KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

Biên soạn nội dung:

Thầy Nguyễn Cao Cường

Tel: 0904.15.16.50

1. NHỮNG QUY TẮC CHUNG TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

Quy tắc song hành: hầu hết các BĐT đều có tính đối xứng do đó việc sử dụng các chứng minh một cách song hành, tuần tự sẽ giúp ta hình dung ra được kết quả nhanh chóng và định hướng cách giả nhanh hơn.

Quy tắc dấu bằng: dấu bằng " = " trong BĐT là rất quan trọng. Nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh. Nó định hướng cho ta phương pháp giải, dựa vào điểm rơi của BĐT. Chính vì vậy mà khi dạy cho học sinh ta rèn luyện cho học sinh có thói quen tìm điều kiện xảy ra dấu bằng mặc dù trong các kì thi học sinh có thể không trình bày phần này. Ta thấy được ưu điểm của dấu bằng đặc biệt trong phương pháp điểm rơi và phương pháp tách nghịch đảo trong kỹ thuật sử dụng BĐT Cô Si.

Quy tắc về tính đồng thời của dấu bằng: không chỉ học sinh mà ngay cả một số giáo viên khi mới nghiên cứu và chứng minh BĐT cũng thương rất hay mắc sai lầm này. Áp dụng liên tiếp hoặc song hành các BĐT nhưng không chú ý đến điểm rơi của dấu bằng. Một nguyên tắc khi áp dụng song hành các BĐT là điểm rơi phải được đồng thời xảy ra, nghĩa là các dấu " = " phải được cùng được thỏa mãn với cùng một điều kiện của biến.

Quy tắc biên: Cơ sở của quy tắc biên này là các bài toán quy hoạch tuyến tính, các bài toán tối ưu, các bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm nhiều biến trên một miền đóng. Ta biết rằng các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thường xảy ra ở các vị trí biên và các đỉnh nằm trên biên.

Quy tắc đối xứng: các BĐT thường có tính đối xứng vậy thì vai trò của các biến trong BĐT là như nhau do đó dấu " = " thường xảy ra tại vị trí các biến đó bằng nhau. Nếu bài toán có gắn hệ điều kiện đối xứng thì ta có thể chỉ ra dấu " = " xảy ra khi các biến bằng nhau và mang một giá trị cụ thể.

Chiều của BĐT : " ≥ ", " ≤ " cũng sẽ giúp ta định hướng được cách chứng minh: đánh giá từ TBC sang TBN và ngược lại

Trên là 5 quy tắc sẽ giúp ta có định hướng để chứng minh BĐT, học sinh sẽ thực sự hiểu được các quy tắc trên qua các ví dụ và bình luận ở phần sau.

2. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

(CAUCHY)

1. **Dạng tổng quát** (n số): $\forall x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n \geq 0$ ta có:

- Dạng 1: $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 2: $x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n \geq n\sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 3: $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n}\right)^n \geq x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n$

Hệ quả 1:

Nếu: $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = S = const$ **thì:** $Max\left(P = x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_n\right) = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$

khi $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n = \dfrac{S}{n}$

Hệ quả 2:

Nếu: $x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n = P = const$ **thì:** $Min\left(S = x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_2\right) = n\sqrt[n]{P}$

khi $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$

2. **Dạng cụ thể** (2 số, 3 số):

	n = 2: ∀ x, y ≥ 0 khi đó:	n = 3: ∀ x, y, z ≥ 0 khi đó:
2.1	$\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$	$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
2.2	$x + y \geq 2\sqrt{xy}$	$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$
2.3	$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$	$\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$
2.4	$(x+y)^2 \geq 4xy$	$(x+y+z)^3 \geq 27xyz$

2.5	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$		$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$
2.6	$\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$		$\frac{1}{xyz}\ge\frac{4}{(x+y+z)^3}$

Bình luận:

- Để học sinh dễ nhớ, ta nói: Trung bình cộng (TBC) ≥ Trung bình nhân (TBN).
- Dạng 2 và dạng 3 khi đặt cạnh nhau có vẻ tầm thường nhưng lại giúp ta nhận dạng khi sử dụng BĐT Cô Si: (3) đánh giá từ TBN sang TBC khi không có cả căn thức.

3. CÁC KỸ THUẬT SỬ DỤNG

3.1 Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Đánh giá từ TBC sang TBN là đánh giá BĐT theo chiều " ≥ ". Đánh giá từ tổng sang tích.

