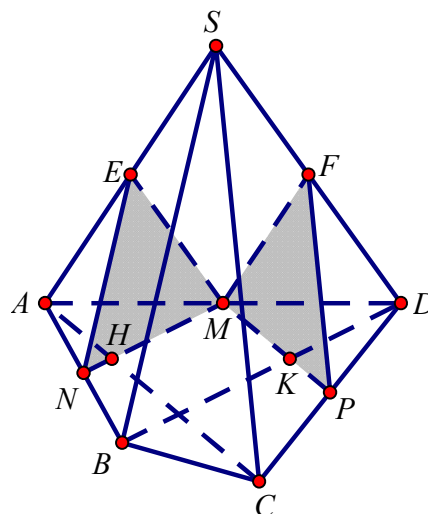
Ta có  $MN \parallel BD$  nên  $MH \parallel OK$ ,  $MP \parallel AC$  nên  $MK \parallel HO$ . Vậy tứ giác OHMK là hình bình hành.

**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh:

a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

b.  $AA' + CC' = BB' + DD'$ .

**Giải**



a. Ta có  $AB \parallel CD$  và  $Ax \parallel Dt$  nên  $mp(Ax, By) \parallel mp(Cz, Dt)$ .

Mà  $(P') \cap (Ax, By) = A'B'$ ;  $(P') \cap (Cz, Dt) = C'D'$  nên  $A'B' \parallel C'D'$  (1)

Tương tự:

$$\left. \begin{array}{l} mp(Ax, Dt) \parallel mp(By, Cz) \\ (P') \cap (Ax, Dt) = A'D' \\ (P') \cap (By, Cz) = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow A'D' \parallel B'C'$$

(2)

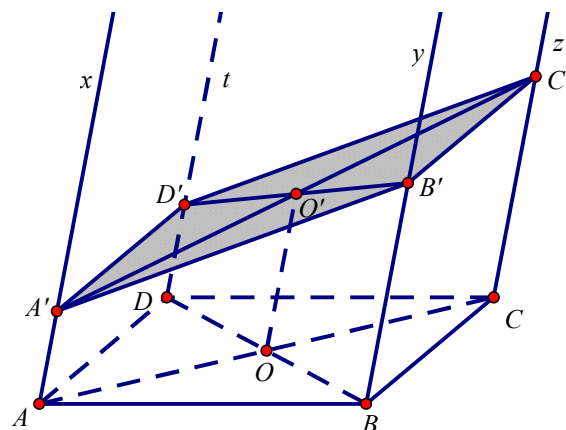
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.

b. Gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm các hình bình hành  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ .

Khi đó ta có  $OO'$  là đường trung bình của hình thang  $AA'C'C$  và hình thang  $BB'D'D$ .

Do đó:  $AA' + CC' = 2OO'$  và  $BB' + DD' = 2OO'$ .

Vậy  $AA' + CC' = BB' + DD'$ .



**Ví dụ 3.** Cho tứ diện  $ABCD$  và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $MN$  cắt các cạnh  $AD$  và  $BC$  lần lượt là  $P$  và  $Q$ .

a. Cho trước điểm  $P$ , hãy nói cách dựng điểm  $Q$ .

b. Gọi  $K$  là giao điểm của  $MN$  và  $PQ$ . Chứng minh rằng  $KP = KQ$ .

**Giải**

a. Ta có  $(\alpha)$  là  $mp(MNP)$ .

Trong  $mp(ABD)$ :  $MP$  cắt  $BD$  tại  $E$ .

Trong  $mp(BCD)$ :  $EN$  cắt  $BC$  tại  $Q$ .

Vậy  $(\alpha)$  chính là  $mp(MPNQ)$ .  $Q$  là điểm cần tìm.

b. Trên hai đường thẳng chéo nhau  $AB$  và  $CD$  lần lượt có các điểm  $A, M, B$  và  $C, N, D$  định ra các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 1.$$

Theo định lý Thales ta suy ra  $AD, MN, BC$  nằm trên ba mặt phẳng song song.

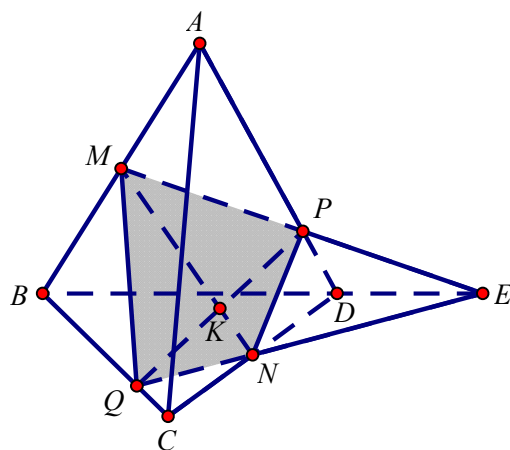
Mà  $PQ$  là cát tuyến cắt ba mặt phẳng song song lần lượt tại  $P, K, Q$  nên:  $\frac{KP}{KQ} = \frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 1$ .

Vậy  $K$  là trung điểm của  $PQ$ .

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB$  và  $SC$ , lấy điểm  $P \in SA$ .

a) Tìm giao tuyến  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

b) Tìm giao điểm  $SD$  và  $(MNP)$ .

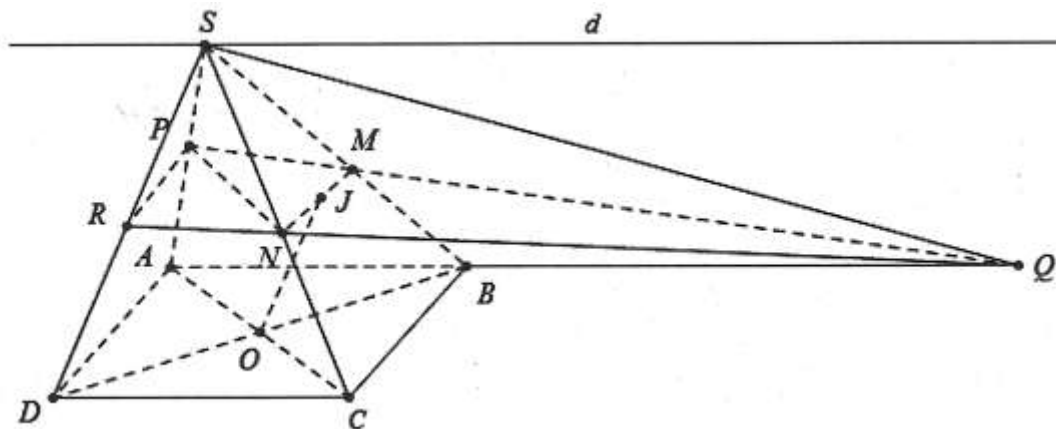


- c) Tìm thiết diện hình chóp và mặt phẳng  $(MNP)$ . Thiết diện là hình gì?  
d) Gọi  $J \in MN$ . Chứng minh rằng  $OJ \parallel (SAD)$ .

### Lời giải

a) Do

$AB$   $S$   $d$



song song với  $CD$  nên giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng  $d$  đi qua  $S$  và song song với  $AB$  và  $CD$ .

b) Trong mặt phẳng  $(SAB)$ , kéo dài  $PM$  cắt  $AB$  tại  $Q$ , trong mặt phẳng  $(PMQR)$ , kéo dài  $QN$  cắt  $SD$  tại  $R$ , giao điểm của  $SD$  và  $(MNP)$  là  $R$ .

c) Thiết diện hình chóp và mặt phẳng ( $MNP$ ) là tứ giác  $MPRN$ .

Do 3 mặt phẳng  $(MNP); (ABC); (SAD)$  cắt nhau theo 3 giao tuyến là  $PR; MN; AD$  nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mặt khác  $MN \parallel AD \Rightarrow MN \parallel AD \parallel PR \Rightarrow MPRN$  là hình thang.

d) Ta có:  $OM$  là đường trung bình trong tam giác  $SBD \Rightarrow OM \parallel SD$ .

Tương tự ta có:  $ON \parallel SA \Rightarrow (OMN) \parallel (SAD)$ .

Mặt khác  $OJ \subset (OMN) \Rightarrow OJ \parallel (SAD)$ . (điều phải chứng minh).

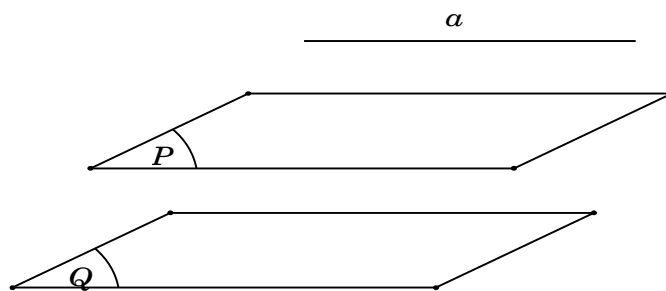
## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
- B.** Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.
- C.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
- D.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

### Lời giải

Chọn C



Trong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau  $\Rightarrow$  A là mệnh đề sai.

Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể song song với nhau (hình vẽ)  $\Rightarrow$  B là mệnh đề sai.

Ta có:  $a \parallel (P), a \parallel (Q)$  nhưng  $(P)$  và  $(Q)$  vẫn có thể song song với nhau.

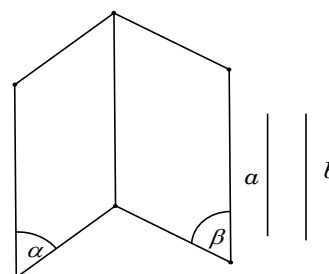
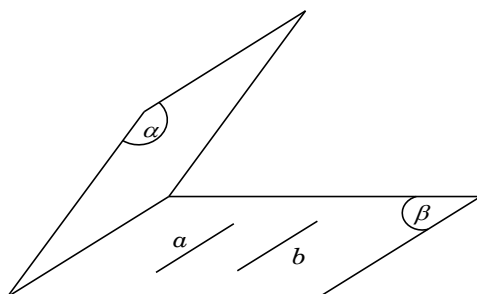
Mệnh đề C là tính chất nên C đúng.

**Câu 2:** Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận  $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$ ?

- A.  $(\alpha) \parallel (\gamma)$  và  $(\beta) \parallel (\gamma)$  ( $(\gamma)$  là mặt phẳng nào đó).
- B.  $(\alpha) \parallel a$  và  $(\alpha) \parallel b$  với  $a, b$  là hai đường thẳng phân biệt thuộc  $(\beta)$ .
- C.  $(\alpha) \parallel a$  và  $(\alpha) \parallel b$  với  $a, b$  là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với  $(\beta)$ .
- D.  $(\alpha) \parallel a$  và  $(\alpha) \parallel b$  với  $a, b$  là hai đường thẳng cắt nhau thuộc  $(\beta)$ .

Lời giải

Chọn D



Trong trường hợp:  $(\alpha) \parallel (\gamma)$  và  $(\beta) \parallel (\gamma)$  ( $(\gamma)$  là mặt phẳng nào đó) thì  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  có thể trùng nhau  $\Rightarrow$  Loại A

$(\alpha) \parallel a$  và  $(\alpha) \parallel b$  với  $a, b$  là hai đường thẳng phân biệt thuộc  $(\beta)$  thì  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  vẫn có thể cắt nhau (hình 1)  $\Rightarrow$  Loại B

$(\alpha) \parallel a$  và  $(\alpha) \parallel b$  với  $a, b$  là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với  $(\beta)$  thì  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  vẫn có thể cắt nhau (hình 2)  $\Rightarrow$  Loại C

**Câu 3:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Nếu mặt phẳng  $(\alpha) \parallel (\beta)$  thì mọi đường thẳng nằm trong  $(\alpha)$  đều song song với  $(\beta)$ .

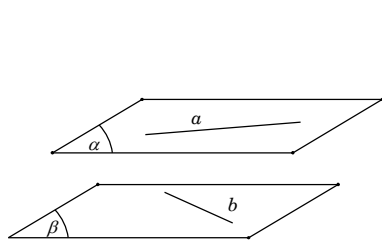
**B.** Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong  $(\alpha)$  cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong  $(\beta)$ .

**C.** Nếu hai đường thẳng phân biệt  $a$  và  $b$  song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  phân biệt thì  $(a) \parallel (\beta)$ .

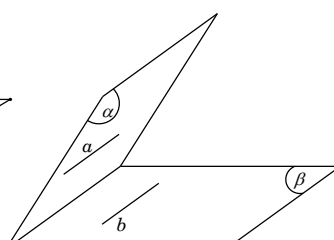
**D.** Nếu đường thẳng  $d$  song song với  $mp(\alpha)$  thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong  $mp(\alpha)$ .

**Lời giải**

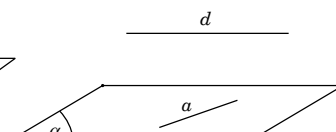
**Chọn A**



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau thì hai đường thẳng bất kì lần lượt thuộc  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  có thể chéo nhau (Hình 1)  $\Rightarrow$  Loại B

Nếu hai đường thẳng phân biệt  $a$  và  $b$  song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  phân biệt thì hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  có thể cắt nhau (Hình 2)  $\Rightarrow$  Loại C

Nếu đường thẳng  $d$  song song với  $mp(\alpha)$  thì nó có thể chéo nhau với một đường thẳng nào đó nằm trong  $(\alpha)$ . (Hình 3).

**Câu 4:** Cho hai mặt phẳng song song  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ , đường thẳng  $a \parallel (\alpha)$ . Có mấy vị trí tương đối của  $a$  và  $(\beta)$ .

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

$a \parallel (\alpha)$  mà  $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a$  và  $(\beta)$  không thể cắt nhau.

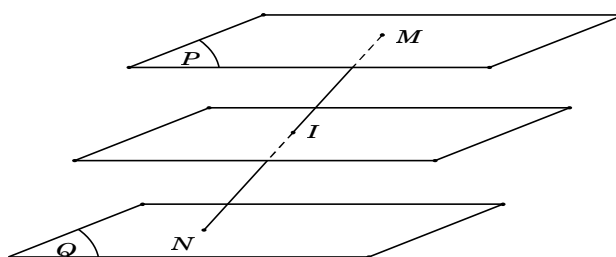
Vậy còn 2 vị trí tương đối.

**Câu 5:** Cho hai mặt phẳng song song  $(P)$  và  $(Q)$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt thay đổi trên  $(P)$  và  $(Q)$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Chọn khẳng định đúng.

- A. Tập hợp các điểm  $I$  là đường thẳng song song và cách đều  $(P)$  và  $(Q)$ .
- B. Tập hợp các điểm  $I$  là mặt phẳng song song và cách đều  $(P)$  và  $(Q)$ .
- C. Tập hợp các điểm  $I$  là một mặt phẳng cắt  $(P)$ .
- D. Tập hợp các điểm  $I$  là một đường thẳng cắt  $(P)$ .

Lời giải

Chọn B



Ta có:  $I$  là trung điểm của  $MN$

$\Rightarrow$  Khoảng cách từ  $I$  đến  $(P)$  bằng khoảng cách từ  $I$  đến  $(Q)$

$\Rightarrow$  Tập hợp các điểm  $I$  là mặt phẳng song song và cách đều  $(P)$  và  $(Q)$ .

**Câu 6:** Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(P)$ ?

- A.  $a \parallel b$  và  $b \subset (P)$ .
- B.  $a \parallel b$  và  $b \parallel (P)$ .
- C.  $a \parallel (Q)$  và  $(Q) \parallel (P)$ .
- D.  $a \subset (Q)$  và  $b \subset (P)$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có:  $a \parallel b$  và  $b \subset (P)$  suy ra  $a \parallel (P)$  hoặc  $a \subset (P) \Rightarrow$  Loại A

$a \parallel b$  và  $b \parallel (P)$  suy ra  $a \parallel (P)$  hoặc  $a \subset (P) \Rightarrow$  Loại B

$a \parallel (Q)$  và  $(Q) \parallel (P)$  suy ra  $a \parallel (P)$  hoặc  $a \subset (P) \Rightarrow$  Loại C

**Câu 7:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu  $(\alpha) \parallel (\beta)$  và  $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$  thì  $a \parallel b$ .
- B. Nếu  $(\alpha) \parallel (\beta)$  và  $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$  thì  $a$  và  $b$  chéo nhau.
- C. Nếu  $a \parallel b$  và  $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$  thì  $(\alpha) \parallel (\beta)$ .
- D. Nếu  $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$  và  $(\alpha) \parallel (\beta)$  thì  $a \parallel b$ .

Lời giải

Chọn D

Nếu  $(\alpha) \parallel (\beta)$  và  $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$  thì  $a \parallel b$  hoặc  $a$  chéo  $b \Rightarrow$  A, B sai.

Nếu  $a \parallel b$  và  $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$  thì  $(\alpha) \parallel (\beta)$  hoặc  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  cắt nhau theo giao tuyến song song với  $a$  và  $b$ .

**Câu 8:** Cho đường thẳng  $a \subset mp(P)$  và đường thẳng  $b \subset mp(Q)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$ . B.  $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$ .
- C.  $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$  và  $b \parallel (P)$ . D.  $a$  và  $b$  chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Với đường thẳng  $a \subset mp(P)$  và đường thẳng  $b \subset mp(Q)$

Khi  $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$  hoặc  $a, b$  chéo nhau  $\Rightarrow$  A sai.

