



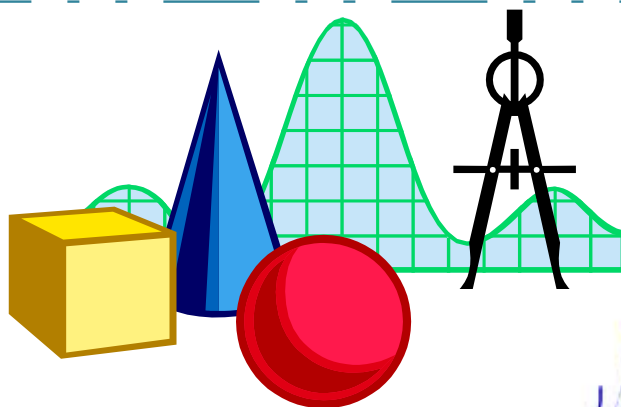
Giáo viên: **LÊ BÁ BẢO**_ Trường THPT Đặng Huy Trứ, Huế

SĐT: 0935.785.115

Đăng kí học theo địa chỉ: **116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế**
Hoặc Trung tâm Km 10 Hương Trà

TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN



Phiên bản 2020

Lê Bá Bảo!

Cố lên các em nhé!

Huế, tháng 02/2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

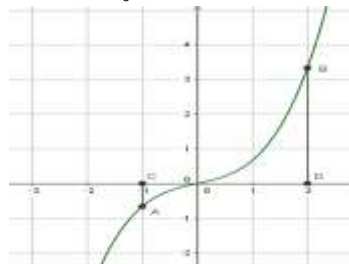
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

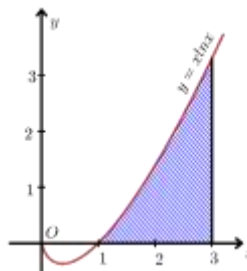
Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

- Câu 1:** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?
- A. $V = 2(\pi + 1)$. B. $V = 2\pi(\pi + 1)$. C. $V = 2\pi^2$. D. $V = 2\pi$.
- Câu 2:** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $S = \int_0^2 2^x dx$ B. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$ C. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$ D. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$
- Câu 3:** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
- Câu 4:** Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $S = b - a$. B. $S = b + a$. C. $S = -b + a$. D. $S = -b - a$.
- Câu 5:** Cho hình phẳng (H) (phần gạch sọc) như hình vẽ bên dưới:



Tính diện tích hình phẳng (H) .

- A. 1. B. $\frac{9}{2}\ln 3 - 2$. C. $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}$. D. $\frac{9}{2}\ln 3 + 2$.

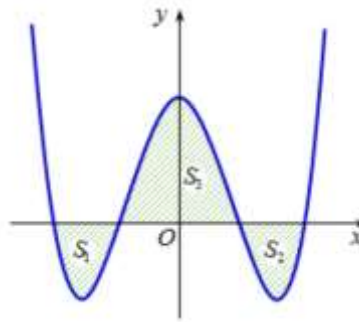
Câu 6: Viết công thức tính thể tích V của vật thể T giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 2019$ và $x = 2020$, vật thể T bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x ($2019 \leq x \leq 2020$) có thiết diện là một hình vuông độ dài cạnh là a .

- A. $V = \pi \int_{2019}^{2020} a^2 dx$. B. $V = \pi \int_{2019}^{2020} a dx$. C. $V = \int_{2019}^{2020} a^2 dx$. D. $V = \int_{2019}^{2020} a dx$.

Câu 7: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 3x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$. Quay hình (H) quanh trục Ox , ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

- A. $\frac{27\pi}{10}$. B. $\frac{9\pi}{2}$. C. $\frac{81\pi}{10}$. D. $\frac{5\pi}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số thực). Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng nằm dưới trục Ox và S_3 là diện tích của hình phẳng nằm trên trục Ox được tạo bởi (C_m) với trục Ox . Biết rằng tồn tại duy nhất giá trị của $m = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản) để $S_1 + S_2 = S_3$. Giá trị của $2a - b$ bằng

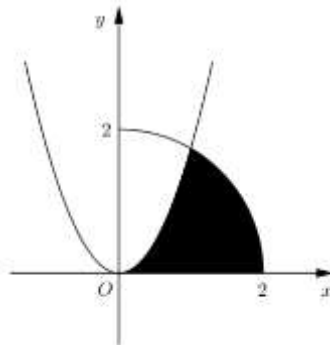


- A. 3. B. -4. C. 6. D. -2.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 1$ và $y = x - 1$ bằng

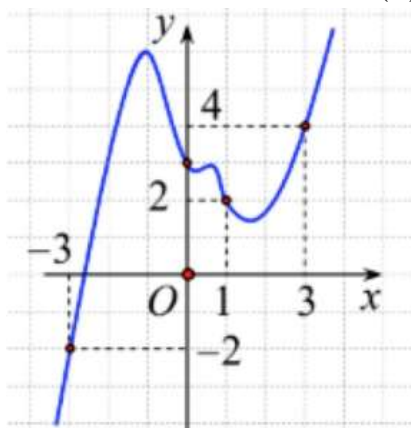
- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{13}{6}$. C. $\frac{13\pi}{6}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 10: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



- A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Bất phương trình $2f(x) > (x+1)^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq g(3)$. B. $m < g(-3)$. C. $m < g(1)$. D. $m \leq g(-3)$.

Câu 12: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2m. B. 2m. C. 10m. D. 20m.

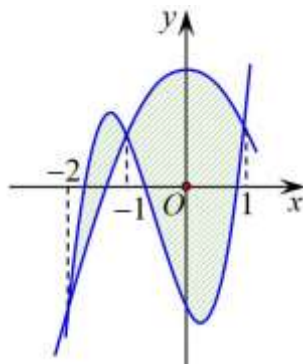
Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$; tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4; 2)$ và trục hoành là

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 14: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\pi e^2}{2}$. B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$. C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

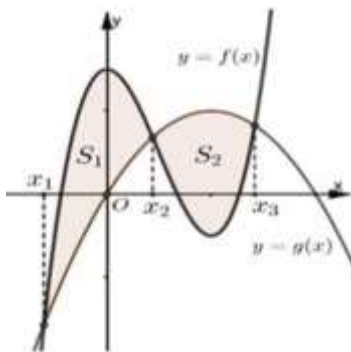
Câu 15: Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{37}{6}$ B. $\frac{13}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{37}{12}$

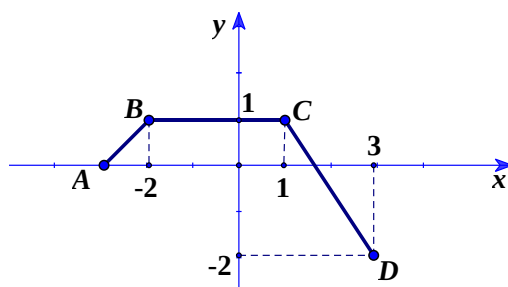
Câu 16: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) và $g(x) = mx^2 + nx + p$, ($m \neq 0$) có đồ thị cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (tham khảo hình vẽ)



Biết $S_1 = 10$, $S_2 = 7$. Khi đó, $\int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx$ bằng

- A. 3. B. -3. C. -17. D. 17.

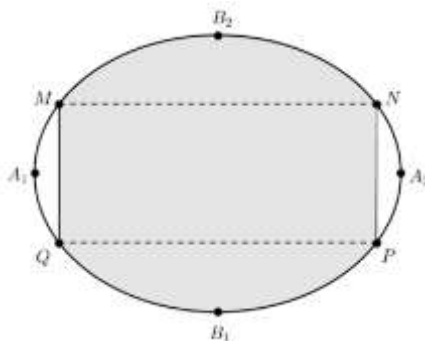
Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3; 3]$ là đường gấp khúc $ABCD$ như hình vẽ.



Tính $\int_{-3}^3 f(x) dx$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{35}{6}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $-\frac{35}{6}$.

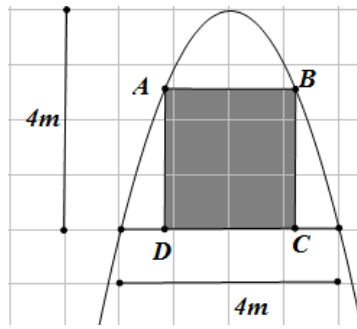
Câu 18: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên dưới:



Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$.

- A. 7322000 đồng. B. 7213000 đồng. C. 5526000 đồng. D. 5782000 đồng.

Câu 19: Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X. Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một Pano có dạng hình parabol như hình vẽ.



Biết rằng Đoàn trường X sẽ yêu cầu các lớp gửi ảnh dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật ABCD, phần còn lại sẽ được tranh trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 . Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên Pano sẽ là bao nhiêu ?
 A. 1.230.000 đồng. B. 900.000 đồng. C. 1.232.000 đồng. D. 902.000 đồng.

Câu 20: Người ta làm một chiếc vòng tròn bằng bạc, biết đường kính ngoài của chiếc vòng bạc là 70 cm , đường kính trong là 50 cm (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Thể tích của vòng bạc là

- A. $1500\pi^2\text{ cm}^3$. B. $9000\pi^2\text{ cm}^3$. C. $1500\pi\text{ cm}^3$. D. $1500\pi\text{ cm}^3$.

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2(\pi + 1)$.

B. $V = 2\pi(\pi + 1)$.

C. $V = 2\pi^2$.

D. $V = 2\pi$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } V = \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 2: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 2^x dx$

B. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$

C. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$

D. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$

Lời giải:

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx \quad (\text{do } 2^x > 0, \forall x \in [0; 2]).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

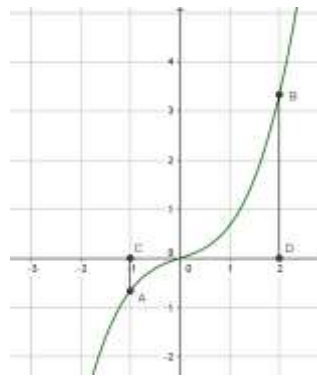
Lời giải:

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



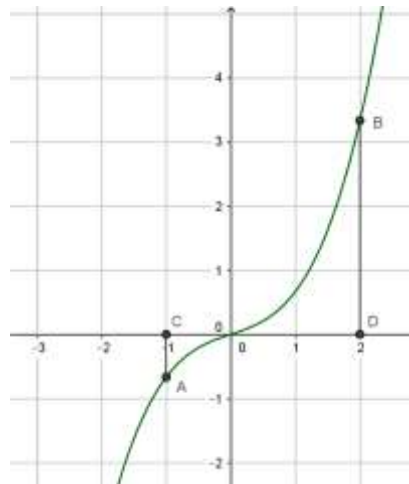
A. $S = b - a$.

B. $S = b + a$.

C. $S = -b + a$.

D. $S = -b - a$.

Lời giải:

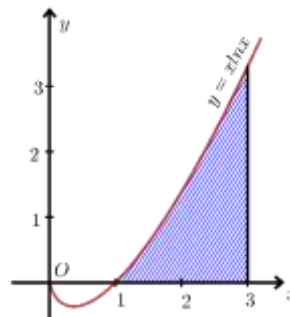


Ta có:

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 5: Cho hình phẳng (H) (phần gạch sọc) như hình vẽ bên dưới:



Tính diện tích hình phẳng (H).

A. 1.

B. $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$.

C. $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$.

D. $\frac{9}{2} \ln 3 + 2$.

Lời giải:

Ta có: diện tích cần tìm là $S = \int_1^3 x \ln x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \text{ khi đó: } S = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{9}{2} \ln 3 - 2.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 6: Viết công thức tính thể tích V của vật thể T giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 2019$ và $x = 2020$, vật thể T bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x ($2019 \leq x \leq 2020$) có thiết diện là một hình vuông độ dài cạnh là a .

A. $V = \pi \int_{2019}^{2020} a^2 dx$. B. $V = \pi \int_{2019}^{2020} a dx$. C. $V = \int_{2019}^{2020} a^2 dx$. D. $V = \int_{2019}^{2020} a dx$.

Lời giải:

Hình vuông có độ dài cạnh a có diện tích là $S(x) = a^2$

Thể tích của vật thể T là $V = \int_{2019}^{2020} a^2 dx$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 7: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 3x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$. Quay hình (H) quanh trục Ox , ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{27\pi}{10}$. B. $\frac{9\pi}{2}$. C. $\frac{81\pi}{10}$. D. $\frac{5\pi}{2}$.

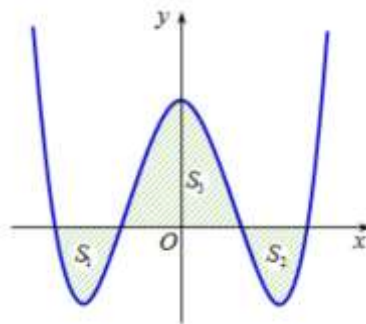
Lời giải:

Khi quay hình (H) quanh trục Ox , ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_0^3 (-x^2 + 3x)^2 dx = \pi \int_0^3 (x^4 - 6x^3 + 9x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{10}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 8: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số thực). Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng nằm dưới trục Ox và S_3 là diện tích của hình phẳng nằm trên trục Ox được tạo bởi (C_m) với trục Ox . Biết rằng tồn tại duy nhất giá trị của $m = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản) để $S_1 + S_2 = S_3$. Giá trị của $2a - b$ bằng



A. 3. B. -4. C. 6. D. -2.

Lời giải:

Gọi 4 nghiệm của $y = x^4 - 3x^2 + m = 0$ lần lượt là $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ với $0 < t_1 < t_2$.

$$\text{Đề } S_1 + S_2 = S_3 \text{ thì } \int_{-\sqrt{t_2}}^{\sqrt{t_2}} (x^4 - 3x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_{-\sqrt{t_2}}^{\sqrt{t_2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{t_2})^5}{5} - (\sqrt{t_2})^3 + m\sqrt{t_2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t_2} \left(\frac{t_2^2}{5} - t_2 + m \right) = 0 \text{ (do } t_2 \neq 0) \Leftrightarrow \frac{t_2^2}{5} - t_2 + m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } \sqrt{t_2} \text{ là nghiệm của } x^4 - 3x^2 + m = 0 \Rightarrow t_2^2 - 3t_2 + m = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{t_2^2}{5} - t_2 - t_2^2 + 3t_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{5} t_2^2 + 2t_2 = 0 \Leftrightarrow t_2 \cdot \left(\frac{-4}{5} t_2 + 2 \right) = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{5}{2} \quad (\text{do } t_2 \neq 0).$$

$$\text{Thay } t_2 = \frac{5}{2} \text{ vào (2) ta được } \frac{25}{4} - \frac{15}{2} + m = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{4}. \text{ Do đó } a = 5; b = 4 \Rightarrow 2a - b = 6.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 1$ và $y = x - 1$ bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{13}{6}$. C. $\frac{13\pi}{6}$. **D. $\frac{1}{6}$.**

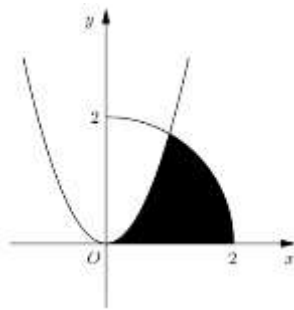
Lời giải:

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm hai đường là: } x^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường là } S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 10: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. **B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.** C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x = \pm 1$ với $0 \leq x \leq 2$ nên ta có $x = 1$

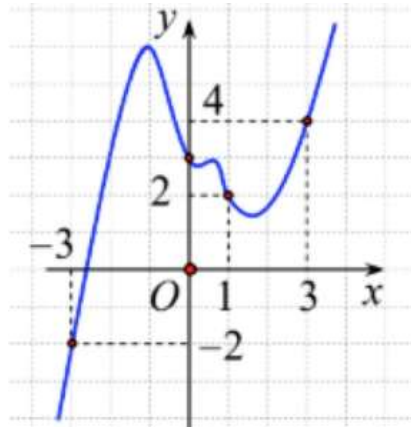
$$\text{Ta có diện tích } S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$\text{Đặt: } x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Bất phương trình $2f(x) > (x+1)^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$ khi và chỉ khi

A. $m \leq g(3)$.

B. $m < g(-3)$.

C. $m < g(1)$.

D. $m \leq g(-3)$.

Lời giải:

$$\text{Có } 2f(x) > (x+1)^2 + m, \forall x \in [-3; 3] \Leftrightarrow m < g(x) = 2f(x) - (x+1)^2, \forall x \in [-3; 3]$$

$$\Leftrightarrow m < \min_{[-3; 3]} g(x).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow x = -3, x = 1, x = 3.$$

Vì kẻ đường thẳng $y = x+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại các điểm có hoành độ $x = -3$, $x = 1$, $x = 3$ như sau:

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } \min_{[-3; 3]} g(x) = \min \{g(-3), g(3)\}.$$

Quan sát diện tích của hai hình phẳng trên hình vẽ ta có

$$S_1 = \int_{-3}^1 |f'(x) - (x+1)| dx > S_2 = \int_1^3 |f'(x) - (x+1)| dx \Leftrightarrow \int_{-3}^1 (f'(x) - (x+1)) dx > -\int_1^3 (f'(x) - (x+1)) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{-3}^1 g'(x) dx > -\frac{1}{2} \int_1^3 g'(x) dx \Leftrightarrow \int_{-3}^1 g'(x) dx > -\int_1^3 g'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow g(1) - g(-3) > g(1) - g(3) \Leftrightarrow g(-3) < g(3) \Rightarrow \min_{[-3; 3]} g(x) = g(-3). \text{ Vậy } m < g(-3).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 12: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m.

B. 2m.

C. 10m.

D. 20m.

Lời giải:

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$; tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4; 2)$ và trục hoành là

A. $\frac{3}{8}$.

B. $\frac{2}{3}$.

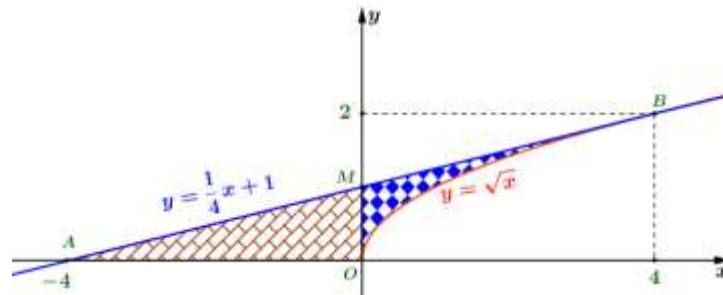
C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Xét hàm số $y = \sqrt{x}$ ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(4) = \frac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(4; 2)$ là $y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$.



Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = S_{OAM} + S_{OMB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 + \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x} \right) dx = \frac{8}{3}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 14: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi e^2}{2}$.

B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$.