Bài 1: Chứng minh rằng: $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c$

<u>Giải</u>

Sai lầm thường gặp:

Sử dụng: ∀ x, y thì $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy$. Do đó:

$$\begin{cases} a^2+b^2\ge 2ab \\ b^2+c^2\ge 2bc \\ c^2+a^2\ge 2ca \end{cases} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c \text{ (Sai)}$$

Ví dụ: $\begin{cases} 2\ge -2 \\ 3\ge -5 \\ 4\ge\ 3 \end{cases} \Rightarrow 24 = 2.3.4 \ge (-2)(-5).3 = 30$ (Sai)

Lời giải đúng:

Sử dụng BĐT Cô Si: $x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2\ge 2|ab|\ge 0 \\ b^2+c^2\ge 2|bc|\ge 0 \\ c^2+a^2\ge 2|ca|\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8|a^2b^2c^2| = 8a^2b^2c^2 \ \forall a,b,c \text{ (Đúng)}$$

Bình luận:

- Chỉ nhân các vế của BĐT cùng chiều (kết quả được BĐT cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.
- Cần chú ý rằng: $x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ vì x, y không biết âm hay dương.
- Nói chung ta ít gặp bài toán sử dụng ngay BĐT Cô Si như bài toán nói trên mà phải qua một và phép biến đổi đến tình huống thích hợp rồi mới sử dụng BĐT Cô Si.
- Trong bài toán trên dấu " ≥ " ⇒ đánh giá từ TBC sang TBN. 8 = 2.2.2 gợi ý đến việc sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số, 3 cặp số.

Bài 2 : Chứng minh rằng: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 \ge 64ab(a+b)^2 \quad \forall$ a,b ≥ 0

<u>Giải</u>

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 = \left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\right]^4 = \left[(a+b)+2\sqrt{ab}\right]^4 \overset{\text{CôSi}}{\ge} \left[2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}\right]^4 = 2^4.2^2.ab.(a+b)^2 =$$

$$= 64ab(a+b)^2$$

Bài 3: Chứng minh rằng: (1 + a + b)(a + b + ab) ≥ 9ab ∀ a, b ≥ 0.

<u>Giải</u>

Ta có: (1 + a + b)(a + b + ab) ≥ $3\sqrt[3]{1.a.b}.\ 3.\sqrt[3]{a.b.ab} = 9ab$

Bình luận:

- $9 = 3.3$ gợi ý sử dụng Côsi cho ba số, 2 cặp. Mỗi biến a, b được xuất hiện ba lần, vậy khi sử dụng Cô Si cho ba số sẽ khử được căn thức cho các biến đó.

Bài 4: Chứng minh rằng: $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ $\forall$ a, b ≥ 0

Giải

Ta có: $3a^3 + 7b^3 \geq 3a^3 + 6b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 3b^3 \overset{Côsi}{\geq} 3\sqrt[3]{3^3a^3b^3} = 9ab^2$

Bình luận:

- $9ab^2 = 9.a.b.b$ $\Rightarrow$ gợi ý đến việc tách hạng tử $7b^3$ thành hai hạng tử chứa b^3 để khi áp dụng BĐT Côsi ta có b^2. Khi đã có định hướng như trên thì việc tách các hệ số không có gì khó khăn.

Bài 5: Cho: $\begin{cases} a,b,c,d > 0 \\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d} \geq 3 \end{cases}$ $CMR:\ abcd \leq \dfrac{1}{81}$

Giải

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{1}{1+a} \geq \left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)+\left(1-\frac{1}{1+d}\right)= \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$ Vậy:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+b} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{dca}{(1+d)(1+c)(1+a)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81\frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \Rightarrow$$

$$abcd \leq \frac{1}{81}$$

Bài toán tổng quát 1:

Cho: $\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3,............,x_n > 0 \\ \dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1+x_2}+\dfrac{1}{1+x_3}+.........+\dfrac{1}{1+x_n} \geq n-1 \end{cases}$ $CMR:\ x_1x_2x_3..........x_n \leq \dfrac{1}{(n-1)^n}$

Bình luận:

- Đối với những bài toán có điều kiện là các biểu thức đối xứng của biền thì việc biến đổi điều kiện mang tính đối xứng sẽ giúp ta xử lí các bài toán chứng minh BĐT dễ dàng hơn

Bài 6: Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ $CMR:\ \left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right) \geq 8$ (1)