Khi  $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$  hoặc  $(P), (Q)$  cắt nhau theo giao tuyến song song với  $a$  và  $b \Rightarrow$  B sai.

$a$  và  $b$  có thể chéo nhau, song song hoặc cắt nhau  $\Rightarrow$  D sai.

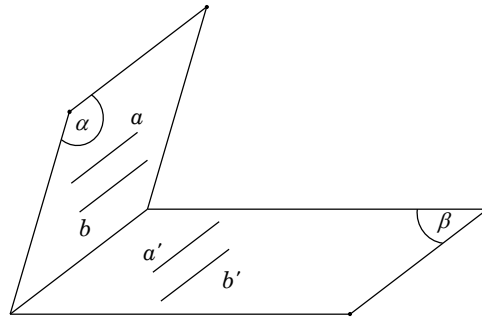
**Câu 9:** Hai đường thẳng  $a$  và  $b$  nằm trong  $mp(\alpha)$ . Hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$  nằm trong  $mp(\beta)$ .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

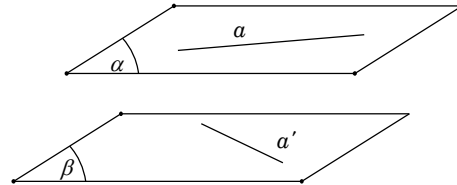
- A. Nếu  $a \parallel a'$  và  $b \parallel b'$  thì  $(\alpha) \parallel (\beta)$ .
- B. Nếu  $(\alpha) \parallel (\beta)$  thì  $a \parallel a'$  và  $b \parallel b'$ .
- C. Nếu  $a \parallel b$  và  $a' \parallel b'$  thì  $(\alpha) \parallel (\beta)$ .
- D. Nếu  $a$  cắt  $b$  và  $a \parallel a', b \parallel b'$  thì  $(\alpha) \parallel (\beta)$ .

Lời giải

Chọn D



Hình 1



Hình 2

Nếu  $a \parallel a'$  và  $b \parallel b'$  thì  $(\alpha) \parallel (\beta)$  hoặc  $(\alpha)$  cắt  $(\beta)$  (Hình 1)  $\Rightarrow$  A sai.

Nếu  $(\alpha) \parallel (\beta)$  thì  $a \parallel a'$  hoặc  $a, a'$  chéo nhau (Hình 2)  $\Rightarrow$  B sai.

Nếu  $a \parallel b$  và  $a' \parallel b'$  thì  $(\alpha) \parallel (\beta)$  hoặc  $(\alpha)$  cắt  $CC'$ . (Hình 1)  $\Rightarrow$  C sai.

**Câu 10:** Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cắt nhau theo giao tuyến  $\Delta$ . Hai đường thẳng  $p$  và  $q$  lần lượt nằm trong  $(P)$  và  $(Q)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A.  $p$  và  $q$  cắt nhau.

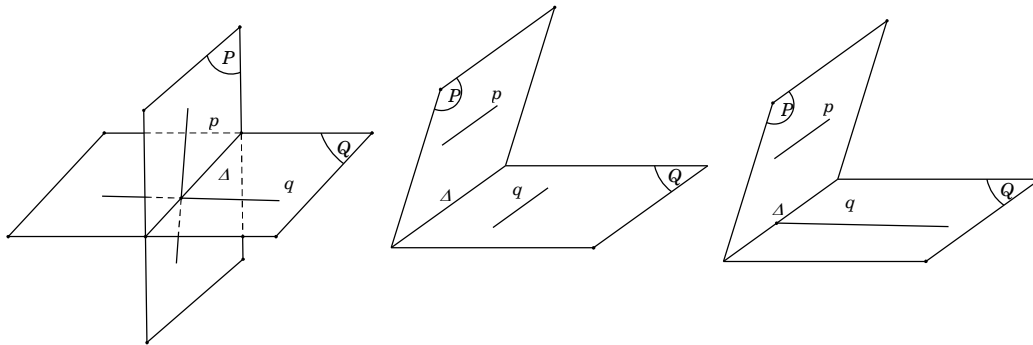
B.  $p$  và  $q$  chéo nhau.

C.  $p$  và  $q$  song song.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $p$  và  $q$  có thể cắt nhau, song song, chéo nhau (hình vẽ).

**Câu 11:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm của  $SA, SD$  và  $AB$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $(NOM)$  cắt  $(OPM)$ .

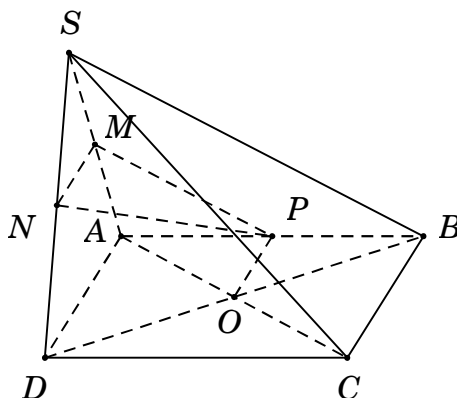
B.  $(MON) \parallel (SBC)$ .

C.  $(PON) \cap (MNP) = NP$ .

D.  $(NMP) \parallel (SBD)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Ta có  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $SAD$  suy ra  $MN \parallel AD$ . (1)

Và  $OP$  là đường trung bình của tam giác  $BAD$  suy ra  $OP \parallel AD$ . (2)

Từ (1),(2) suy ra  $MN \parallel OP \parallel AD \Rightarrow M, N, O, P$  đồng phẳng.

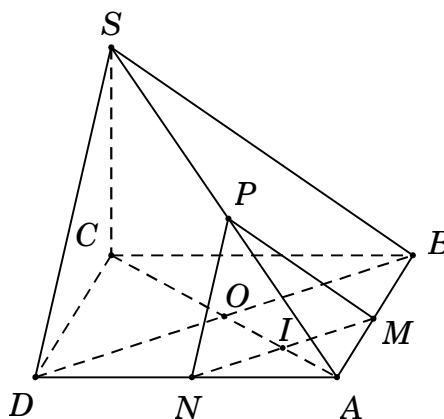
Lại có  $MP \parallel SB, OP \parallel BC$  suy ra  $(MNOP) \parallel (SBC)$  hay  $(MON) \parallel (SBC)$ .

**Câu 12:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Tam giác  $SBD$  đều. Một mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(SBD)$  và qua điểm  $I$  thuộc cạnh  $AC$  (không trùng với  $A$  hoặc  $C$ ). Thiết diện của  $(P)$  và hình chóp là hình gì?

**A.** Hình hình hành.    **B.** Tam giác cân.    **C.** Tam giác vuông.    **D.** Tam giác đều.

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $MN$  là đoạn thẳng giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt đáy  $(ABCD)$ .

Vì  $(P) \parallel (SBD)$ ,  $(P) \cap (ABCD) = MN$  và  $(SBD) \cap (ABCD) = BD$  suy ra  $MN \parallel BD$ .

Lập luận tương tự, ta có

$(P)$  cắt mặt  $(SAD)$  theo đoạn giao tuyến  $NP$  với  $NP \parallel SD$ .

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với  $MP \parallel SB$ .

Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp S.ABCD là tam giác đều MNP.

**Câu 13:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC thỏa mãn  $AB = AC = 4$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ . Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho  $SM = 2MA$ . Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp S.ABC bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{16}{9}$ .

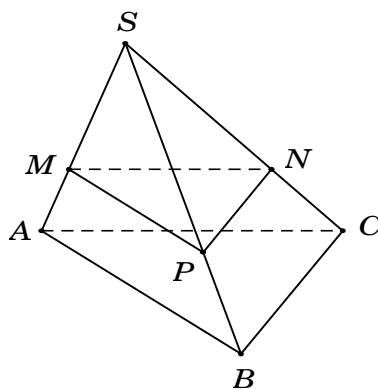
B.  $\frac{14}{9}$ .

C.  $\frac{25}{9}$ .

D. 1.

**Lời giải**

**Chọn A**



Diện tích tam giác ABC là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 4$ .

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC.

Vì (P) // (ABC) nên theo định lí Talet, ta có  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$ .

Khi đó (P) cắt hình chóp S.ABC theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số  $k = \frac{2}{3}$ . Vậy  $S_{\Delta MNP} = k^2 \cdot S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{16}{9}$ .

**Câu 14:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân với cạnh bên  $BC = 2$ , hai đáy  $AB = 6$ ,  $CD = 4$ . Mặt phẳng (P) song song với (ABCD) và cắt cạnh SA tại M sao cho  $SA = 3SM$ . Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp S.ABCD bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ .

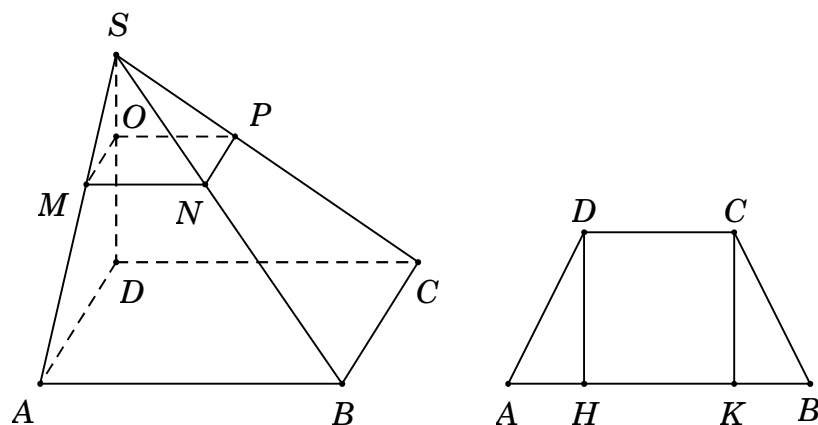
B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

C. 2.

D.  $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $D, C$  trên  $AB$ .

$$ABCD \text{ là hình thang cân} \Rightarrow \begin{cases} AH = BK; CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1.$$

Tam giác  $BCK$  vuông tại  $K$ , có  $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ .

Suy ra diện tích hình thang  $ABCD$  là  $S_{ABCD} = CK \cdot \frac{AB + CD}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{4 + 6}{2} = 5\sqrt{3}$ .

Gọi  $N, P, Q$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  và các cạnh  $SB, SC, SD$ .

Vì  $(P) \parallel (ABCD)$  nên theo định lý Talet, ta có  $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$ .

Khi đó  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện  $MNPQ$  có diện tích  $S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ .

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành có tâm  $O$ ,  $AB = 8$ ,  $SA = SB = 6$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $O$  và song song với  $(SAB)$ . Thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là:

A.  $5\sqrt{5}$ .

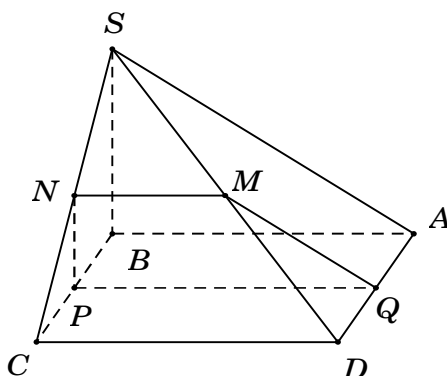
B.  $6\sqrt{5}$ .

C. 12.

D. 13.

Lời giải

Chọn B



Qua  $O$  kẻ đường thẳng ( $d$ ) song song  $AB$  và cắt  $BC, AD$  lần lượt tại  $P, Q$ .

Kẻ  $PN$  song song với  $SB$  ( $N \in SB$ ), kẻ  $QM$  song song với  $SA$  ( $M \in SA$ ).

Khi đó  $(MNPQ) // (SAB) \Rightarrow$  thiết diện của ( $P$ ) và hình chóp  $S.ABCD$  là tứ giác  $MNPQ$

Vì  $P, Q$  là trung điểm của  $BC, AD$  suy ra  $N, M$  lần lượt là trung điểm của  $SC, SD$ .

Do đó  $MN$  là đường trung bình tam giác  $SCD \Rightarrow MN = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} = 4$ .

Và  $NP = \frac{SB}{2} = 3; QM = \frac{SA}{2} = 3 \Rightarrow NP = QM \Rightarrow MNPQ$  là hình thang cân.

Hạ  $NH, MK$  vuông góc với  $PQ$ . Ta có  $PH = KQ \Rightarrow PH = \frac{1}{2}(PQ - MN) = 2$ .

Tam giác  $PHN$  vuông, có  $NH = \sqrt{5}$ .

Vậy diện tích hình thang  $MNPQ$  là  $S_{MNPQ} = NH \cdot \frac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}$ .

**Câu 16:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.
- B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.
- C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.
- D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hình lăng trụ có đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác, ...), ta thấy rằng

Hình lăng trụ luôn có các cạnh bên song song và bằng nhau.

Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau (tam giác, tứ giác, ...)

Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành vì có hai cạnh là hai cạnh bên của hình lăng trụ, hai cạnh còn lại thuộc hai đáy song song.

**Câu 17:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.
- D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

**Lời giải**

## Chọn C

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình hình hành, chúng bằng nhau nếu hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

**Câu 18:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Các cạnh bên của hình chóp cắt đôi một song song.
- B. Các cạnh bên của hình chóp cắt là các hình thang.
- C. Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.
- D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

## Lời giải

## Chọn C

Xét hình chóp cắt có đáy là đa giác (tam giác, tứ giác,...) ta thấy rằng:

Các cạnh bên của hình chóp cắt đôi một cắt nhau.

Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân.

Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.

**Câu 19:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Trong hình chóp cắt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- B. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.
- C. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân.
- D. Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cắt đồng quy tại một điểm.

## Lời giải

## Chọn C

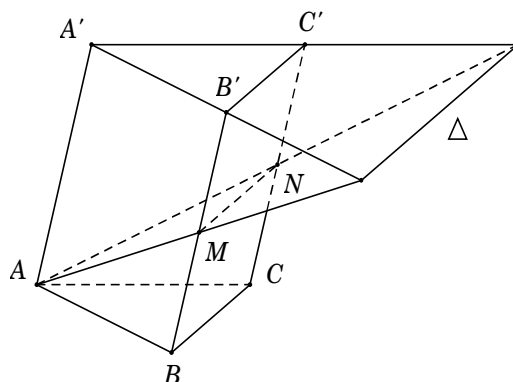
Với hình chóp cắt, các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.

**Câu 20:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BB'$  và  $CC'$ . Gọi  $\Delta$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(A'B'C')$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\Delta \parallel AB$ .
- B.  $\Delta \parallel AC$ .
- C.  $\Delta \parallel BC$ .
- D.  $\Delta \parallel AA'$ .

## Lời giải

## Chọn C



Ta có 
$$\begin{cases} MN \subset (AMN) \\ B'C' \subset (A'B'C') \end{cases} \longrightarrow \Delta \text{ là giao tuyến của hai mặt phẳng } (AMN) \text{ và } (A'B'C') \text{ sẽ song song với } MN \text{ và } B'C'.$$

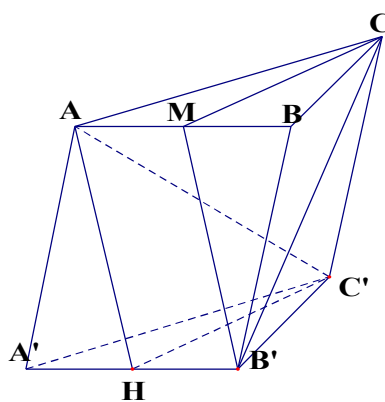
Suy ra  $\Delta \parallel BC$ .

**Câu 21:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $A'B'$ . Đường thẳng  $B'C$  song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A.  $(AHC')$ .      B.  $(AA'H)$ .      C.  $(HAB)$ .      D.  $(HA'C)$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  suy ra  $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$ . (1)

Vì  $MH$  là đường trung bình của hình bình hành  $ABB'A'$  suy ra  $MH$  song song và bằng  $BB'$  nên  $MH$  song song và bằng  $CC' \longrightarrow MHC'C$  là hình hình hành  $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$ . (2)

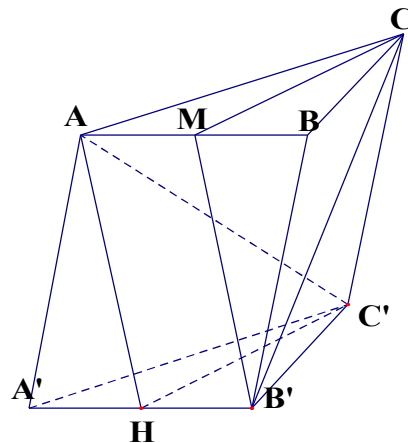
Từ (1) và (2), suy ra  $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$ .

**Câu 22:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $A'B'$ . Mặt phẳng  $(AHC')$  song song với đường thẳng nào sau đây?

- A.  $CB'$ .      B.  $BB'$ .      C.  $BC$ .      D.  $BA'$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  suy ra  $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$ . (1)

Vì  $MH$  là đường trung bình của hình bình hành  $ABB'A'$  suy ra  $MH$  song song và bằng  $BB'$  nên  $MH$  song song và bằng  $CC' \longrightarrow MHC'C$  là hình hình hành  $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$ .