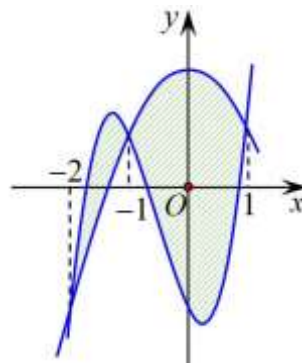
D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Lời giải:

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \pi e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 15: Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{6}$

B. $\frac{13}{2}$

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{37}{12}$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0. \quad (*)$$

Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$;

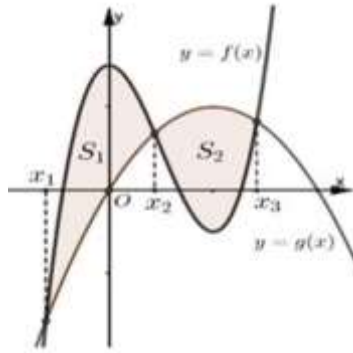
$x = -1$; $x = 1$. Ta được

$$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1).$$

Khi đó $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$. Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^1 |2(x+2)(x+1)(x-1)| dx = \frac{37}{6}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 16: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) và $g(x) = mx^2 + nx + p$, ($m \neq 0$) có đồ thị cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (tham khảo hình vẽ)



Biết $S_1 = 10$, $S_2 = 7$. Khi đó, $\int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx$ bằng

A. 3.

B. -3.

C. -17.

D. 17.

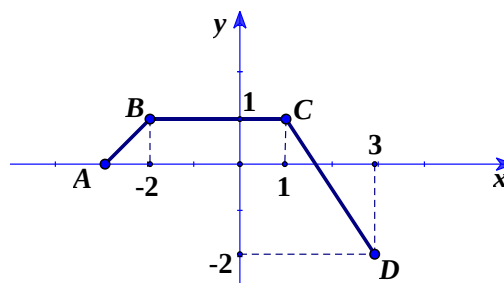
Lời giải:

Theo đề bài ta có $10 = S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx$, $7 = S_2 = \int_{x_2}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx$.

$$\text{Suy ra } \int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)] dx + \int_{x_2}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx = -S_1 + S_2 = -10 + 7 = -3$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3; 3]$ là đường gấp khúc $ABCD$ như hình vẽ.



Tính $\int_{-3}^3 f(x) dx$.

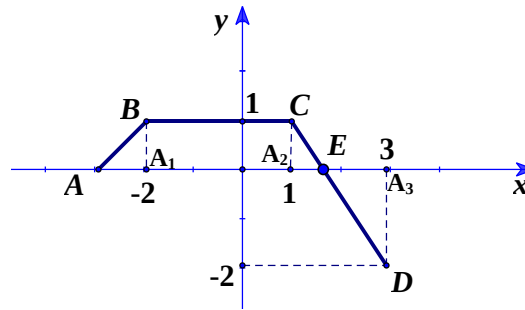
A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{35}{6}$.

C. $\frac{-5}{2}$.

D. $\frac{-35}{6}$.

Lời giải:



Phương trình đường thẳng CD đi qua $C(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{CD} = (2; -3)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình chính tắc (CD) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} \Leftrightarrow -3x - 2y = -5$.

Đặt $E = (CD) \cap Ox$. Ta được $\begin{cases} -3x - 2y = -5 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

Do đó $\int_{-3}^3 |f(x)| dx = \int_{-3}^{-1} |f(x)| dx + \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^{\frac{5}{3}} |f(x)| dx + \int_{\frac{5}{3}}^3 |f(x)| dx$

$$= S_{ABA_1} + S_{A_1BCA_2} + S_{A_2CE} + S_{EDA_3} = \frac{1}{2}(1 \times 1) + (3 \times 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \times 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} \times 2\right) = \frac{5}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

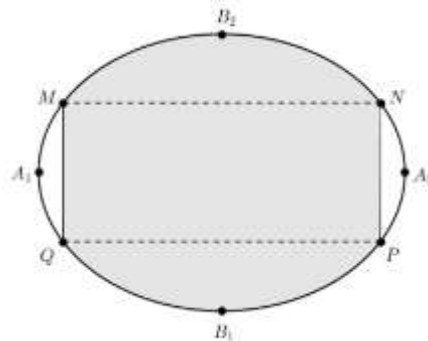
Câu 18: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000 \text{ đồng}/m^2$ và phần còn lại là $100.000 \text{ đồng}/m^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m, B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$.

A. 7322000 đồng.

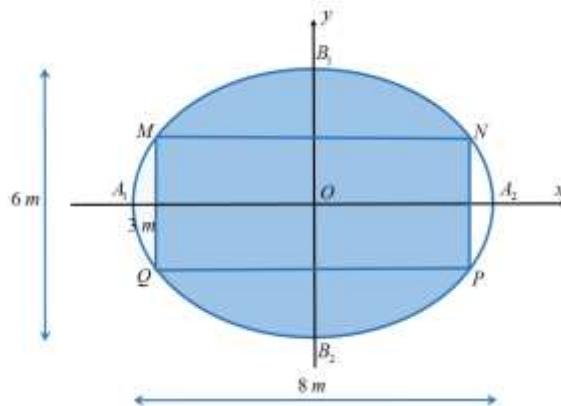
B. 7213000 đồng.

C. 5526000 đồng.

D. 5782000 đồng.



Lời giải:



Gắn hệ trục tọa độ Oxy có A_1A_2 trùng với trục Ox , B_1B_2 trùng với trục Oy , gốc tọa độ $O = A_1A_2 \cap B_1B_2$ (như hình vẽ).

Elip có độ dài trục lớn $2a = A_1A_2 = 8 \Leftrightarrow a = 4 \text{ (m)}$, độ dài trục nhỏ $2b = B_1B_2 = 6 \Leftrightarrow b = 3 \text{ (m)}$.

Suy ra phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$. Trong đó:

$$\text{Do } MQ = 3 \Rightarrow y_M = \frac{MQ}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_M = -4\sqrt{1 - \frac{y_M^2}{9}} = -2\sqrt{3} \Rightarrow x_N = 2\sqrt{3}.$$

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm của elip, S_2 là diện tích phần không bị tô đậm của elip và S là diện tích elip. Suy ra S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$,

$$y = -\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}, x = -2\sqrt{3}, x = 2\sqrt{3}$$

Ta có:

$$+ S = \pi ab = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$+ S_1 = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} - \left(-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \right) \right] dx = 3 \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = 4\sin t \Rightarrow dx = 4\cos t dt.$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow t = 0. \text{ Khi } x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow S_1 = 3 \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 48\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 24(1+\cos 2t) dt$$

$$= (24t + 12\sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\pi + 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

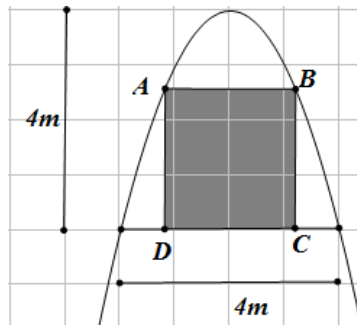
$$\Rightarrow S_2 = S - S_1 = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Suy ra chi phí để sơn biển quảng cáo là: $200000.S_1 + 100000.S_2 \approx 7322416$ (đồng).

Vậy số tiền để sơn biển quảng cáo gần nhất với 7322000 đồng.

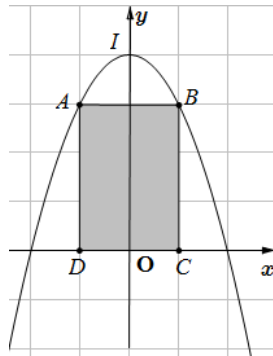
$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 19: Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X. Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một Pano có dạng hình parabol như hình vẽ.



Biết rằng Đoàn trường X sẽ yêu cầu các lớp gửi ảnh dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật ABCD, phần còn lại sẽ được tranh trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 . Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên Pano sẽ là bao nhiêu ?
 A. 1.230.000 đồng. B. 900.000 đồng. C. 1.232.000 đồng. **D. 902.000 đồng.**

Lời giải:



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, khi đó ta được phương trình của parabol là $y = -x^2 + 4$.
 Gọi $C(x; 0) (0 < x < 2) \Rightarrow D(-x; 0), B(x; -x^2 + 4), A(-x; -x^2 + 4)$.

Ta có diện tích của Pano là $\int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \frac{32}{3} (m^2)$.

Diện tích hình chữ nhật ABCD là $S_{ABCD} = CD \cdot BC = 2x \cdot (-x^2 + 4)$.

Chi phí dán hoa văn thấp nhất khi và chỉ khi diện tích hình chữ nhật ABCD lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = 2x \cdot (-x^2 + 4), x \in (0; 2)$ có $\max_{x \in (0; 2)} f(x) = \frac{32\sqrt{3}}{9}$.

Chi phí thấp nhất cho việc dán hoa văn là $\left(\frac{32}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{9} \right) \cdot 200000 \approx 902.000$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 20: Người ta làm một chiếc vòng tròn bằng bạc, biết đường kính ngoài của chiếc vòng bạc là 70 cm, đường kính trong là 50 cm (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Thể tích của vòng bạc là

A. $1500\pi^2 cm^3$.

B. $9000\pi^2 cm^3$.

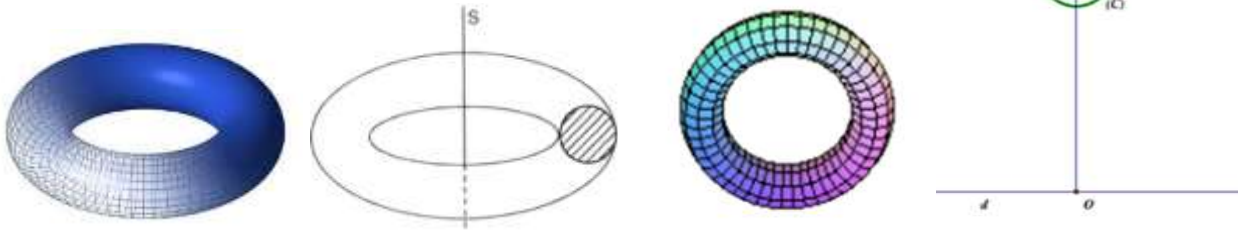
C. $1500\pi cm^3$.

D. $1500\pi cm^3$.

Lời giải:

Ta có bán kính ngoài của chiếc vòng bạc là 35 cm , bán kính trong là 25 cm .

Để tính thể tích của vòng bạc ta coi nó là hình tròn xoay sinh ra bằng cách quay một hình tròn xung quanh trục Ox .



Bán kính của hình tròn này bằng $R = (35 - 25) : 2 = 5\text{ cm}$.

Tâm của hình tròn là $I(0;30)$.

Phương trình của đường tròn là $x^2 + (y - 30)^2 = 25 \text{ (C)}$.

$$\Rightarrow y = 30 \pm \sqrt{25 - x^2} .$$

Khi đó thể tích của vòng bạc được sinh ra bởi hình phẳng tạo bởi 2 đường cong

$f_1(x) = 30 + \sqrt{25 - x^2}$ và $f_2(x) = 30 - \sqrt{25 - x^2}$, $x \in [-5;5]$ quay quanh trục Ox .

Vậy thể tích của vòng bạc bằng:

$$V = \pi \int_{-5}^5 y^2 dx = \pi \int_{-5}^5 \left[(30 + \sqrt{25 - x^2})^2 - (30 - \sqrt{25 - x^2})^2 \right] dx = 120\pi \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx .$$

Đặt $x = 5 \sin t \Rightarrow dx = 5 \cos t . dt$.

Đổi cận :

x	-5	5
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\text{Khi đó } V = 120\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25 \sin^2 t} . 5 \cos t . dt = 120.25\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t . dt = 60.25\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) . dt$$

$$= 1500\pi \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1500\pi^2 \text{ cm}^3 .$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

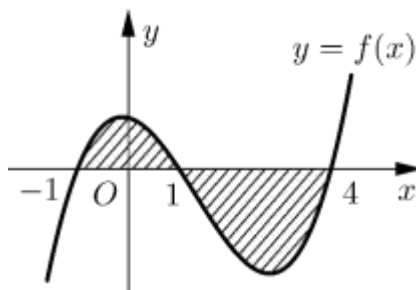
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$.

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^4 f(x)dx$.

C. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$.

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^4 f(x)dx$.

Câu 2: Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{1-x^4}$.

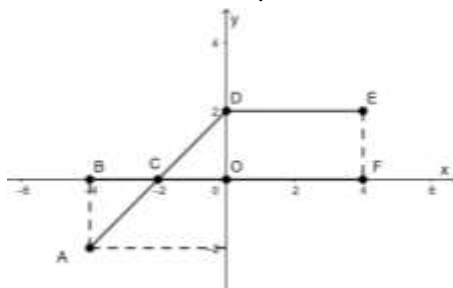
A. $\frac{8}{5}$.

B. 2.

C. 4.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị của $\int_{-4}^4 f(x)dx$ bằng

A. 10.

B. 4.

C. 12.

D. 8.

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ bằng

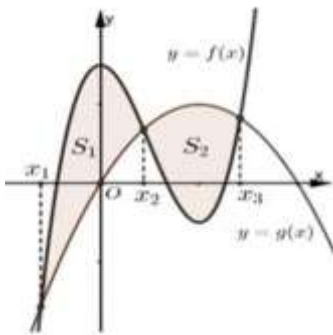
A. 36.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. 36π .

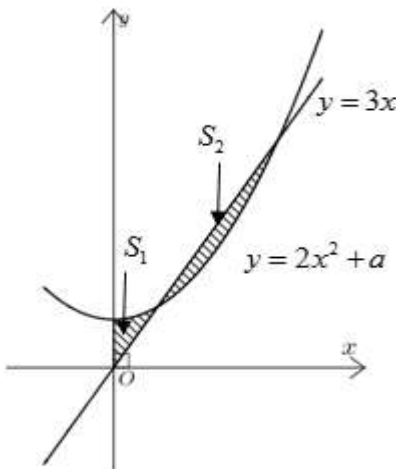
Câu 5: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) và $g(x) = mx^2 + nx + p$, ($m \neq 0$) có đồ thị cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 .



Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết $S_1 = 10$, $S_2 = 7$. Khi đó, $\int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx$ bằng

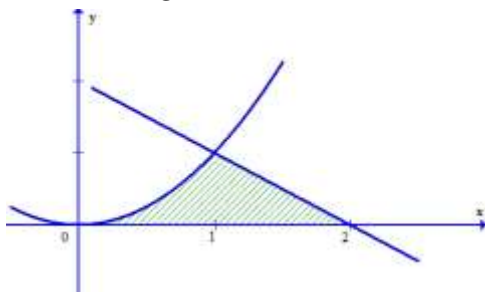
- A. 3. B. -3. C. -17. D. 17.

Câu 6: Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



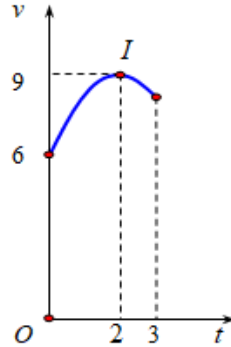
- A. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$. B. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$. C. $\left(1; \frac{9}{8}\right)$. D. $\left(\frac{9}{10}; 1\right)$

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi Parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ).



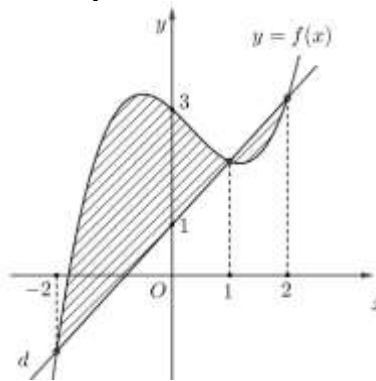
- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 8: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 24,25(\text{km})$. B. $s = 26,75(\text{km})$. C. $s = 24,75(\text{km})$. D. $s = 25,25(\text{km})$.

Câu 9: Đường thẳng d cắt đường cong $f(x) = a^3x + bx^2 + cx + d$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -2, x = 1, x = 2$ như hình vẽ dưới đây:



Diện tích hình phẳng gạch sọc thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{9}{2}; 5\right)$. B. $\left(6; \frac{13}{2}\right)$. C. $\left(5; \frac{11}{2}\right)$. D. $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$.

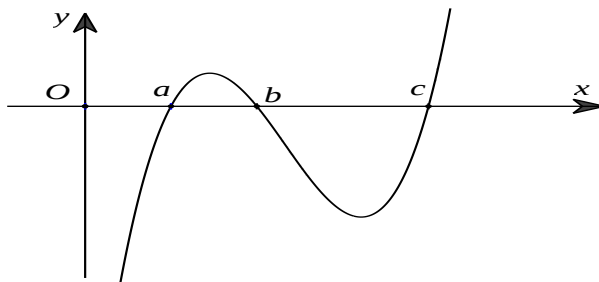
Câu 10: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 2$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{8\pi}{15}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{9\pi}{5}$. D. $\frac{32}{15}$.

Câu 11: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, xung quanh trục Ox .

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. D. $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(b) > f(a) > f(c)$.

B. $f(a) > f(b) > f(c)$.

C. $f(c) > f(a) > f(b)$.

D. $f(c) > f(b) > f(a)$.

Câu 13: Một ô-tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc ô tô đạt giá trị lớn nhất là

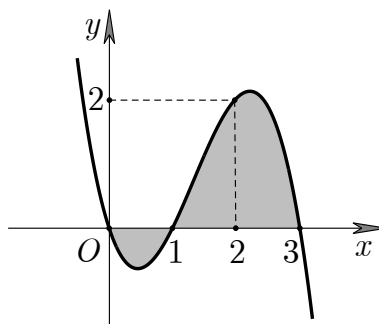
A. 9 (m).

B. 20 (m).

C. 18 (m).

D. $\frac{27}{2}$ (m).

Câu 14: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Gọi D_1 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, các đường $x = 0$, $x = 1$ và trục Ox . Gọi D_2 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}f(x)$, các đường $x = 0$, $x = 1$ và trục Ox . Quay các hình phẳng D_1 , D_2 quanh trục Ox ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 , V_2 . Khẳng định nào sau đây đúng?

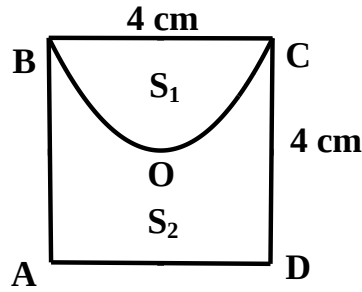
A. $V_1 = 9V_2$.

B. $V_2 = 9V_1$.

C. $V_1 = 3V_2$.

D. $V_2 = 3V_1$.

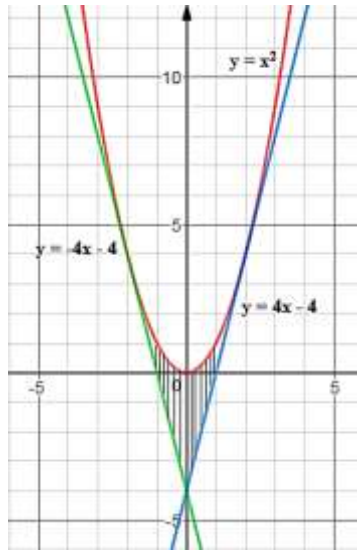
Câu 16: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , độ dài cạnh là 4 cm. Đường cong BOC là một phần của parabol đỉnh O chia hình vuông thành hai hình phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (tham khảo hình vẽ).



Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

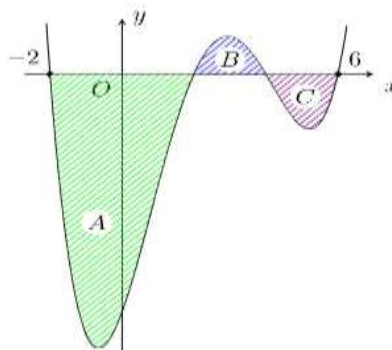
- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 17: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^2$, $y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$ như hình vẽ bên.



- A. $S = \frac{6}{3}$. B. $S = \frac{16}{3}$. C. $S = \frac{26}{3}$. D. $S = \frac{16}{9}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên dưới.



Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 32, 2 và 3.

Tính $I = \int_{-2}^2 (3x - 4) \left(1 + f \left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5 \right) \right) dx$.

- A. $I = \frac{1}{2}$ B. $I = -82$. C. $I = 66$. D. $I = 50$.

Câu 19: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox . Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox .

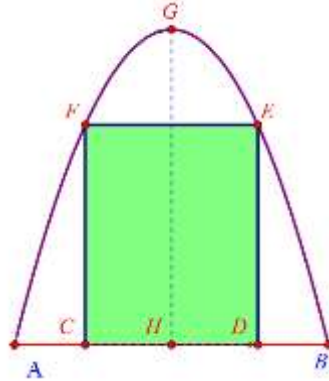
A. $\frac{9\pi}{2}$.