Giải

$$VT(1) = \frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c} = \frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}.\frac{a+b}{c} \overset{\text{Côsi}}{\geq} \frac{2\sqrt{bc}}{a}.\frac{2\sqrt{ca}}{b}.\frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$$ (đpcm)

Bài toán tổng quát 2:

Cho: $\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3,..............,x_n > 0 \\ x_1+\ x_2+\ x_3+........+x_n = 1 \end{cases}$ $CMR:\ \left(\dfrac{1}{x_1}-1\right)\left(\dfrac{1}{x_2}-1\right)\left(\dfrac{1}{x_3}-1\right)........\left(\dfrac{1}{x_n}-1\right) \geq (n-1)^n$

Bài 7: CMR: $\left(1+\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \overset{(1)}{\geq} (1+a)(1+b)(1+c) \overset{(2)}{\geq} \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3 \overset{(3)}{\geq} 8\sqrt{abc} \quad \forall a,b,c \geq 0$

Giải

Ta có: $\left(1+\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{(1+a)+(1+b)+(1+c)}{3}\right)^3 \overset{Côsi}{\geq} (1+a)(1+b)(1+c)$ **(1)**

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) = \left[1+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+abc\right]$

$\overset{Côsi}{\geq} \left(1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+3\sqrt[3]{abc}+abc\right) = \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$ **(2)**

Ta có: $\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3 \overset{Côsi}{\geq} \left(2\sqrt{1.\sqrt[3]{abc}}\right)^3 = 8\sqrt{abc}$ **(3)**

Dấu " = " (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ 1+a = 1+b = 1+c $\Leftrightarrow$ a = b = c

Dấu " = " (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ ab = bc = ca và a = b = c $\Leftrightarrow$ a = b= c

Dấu " = " (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{abc}$ =1 $\Leftrightarrow$ abc = 1

Bài toán tổng quát 3:

Cho $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n \geq 0$. CMR:

$$\left(1+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n \overset{(1)}{\geq} (1+x_1)(1+x_2)\ldots\ldots(1+x_n) \overset{(2)}{\geq} \left(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots\ldots x_n}\right)^n \overset{(3)}{\geq} 2^n\sqrt{x_1x_2\ldots\ldots x_n}$$

Bình luận:

- Bài toán tổng quát trên thường được sử dụng cho 3 số, áp dụng cho các bài toán về BĐT lượng giác trong tam giác sau này.
- Trong các bài toán có điều kiện ràng buộc việc xử lí các điều kiện mang tình đồng bộ và đối xứng là rất quan trọng, giúp ta định hướng được hướng chứng minh BĐT đúng hay sai.

Trong việc đánh giá từ TBC sang TBN có một kỹ thuật nhỏ hay được sử dụng. Đó là kĩ thuật tách nghịch đảo.

3.2 Kỹ thuật tách nghịch đảo.

Bài 1: CMR: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 \quad \forall a.b > 0$

Giải

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \overset{Côsi}{\geq} 2\sqrt{\frac{a}{b}\frac{b}{a}} = 2$

Bài 2: CMR: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2 \quad \forall a \in R$

Giải

Ta có: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(a^2+1)+1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \overset{Côsi}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow a^2+1=1 \Leftrightarrow a=0$

Bài 3: CMR: $a+\frac{1}{b(a-b)} \geq 3 \quad \forall a > b > 0$

Giải

Ta có nhận xét: b + a – b = a không phụ thuộc vào biến b đo đó hạng tử đầu a sẽ được phân tích như sau:

$$a+\frac{1}{b(a-b)} = b+(a-b)+\frac{1}{b(a-b)} \overset{Côsi}{\geq} 3\sqrt[3]{b.(a-b).\frac{1}{b(a-b)}} = 3 \quad \forall a > b > 0$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow b=\left(a-b\right)=\dfrac{1}{b\left(a-b\right)}$ $\Leftrightarrow$ a = 2 và b = 1.

Bài 4: CMR: $$a+\frac{4}{\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2}\geq 3 \quad \forall\ a>b>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

Vì hạng tử đầu chỉ có a cần phải thêm bớt để tách thành các hạng tử sau khi sử dụng BĐT sẽ rút gọn cho các thừa số dưới mẫu. Tuy nhiên biểu thức dưới mẫu có dạng $\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2$ (thừa số thứ nhất là một đa thức bậc nhất b, thừa số 2 là một thức bậc hai của b) do đó ta phải phân tích về thành tích của các đa thức bậc nhất đối với b, khi đó ta có thể tách hạng tử a thành tổng các hạng tử là các thừa số của mẫu.