**Câu 23:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A_1B_1C_1$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.**  $(ABC) // (A_1B_1C_1)$ .      **B.**  $AA_1 // (BCC_1)$ .  
**C.**  $AB // (A_1B_1C_1)$ .      **D.**  $AA_1B_1B$  là hình chữ nhật.

### Lời giải

Chọn D

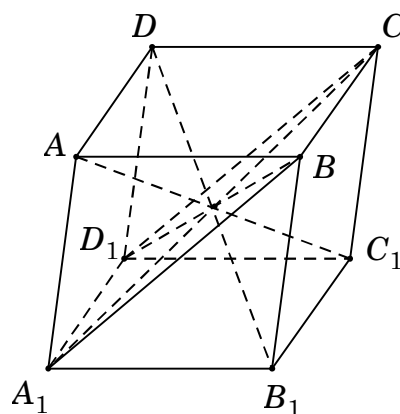
Vì mặt bên  $AA_1B_1B$  là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu  $ABC.A_1B_1C_1$  là hình lăng trụ đứng.

**Câu 24:** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A.**  $ABCD$  là hình bình hành.
- B.** Các đường thẳng  $A_1C, AC_1, DB_1, D_1B$  đồng quy.
- C.**  $(ADD_1A_1) // (BCC_1B_1)$ .
- D.**  $AD_1CB$  là hình chữ nhật.

### Lời giải

Chọn D



Đưa vào hình vẽ và tính chất của hình hộp chữ nhật, ta thấy rằng:

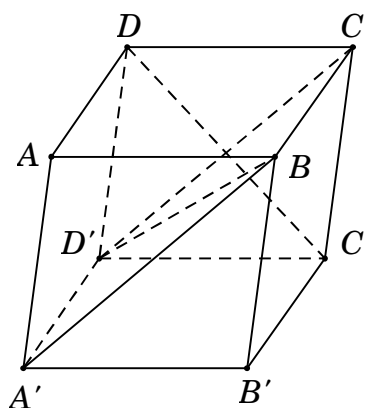
- Hình hộp có đáy  $ABCD$  là hình bình hành.
- Các đường thẳng  $A_1C, AC_1, DB_1, D_1B$  cắt nhau tại tâm của  $AA_1C_1C, BDD_1B_1$ .
- Hai mặt bên  $(ADD_1A_1), (BCC_1B_1)$  đối diện và song song với nhau.
- $AD_1$  và  $CB$  là hai đường thẳng chéo nhau suy ra  $AD_1CB$  không phải là hình chữ nhật.

**Câu 25:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh bên  $AA', BB', CC', DD'$ . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A.  $(AA'B'B) // (DD'C'C)$ .  
 B.  $(BA'D') // (ADC')$ .  
 C.  $A'B'CD$  là hình bình hành.  
 D.  $BB'D'D$  là một tứ giác.

Lời giải

Chọn B



Đưa vào hình vẽ dưới và tính chất của hình hộp, ta thấy rằng:

- Hai mặt bên  $(AA'B'B)$  và  $(DD'C'C)$  đối diện, song song với nhau.

- Hình hộp có hai đáy  $(ABCD)$ ,  $(A'B'C'D')$  là hình bình hành  $\Rightarrow A'B' = CD$  và  $A'B' \parallel CD$  suy ra  $A'B'CD$  là hình hình hành.
- $BD \parallel B'D'$  suy ra  $B, B', D', D$  đồng phẳng  $\Rightarrow BB'D'D$  là tứ giác.
- Mặt phẳng  $(BA'D')$  chứa đường thẳng  $CD'$  mà  $CD'$  cắt  $C'D$  suy ra  $(BA'D')$  không song song với  $(ADC')$ .

**Câu 26:** Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

- A. 3 cạnh.                      B. 4 cạnh.                      C. 5 cạnh.                      D. 6 cạnh.

Lời giải

Chọn C

Đa giác thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng có nhiều nhất 5 cạnh với các cạnh thuộc các mặt của hình lăng trụ tam giác.

**Câu 27:** Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

- A. 4 cạnh.                      B. 5 cạnh.                      C. 6 cạnh.                      D. 7 cạnh.

Lời giải

Chọn C

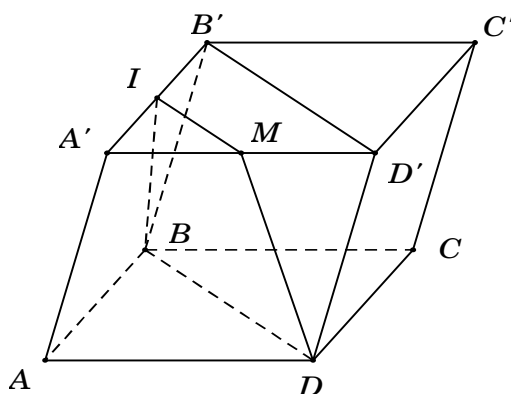
Vì hình hộp là hình lăng trụ có đáy là tứ giác và có 6 mặt nên thiết diện của hình hộp và mặt phẳng bất kì là một đa giác có nhiều nhất 6 cạnh.

**Câu 28:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Mặt phẳng  $(IB'D')$  cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Tam giác.                      B. Hình thang.                      C. Hình bình hành.                      D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Ta có 
$$\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \longrightarrow \text{Giao tuyến của } (IB'D') \text{ với } (ABCD) \text{ là đường thẳng } d \text{ đi qua } I \\ B'D' \parallel BD \end{cases}$$

và song song với  $BD$ .

Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $M = d \cap AD \longrightarrow IM \parallel BD \parallel B'D'$ .

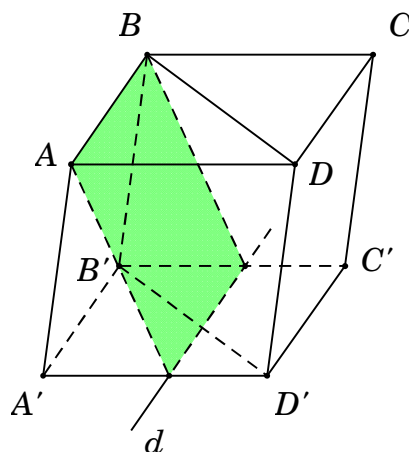
Khi đó thiết diện là tứ giác  $IMB'D'$  và tứ giác này là hình thang.

**Câu 29:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác  $(T)$ . Khẳng định nào sau đây không **sai**?

- A.  $(T)$  là hình chữ nhật.
- B.  $(T)$  là hình bình hành.
- C.  $(T)$  là hình thoi.
- D.  $(T)$  là hình vuông.

**Lời giải**

**Chọn B**



Giả sử mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua cạnh  $AB$  và cắt hình hộp theo tứ giác  $(T)$ .

Gọi  $d$  là đường thẳng giao tuyến của  $(\alpha)$  và mặt phẳng  $(A'B'C'D')$ .

Ta chứng minh được  $AB \parallel d$  suy ra tứ giác  $(T)$  là một hình bình hành.

## BÀI 6: PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

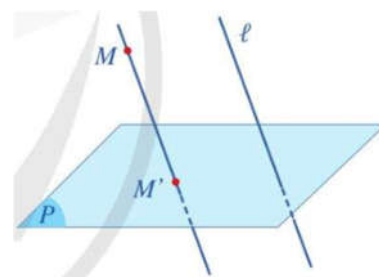
#### I. PHÉP CHIẾU SONG SONG

##### 1. Định nghĩa

-Ta có định nghĩa sau:

Cho mặt phẳng  $(P)$  và đường thẳng  $\ell$  cắt mặt phẳng  $(P)$ . Phép đặt tương ứng mỗi điểm  $M$  trong không gian với điểm  $M'$  của mặt phẳng  $(P)$  sao cho  $MM'$  song song hoặc trùng với  $\ell$  gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(P)$  theo phương  $\ell$ .

-Mặt phẳng  $(P)$  gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng  $\ell$  gọi là phương chiếu, điểm  $M'$  gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của điểm  $M$  qua phép chiếu song song nói trên.