B. $\frac{81}{10}$.

C. $\frac{81\pi}{10}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Câu 20: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 (tham khảo hình vẽ)



Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 11445000 đồng.

B. 4077000 đồng.

C. 7368000 đồng.

D. 11370000 đồng.

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



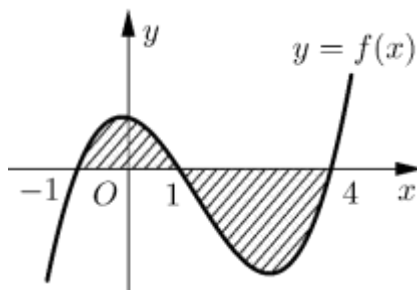
CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = \int_{-1}^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 2: Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{1-x^4}$.

A. $\frac{8}{5}$.

B. 2.

C. 4.

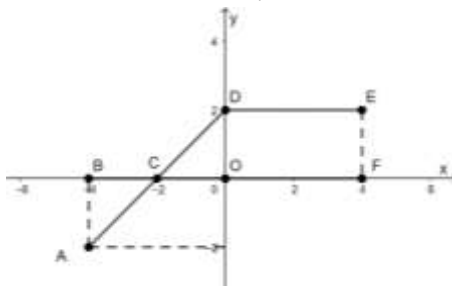
D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Thể tích của vật thể là } V = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^4} \right)^2 dx = \frac{8}{5}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị của $\int_{-4}^4 f(x)dx$ bằng

A. 10.

B. 4.

C. 12.

D. 8.

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned}\int_{-4}^4 f(x)dx &= \int_{-4}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -S_{\Delta ABC} + S_{\Delta COD} + S_{DOFE} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 8.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ bằng

A. 36.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. 36π .

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

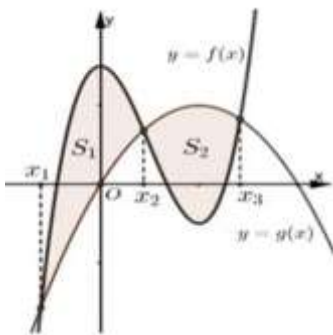
$$x^2 - 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$$S = \int_0^2 \left| (x^2 - 4) - (2x - 4) \right| dx = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 5: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) và $g(x) = mx^2 + nx + p$, ($m \neq 0$) có đồ thị cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 .



Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và

$y = g(x)$. Biết $S_1 = 10$, $S_2 = 7$. Khi đó, $\int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx$ bằng

A. 3.

B. -3.

C. -17.

D. 17.

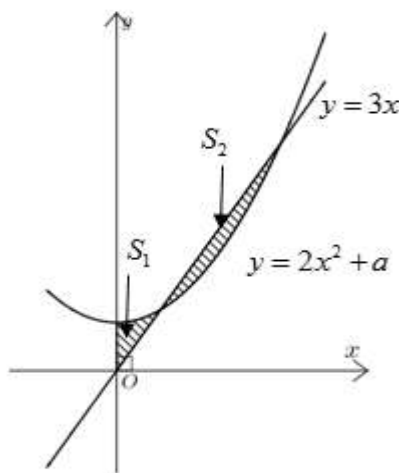
Lời giải:

Theo đề bài ta có $10 = S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx$, $7 = S_2 = \int_{x_2}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx$.

$$\text{Suy ra } \int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)] dx + \int_{x_2}^{x_3} [g(x) - f(x)] dx = -S_1 + S_2 = -10 + 7 = -3.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 6: Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$.

B. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$.

C. $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

D. $\left(\frac{9}{10}; 1\right)$.

Lời giải:

Xét phương trình tương giao: $3x = 2x^2 + a \Rightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ (1)

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 ($x_2 > x_1 > 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{9}{8} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{2} > 0 \end{cases}$$

Ta có: $S_1 = \int_0^{x_1} (2x^2 - 3x + a) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + ax_1$

$$S_2 = -\int_{x_1}^{x_2} (2x^2 - 3x + a) dx = -\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = -\left(\frac{2}{3}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + ax_2 \right) + \left(\frac{2}{3}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + ax_1 \right)$$

Do $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{2}{3}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + ax_2 = 0$

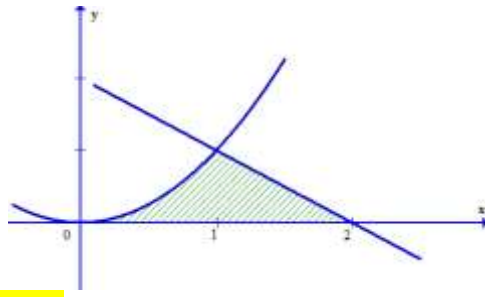
mà x_2 là nghiệm của (1) nên $2x_2^2 - 3x_2 + a = 0 \Rightarrow a = -2x_2^2 + 3x_2$ (2)

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + (-2x_2^2 + 3x_2) \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8} \text{ (loại nghiệm } x_2 = 0 \text{)}$$

Thay vào (2) $\Rightarrow a = \frac{27}{32} \in \left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi Parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ).



A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{2}{3}$.

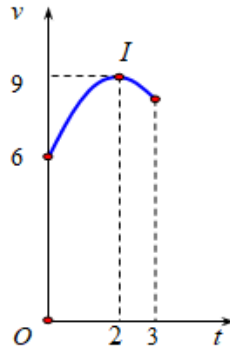
D. $\frac{7}{6}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \right|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 8: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 24,25$ (km).

B. $s = 26,75$ (km).

C. $s = 24,75$ (km).

D. $s = 25,25$ (km).

Lời giải:

Gọi $v(t) = at^2 + bt + c$.

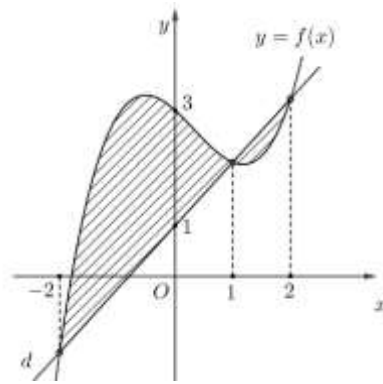
Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases} \text{ . Tìm được } v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$$

Vậy $S = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = 24,75$ (km)

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 9: Đường thẳng d cắt đường cong $f(x) = a^3x + bx^2 + cx + d$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$ như hình vẽ dưới đây:



Diện tích hình phẳng gạch sọc thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{9}{2}; 5\right)$.

B. $\left(6; \frac{13}{2}\right)$.

C. $\left(5; \frac{11}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$.

Lời giải:

Ta có $d: y = mx + n$

Phương trình hoành độ giao điểm

$a^3x + bx^2 + cx + d = mx + n \Leftrightarrow g(x) = a^3x + bx^2 + cx + d - (mx + n)$ có 3 nghiệm $x = -2; x = 1; x = 2$.

Do đó $g(x) = a(x+2)(x-1)(x-2)$.

Do $g(0) = d - n = 3 - 1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2)$.

Vì vậy $S = \int_{-2}^2 \left| \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2) \right| dx = \frac{71}{12}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 10: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2-x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 2$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng

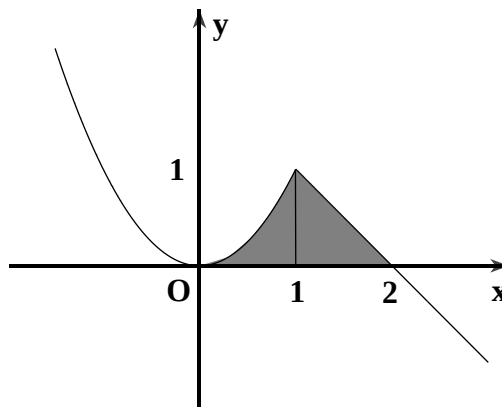
A. $\frac{8\pi}{15}$.

B. $\frac{9}{5}$.

C. $\frac{9\pi}{5}$.

D. $\frac{32}{15}$.

Lời giải:



Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) \cdot dx + \pi \int_1^2 f^2(x) \cdot dx = \pi \int_0^1 x^4 \cdot dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 \cdot dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - \pi \frac{(2-x)^3}{3} \Big|_1^2$$

$$= \frac{\pi}{5} - \pi \left(0 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8\pi}{15}.$$

⇒ **Chọn đáp án A.**

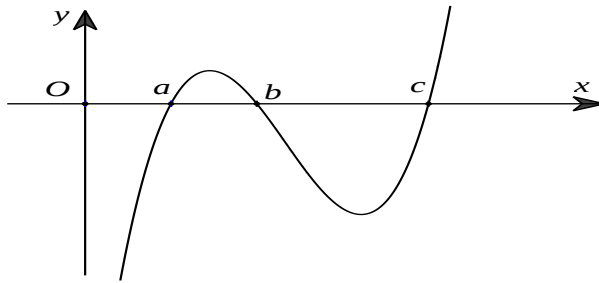
Câu 11: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$ B. $V = \int_a^b f^2(x) dx.$ C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$ D. $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

Lời giải:

⇒ **Chọn đáp án A.**

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(b) > f(a) > f(c).$

B. $f(a) > f(b) > f(c).$

C. $f(c) > f(a) > f(b).$

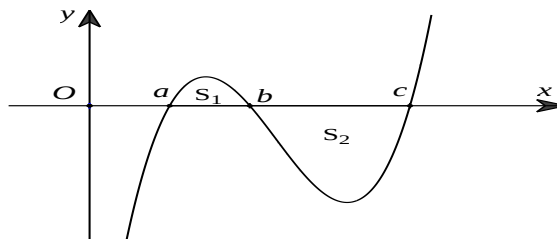
D. $f(c) > f(b) > f(a).$

Lời giải:

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							

Từ bảng biến thiên suy ra trong ba giá trị $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ thì $f(b)$ lớn nhất.



Ta có : diện tích $S_1 = \int_a^b f'(x)dx$, diện tích $S_2 = -\int_b^c f'(x)dx$.

$$\text{Từ hình vẽ ta có: } S_1 < S_2 \Leftrightarrow \int_a^b f'(x)dx < -\int_b^c f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) < f(b) - f(c) \Leftrightarrow f(a) > f(c).$$

Vậy $f(b) > f(a) > f(c)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 13: Một ô-tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc ô tô đạt giá trị lớn nhất là

A. 9 (m) .

B. 20 (m) .

C. 18 (m) .

D. $\frac{27}{2}$ (m) .

Lời giải:

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t)dt = \int (6 - 2t)dt = 6t - t^2 + C$$

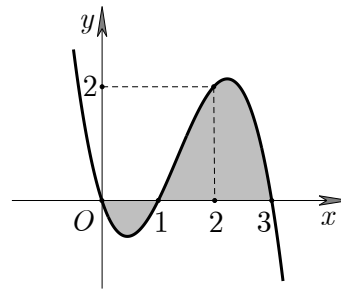
Do ban đầu ô tô đang dừng nên $v(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra $v(t) = 6t - t^2$

Ta có $v_{\max} \Leftrightarrow t = 3$

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc ô tô đạt giá trị lớn nhất là $S = \int_0^3 (6t - t^2)dt = 18(m)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 14: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải:

Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ trên.

Điểm $O(0;0) \in (C) \Rightarrow d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

$$\text{Các điểm } A(1;0), B(2;2), D(3;0) \in (C) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 [0 - f(x)] dx + \int_1^3 [f(x) - 0] dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx + \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx = \frac{37}{12}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Gọi D_1 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, các đường $x = 0$, $x = 1$ và trục Ox . Gọi D_2 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}f(x)$, các đường $x = 0$, $x = 1$ và trục Ox . Quay các hình phẳng D_1 , D_2 quanh trục Ox ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 , V_2 . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_1 = 9V_2$.

B. $V_2 = 9V_1$.

C. $V_1 = 3V_2$.

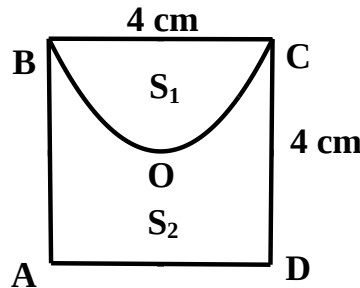
D. $V_2 = 3V_1$.

Lời giải:

Ta có $V_1 = \pi \int_0^1 f^2(x) dx$ và $V_2 = \pi \int_0^1 \left[\frac{1}{3} f(x) \right]^2 dx = \frac{1}{9} \pi \int_0^1 f^2(x) dx$. Vậy $V_2 = \frac{1}{9} V_1$ hay $V_1 = 9V_2$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 16: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , độ dài cạnh là 4 cm. Đường cong BOC là một phần của parabol đỉnh O chia hình vuông thành hai hình phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (tham khảo hình vẽ).



Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

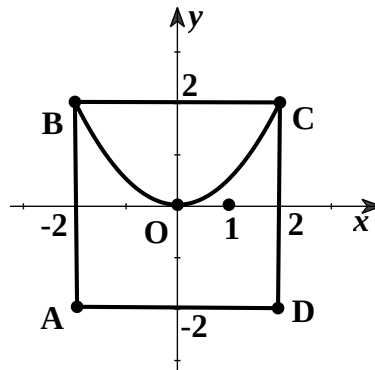
A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải:



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có phương trình parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$.

$$\text{Suy ra } S_1 = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{16}{3} \text{ (đvdt)}.$$

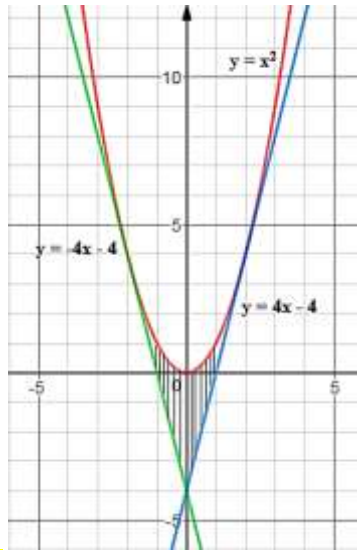
Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 4^2 = 16$ (đvdt).

$$\text{Do đó diện tích } S_2 \text{ là } S_2 = S_{ABCD} - S_1 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ (đvdt)}.$$

$$\text{Vậy tỉ số } \frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{3} : \frac{32}{3} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 17: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^2$, $y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$ như hình vẽ bên.



A. $S = \frac{6}{3}$.

B. $S = \frac{16}{3}$.

C. $S = \frac{26}{3}$.

D. $S = \frac{16}{9}$.

Lời giải:

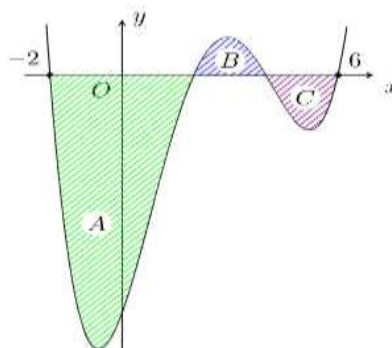
Ta thấy đường thẳng $y = -4x - 4$ và đường thẳng $y = 4x - 4$ lần lượt là hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2$ tại các tiếp điểm có hoành độ $x = -2$ và $x = 2$.

Do tính đối xứng qua Oy của parabol $y = x^2$ nên diện tích hình phẳng cần tìm bằng 2 lần diện

$$\text{tích tam giác cạnh } OMT_2 \text{ và bằng } S = 2 \int_0^2 [x^2 - (4x - 4)] dx = 2 \int_0^2 (x - 2)^2 dx = 2 \left. \frac{(x - 2)^3}{3} \right|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên dưới.



Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 32, 2 và 3.

Tính $I = \int_{-2}^2 (3x-4) \left(1 + f \left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5 \right) \right) dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = -82$.

C. $I = 66$.

D. $I = 50$.

Lời giải:

Đặt $t = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5 \Rightarrow dt = \left(-\frac{3}{2}x + 2 \right) dx \Rightarrow (3x-4)dx = -2dt$

Đổi cận: - Với $x = -2 \Rightarrow t = -2$

- Với $x = 2 \Rightarrow t = 6$

Ta được: $I = -2 \int_{-2}^6 [1 + f(t)] dt = -2 \int_{-2}^6 dt - 2 \int_{-2}^6 f(t) dt = -16 - 2M$.

Với $M = \int_{-2}^6 f(t) dt = \int_{-2}^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt + \int_4^6 f(t) dt = -32 + 2 - 3 = -33$.

Vậy: $I = -16 - 2(-33) = 50$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 19: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox . Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox .

A. $\frac{9\pi}{2}$.

B. $\frac{81}{10}$.

C. $\frac{81\pi}{10}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox ta có:

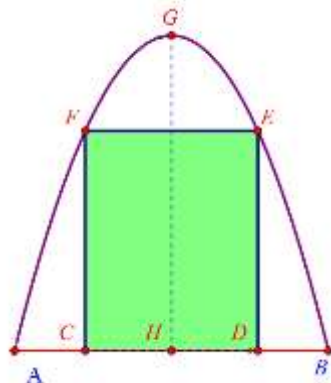
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox

$$V = \pi \int_1^4 f^2(x) dx = \pi \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)^2 dx = \frac{81\pi}{10}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 20: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 (tham khảo hình vẽ)



Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 11445000 đồng.

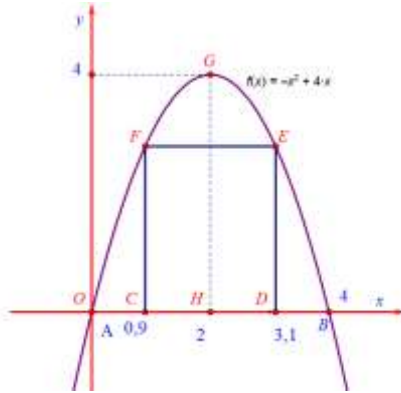
B. 4077000 đồng.

C. 7368000 đồng.

D. 11370000 đồng.

Lời giải:

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$$\text{Vì parabol có đỉnh là } G(2;4) \text{ và đi qua điểm } O(0;0) \text{ nên ta có } \begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$\text{Diện tích của cả cống là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\text{m})$; $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}$.

Diện tích hai cánh cống là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}$.

$$\text{Diện tích phần xiên hoa là } S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vậy tổng số tiền để làm cống là $6,138 \cdot 1200000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900000 = 11441400$ đồng.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trưởng THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: 0935.785.115

Facebook: Lê Bá Bảo

116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x = a, x = b$ ($a < b$) có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$) là $S(x)$.

A. $V = \pi^2 \int_a^b |S(x)| dx$. B. $V = \int_a^b S(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx$.

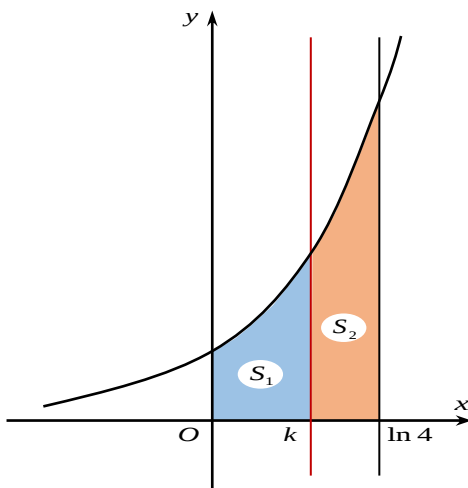
Câu 2: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. B. $S = \int_0^2 e^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\frac{37}{12}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{81}{12}$. D. 13.