Vậy ta có: $\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2$ = (a - b)(b + 1)(b + 1) $\Rightarrow$ ta phân tích a theo 2 cách sau:

2a +2 = 2(a - b) + (b + 1) + (b + 1) hoặc a +1 = $\left(a-b\right)+\dfrac{b+1}{2}+\dfrac{b+1}{2}$

Từ đó ta có **(1)** tương đương :

$$\text{VT} + 1 = a+1+\frac{4}{\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2}=\left(a-b\right)+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{4}{\left(a-b\right)\left(b+1\right)\left(b+1\right)}$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} 4.\sqrt[4]{\left(a-b\right).\frac{b+1}{2}.\frac{b+1}{2}.\frac{4}{\left(a-b\right)\left(b+1\right)\left(b+1\right)}}=4 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Bài 5: CMR : $$\frac{2a^3+1}{4b(a-b)}\geq 3 \qquad \forall\begin{cases} a\geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{b}>1\end{cases}$$

Giải

Nhận xét: Dưới mẫu số b(a-b) ta nhận thấy b + (a – b) = a. Chuyển đổi tất cả biểu thức sang biến a là 1 điều mong muốn vì việc sử lí với 1 biến sẽ đơn giản hơn. Biến tích thành tổng thì đây là một mặt mạnh của BĐT Côsi. Do đó:

Ta có đánh giá về mẫu số như sau: $4.b\left(a-b\right)\leq 4.\left(\dfrac{b+\left(a-b\right)}{2}\right)^2=4.\dfrac{a^2}{4}=a^2$

Vậy: $$\frac{2a^3+1}{4b(a-b)}\overset{\text{Côsi}}{\geq}\frac{2a^3+1}{a^2}=\frac{a^3+a^3+1}{a^2}=a+a+\frac{1}{a}\overset{\text{Côsi}}{\geq}3\sqrt[3]{a.a.\frac{1}{a}}=3$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-b \\ a=\dfrac{1}{a^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Bình luận:

- Trong việc xử lí mẫu số ta đã sử dụng 1 kỹ thuật đó là đánh giá từ TBN sang TBC nhằm làm triệt tiêu biến b.
- Đối với phân thức thì việc đánh giá mẫu số, hoặc tử số từ TBN sang TBC hay ngược lại phải phụ thuộc vào dấu của BĐT.

Bài 6: Bài toán tổng quát 1.

Cho: $x_1>x_2>x_3>\dots\dots\dots\dots,x_n>0$ và $1\leq k\in Z$. CMR:

$$a_1+\frac{1}{a_n\left(a_1-a_2\right)^k\left(a_2-a_3\right)^k\dots\dots\dots\dots\dots\left(a_{n-1}-a_n\right)^k}\geq\frac{\left(n-1\right)k+2}{\sqrt[\left(n-1\right)k+2]{k^{\left(n-1\right)k}}}$$

Giải

$$VT = a_n + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_{n-1} - a_n) + \frac{1}{a_n (a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k ......(a_{n-1} - a_n)^k}$$

$$= a_n + \underbrace{\frac{(a_1 - a_2)}{k} + .. + \frac{(a_1 - a_2)}{k}}_{k} + .. + \underbrace{\frac{(a_{n-1} - a_n)}{k} + ... + \frac{(a_{n-1} - a_n)}{k}}_{k} + \frac{1}{a_n (a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k ..(a_{n-1} - a_n)^k}$$

$$\geq [(n-1)k + 2].\sqrt[(n-1)k+2]{a_n \underbrace{\frac{(a_1 - a_2)}{k} .. \frac{(a_1 - a_2)}{k}}_{k} .. \underbrace{\frac{(a_{n-1} - a_n)}{k} .. \frac{(a_{n-1} - a_n)}{k}}_{k} . \frac{1}{a_n (a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k ..(a_{n-1} - a_n)^k}}$$

$$= \frac{(n-1)k + 2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

Tóm lại: *Trong kỹ thuật tách nghịch đảo kỹ thuật cần tách phần nguyên theo mẫu số để khi chuyển sang TBN thì các phần chứa biến số bị triệt tiêu chỉ còn lại hằng số.*

Tuy nhiên trong kỹ thuật tách nghịch đảo đối với bài toán có điều kiện ràng buộc của ẩn thì việc tách nghịch đảo học sinh thường bị mắc sai lầm. Một kỹ thuật thường được sử dụng trong kỹ thuật tách nghịch đảo, đánh giá từ TBN sang TBC là kỹ thuật chọn điểm rơi.