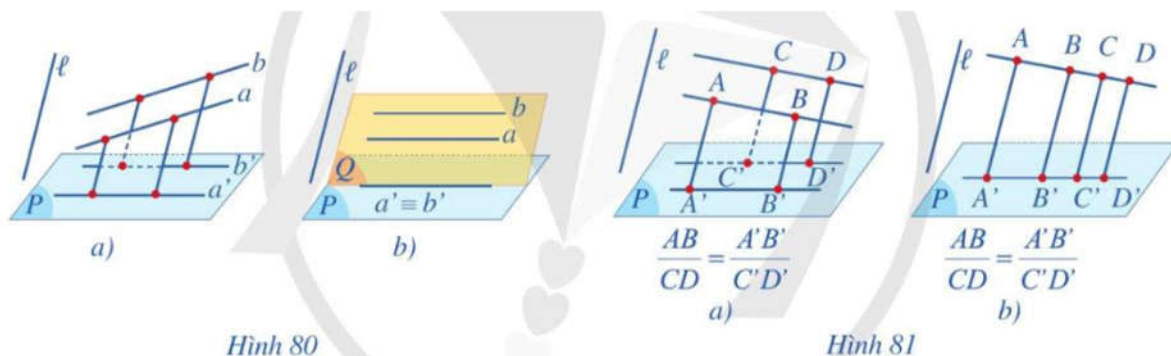
##### 2. Tính chất

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau:

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng; biến tia thành tia; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau (Hình 80 , Hình 81):

- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



Hình 80

Hình 81

**Chú ý:** Đối với hình chiếu song song của đường tròn, người ta chứng minh được rằng: Hình chiếu song song của một đường tròn trên một mặt phẳng theo phương  $\ell$  cho trước là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

## II. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

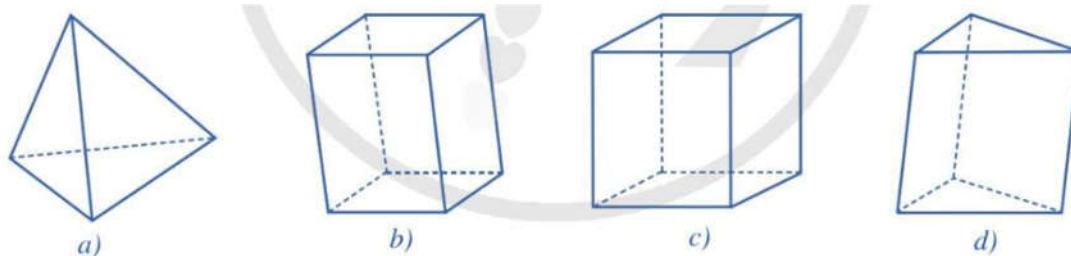
### 1. Khái niệm

Hình biểu diễn của một hình  $\mathcal{H}$  trong không gian là hình chiếu song song của hình  $\mathcal{H}$  trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

**Chú ý:** Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của một hình không gian ta phải áp dụng các tính chất của phép chiếu song song.

### 2. Hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

Các hình sau đây thường được sử dụng làm hình biểu diễn của: hình tứ diện (Hình 86a); hình hộp (Hình 86b); hình hộp chữ nhật (Hình 86c); hình lăng trụ tam giác (Hình 86d).

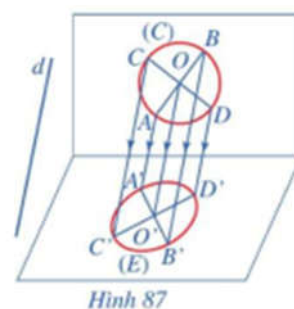


Hình 86

### Chú ý

1.

- Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, ...).
- Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, ...).
- Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn cho một hình thang tùy ý cho trước, sao cho tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.
- Ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn (Hình 87).



Hình 87

2. Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc. Từ đó suy ra nếu trên hình  $\mathcal{H}$  có hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song thì tỉ số của chúng không nhất thiết phải giữ nguyên trên hình biểu diễn. Cũng như vậy, độ lớn của một góc trên hình  $\mathcal{H}$  không nhất thiết được giữ nguyên trên hình biểu diễn.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

## Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

## 1. Phương pháp

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta cần chú ý một số điểm sau:

- Nếu trên hình  $H$  có hai đoạn thẳng cùng phương thì trên hình  $H'$  hình chiếu của hai đoạn thẳng đó phải cùng phương.
- Trung điểm của một đoạn thẳng có hình chiếu là trung điểm của đoạn thẳng hình chiếu.
- Trong tam giác có một góc tù, ta cần chú ý chân đường cao kẻ từ đỉnh của góc nhọn không nằm trên cạnh đối diện mà nằm ở trên phần kéo dài của cạnh ấy.
- Một góc bất kì có thể biểu diễn cho mọi góc (nhọn, vuông, tù).
- Một tam giác bất kì có thể là hình biểu diễn của mọi tam giác (cân, đều, vuông).
- Hình bình hành có thể dùng làm hình biểu diễn cho các hình có tính chất của hình bình hành (vuông, thoi, chữ nhật,...)
- Một đường tròn được biểu diễn bởi một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

## 2. Các ví dụ

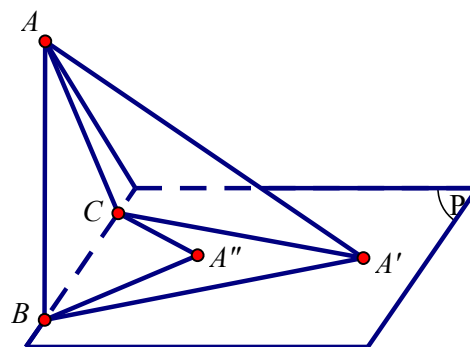
**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy chọn mặt phẳng chiếu  $(P)$  và phương chiếu  $d$  để hình chiếu của tam giác  $ABC$  trên mặt phẳng  $(P)$  là:

- Một tam giác cân.
- Một tam giác vuông.

## Giải

Qua  $BC$  dựng mặt phẳng  $(P)$  không qua  $A$ .

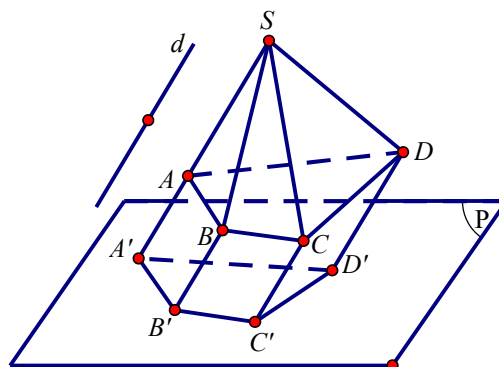
- Trong mặt phẳng  $(P)$ , dựng tam giác  $BCA'$  cân tại  $A'$ . Khi đó, phép chiếu song song lên  $(P)$  theo phương chiếu  $AA'$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $BCA'$ .
- Trong mặt phẳng  $(P)$ , dựng tam giác  $BCA''$  vuông tại  $A''$ . Khi đó, phép chiếu song song lên  $(P)$  theo phương chiếu  $AA''$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác vuông  $A''BC$ .



**Ví dụ 2.** Vẽ hình chiếu của hình chóp  $S.ABCD$  lên mặt phẳng  $(P)$  theo phương chiếu  $SA$  ( $SA$  không song song với  $(P)$ ).

## Giải

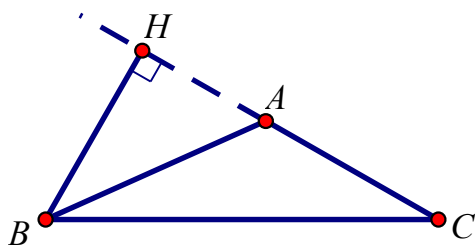
Vì phương chiếu  $d$  là  $SA$  nên  $SA$  cắt  $(P)$  tại  $A'$ . Các đỉnh  $B, C, D$  có hình chiếu trên  $(P)$  lần lượt là  $B', C', D'$  ( $BB' \parallel AA', CC' \parallel AA', DD' \parallel AA'$ ). Vậy hình chiếu của hình chóp  $S.ABCD$  lên  $(P)$  là tứ giác  $A'B'C'D'$ .



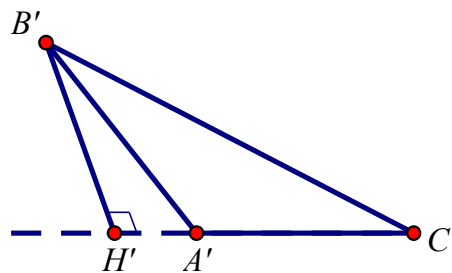
**Ví dụ 3.** Vẽ hình biểu diễn của tam giác  $ABC$  có góc  $A$  tù, đường cao  $BH$ .

## Giải

Xem hình vẽ sau:



Hình thật



Hình biểu diễn

**Ví dụ 4.** Vẽ hình biểu diễn của đường tròn có hai đường kính vuông góc.

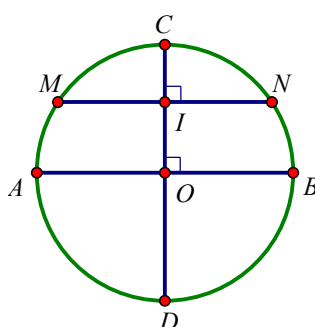
**Giải**

Giả sử trên hình thật ta có đường tròn tâm (O), tâm O, có hai đường kính AB và CD vuông góc. Nếu ta vẽ dây cung MN song song với AB thì CD sẽ cắt MN tại trung điểm I của MN.