Câu 4: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

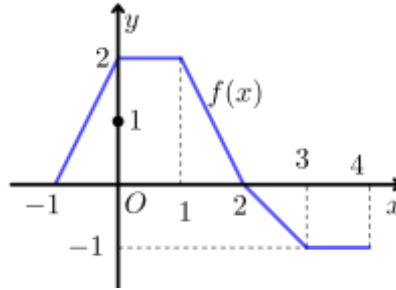


A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$. B. $k = \ln 2$. C. $k = \ln \frac{8}{3}$. D. $k = \ln 3$.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x^2 - 4x + 1, y = m, (m \leq -3), x = 0, x = 3$ là

A. $3m + 6$. B. $3m - 6$. C. $-3m + 6$. D. $-3m - 6$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ dưới:



Tính tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$.

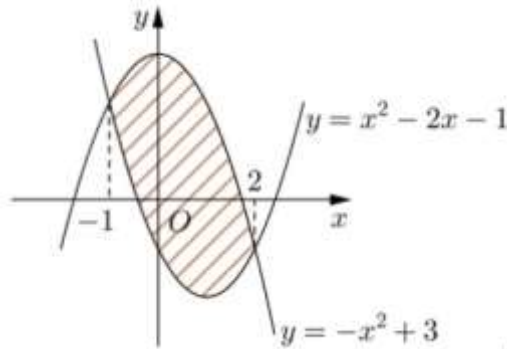
A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{11}{2}$.

C. $I = 5$.

D. $I = 3$.

Câu 7: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



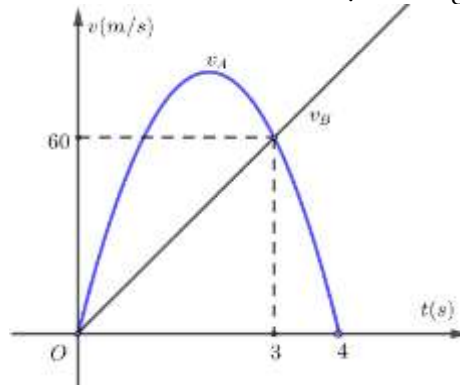
A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4)dx$.

B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2)dx$.

C. $\int_{-1}^2 (2x - 2)dx$.

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4)dx$.

Câu 8: Cho đồ thị biểu thị vận tốc của hai chất điểm A và B xuất phát cùng một lúc, bên cạnh nhau và trên cùng một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm A là một đường Parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ sau.



Hỏi sau khi đi được 3 giây, khoảng cách giữa hai chất điểm là bao nhiêu mét?

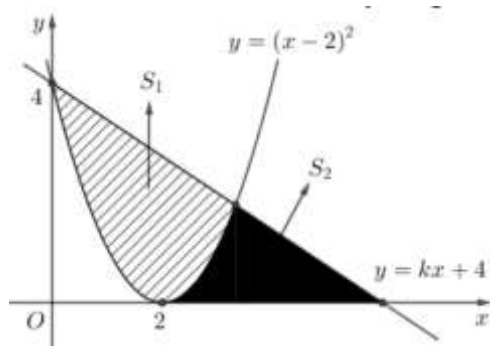
A. 120 m.

B. 60 m.

C. 270 m.

D. 90 m.

Câu 9: Đường thẳng $y = kx + 4$ cắt parabol $y = (x - 2)^2$ tại hai điểm phân biệt và diện tích các hình phẳng S_1, S_2 bằng nhau như hình vẽ bên.



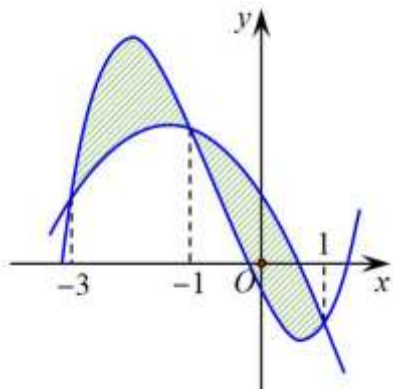
Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $k \in (-6; -4)$. B. $k \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $k \in (-2; -1)$. D. $k \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 10: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ)



Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. 8. C. 4. D. 5.

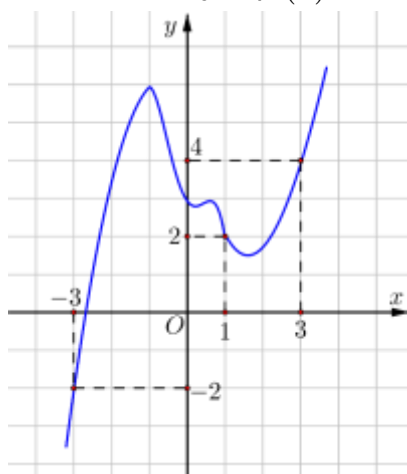
Câu 12: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

- A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$. B. $V = \frac{124\pi}{3}$. C. $V = \frac{124}{3}$. D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Câu 13: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. $20(m/s)$. B. $16(m/s)$. C. $13(m/s)$. D. $15(m/s)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới :



Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $g(-3) > g(3) > g(1)$. B. $g(1) > g(-3) > g(3)$.
C. $g(3) > g(-3) > g(1)$. D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Câu 15: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $x=1, x=e, y=0$ và $y=\ln x$. Thể tích (V) của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

- A. $V = \pi \left| \int_1^e \ln x dx \right|$. B. $V = \pi \int_1^e |\ln x| dx$. C. $V = \pi \int_1^e \ln^2 x dx$. D. $V = \int_1^e \ln^2 x dx$.

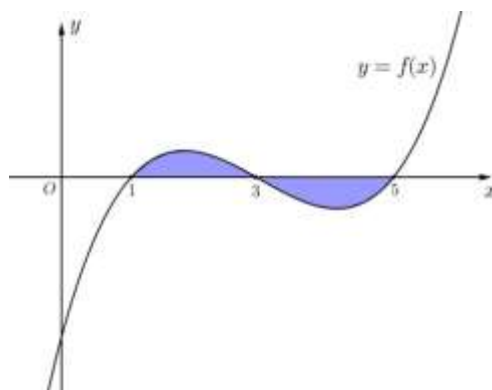
Câu 16: Gọi (D_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2\sqrt{x}, y=0$ và $x=2020$; (D_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{3x}, y=0$ và $x=2020$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D_1) và (D_2) xung quanh trục Ox . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 17: Kí hiệu $S(t)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1, y=0, x=1, x=t, (t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

- A. $t=4$. B. $t=13$. C. $t=3$. D. $t=14$.

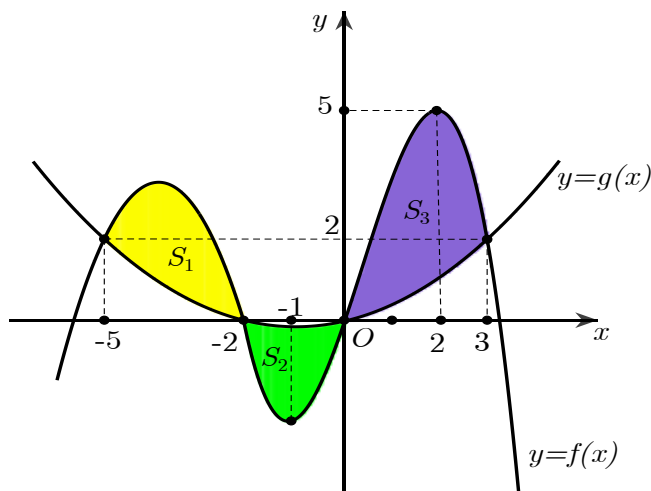
Câu 18: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a; b; c; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hình phẳng tô đậm bằng 1. Giá trị của $a + 2b + 3c + 4d$ bằng

- A. -8. B. -1. C. 1. D. 8.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p . Tích phân $\int_{-5}^3 f(x) dx$ bằng

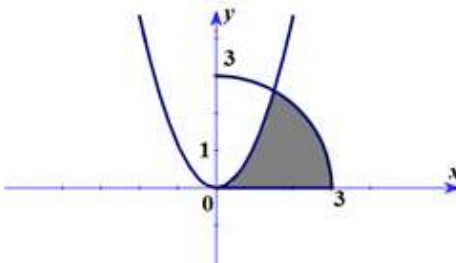
A. $-m + n - p + \frac{208}{45}$.

B. $m - n + p + \frac{208}{45}$.

C. $m - n + p - \frac{208}{45}$.

D. $-m + n - p - \frac{208}{45}$.

Câu 20: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$ với cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \leq x \leq 3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ dưới đây). Diện tích S của hình phẳng (H) được tính bằng công thức nào dưới đây?



A. $S = \int_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 - \sqrt{9 - x^2} \right) dx$.

B. $S = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 dx - \int_{\frac{3}{2}}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$.

C. $S = \pi \int_0^3 \left| \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 - \sqrt{9 - x^2} \right| dx$.

D. $S = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 dx - \int_{\frac{3}{2}}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$.

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x = a, x = b$ ($a < b$) có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$) là $S(x)$.

A. $V = \pi^2 \int_a^b |S(x)| dx$. B. $V = \int_a^b S(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx$.

Lời giải:

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 2: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. B. $S = \int_0^2 e^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Lời giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$ là: $S = \int_0^2 e^x dx$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\frac{37}{12}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{81}{12}$. D. 13.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

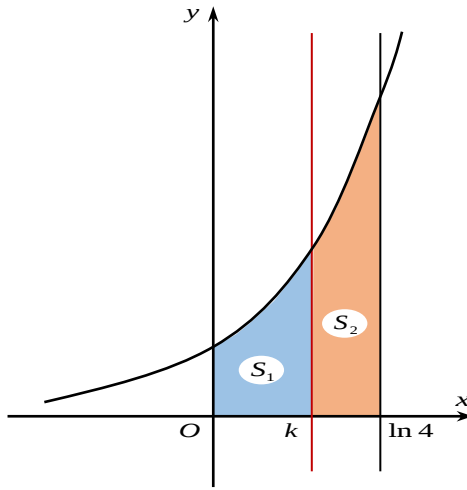
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 - x - (x - x^2)| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^1 = \left| -\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right| = \frac{37}{12}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 4: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

B. $k = \ln 2$.

C. $k = \ln \frac{8}{3}$

D. $k = \ln 3$.

Lời giải:

Ta có $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1$ và $S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$.

Lại có $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow k = \ln 3$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x^2 - 4x + 1$, $y = m$, ($m \leq -3$), $x = 0$, $x = 3$ là

A. $3m + 6$.

B. $3m - 6$.

C. $-3m + 6$.

D. $-3m - 6$.

Lời giải:

Ta có: $x^2 - 4x + 1 = m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 - m = 0$ (1)

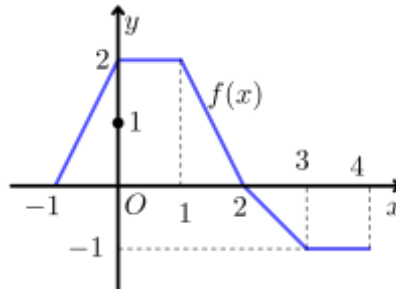
$\Delta' = m + 3 \leq 0, \forall m \leq -3$

Ta có diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_0^3 |x^2 - 4x + 1 - m| dx = \left| \int_0^3 (x^2 - 4x + 1 - m) dx \right| = |-6 - 3m| = -6 - 3m.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ dưới:



Tính tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{11}{2}$.

C. $I = 5$.

D. $I = 3$.

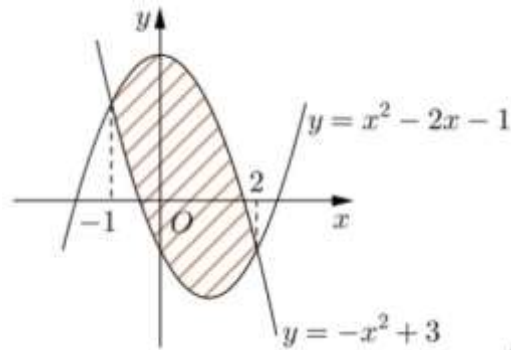
Lời giải:

Ta có: $I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$

$$= 1 + 2 + 1 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 7: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$. B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$. C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$.

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

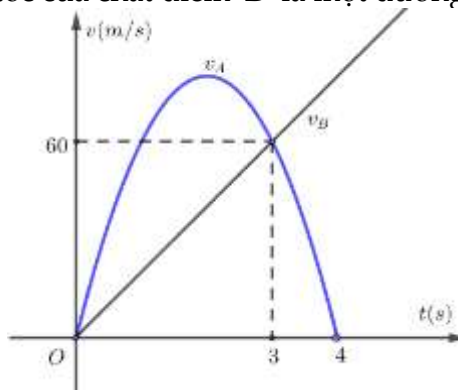
Lời giải:

Phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3$ và $y = x^2 - 2x - 1$ nên có diện tích được tính theo công thức:

$$S = \int_{-1}^2 \left| (-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right| dx = \int_{-1}^2 \left[(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 8: Cho đồ thị biểu thị vận tốc của hai chất điểm A và B xuất phát cùng một lúc, bên cạnh nhau và trên cùng một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm A là một đường Parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ sau.



Hỏi sau khi đi được 3 giây, khoảng cách giữa hai chất điểm là bao nhiêu mét?

A. 120 m.

B. 60 m.

C. 270 m.

D. 90 m.

Lời giải:

Phương trình vận tốc của chất điểm A có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(3) = 60 \\ v(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b + c = 60 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -20 \\ b = 80 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow v(t) = -20t^2 + 80t$ suy ra quãng đường chất điểm A đi được sau 3 giây đầu là

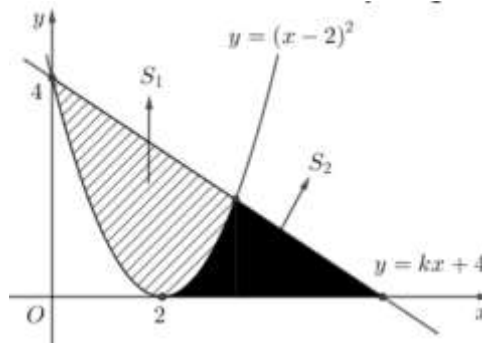
$$S_A = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (-20t^2 + 80t) dt = 180(m).$$

Vận tốc chất điểm B có phương trình là $v(t) = 20t$, suy ra sau 3 giây chất điểm B đi được quãng đường là $S_B = \int_0^3 20t dt = 90(m)$.

Vậy sau khi đi được 3 giây, hai chất điểm cách nhau $180 - 90 = 90(m)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 9: Đường thẳng $y = kx + 4$ cắt parabol $y = (x - 2)^2$ tại hai điểm phân biệt và diện tích các hình phẳng S_1, S_2 bằng nhau như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $k \in (-6; -4)$. B. $k \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $k \in (-2; -1)$. D. $k \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $(x - 2)^2 = kx + 4 \Leftrightarrow x^2 - (k + 4)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = k + 4 \end{cases}$.

Đường thẳng $y = kx + 4$ cắt các trục tọa độ tại các điểm $A\left(-\frac{4}{k}; 0\right)$, $B(0; 4)$.

$$-\frac{4}{k} > k + 4 > 2 \Leftrightarrow -2 < k < 0.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng } S_1 = \int_0^{k+4} (kx + 4 - (x - 2)^2) dx = \int_0^{k+4} (-x^2 - (k + 4)x) dx = \frac{1}{6}(k + 4)^3.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng } S_2 = \int_2^{k+4} (x - 2)^2 dx + \int_{k+4}^{-\frac{4}{k}} (kx + 4) dx = \frac{1}{3}(k + 2)^3 - \frac{(k + 2)^4}{2k}.$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(k + 4)^3 = \frac{1}{3}(k + 2)^3 - \frac{(k + 2)^4}{2k} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -0,457 & (TM) \\ k = -5,54 & (L) \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 10: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x - 1)e^x$, trục tung và trục hoành.

Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x - 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x-1)dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 2(x-1) \frac{e^{2x}}{2} dx = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$$

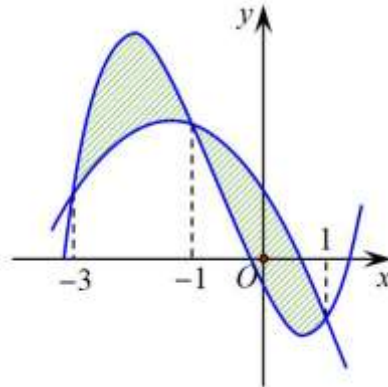
$$\text{Gọi } I_1 = \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = 4\pi (x-1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = 2\pi - \pi e^{2x} \Big|_0^1 = 2\pi - \pi e^2 + \pi = 3\pi - \pi e^2$$

$$\text{Vậy } V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - I_1 = -2\pi - (3\pi - \pi e^2) = \pi(e^2 - 5).$$

⇒ Chọn đáp án D.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ)



Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ có 3

$$\text{nghiệm lần lượt là } -3; -1; 1 \text{ nên suy ra } \begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S = \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx = 2 + 2 = 4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$.

$$\text{Suy ra } a(x+3)(x+1)(x-1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-d)x - \frac{3}{2}$$

Xét hệ số tự do suy ra: $-3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Do đó: $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

$$\text{Diện tích bằng: } S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)(x-1) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+3)(x+1)(x-1) dx = 4.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 12: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$.

B. $V = \frac{124\pi}{3}$.

C. $V = \frac{124}{3}$.

D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Lời giải:

$$\text{Diện tích thiết diện là: } S(x) = 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2}$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích vật thể là: } V = \int_1^3 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{124}{3}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 13: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(m/s)$.

B. $16(m/s)$.

C. $13(m/s)$.

D. $15(m/s)$.

Lời giải:

$$\text{Quãng đường chất điểm } A \text{ đi từ đầu đến khi } B \text{ đuổi kịp là } S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96(m).$$

$$\text{Vận tốc của chất điểm } B \text{ là } v_B(t) = \int a dt = at + C.$$

$$\text{Tại thời điểm } t = 3 \text{ vật } B \text{ bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên } v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a.$$

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

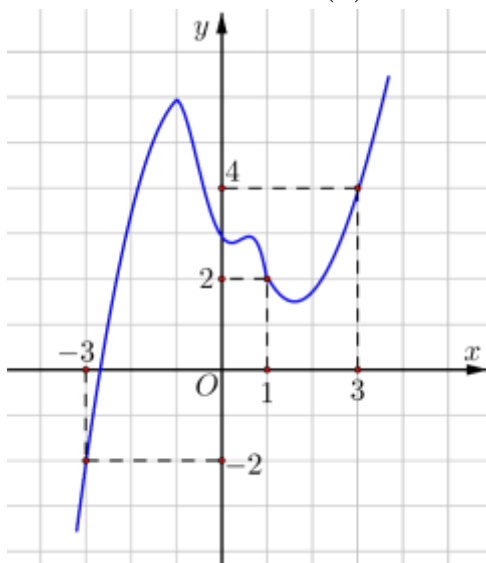
$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a(m).$$

$$\text{Vậy } 72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2).$$

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới :



Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-3) > g(3) > g(1)$.

B. $g(1) > g(-3) > g(3)$.

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$.

D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Lời giải:

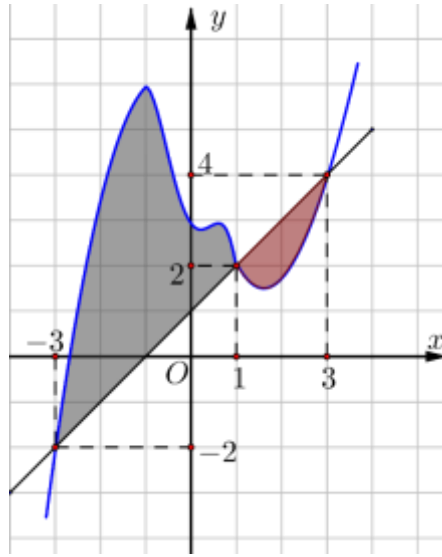
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\pm 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3		1		3	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$g(-3)$		$g(1)$		$g(3)$	$+\infty$

Suy ra $g(-3) < g(1)$ và $g(3) < g(1)$. (1)



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = f'(x)$, $y = x + 1$, $x = -3$, $x = 1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x + 1$, $y = f'(x)$, $x = 1$, $x = 3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1 > S_2 > 0$.

$$\text{Suy ra: } S_1 - S_2 > 0 \Rightarrow \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx - \int_1^3 [(x+1) - f'(x)] dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx + \int_1^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0 \Rightarrow \int_{-3}^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0.$$

$$\text{Khi đó: } g(3) - g(-3) = \int_{-3}^3 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $g(1) > g(3) > g(-3)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 15: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $x = 1, x = e, y = 0$ và $y = \ln x$. Thể tích (V) của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V = \pi \int_1^e \ln x dx$. B. $V = \pi \int_1^e |\ln x| dx$. C. $V = \pi \int_1^e \ln^2 x dx$. D. $V = \int_1^e \ln^2 x dx$.