3.3 Kỹ thuật chọn điểm rơi

Trong kỹ thuật chọn điểm rơi, việc sử dụng dấu “ = ” trong BĐT Côsi và các quy tắc về tính đồng thời của dấu “ = ”, quy tắc biên và quy tắc đối xứng sẽ được sử dụng để tìm điểm rơi của biến.

Bài 1: Cho a ≥ 2 . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $S = a + \frac{1}{a}$

Giải

Sai lầm thường gặp của học sinh: $S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\frac{1}{a}} = 2$

Dấu “ = ” xảy ra ⇔ $a = \frac{1}{a}$ ⇔ a = 1 ⇒ vô lí vì giả thiết là a ≥ 2.

Cách làm đúng:

Ta chọn điểm rơi: ta phải tách hạng tử a hoặc hạng tử $\frac{1}{a}$ để sao cho khi áp dụng BĐT Côsi dấu “ = ” xảy ra khi a = 2. Có các hình thức tách sau:

$$\left(a, \frac{1}{a}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\frac{1}{\alpha}a; \frac{1}{a}\right) & (1) \\ \left(\alpha a; \frac{1}{a}\right) & (2) \\ \left(a; \frac{1}{\alpha a}\right) & (3) \\ \left(a; \frac{\alpha}{a}\right) & (4) \end{array}\right.$$

Chẳng hạn ta chọn sơ đồ điểm rơi (1):
(sơ đồ điểm rơi (2), (3), (4) học sinh tự làm)

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha}a = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 4.$$

Vậy ta có: $S = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4}\frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \geq 1 + \frac{3.2}{4} = \frac{5}{2}$. Dấu “ = ” xảy ra ⇔ a = 2.

Bình luận:

- Ta sử dụng điều kiện dấu “ = ” và điểm rơi là a = 2 dựa trên quy tắc biên để tìm ra α = 4.
- Ở đây ta thấy tính đồng thời của dấu “ = ” trong việc áp dụng BĐT Côsi cho 2 số $\frac{a}{4}, \frac{1}{a}$ và $\frac{3a}{4}$ đạt giá trị lớn nhất khi a = 2, tức là chúng có cùng điểm rơi là a = 2.

Bài 2: Cho a ≥ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=a+\frac{1}{a^2}$

Giải

Sơ đồ chọn điểm rơi: $\boxed{a=2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha}=\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 8.$

Sai lầm thường gặp:

$$S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{7a}{8}\ge 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{7a}{8}=\frac{2}{\sqrt{8a}}+\frac{7a}{8}\ge\frac{2}{\sqrt{8.2}}+\frac{7.2}{8}=\frac{2}{4}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4} \Rightarrow \text{MinS} = \frac{9}{4}$$

Nguyên nhân sai lầm:

Mặc dù chọn điểm rơi a = 2 và MinS = $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số: Nếu a ≥ 2 thì $\frac{2}{\sqrt{8a}}\ge\frac{2}{\sqrt{8.2}}=\frac{2}{4}$ là đánh giá sai.

Để thực hiện lời giải đúng ta cần phải kết hợp với kỹ thuật tách nghịch đảo, phải biến đổi S sao cho sau khi sử dụng BĐT Côsi sẽ khử hết biến số a ở mẫu số.

Lời giải đúng: $S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{6a}{8}\overset{\text{Côsi}}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{6a}{8}=\frac{3}{4}+\frac{6a}{8}\ge\frac{3}{4}+\frac{6.2}{8}=\frac{9}{4}$

Với a = 2 thì Min S = $\frac{9}{4}$

Bài 3: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le\frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Giải

Sai lầm thường gặp:

$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6\sqrt[6]{a.b.c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}=6 \Rightarrow$ Min S = 6

Nguyên nhân sai lầm :

Min S = 6 $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1 \Rightarrow a+b+c=3>\frac{3}{2}$ trái với giải thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do S là mọt biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán MinS đạt tại điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases} a=b=c=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a}=\frac{1}{\alpha b}=\frac{1}{\alpha c}=\frac{2}{\alpha} \end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha=4$