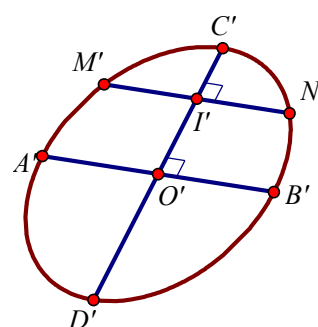
Suy ra cách vẽ hình biểu diễn như sau:

- Vẽ elip (E), tâm  $O'$  và đường kính  $A'B'$  (qua  $O'$ ) của nó.
- Vẽ dây cung  $M'N'$   $\parallel$   $A'B'$ .
- Lấy  $I'$  là trung điểm của  $M'N'$ .

Đường thẳng  $O'I'$  cắt elip (E) tại  $C'$ ,  $D'$ . Ta có  $A'B'$  và  $C'D'$  là hình biểu diễn hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn.



Hình thật



Hình biểu diễn

**Ví dụ 5.** Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

**Giải**

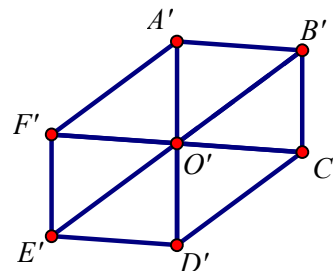
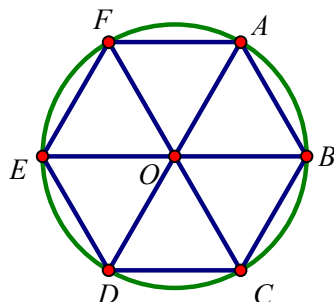
Xét hình lục giác đều ABCDEF, ta thấy:

- Tứ giác OABC là một hình thoi.
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O. Suy ra cách vẽ như sau:

+ Vẽ hình bình hành  $O'A'B'C'$  biểu diễn cho hình thoi OABC.

+ Lấy các điểm  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  đối xứng với các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  qua  $O'$ .

+  $A'B'C'D'E'F'$  là hình cần vẽ.



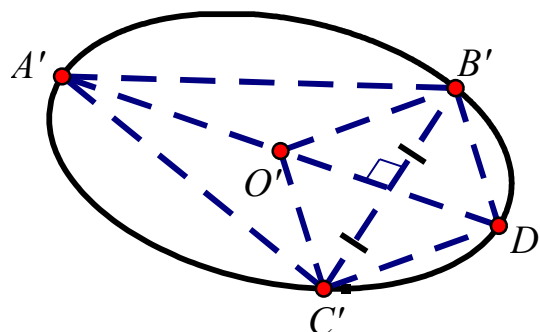
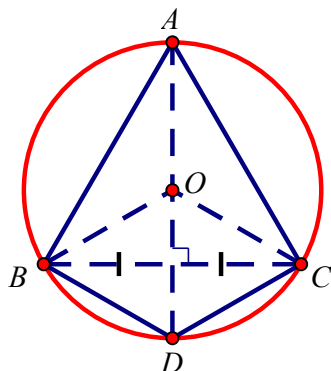
Hình biểu diễn lục giác đều

**Ví dụ 6.** Vẽ hình biểu diễn của một tam giác đều.

**Giải**

Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, ta thấy tứ giác OBDC là hình thoi. Từ đó suy ra cách vẽ như sau:

- + Vẽ hình bình hành O'B'D'C' biểu diễn cho hình thoi OBDC.
- + Lấy điểm A' là điểm đối xứng của D' qua O'.
- + Tam giác A'B'C' là tam giác đều cần tìm.



Hình biểu diễn tam giác đều

## Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song

### 1. Phương pháp

Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song thường là dựa vào các tính chất của phép chiếu song song để chứng minh một vấn đề nào đó. Cần chú ý rằng trong các bài toán dạng này, việc tìm phương chiếu đóng vai trò khá quan trọng.

### 2. Các ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.

- a. Chứng minh hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là trọng tâm của tam giác BCD.
- b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AC. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N theo phép chiếu nói trên.

### Giải

a. Chứng minh G' là trọng tâm của tam giác BCD:

- Gọi I là trung điểm của CD. Qua phép chiếu song song phương AB thì IB là hình chiếu của IA trên mặt phẳng (BCD).

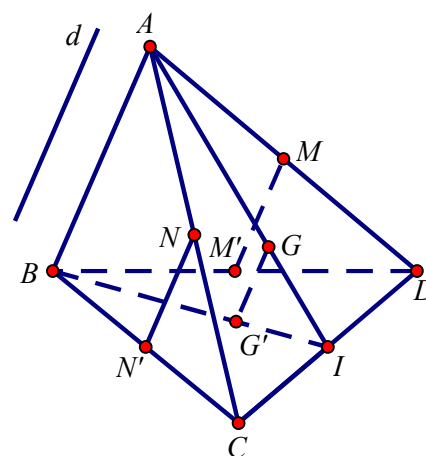
- Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự ba điểm A, G, I nên hình biểu diễn G' của G nằm trên BI và ở giữa B và I.

Trong tam giác IAB, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{IG}{IA} = \frac{IG'}{IB} \\ \frac{IG}{IA} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{IG'}{IB} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra G' là trọng tâm của tam giác BCD.

- b. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song phương AB trên mặt phẳng (BCD). Ta thấy:



- BD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD); M là trung điểm của AD nên M' là trung điểm của BD.
- BC là hình chiếu của AC trên mặt phẳng (BCD); N là trung điểm của AC nên N' là trung điểm của BC.

**Ví dụ 2.** Cho hai hình bình hành ABCD và BCC'B' nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho  $MN \parallel BC'$ .

**Giải**

- Phân tích:

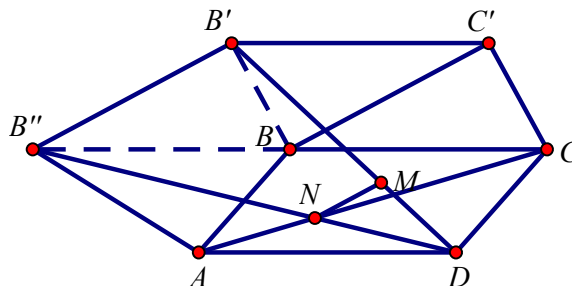
Giả sử đã tìm được  $M \in DB'$  và  $N \in AC$  sao cho  $MN \parallel BC'$ .

Xét phép chiếu song song theo phương  $BC'$  lên mặt phẳng (ABCD). Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, B' lần lượt là D, N, B''. Vì D, M, B' thẳng hàng nên D, N, B'' cũng thẳng hàng. Do đó, N là giao điểm của DB'' và AC. Từ đó, ta có cách dựng như sau:

- Cách dựng:

- + Dựng B'' là hình chiếu của B' qua phép chiếu theo phương  $BC'$  lên mặt phẳng (ABCD).
- + Dựng N là giao điểm của DB'' và AC.
- + Trong mặt phẳng (DB'B''), ta kẻ  $NM \parallel B'B''$  cắt DB' tại M.

Vậy M và N là các điểm cần tìm.

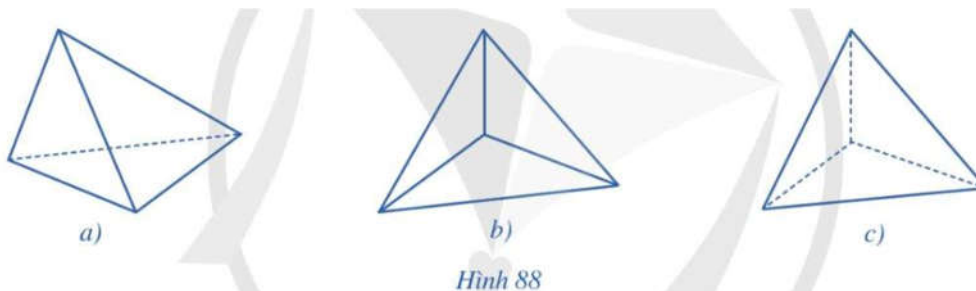


## C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

### Bài 1.

các Hình

Trong



Hình 88

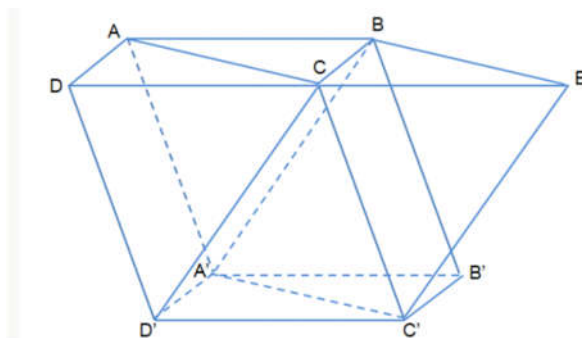
88a, 88b, 88c, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?