Lời giải:

Thể tích (V) của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_1^e \ln^2 x dx.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 16: Gọi (D_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2\sqrt{x}, y = 0$ và $x = 2020$; (D_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{3x}, y = 0$ và $x = 2020$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D_1) và (D_2) xung quanh trục Ox . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải:

Xét V_1 :

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$2\sqrt{x} = 0 (x \geq 0) \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \pi \int_0^{2020} (2\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^{2020} 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^{2020} = 2\pi \cdot 2020^2$$

Xét V_2 :

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$\sqrt{3x} = 0 (x \geq 0) \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{2020} (\sqrt{3x})^2 dx = \pi \int_0^{2020} 3x dx = \frac{3}{2} \pi x^2 \Big|_0^{2020} = \frac{3}{2} \pi \cdot 2020^2. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi \cdot 2020^2}{\frac{3}{2} \pi \cdot 2020^2} = \frac{4}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 17: Kí hiệu $S(t)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$, ($t > 1$). Tìm t để $S(t) = 10$.

A. $t = 4$.

B. $t = 13$.

C. $t = 3$.

D. $t = 14$.

Lời giải:

Ta có $S(t) = \int_1^t |2x + 1| dx$. Do $x \in [1; t]$, $t > 1$ nên $2x + 1 > 0$.

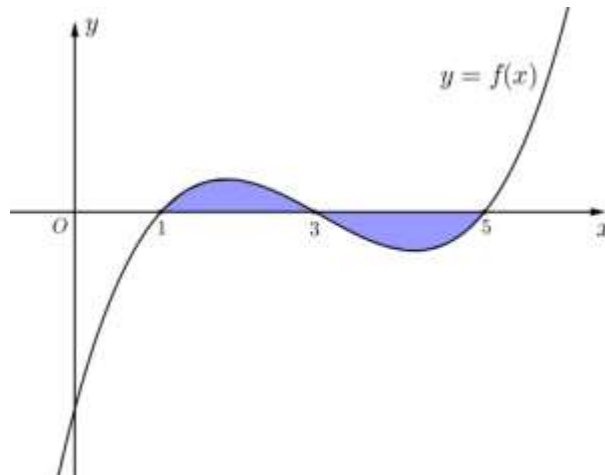
$$\text{Khi đó: } S(t) = \int_1^t (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_1^t = t^2 + t - 2.$$

$$\text{Để } S(t) = 10 \text{ thì } t^2 + t - 2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}.$$

Do $t > 1$ nên $t = 3$ thỏa mãn.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 18: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hình phẳng tô đậm bằng 1. Giá trị của $a + 2b + 3c + 4d$ bằng

A. -8 .

B. -1 .

C. 1 .

D. 8 .

Lời giải:

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(1; 0); (3; 0); (5; 0)$ nên ta có

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ 125a+25b+5c+d=0 \end{cases} \quad (1)$$

Diện tích hình phẳng tô đậm

$$S = \int_1^5 |f(x)| dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 |f(x)| dx + \int_3^5 |f(x)| dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow F(3) - F(1) - F(5) + F(3) = 1 \Leftrightarrow 2F(3) - F(1) - F(5) = 1 \Leftrightarrow -116a - 24b - 4c = 1. \quad (2)$$

$$\text{với } \int f(x) dx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx = F(x); F(3) = \frac{81}{4}a + 9b + \frac{9}{2}c + 3d; F(1) = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

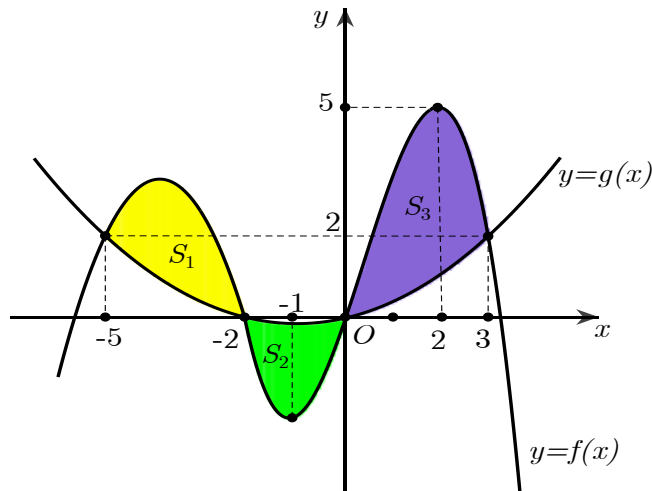
$$F(5) = \frac{625}{4}a + \frac{125}{3}b + \frac{25}{2}c + 5d$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ: } \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ 125a+25b+5c+d=0 \\ -116a-24b-4c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b=\frac{-9}{8} \\ c=\frac{23}{8} \\ d=\frac{-15}{8} \end{cases}$$

Khi đó $a+2b+3c+4d=-1$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol

$y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p . Tích phân $\int_{-5}^3 f(x) dx$ bằng

A. $-m + n - p + \frac{208}{45}$.

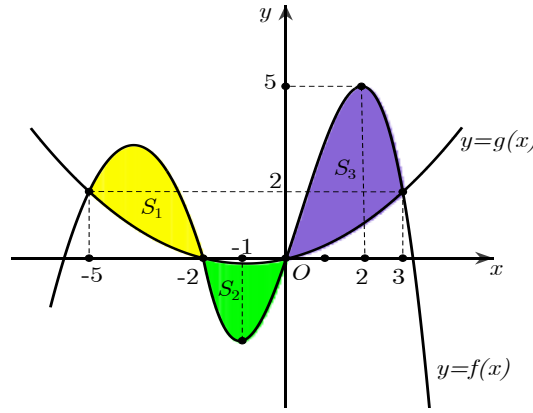
B. $m - n + p + \frac{208}{45}$.

C. $m - n + p - \frac{208}{45}$.

D. $-m + n - p - \frac{208}{45}$.

Lời giải:

Từ đồ thị ta thấy



$$S_1 = \int_{-5}^{-2} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx - \int_{-5}^{-2} g(x) dx \Rightarrow \int_{-5}^{-2} f(x) dx = S_1 + \int_{-5}^{-2} g(x) dx.$$

$$S_2 = \int_{-2}^0 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-2}^0 g(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx \Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 g(x) dx - S_2.$$

$$S_3 = \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = S_3 + \int_0^3 g(x) dx.$$

$$\text{Do vậy: } \int_{-5}^3 f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3 + \int_{-5}^3 g(x) dx = m - n + p + \int_{-5}^3 g(x) dx.$$

Do đó ta loại đáp án A và D.

Từ đồ thị ta thấy $\int_{-5}^3 g(x) dx$ là số dương. Mà 2 đáp án còn lại chỉ có $\frac{208}{45}$ là phù hợp, nên ta

$$\text{chọn } \int_{-5}^3 f(x) dx = m - n + p + \frac{208}{45}.$$

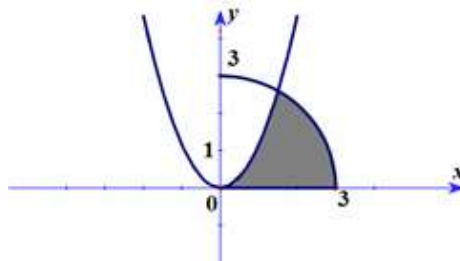
Chú ý: Có thể tính $\int_{-5}^3 g(x) dx$ như sau:

Từ đồ thị hàm số $y = g(x)$ ta thấy nó đi qua các điểm $(-5; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 25a - 5b + c = 2 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{15}, b = \frac{4}{15}, c = 0. \text{ Do đó: } \int_{-5}^3 g(x) dx = \int_{-5}^3 \left(\frac{2}{15}x^2 + \frac{4}{15}x \right) dx = \frac{208}{45}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 20: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$ với cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \leq x \leq 3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ dưới đây). Diện tích S của hình phẳng (H) được tính bằng công thức nào dưới đây?



$$A. S = \int_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x^2 - \sqrt{9-x^2} \right) dx.$$

$$B. S = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} x^2 dx - \int_{\frac{3}{2}}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$C. S = \pi \int_0^3 \left| \frac{2}{\sqrt{3}} x^2 - \sqrt{9-x^2} \right| dx.$$

$$D. S = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} x^2 dx - \int_{\frac{3}{2}}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

Lời giải:

Xét phương trình $\frac{2\sqrt{3}}{3} x^2 = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (vì $0 \leq x \leq 3$).

Quan sát đồ thị, suy ra $S = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2\sqrt{3}}{3} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \sqrt{9-x^2} dx \Rightarrow S = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} x^2 dx - \int_{\frac{3}{2}}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



PHIẾU ÔN TẬP SỐ 04

CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: 0935.785.115

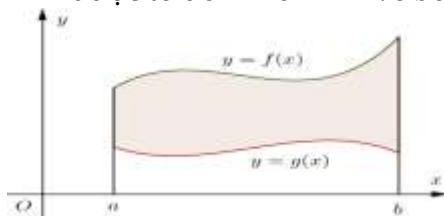
Facebook: Lê Bá Bảo

116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế

Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Diện tích hình phẳng của hình được tô đen như hình vẽ bên là



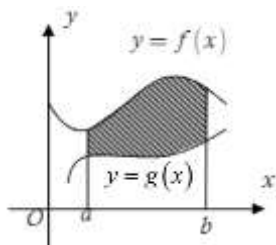
A. $\pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

B. $\pi \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

C. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

D. $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

Câu 2: Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức



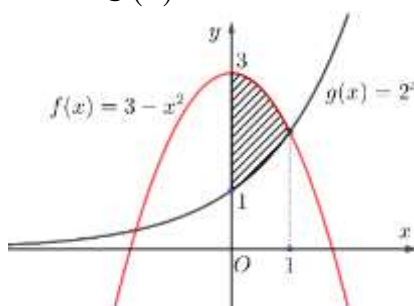
A. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

C. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

Câu 3: Cho hai đồ thị hàm số $f(x) = 3 - x^2$ và $g(x) = 2^x$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây ?

A. $\pi \int_0^1 \left[(3-x^2)^2 - 4^x \right] dx$.

B. $\int_0^1 (3-x^2-2^x) dx$.

C. $\int_1^3 (3-x^2-2^x)^2 dx$.

D. $\int_1^3 (3-x^2-2^x) dx$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 3$

A. $S = \frac{10}{4}$.

B. $S = \frac{12}{4}$.

C. $S = \frac{11}{4}$.

D. $S = \frac{9}{4}$.

Câu 5: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

B. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

C. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$.

D. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Câu 6: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = 2 \ln 2 - 1$.

B. $S = \ln 2 + 1$.

C. $S = \ln 2 - 1$.

D. $S = 1 - 2 \ln 2$.

Câu 7: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = 5^x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng D quay quanh trục hoành được tính theo công thức nào dưới đây?

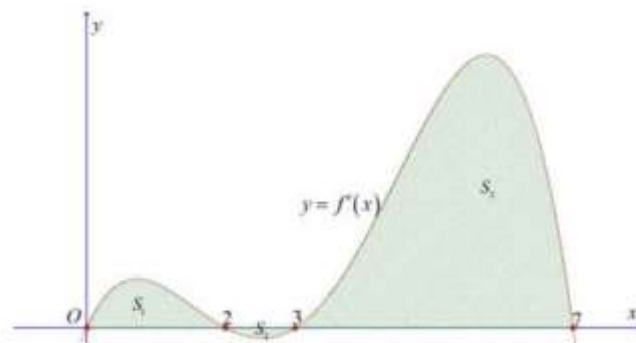
A. $V = \pi \int_{-2}^2 25^x dx$.

B. $V = \int_{-2}^2 5^{2x} dx$.

C. $V = \int_{-2}^2 |5^x| dx$.

D. $V = 2\pi \int_0^2 5^{2x} dx$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và có đồ thị $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 7]$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(2x-1)$ biết rằng diện tích các hình phẳng trong hình vẽ lần lượt là

$S_1 = \frac{244}{15}$, $S_2 = \frac{28}{15}$, $S_3 = \frac{2528}{15}$ và $f(0) = 1$. Tính $g(4)$.

A. $\frac{2744}{15}$.

B. $\frac{5518}{15}$.

C. $\frac{563}{3}$.

D. $\frac{2759}{15}$.

Câu 9: Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , $(1 \leq x \leq 2)$ là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là x và $\sqrt{x^2 + 3}$.

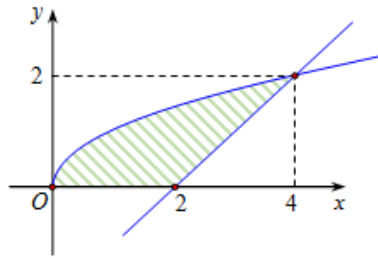
A. $\frac{7\sqrt{7}-8}{3}$.

B. $\frac{8\sqrt{7}-7}{3}$.

C. $\frac{16\sqrt{2}-7}{3}$.

D. $8\sqrt{2} - 4$.

Câu 10: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = x - 2$ như trong hình sau:



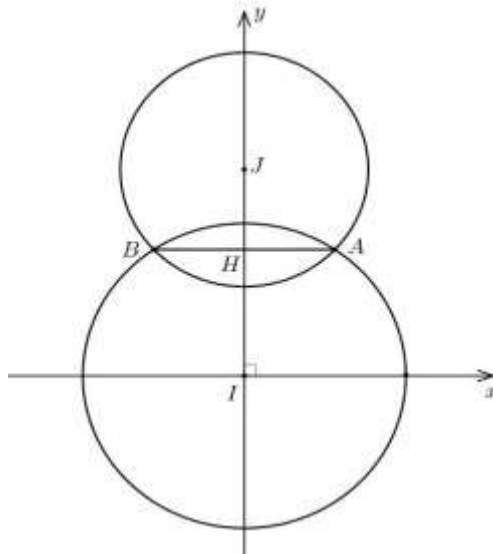
A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

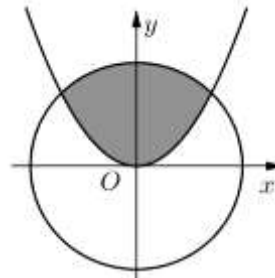
Câu 11: Người ta xây sân khấu với mặt sàn có dạng hợp của hai đường tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn lần lượt là $20m$ và $15m$. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $30m$. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông còn lại là 100 nghìn đồng (tham khảo hình vẽ)



Hỏi số tiền làm mặt sàn sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

A. 202 triệu đồng. B. 208 triệu đồng. C. 218 triệu đồng. D. 200 triệu đồng.

Câu 12: Trong mặt phẳng cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$. Tính diện tích phần tô đậm (gần đúng đến hàng phần trăm).



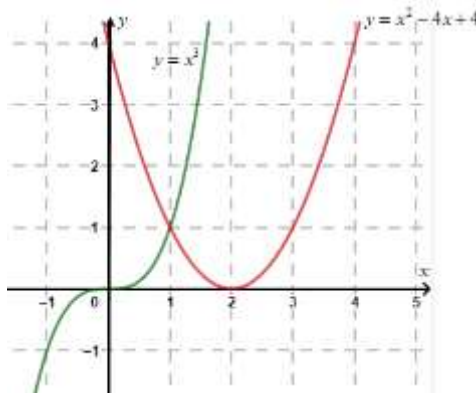
A. 1,19.

B. 1,90.

C. 1,81.

D. 1,80.

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_0^2 |x^3 - (x^2 - 4x + 4)| dx$.

B. $-\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

C. $\int_0^1 x^3 dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

D. $\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

Câu 14: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{61}{3}$.

C. $\frac{343}{162}$.

D. $\frac{39}{2}$.

Câu 15: Đoạn đường thẳng AB có chiều dài 200 km. Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc, xe ô tô thứ nhất đi từ A đến B với vận tốc $v_1 = 8t + 40$ km/h, xe ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc $v_2 = 2t + 50$ km/h. Hỏi sau bao lâu thì hai xe gặp nhau?

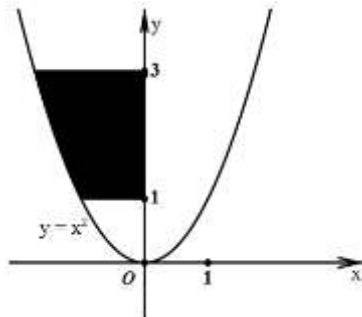
A. 3 giờ.

B. 5 giờ.

C. 4 giờ.

D. 2 giờ.

Câu 16: Tính diện tích hình phẳng được đánh dấu trên hình dưới:



A. $S = \frac{28}{3}$.

B. $S = 3\sqrt{2} - \frac{1}{3}$.

C. $S = \frac{18}{3}$.

D. $S = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

Câu 17: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox là $V = \frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b$ bằng

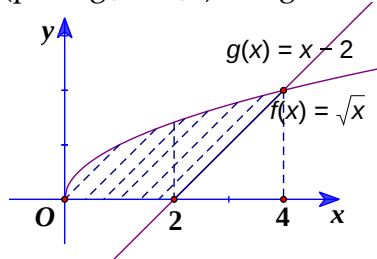
A. 11.

B. 17.

C. 25.

D. 31.

Câu 18: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau:



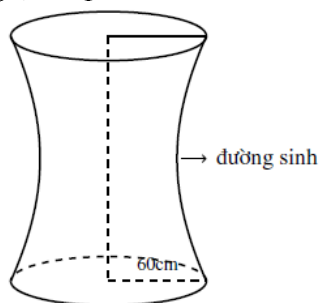
A. $S = \frac{8}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Câu 19: Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80cm , độ dài trục bé bằng 60cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60cm . Tính thể tích V của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $V = 344963\text{cm}^3$.

B. $V = 344964\text{cm}^3$.

C. $V = 208347\text{cm}^3$.

D. $V = 208346\text{cm}^3$.

Câu 20: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{5\pi}{6}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{6\pi}{5}$.

D. $\frac{5}{6}$.

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



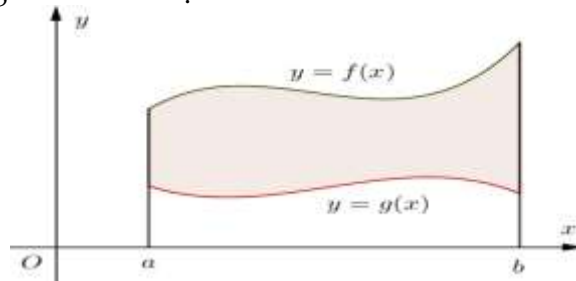
CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Diện tích hình phẳng của hình được tô đen như hình vẽ bên là



A. $\pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

B. $\pi \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

C. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

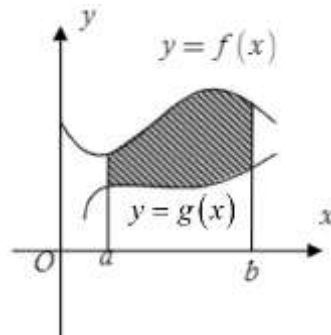
D. $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

Lời giải:

Diện tích hình phẳng của hình được tô đen như hình vẽ bên là $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 2: Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức



A. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

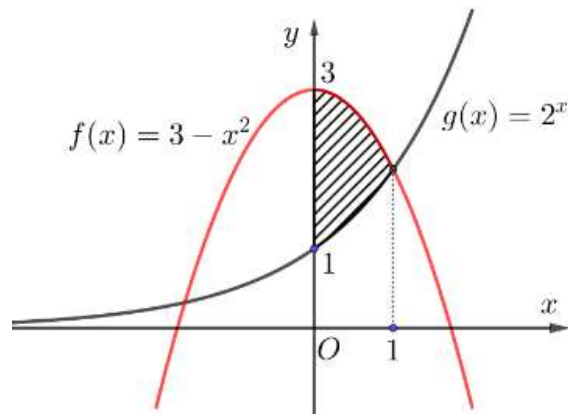
C. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

Lời giải:

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 3: Cho hai đồ thị hàm số $f(x) = 3 - x^2$ và $g(x) = 2^x$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây ?

A. $\pi \int_0^1 \left[(3-x^2)^2 - 4^x \right] dx$.

B. $\int_0^1 (3-x^2-2^x) dx$.

C. $\int_1^3 (3-x^2-2^x)^2 dx$.

D. $\int_1^3 (3-x^2-2^x) dx$.

Lời giải:

Dựa theo hình vẽ trên, diện tích phần gạch chéo tính theo công thức

$$\int_0^1 |3-x^2-2^x| dx = \int_0^1 (3-x^2-2^x) dx.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 3$

A. $S = \frac{10}{4}$.

B. $S = \frac{12}{4}$.

C. $S = \frac{11}{4}$.

D. $S = \frac{9}{4}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức ta có: $S = \int_0^3 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \frac{11}{4}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 5: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

B. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

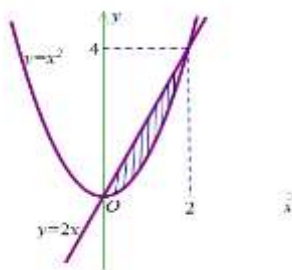
C. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$.

D. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của: Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ là:

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



Gọi D_1 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các đường thẳng: $y = 2x; y = 0; x = 0; x = 2$.

Quay hình phẳng D_1 quanh Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V_1 = \pi \int_0^2 4x^2 dx$.

Gọi D_2 là hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và các đường thẳng: $y = 0; x = 0; x = 2$.

Quay hình phẳng D_2 quanh Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V_2 = \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng

$d: y = 2x$ quay quanh trục Ox có thể tích $V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 6: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = 2 \ln 2 - 1$.

B. $S = \ln 2 + 1$.

C. $S = \ln 2 - 1$.

D. $S = 1 - 2 \ln 2$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và Ox là $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ là

$$S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \int_0^1 \frac{-x+1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = (-x + 2 \ln |x+1|) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 7: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = 5^x, y = 0, x = -2, x = 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng D quay quanh trục hoành được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = \pi \int_{-2}^2 25^x dx$.

B. $V = \int_{-2}^2 5^{2x} dx$.

C. $V = \int_{-2}^2 |5^x| dx$.

D. $V = 2\pi \int_0^2 5^{2x} dx$.

Lời giải:

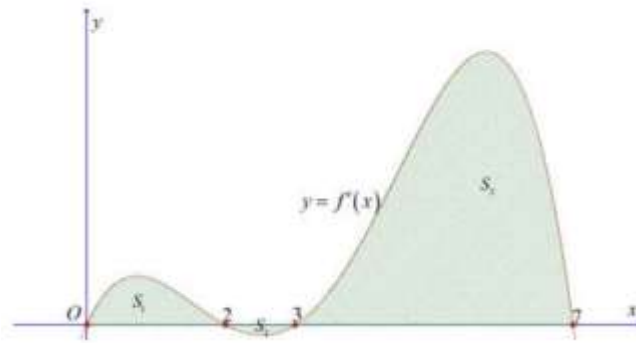
Ta có thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ ($a < b$) sinh ra khi quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Áp dụng công thức ta có: $V = \pi \int_{-2}^2 (5^x)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 25^x dx$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và có đồ thị $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 7]$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(2x-1)$ biết rằng diện tích các hình phẳng trong hình vẽ lần lượt là

$$S_1 = \frac{244}{15}, S_2 = \frac{28}{15}, S_3 = \frac{2528}{15} \text{ và } f(0) = 1. \text{ Tính } g(4).$$

A. $\frac{2744}{15}.$

B. $\frac{5518}{15}.$

C. $\frac{563}{3}.$

D. $\frac{2759}{15}.$

Lời giải:

$$\text{Ta có } S_1 = \int_0^2 |f'(x) - 0| dx = f(x) \Big|_0^2 = f(2) - f(0).$$

$$\text{Mà } S_1 = \frac{244}{15} \text{ và } f(0) = 1 \text{ suy ra } f(2) = \frac{244}{15} + 1 = \frac{259}{15}.$$

$$\text{Tương tự } S_2 = \int_2^3 |f'(x) - 0| dx = -f(x) \Big|_2^3 = f(2) - f(3)$$

$$\text{Mà } S_2 = \frac{28}{15} \text{ và } f(2) = \frac{259}{15} \text{ suy ra } f(3) = \frac{259}{15} - \frac{28}{15} = \frac{231}{15}.$$

$$S_3 = \int_3^7 |f'(x) - 0| dx = f(x) \Big|_3^7 = f(7) - f(3)$$

$$\text{Mà } S_3 = \frac{2528}{15} \text{ và } f(3) = \frac{231}{15} \text{ suy ra } f(7) = \frac{2528}{15} + \frac{231}{15} = \frac{2759}{15}.$$

$$\text{Do } g(x) = f(2x-1) \text{ nên } g(4) = f(2 \cdot 4 - 1) = f(7) = \frac{2759}{15}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 9: Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($1 \leq x \leq 2$) là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là x và $\sqrt{x^2 + 3}$.

A. $\frac{7\sqrt{7}-8}{3}.$

B. $\frac{8\sqrt{7}-7}{3}.$

C. $\frac{16\sqrt{2}-7}{3}.$

D. $8\sqrt{2}-4.$

Lời giải:

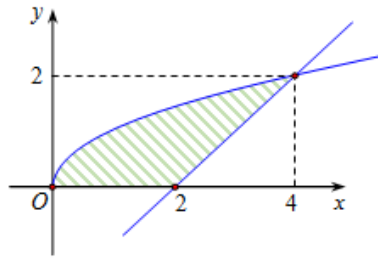
Diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($1 \leq x \leq 2$) là: $S = x\sqrt{x^2 + 3}$.

Khi đó thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 2$ là:

$$V = \int_1^2 x\sqrt{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{x^2 + 3} d(x^2 + 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 3) \sqrt{x^2 + 3} \Big|_1^2 = \frac{7\sqrt{7}-8}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 10: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = x - 2$ như trong hình sau:



A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

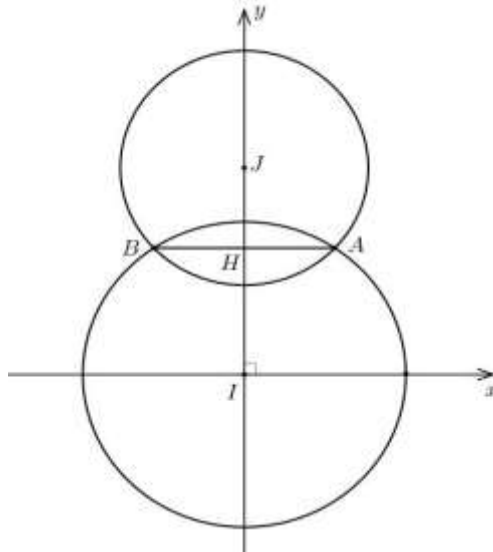
D. $S = \frac{7}{3}$.

Lời giải:

$$S = \int_0^4 |\sqrt{x} - (x - 2)| dx = \int_0^4 \sqrt{x} - (x - 2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^4 = \frac{10}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 11: Người ta xây sân khấu với mặt sàn có dạng hợp của hai đường tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn lần lượt là $20m$ và $15m$. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $30m$. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông còn lại là 100 nghìn đồng (tham khảo hình vẽ)



Hỏi số tiền làm mặt sàn sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

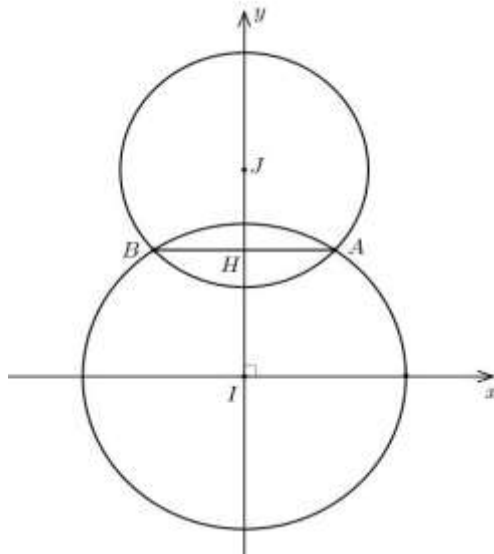
A. 202 triệu đồng.

B. 208 triệu đồng.

C. 218 triệu đồng.

D. 200 triệu đồng.

Lời giải:



Gọi I, J lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính $20\text{ m}, 15\text{ m}$.

Gọi A, B là giao của hai đường tròn.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho Oy trùng IJ và Ox song song với AB và I là gốc tọa độ (như hình vẽ).

Khi đó đường tròn tâm I bán kính $R = 20\text{ m}$ có phương trình $x^2 + y^2 = 400$.

Vì khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m nên $J(0; 30)$. Do đó đường tròn tâm $J(0; 30)$ bán kính $R = 15\text{ m}$ có phương trình $x^2 + (y - 30)^2 = 225$.

Khi đó phần chung của hai đường tròn giới hạn bởi $\left\{ y = \sqrt{400 - x^2}; y = 30 - \sqrt{225 - x^2} \right\}$.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} y = \sqrt{400 - x^2} \\ y = 30 - \sqrt{225 - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{455}}{12} \\ y = \frac{215}{12} \end{cases}$$

Diện tích phần chung của hai đường tròn là

$$S_1 = \int_{\frac{-5\sqrt{455}}{12}}^{\frac{5\sqrt{455}}{12}} \left(\sqrt{400 - x^2} + \sqrt{225 - x^2} - 30 \right) dx \approx 60,2.$$

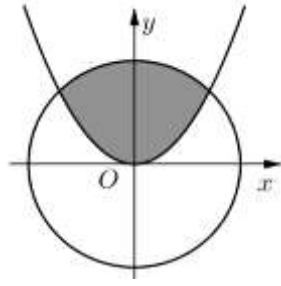
Diện tích riêng của hai đường tròn là $S_2 = 625\pi - 2S_1 \approx 625\pi - 120,4$.

Số tiền chi phí là $300000S_1 + 100000S_2 \approx 300000.60,2 + 100000.(625\pi - 120,4) \approx 202369540$.

Vậy số tiền làm mặt sân sân là gần 202 triệu đồng.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 12: Trong mặt phẳng cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$. Tính diện tích phần tô đậm (gần đúng đến hàng phần trăm).



A. 1,19.

B. 1,90.

C. 1,81.

D. 1,80.

Lời giải:

Ta có $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2-x^2}$. Vì đường cong nửa trên của (C) tương ứng phần dương của trục hoành nên có phương trình $y = \sqrt{2-x^2}$, ($y \geq 0$)

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong nửa trên của (C) và Parabol (P) là :

$$x^2 = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Suy ra diện tích hình phẳng (H) cần tính là :

$$S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{3}$$

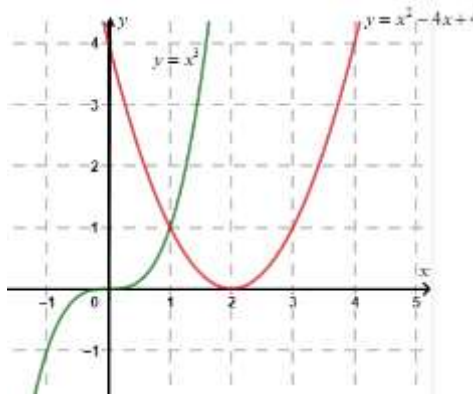
$$\text{Xét } I = \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx, \text{ đặt } x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt$$

$$\text{ta được } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2-2\sin^2 t} \sqrt{2} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} + 1.$$

$$\text{Do đó } S = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \approx 1,90.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_0^2 |x^3 - (x^2 - 4x + 4)| dx.$

B. $-\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx.$

C. $\int_0^1 x^3 dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx.$

D. $\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx.$

Lời giải:

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox , $x = 0$, $x = 1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục Ox , $x = 1$, $x = 2$.

Do đó diện tích cần tính là $S = \int_0^1 |x^3| dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 14: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

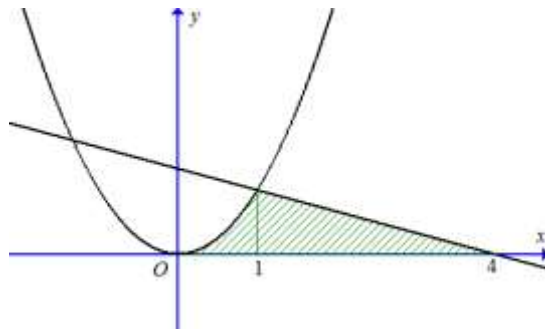
A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{61}{3}$.

C. $\frac{343}{162}$.

D. $\frac{39}{2}$.

Lời giải:



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ là

$$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ với trục hoành là $x = 4$.

Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ với trục hoành là $x = 0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\right)\right|_1^4 = \frac{11}{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 15: Đoạn đường thẳng AB có chiều dài 200 km. Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc, xe ô tô thứ nhất đi từ A đến B với vận tốc $v_1 = 8t + 40$ km/h, xe ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc $v_2 = 2t + 50$ km/h. Hỏi sau bao lâu thì hai xe gặp nhau?

A. 3 giờ.

B. 5 giờ.

C. 4 giờ.

D. 2 giờ.

Lời giải:

Gọi thời gian kể từ lúc hai xe đi đến lúc hai xe gặp nhau là a (giờ, $a > 0$)

Vì hai xe đi ngược chiều nên ta có phương trình:

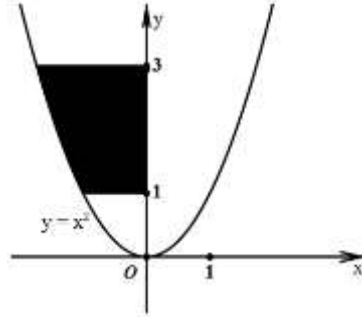
$$\int_0^a (8t + 40) dt + \int_0^a (2t + 50) dt = 200 \Leftrightarrow (4t^2 + 40t)\Big|_0^a + (t^2 + 50t)\Big|_0^a = 200$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 40a + a^2 + 50a = 200 \Leftrightarrow 5a^2 + 90a - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ (TM)} \\ a = -20 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy sau 2 giờ thì hai xe gặp nhau.

⇒ **Chọn đáp án D.**

Câu 16: Tính diện tích hình phẳng được đánh dấu trên hình dưới:



A. $S = \frac{28}{3}$.

B. $S = 3\sqrt{2} - \frac{1}{3}$.

C. $S = \frac{18}{3}$.

D. $S = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

Lời giải:

Ta có $y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$, từ hình vẽ ta thấy $x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{y}$.

$$S = \int_1^3 |-\sqrt{y}| dy = \int_1^3 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^3 = \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}.$$

⇒ **Chọn đáp án D.**

Câu 17: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox là $V = \frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b$ bằng

A. 11.

B. 17.

C. 25.

D. 31.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm giữa $(P): y = 1 - x^2$ và trục Ox :

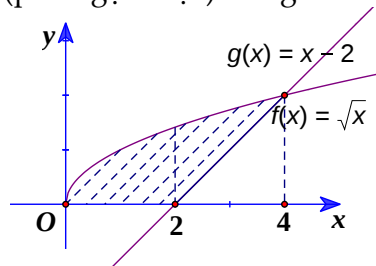
$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}. \text{ Suy ra: } a = 16, b = 15. \text{ Vậy } a + b = 31.$$

⇒ **Chọn đáp án D.**

Câu 18: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau:



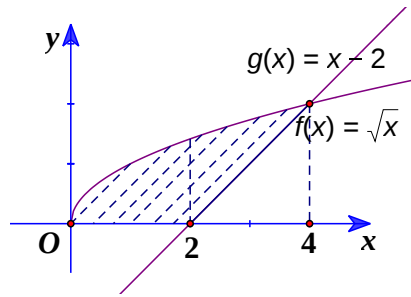
A. $S = \frac{8}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Lời giải:

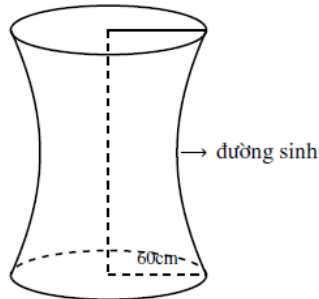


Dựa và hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx \pi a^2 \sqrt{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 19: Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng $80cm$, độ dài trục bé bằng $60cm$ và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng $60cm$. Tính thể tích V của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $V = 344963cm^3$.

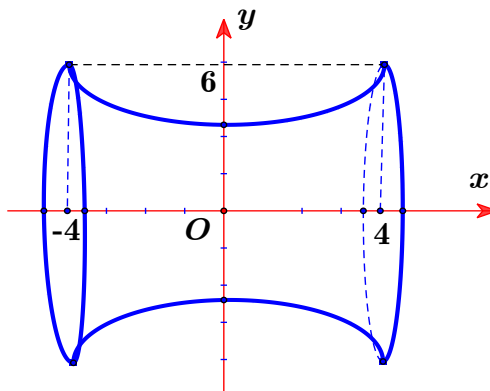
B. $V = 344964cm^3$.

C. $V = 208347cm^3$.

D. $V = 208346cm^3$.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta thấy elip có tâm $I(0; 6)$, độ dài trục lớn $8dm$ và độ dài trục nhỏ $6dm$.



Suy ra đường sinh chiếc trống thuộc elip có phương trình: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-6)^2}{3^2} = 1 \Rightarrow y = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} + 6$

Khối tròn xoay giới hạn bởi
$$\begin{cases} y = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} + 6 \\ y = 0 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Ta có thể tích chiếc trống: $V = \pi \int_{-4}^4 \left(-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} + 6 \right)^2 dx \approx 344,9636 dm^3 \approx 344964 cm^3.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 20: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{5\pi}{6}.$

B. $\frac{2\pi}{3}.$

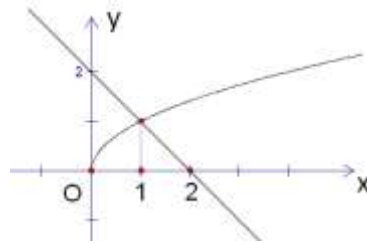
C. $\frac{6\pi}{5}.$

D. $\frac{5}{6}.$

Lời giải:

Đường thẳng $y = 2 - x$ cắt đường thẳng $y = 0$ tại $(2; 0)$ và cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại $(1; 1)$

Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ cắt đường thẳng $y = 0$ tại $O(0; 0)$



Thể tích khối tròn xoay đó là: $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \frac{(2-x)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{5\pi}{6}.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



PHIẾU ÔN TẬP SỐ 05

CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

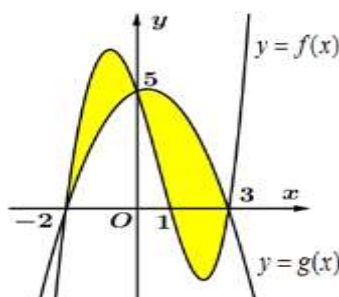
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

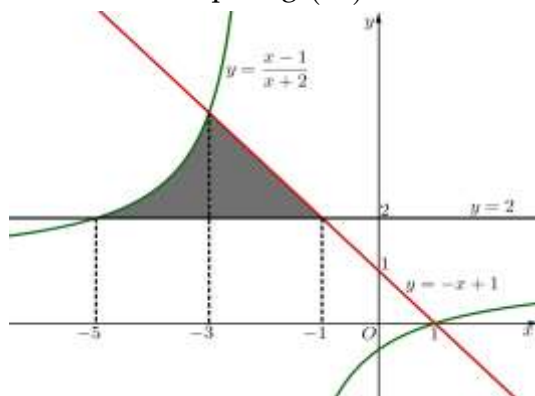
NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



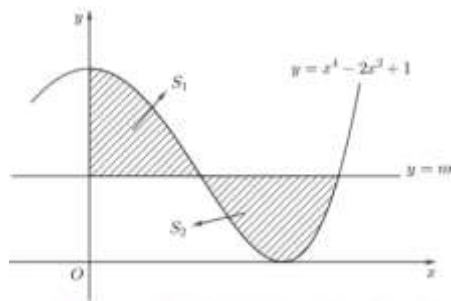
- A. $\int_{-2}^3 (f(x) - g(x)) dx$. B. $\int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx$.
C. $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$. D. $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$.