### Lời giải

Ba Hình 88a, 88b, 88c đều là hình biểu diễn cho hình tứ diện.

**Bài 2.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Xác định ảnh của tam giác  $A'C'D'$  qua phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(ABCD)$  theo phương  $A'B$ .

Lời giải



Ta có:  $B$  là ảnh của  $A'$  lên  $(ABCD)$

Có:  $D'C \parallel A'B$  nên  $C$  là ảnh của  $D'$  lên  $(ABCD)$

Từ  $C'$  kẻ  $C'E \parallel CD' \parallel A'B$ . Suy ra  $E$  là ảnh của  $C'$  lên  $(ABCD)$

Vậy tam giác  $BCE$  là ảnh của tam giác  $A'C'D'$  qua phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(ABCD)$  theo phương  $A'B$ .

**Bài 3.** Vẽ hình biểu diễn của các vật trong Hình 89 và Hình 90.

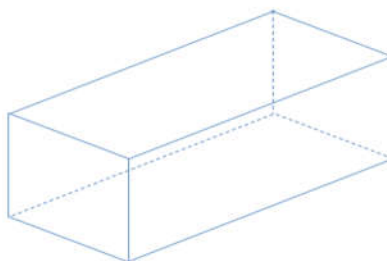
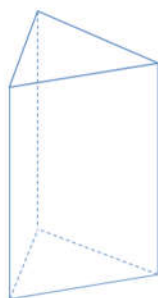


Hình 89



Hình 90

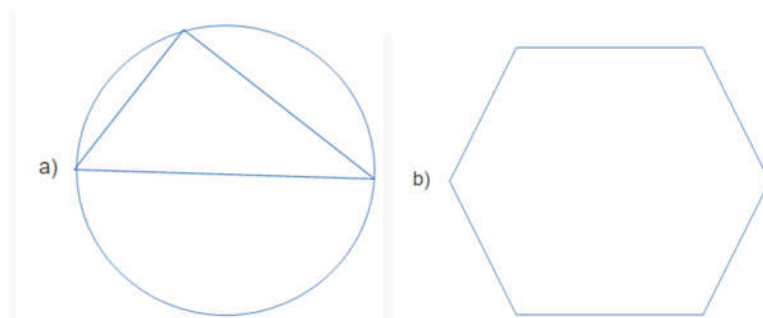
Lời giải



**Bài 4.** Vẽ hình biểu diễn của:

- Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn;
- Một lục giác đều.

Lời giải



## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

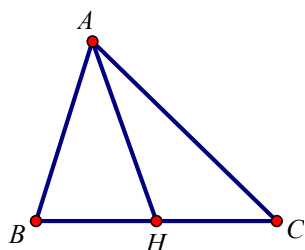
**Câu 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.
- B. Hình chiếu song song của một hình bình hành là một hình bình hành.
- C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.
- D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

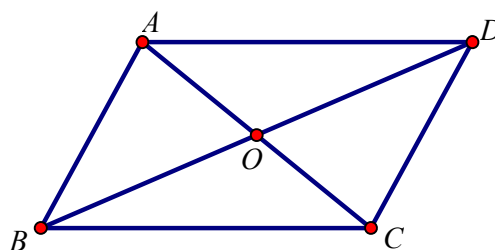
**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 2:** Trên hình  $\mathcal{A}$  có  $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB = HC \end{cases}$  và hình  $\mathcal{B}$  có  $\begin{cases} AB \parallel CD, AD \parallel BC \\ AC \perp BD \end{cases}$



Hình  $\mathcal{A}$



Hình  $\mathcal{B}$

Hãy Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. ABC là tam giác đều.
- B. ABC là tam giác cân tại A
- C. ABCD là hình thoi.
- D. B và C đúng.

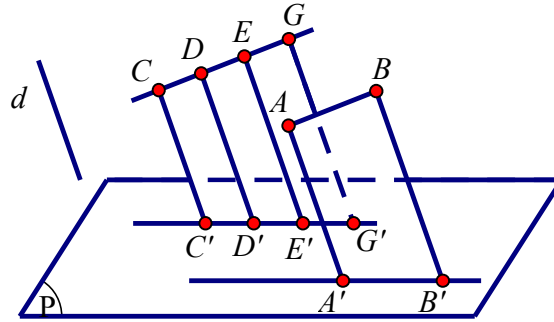
**Lời giải**

**Chọn D**

Nhìn hình vẽ, ta thấy:

- Tam giác ABC có AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A  $\rightarrow$  B đúng.
- Tứ giác ABCD có  $AB \parallel CD, AC \parallel BD$  nên là hình bình hành. Mặt khác hai đường chéo của nó vuông góc nên ABCD là hình thoi  $\rightarrow$  C đúng.

**Câu 3:** Trên hình  $C$ , ta có phép chiếu song song theo phương  $d$  và mặt phẳng chiếu  $(P)$ ;  $AB \parallel CG$  và  $AB = DG$ ;  $A', B', C', D', E', G'$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B, C, D, E, G$  qua phép chiếu nói trên.



Hình  $C$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$ .

B.  $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$ .

C.  $D'G' = A'B'$ .

D. Tất cả A, B, C đều đúng.

**Lời giải**

**Chọn D**

The định lí 2, ta thấy câu A và câu B đúng. Từ câu A đúng suy ra câu C đúng.

**Câu 4:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

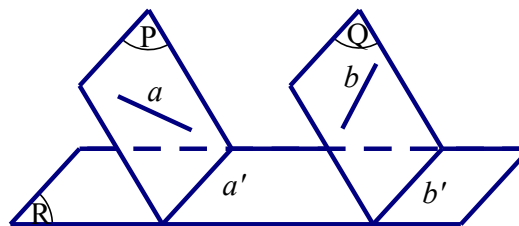
A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.

C. Hình chiếu song song của hai mặt hình vuông là một hình vuông.

D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

**Lời giải**



**Chọn A**

Dựng mặt phẳng  $(P)$  qua  $a$  và song song với  $b$ . Dựng mặt phẳng  $(Q)$  qua  $b$  và song song với  $a$ . Giả sử  $(P)$  song song với  $(Q)$ . Ta Chọn phương chiếu  $d$  song song với  $(P)$  và mặt phẳng chiếu  $(R)$  sao cho  $(R)$  cắt  $(P)$  và  $(Q)$  lần lượt theo hai giao tuyến  $a'$  và  $b'$ . Khi đó hình chiếu  $a', b'$  song song với nhau.

**Câu 5:** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(P)$ , hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$  có hình chiếu là hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $a'$  và  $b'$  luôn luôn cắt nhau.

- B.  $a'$  và  $b'$  có thể trùng nhau.
- C.  $a$  và  $b$  không thể song song.
- D.  $a'$  và  $b'$  có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Lời giải

Chọn D

Gọi  $l$  là phương chiếu,  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là các mặt phẳng song song với  $l$  và lần lượt đi qua  $a$  và  $b$ . Khi đó nếu  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  cắt nhau thì  $a'$  và  $b'$  cắt nhau, nếu  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song thì  $a'$  và  $b'$  song song.

- Câu 6:** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(P)$ , hai đường thẳng  $a$  và  $b$  có hình chiếu là hai đường thẳng song song  $a'$  và  $b'$ . Khi đó:
- A.  $a$  và  $b$  phải song song với nhau.
  - B.  $a$  và  $b$  phải cắt nhau.
  - C.  $a$  và  $b$  có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
  - D.  $a$  và  $b$  không thể song song.

Lời giải

Chọn C

Nếu  $a \parallel b'$  thì  $mp(a, a') \parallel mp(b, b')$ . Bởi vậy  $a$  và  $b$  có thể song song hoặc chéo nhau.

- Câu 7:** Cho bốn điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$  có hình chiếu song song trên mặt phẳng  $(P)$  lần lượt là bốn điểm  $A', B', C', D'$ . Những trường hợp nào sau đây không thể xảy ra?
- A.  $A'B'C'D'$  là bốn đỉnh của một hình bình hành.
  - B.  $D'$  là trọng tâm tam giác  $A'B'C'$ .
  - C.  $D'$  là trung điểm cạnh  $A'B'$ .
  - D. Hai điểm  $B', C'$  nằm giữa hai điểm  $A'$  và  $D'$ .

Lời giải

Chọn D

Bốn điểm không đồng phẳng  $A', B', C', D'$  không thể thẳng hàng.

- Câu 8:** Hình chiếu song song của một hình thang  $ABCD$  không thể là hình nào dưới đây?
- A. Hình bình hành.
  - B. Hình tam giác cân.
  - C. Đoạn thẳng.
  - D. Bốn điểm thẳng hàng.

Lời giải

Chọn B