Câu 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ và hai đường thẳng $y = 2$, $y = -x + 1$. Tính diện tích S của hình phẳng (H).



- A. $S = 8 + 3\ln 3$. B. $S = 8 - 3\ln 3$. C. $S = 3\ln 3$. D. $S = -4 + 3\ln 3$.

Câu 3: Đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 1$) cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại hai điểm thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và chia thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ.



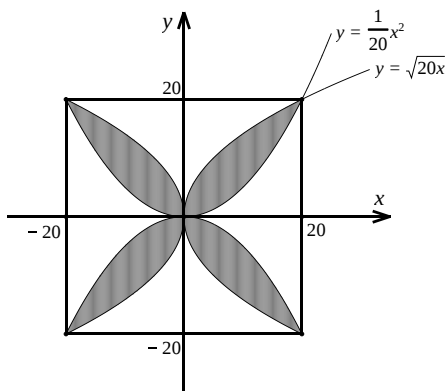
Biết $S_1 = S_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$. B. $m \in \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$. D. $m \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3$ và $y = 1$ bằng

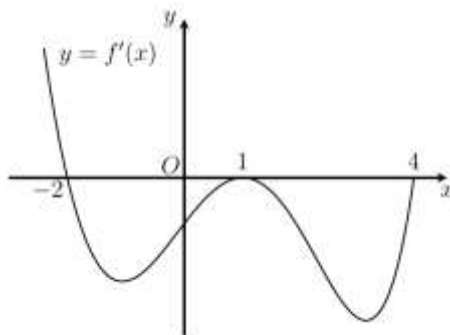
- A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. $\frac{32}{3}$. D. 32.

Câu 5: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa bằng



- A. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$. B. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$. C. 250 cm^2 . D. 800 cm^2 .

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



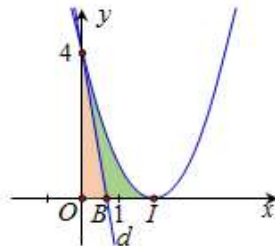
Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho biết $f(1) = 3$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-2) + f(4)$.

- A. 21. B. 3. C. 9. D. 2.

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

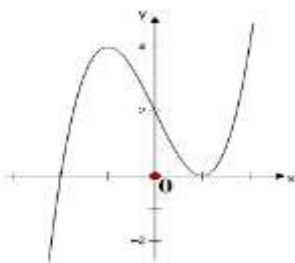
- A. $\frac{11}{6}$. B. $\frac{61}{3}$. C. $\frac{343}{162}$. D. $\frac{39}{2}$.

Câu 8: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.



- A. $k = -4$. B. $k = -8$. C. $k = -6$. D. $k = -2$.

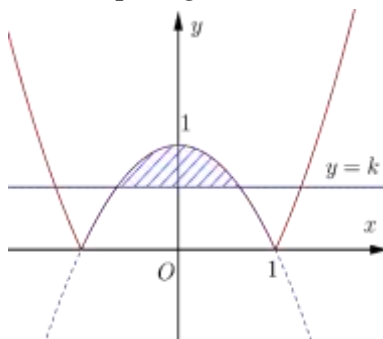
Câu 9: Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.

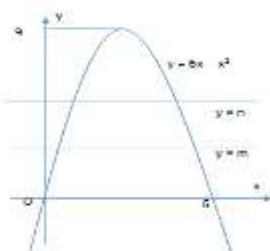
- A. 6. B. $\frac{19}{4}$. C. $\frac{27}{4}$. D. 8.

Câu 10: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$, $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên dưới.



- A. $k = \sqrt[3]{4}$. B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

Câu 11: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 6x - x^2$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$, $y = n$ ($m < n < 9$) chia hình (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $P = (9 - m)^3 + (9 - n)^3$.



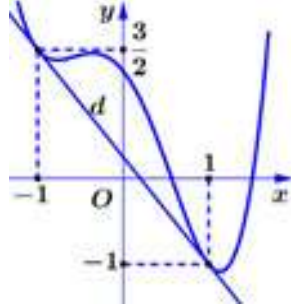
A. $P = 405$.

B. $P = 409$.

C. $P = 407$.

D. $P = 403$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị là (C) và d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại hai điểm như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và d là $\frac{11}{3}$. Khi đó tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng



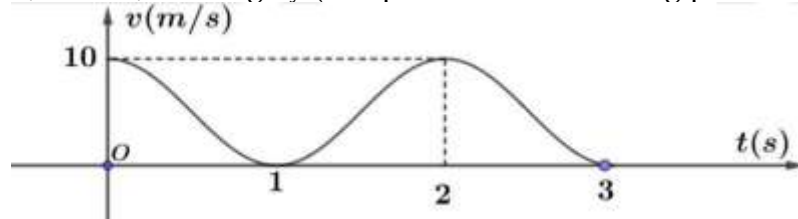
A. $\frac{19}{6}$.

B. $\frac{25}{6}$.

C. $\frac{23}{6}$.

D. $\frac{13}{3}$.

Câu 13: Một chất điểm chuyển động trong 3 giây với vận tốc $v = a \cos(\pi t) + b$ (mét/giây) (trong đó t là biến thời gian; a, b là các hằng số) có đồ thị là một đường hình sin như hình vẽ bên. Tính tổng quãng đường mà vật đi được sau 3 giây (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



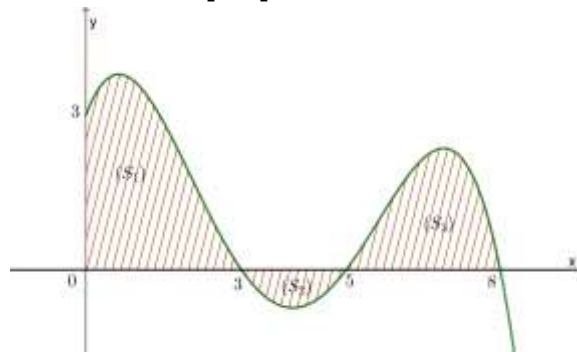
A. 29,93m.

B. 15m.

C. 27,93m.

D. 17m.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 8]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Trong các giá trị sau, giá trị nào lớn nhất?

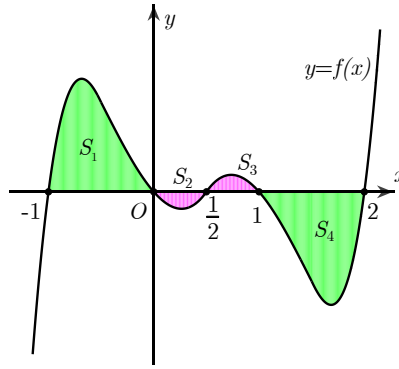
A. $\int_0^3 f(x) dx$.

B. $\int_0^1 f(x) dx$.

C. $\int_0^8 f(x) dx$.

D. $\int_0^5 f(x) dx$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị tạo với trục hoành các miền có diện tích S_1, S_2, S_3, S_4 như hình vẽ bên dưới:



Biết $S_1 = S_4 = 10$, $S_2 = S_3 = 8$. Tích phân $I = \int_0^{\ln 3} e^x f(e^x - 1) dx$ bằng

- A. -8. B. -10. C. 8. D. 10.

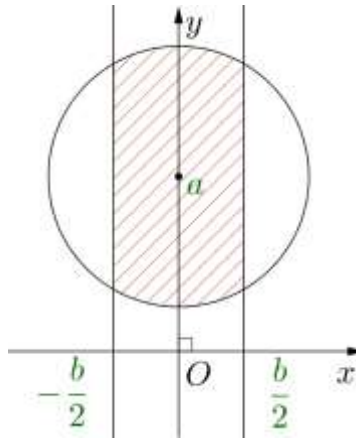
Câu 16: Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2020$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

- A. $S_{\max} = \frac{2020^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2020^3}{6}$. C. $S_{\max} = \frac{2020^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2020^3}{3}$.

Câu 17: Cho Parabol $(P): y = x^2$. Hai điểm A, B di động trên (P) sao cho $AB = 2$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P) và đoạn thẳng AB . Tìm giá trị lớn nhất của S .

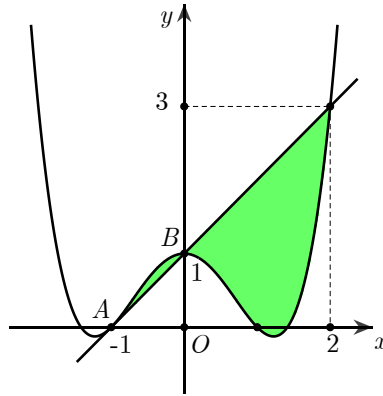
- A. $\max S = \frac{4}{3}$. B. $\max S = \frac{7}{6}$. C. $\max S = \frac{5}{3}$. D. $\max S = \frac{5}{6}$.

Câu 18: Hình gạch chéo được giới hạn bởi đường tròn $x^2 + (y - a)^2 = b^2$; $a > b > 0$ và các đường thẳng $x = -\frac{b}{2}$ và $x = \frac{b}{2}$. Thể tích vật tròn xoay tạo bởi hình gạch chéo quay xung quanh trục Ox là



- A. $\pi^2 ab^2$. B. $\frac{3}{4} \pi^2 ab^2$. C. $\pi ab^2 \left(\frac{2}{3} \pi + \sqrt{3} \right)$. D. $\pi ab^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \right)$.

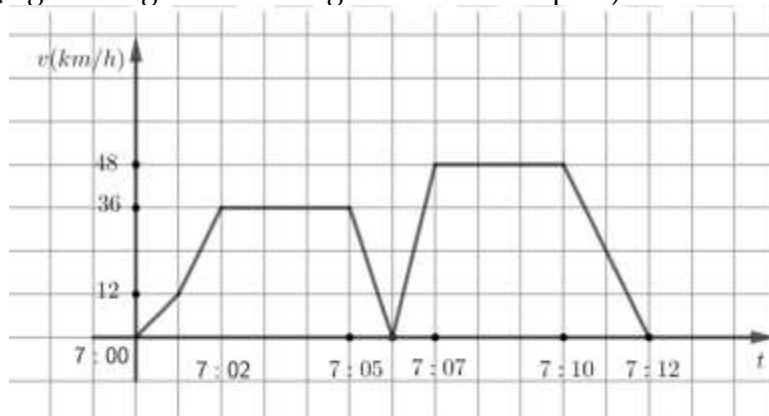
Câu 19: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$. Tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị C và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ bằng

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{20}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 20: Ông A đi làm lúc 7 giờ và đến cơ quan lúc 7 giờ 12 phút bằng xe gắn máy, trên đường đến cơ quan ông A gặp một người băng qua đường nên ông phải giảm tốc độ để đảm bảo an toàn rồi sau đó lại từ từ tăng tốc độ để đến cơ quan làm việc. Hỏi quãng đường kể từ lúc ông A giảm tốc độ để tránh tai nạn cho đến khi tới cơ quan dài bao nhiêu mét? (Độ thị dưới đây mô tả vận tốc chuyển động của ông A theo thời gian khi đến cơ quan)



- A. 3600. B. 3200. C. 3500. D. 3900.

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021



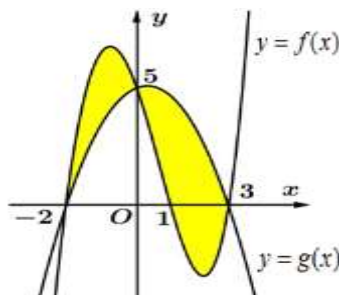
CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^3 (f(x) - g(x)) dx$.

B. $\int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx$.

C. $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$.

D. $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$.

Lời giải:

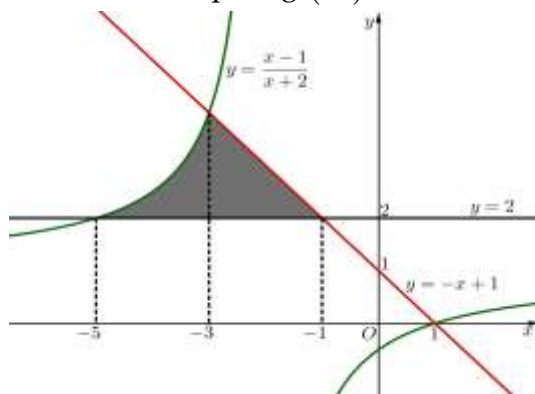
Từ đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ ta có diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên dưới được tính là

$$S = \int_{-2}^0 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ và hai đường thẳng $y = 2$, $y = -x + 1$. Tính diện tích S của hình phẳng (H).



A. $S = 8 + 3\ln 3$.

B. $S = 8 - 3\ln 3$.

C. $S = 3\ln 3$.

D. $S = -4 + 3\ln 3$.

Lời giải:

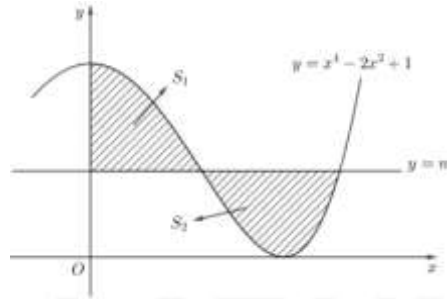
Dựa vào đồ thị ta có

$$S = \int_{-5}^{-3} \left(\frac{x-1}{x+2} - 2 \right) dx + \int_{-3}^{-1} (-x+1-2) dx = \int_{-5}^{-3} \left(-1 - \frac{3}{x+2} \right) dx + \int_{-3}^{-1} (-x-1) dx$$

$$= \left(-x - 3\ln|x+2| \right) \Big|_{-5}^{-3} + \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-3}^{-1} = 3\ln 3.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 3: Đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 1$) cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại hai điểm thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và chia thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ.



Biết $S_1 = S_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in \left(0; \frac{2}{5} \right)$.

B. $m \in \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2} \right)$.

C. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5} \right)$.

D. $m \in \left(\frac{3}{5}; 1 \right)$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2x^2 + 1 = m \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = m \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{m}}$.

Vậy các giao điểm thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy có hoành độ bằng $x = \sqrt{1 - \sqrt{m}}$ và $x = \sqrt{1 + \sqrt{m}}$.

Diện tích $S_1 = \int_0^{\sqrt{1-\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx$ và $S_2 = \int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx$.

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1+\sqrt{m})^5}}{5} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+\sqrt{m})^3} + (1-m)\sqrt{1+\sqrt{m}} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{9}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3$ và $y = 1$ bằng

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. 32.

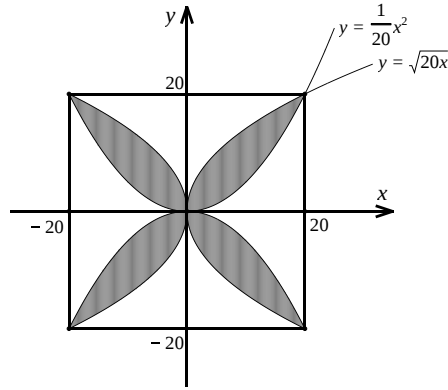
Lời giải:

Xét phương trình $x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Do đó $S = \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 5: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa bằng



A. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$.

B. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$.

C. 250 cm^2 .

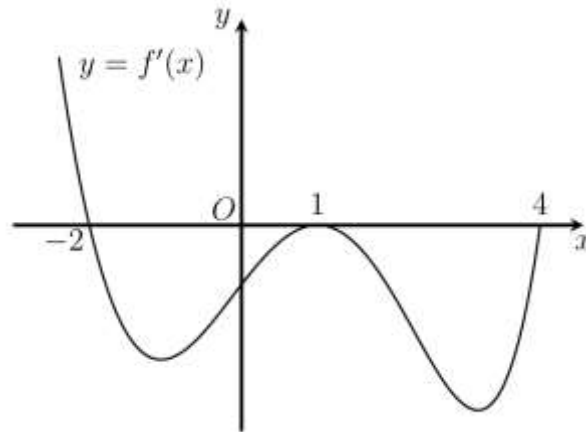
D. 800 cm^2 .

Lời giải:

Diện tích mỗi cánh hoa là $\int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20} x^2 \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{20x}\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{20} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{20} = \frac{400}{3} \text{ cm}^2$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho biết $f(1) = 3$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-2) + f(4)$.

A. 21.

B. 3.

C. 9.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $\int_{-2}^1 |f'(x)| dx = 9 \Leftrightarrow \int_{-2}^1 f'(x) dx = -9 \Rightarrow f(1) - f(-2) = -9$.

Mà $f(1) = 3 \Rightarrow f(-2) = 12$.

Ta có: $\int_1^4 |f'(x)| dx = 12 \Leftrightarrow \int_1^4 f'(x) dx = -12 \Rightarrow f(4) - f(1) = -12$.

Mà $f(1) = 3 \Rightarrow f(4) = -9$. Vậy $P = f(-2) + f(4) = 3$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

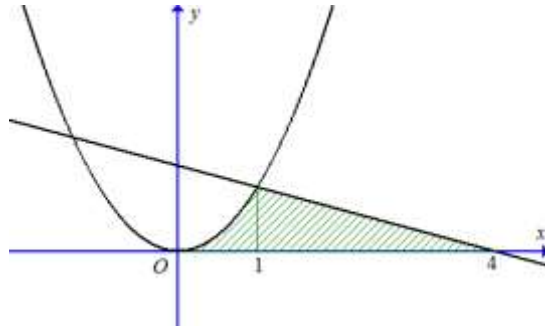
A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{61}{3}$.

C. $\frac{343}{162}$.

D. $\frac{39}{2}$.

Lời giải:



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ là

$$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ với trục hoành là $x = 4$.

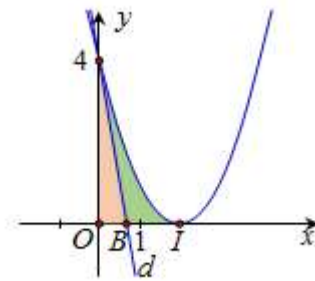
Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ với trục hoành là $x = 0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\right) \Big|_1^4 = \frac{11}{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 8: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.



A. $k = -4$.

B. $k = -8$.

C. $k = -6$.

D. $k = -2$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ và trục hoành là:
 $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành

$$\text{là: } S = \int_0^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 4$.

Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(-\frac{4}{k}; 0\right)$.

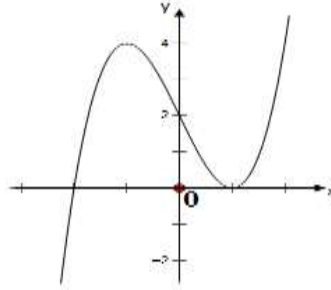
Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau khi $B \in OI$ và

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} S = \frac{4}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -\frac{4}{k} < 2 \\ S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot -\frac{4}{k} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -6.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 9: Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.

- A. 6. B. $\frac{19}{4}$. C. $\frac{27}{4}$. D. 8.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt và tiếp xúc trục hoành lần lượt tại điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$ nên hàm số có dạng $y = f(x) = a(x+2)(x-1)^2 = a(x^3 - 3x + 2)$.

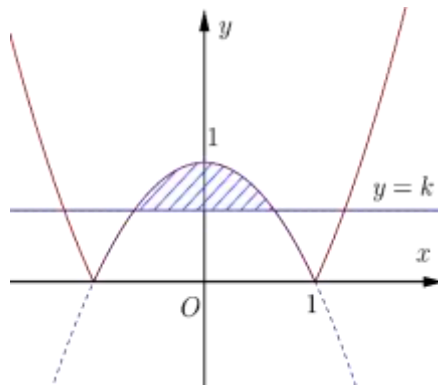
Mặt khác đồ thị hàm số lại đi qua điểm $(-1; 4)$ nên ta có $a = 1$. Vậy $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 - 3x + 2| dx = \frac{27}{4}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 10: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$, $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên dưới.



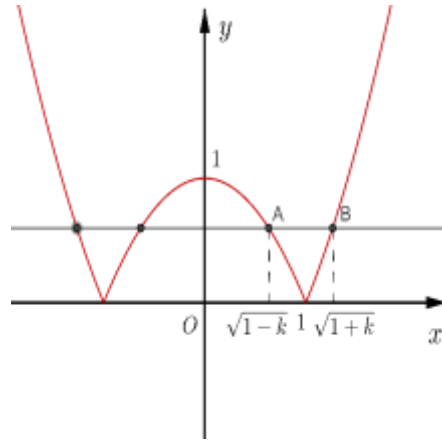
- A. $k = \sqrt[3]{4}$. B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

Lời giải:

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = k$, $x = 0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, y = k, x > 0.$$



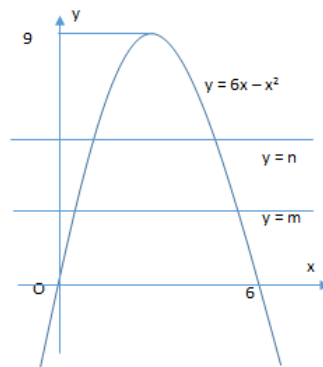
$$\text{Nghĩa là } \int_0^{\sqrt{1-k}} (1 - x^2 - k) dx = \int_{\sqrt{1-k}}^1 (k - 1 + x^2) dx + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k - x^2 + 1) dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sqrt{1-k})^3 = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(\sqrt{1-k})^3 + (\sqrt{1-k})^3 + (\sqrt{1+k})^3 - \frac{1}{3}(\sqrt{1+k})^3 - (1+k) + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sqrt{1+k})^3 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{1+k})^3 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 11: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 6x - x^2$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$, $y = n$ ($m < n < 9$) chia hình (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $P = (9 - m)^3 + (9 - n)^3$.



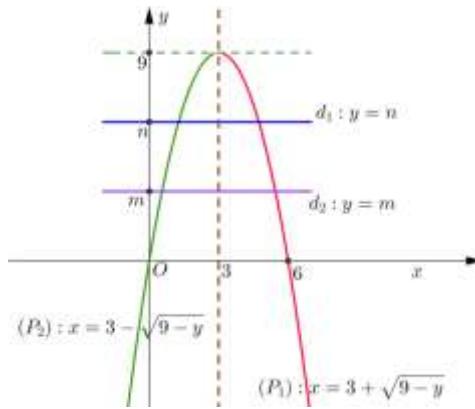
A. $P = 405$.

B. $P = 409$.

C. $P = 407$.

D. $P = 403$.

Lời giải:



Gọi $(H): \begin{cases} (P): y = 6x - x^2 \\ Ox: y = 0 \\ x = 0, x = 6 \end{cases}$. Suy ra: $S = S_H = \int_0^6 (6x - x^2) dx = 36$

Ta có: $y = 6x - x^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 9 - y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{9-y} & (P_1) \\ x = 3 - \sqrt{9-y} & (P_2) \end{cases}$

Gọi $(H_1): \begin{cases} (P_1): x = 3 + \sqrt{9-y} \\ (P_2): x = 3 - \sqrt{9-y} \\ y = n, y = 9 (n < 9) \end{cases}$

Suy ra: $S_1 = S_{H_1} = \int_n^9 (3 + \sqrt{9-y} - 3 + \sqrt{9-y}) dy = 2 \int_n^9 \sqrt{9-y} dy = \frac{4}{3} (\sqrt{9-n})^3$

Mà $S_1 = \frac{S}{3} = 12$ nên $\frac{4}{3} (\sqrt{9-n})^3 = 12 \Leftrightarrow (9-n)^3 = 81$

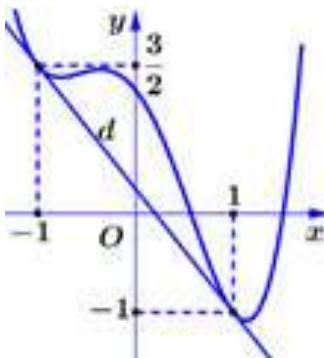
Gọi $(H_2): \begin{cases} (P_1): x = 3 + \sqrt{9-y} \\ (P_2): x = 3 - \sqrt{9-y} \\ y = m, y = 9 (m < 9) \end{cases}$. Suy ra: $S_2 = S_{H_2} = 2 \int_m^9 \sqrt{9-y} dy = \frac{4}{3} (\sqrt{9-m})^3$

Mà $S_2 = \frac{2S}{3} = 24$ nên $\frac{4}{3} (\sqrt{9-m})^3 = 24 \Leftrightarrow (9-m)^3 = 324$. Vậy $P = 81 + 324 = 405$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị là (C) và d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại hai điểm như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và d là $\frac{11}{3}$. Khi đó

tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng



A. $\frac{19}{6}$.

B. $\frac{25}{6}$.

C. $\frac{23}{6}$.

D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải:

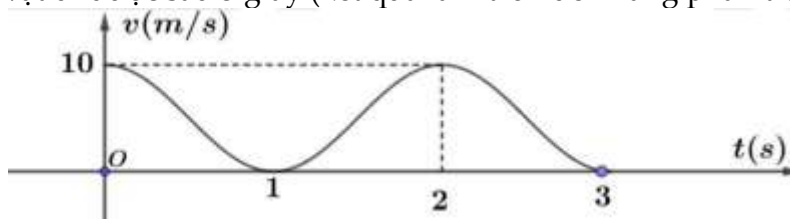
Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $\left(-1; \frac{3}{2}\right); (1; -1)$ là $g(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$

$$S = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = \frac{11}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 g(x) dx = \frac{11}{3}$$

$$\Leftrightarrow I - \int_{-1}^1 \left(-\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{11}{3} \Leftrightarrow I - \frac{1}{2} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow I = \frac{25}{6}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 13: Một chất điểm chuyển động trong 3 giây với vận tốc $v = a \cos(\pi t) + b$ (mét/giây) (trong đó t là biến thời gian; a, b là các hằng số) có đồ thị là một đường hình sin như hình vẽ bên. Tính tổng quãng đường mà vật đi được sau 3 giây (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. 29,93m.

B. 15m.

C. 27,93m.

D. 17m.

Lời giải:

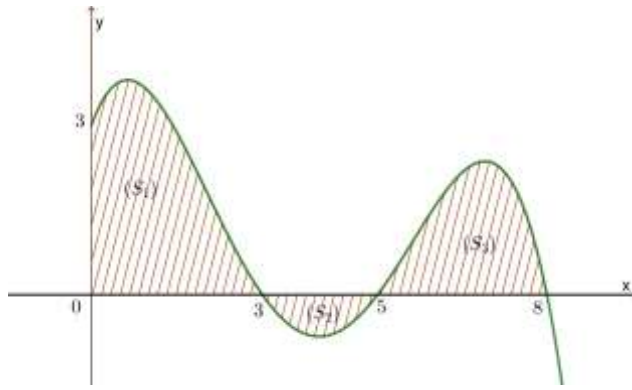
Quan sát đồ thị ta có:

$$\begin{cases} v(0) = 10 \\ v(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 10 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \end{cases}. \text{ Suy ra } v = 5 \cos(\pi t) + 5.$$

$$\text{Vậy quãng đường mà vật đi được sau 3 giây là: } S = \int_0^3 (5 \cos(\pi t) + 5) dt = 15 \text{ (m).}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 8]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Trong các giá trị sau, giá trị nào lớn nhất?

A. $\int_0^3 f(x) dx$.

B. $\int_0^1 f(x) dx$.

C. $\int_0^8 f(x) dx$.

D. $\int_0^5 f(x) dx$.

Lời giải:

Ta có $\int_0^3 f(x) dx = S_{(S_1)}$.

$\int_0^1 f(x) dx < \int_0^3 f(x) dx$

$\int_0^8 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx = S_{(S_1)} - S_{(S_2)} + S_{(S_3)}$.

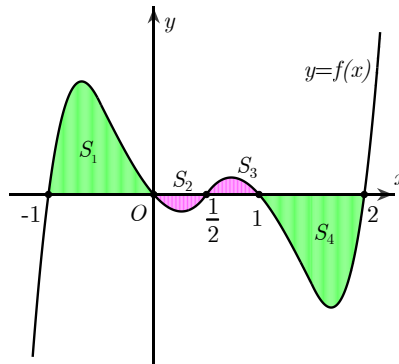
$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = S_{(S_1)} - S_{(S_2)}$.

Từ hình vẽ, ta thấy $S_{(S_3)} > S_{(S_2)}$ nên $S_{(S_1)} - S_{(S_2)} < S_{(S_1)} < S_{(S_1)} - S_{(S_2)} + S_{(S_3)}$

Suy ra $\int_0^8 f(x) dx$ là lớn nhất.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị tạo với trục hoành các miền có diện tích S_1, S_2, S_3, S_4 như hình vẽ bên dưới:



Biết $S_1 = S_4 = 10$, $S_2 = S_3 = 8$. Tích phân $I = \int_0^{\ln 3} e^x f(e^x - 1) dx$ bằng

A. -8.

B. -10.

C. 8.

D. 10.

Lời giải:

Đặt $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = \ln 3 \Rightarrow t = 2$.

$$I = \int_0^{\ln 3} e^x f(e^x - 1) dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt$$

$$= -S_2 + S_3 + S_4 = -8 + 8 - 10 = -10.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 16: Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2020$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2020^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2020^3}{6}$. C. $S_{\max} = \frac{2020^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2020^3}{3}$.

Lời giải:

Giả sử $A(a; a^2); B(b; b^2) (b > a)$ sao cho $AB = 2020$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a+b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b |(a+b)x - ab - x^2| dx = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \frac{1}{6}(b-a)^3.$$

$$\text{Vì } AB = 2020 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2020^2 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 2020^2.$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \leq 2020^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \leq 2020 \Rightarrow S \leq \frac{2020^3}{6}.$$

$$\text{Vậy } S_{\max} = \frac{2020^3}{6} \text{ khi } a = -1010 \text{ và } b = 1010.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 17: Cho Parabol $(P): y = x^2$. Hai điểm A, B di động trên (P) sao cho $AB = 2$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P) và đoạn thẳng AB . Tìm giá trị lớn nhất của S .

A. $\max S = \frac{4}{3}$. B. $\max S = \frac{7}{6}$. C. $\max S = \frac{5}{3}$. D. $\max S = \frac{5}{6}$.

Lời giải:

Gọi $A(a; a^2), B(b; b^2) \in (P)$ sao cho $b > a$ là hai điểm trên Parabol và $AB = 2$.

$$\text{Khi đó phương trình đường thẳng } AB \text{ là } y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) \Rightarrow y = (a+b)x - ab.$$

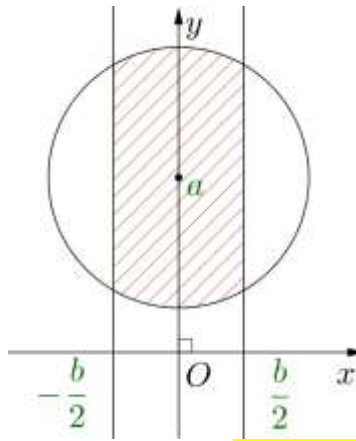
$$\text{Gọi } S \text{ là diện tích hình phẳng cần tìm, ta có: } S = \int_a^b [(a+b)x - ab - x^2] dx = \frac{1}{6}(b-a)^3.$$

$$\text{Ta có: } AB = 2 \Rightarrow |b-a| = b-a \leq 2 \Rightarrow S = \frac{1}{6}(b-a)^3 \leq \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_{\max} = \frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = -1; b = 1 \Rightarrow A(-1; 1), B(1; 1)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 18: Hình gạch chéo được giới hạn bởi đường tròn $x^2 + (y-a)^2 = b^2$; $a > b > 0$ và các đường thẳng $x = -\frac{b}{2}$ và $x = \frac{b}{2}$. Thể tích vật tròn xoay tạo bởi hình gạch chéo quay xung quanh trục Ox là



A. $\pi^2 ab^2$.

B. $\frac{3}{4} \pi^2 ab^2$.

C. $\pi ab^2 \left(\frac{2}{3} \pi + \sqrt{3} \right)$.

D. $\pi ab^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \right)$.

Lời giải:

Ta có: $x^2 + (y - a)^2 = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = a + \sqrt{b^2 - x^2} \\ y = a - \sqrt{b^2 - x^2} \end{cases}$.

Thể tích vật tròn xoay tạo bởi hình gạch chéo quay xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left(a + \sqrt{b^2 - x^2} \right)^2 - \left(a - \sqrt{b^2 - x^2} \right)^2 \right] dx = \pi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 4a\sqrt{b^2 - x^2} dx = 4a\pi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - x^2} dx$$

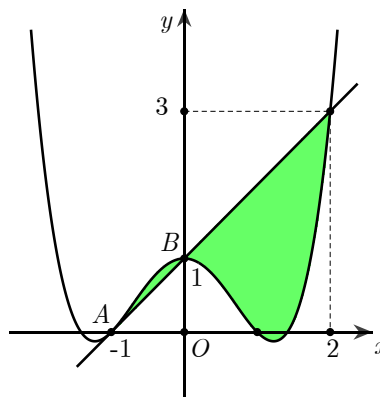
Đặt $x = b \sin t$, $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \Rightarrow dx = b \cos t dt$. Đổi cận: $x = -\frac{b}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = \frac{b}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

$$V = 4a\pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 t} b \cos t dt = 4ab^2 \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = 4ab^2 \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2ab^2 \pi \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2ab^2 \pi \left[\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right] = \pi ab^2 \left(\frac{2}{3} \pi + \sqrt{3} \right).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 19: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$. Tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị C và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{20}$.

C. $\frac{1}{10}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải:

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $A(-1;0)$ có dạng $y = (-4a - 2b)(x + 1)$.

Do tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 nên phương trình $ax^4 + bx^2 + c = (-4a - 2b)(x + 1)$ nhận ba nghiệm là $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} c = -a - b \\ b = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ b = -3a \end{cases}.$$

Vậy $(C): y = ax^4 - 3ax^2 + 2a = a(x^4 - 3x^2 + 2)$ và $\Delta: y = 2a(x + 1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ bằng $\frac{56}{5}$

$$\text{nên: } \int_0^2 |2a(x+1) - a(x^4 - 3x^2 + 2)| dx = \frac{56}{5} \Leftrightarrow \int_0^2 (2a(x+1) - a(x^4 - 3x^2 + 2)) dx = \frac{56}{5}.$$

$$\Leftrightarrow a \int_0^2 (-x^4 + 3x^2 + 2x) dx = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a \left(-\frac{x^5}{5} + x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a \cdot \frac{28}{5} = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a = 2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ là

$$S = \int_{-1}^0 |a(x^4 - 3x^2 + 2) - 2a(x+1)| dx = \int_{-1}^0 (2x^4 - 6x^2 - 4x) dx = 2 \left(\frac{x^5}{5} - x^3 - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{2}{5}.$$

Góp ý cách khác.

Phương trình đường thẳng $\Delta: y = x + 1$.

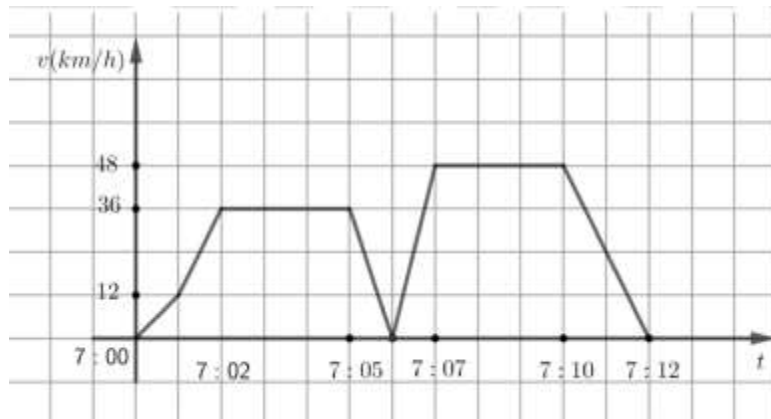
Do Δ và (C) cắt nhau tại các điểm có hoành độ $-1; 0; 2$ nên ta có phương trình $a(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2) = 0$

Theo bài ta có phương trình $a \int_0^2 (x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2) dx = \frac{56}{5} \Rightarrow a = 2$.

Từ đó ta được $S = \int_{-1}^0 [2(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2)] dx = \frac{2}{5}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 20: Ông A đi làm lúc 7 giờ và đến cơ quan lúc 7 giờ 12 phút bằng xe gắn máy, trên đường đến cơ quan ông A gặp một người băng qua đường nên ông phải giảm tốc độ để đảm bảo an toàn rồi sau đó lại từ từ tăng tốc độ để đến cơ quan làm việc. Hỏi quãng đường kể từ lúc ông A giảm tốc độ để tránh tai nạn cho đến khi tới cơ quan dài bao nhiêu mét? (Đồ thị dưới đây mô tả vận tốc chuyển động của ông A theo thời gian khi đến cơ quan)



A. 3600 .

B. 3200 .

C. 3500 .

D. 3900 .

Lời giải:

Thời gian đi đến cơ quan của ông A là 12 phút bằng 0,2 giờ.

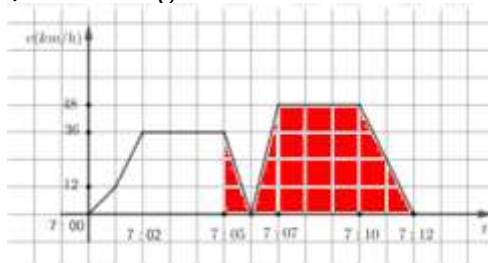
Chọn gốc thời gian từ lúc 7 giờ sáng ($t = 0$).

Lúc ông A giảm tốc độ là 7 giờ 5 phút $\left(t = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \right)$

Ta có: $s = \int_{\frac{1}{12}}^{0,2} v(t)dt$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đường cong $v(t)$ và hai

đường thẳng $t = \frac{1}{12}$, $t = 0,2$

Diện tích hình phẳng trên được tính bằng cách chia nhỏ các hình đã biết nên



$$s = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{1}{60} + \frac{\frac{6}{60} + \frac{3}{60}}{2} \times 48 = 3,9 \text{ km} .$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

HẾT

Huế, ngày 10 tháng 02 năm 2021