Hoặc ta có sơ đồ điêm rơi sau:

$$a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases} \alpha a=\alpha b=\alpha c=\frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=2 \end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=2\Rightarrow\alpha=4\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha=4$$

Vậy ta có cách giải theo sơ đồ 2 như sau:

$$S=\left(4a+4b+4c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\left(a+b+c\right)\ge 6\sqrt[6]{4a.4b.4c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}-3\left(a+b+c\right)$$

$\geq 12-3.\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{2}$. Với $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ thì MinS = $\dfrac{15}{2}$

Bài 4: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tìm GTNN của $S=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}$

Giải

Sai lầm thường gặp:

$$S\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}.\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}.\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}}=3\sqrt[6]{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right).\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right).\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$\geq 3\sqrt[6]{\left(2\sqrt{a^2.\frac{1}{b^2}}\right).\left(2\sqrt{b^2.\frac{1}{c^2}}\right).\left(2\sqrt{c^2.\frac{1}{a^2}}\right)}=3\sqrt[6]{8}=3\sqrt{2}\ \Rightarrow \text{ MinS} = 3\sqrt{2}.$$

Nguyên nhân sai lầm:

MinS = $3\sqrt{2}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}=1 \quad\Rightarrow a+b+c=3>\dfrac{3}{2}$ trái với giả thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán MinS đạt tại $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} a^2=b^2=c^2=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{\alpha a^2}=\dfrac{1}{\alpha b^2}=\dfrac{1}{\alpha c^2}=\dfrac{4}{\alpha} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}=\frac{4}{\alpha}\quad\Rightarrow\quad \alpha=16$$

Lời giải

$$S=\sqrt{a^2+\underbrace{\frac{1}{16b^2}+.....+\frac{1}{16b^2}}_{16}}+\sqrt{b^2+\underbrace{\frac{1}{16c^2}+.....+\frac{1}{16c^2}}_{16}}+\sqrt{c^2+\underbrace{\frac{1}{16a^2}+.....+\frac{1}{16a^2}}_{16}}$$

$$\geq\sqrt{17\sqrt[17]{a^2.\underbrace{\frac{1}{16b^2}.....\frac{1}{16b^2}}_{16}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{b^2.\underbrace{\frac{1}{16c^2}.....\frac{1}{16c^2}}_{16}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{c^2.\underbrace{\frac{1}{16a^2}.....\frac{1}{16a^2}}_{16}}}$$

$$=\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}}=\sqrt{17}\left(\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right)$$

$$\geq\sqrt{17}\left[3\sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}}\right]=3.\sqrt{17}\sqrt[17]{\frac{a}{16^8a^5b^5c^5}}=\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{(2a2b2c)^5}}$$

$$\geq\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Min S = $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

Bình luận:

- Việc chọn điểm rơi cho bài toán trên đã giải quyết một cách đúng đắn vềmặt toán học nhưng cách làm trên tương đối cồng kềnh. Nếu chúng ta áp dụng việc chọn điểm rơi cho BĐT Bunhiacôpski thì bài toán sẽ nhanh gọn hơn đẹp hơn.
- Trong bài toán trên chúng ta đã dùng một kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC, chiều của dấu của BĐT không chỉ phụ thuộc vào chiều đánh giá mà nó còn phụ thuộc vào biểu thức đánh giá nằm ở mẫu số hay ở tử số

Bài 5: Cho a, b, c, d > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

Giải

Sai lầm 1 thường gặp:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+c+d}+\dfrac{b+c+d}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}.\dfrac{b+c+d}{a}}=2 \\ \dfrac{b}{c+d+a}+\dfrac{c+d+a}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}.\dfrac{c+d+a}{b}}=2 \\ \dfrac{c}{a+b+d}+\dfrac{a+b+d}{c}\ge 2\sqrt{\dfrac{c}{a+b+d}.\dfrac{a+b+d}{c}}=2 \\ \dfrac{d}{a+b+c}+\dfrac{a+b+c}{d}\ge 2\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}.\dfrac{a+b+c}{d}}=2 \end{cases} \Rightarrow S \ge 2+2+2+2=8$$

Sai lầm 2 thường gặp:

Sử dụng BĐT Côsi cho 8 số:

$$S\ge 8\sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d}.\frac{b}{c+d+a}.\frac{c}{a+b+d}.\frac{d}{a+b+c}.\frac{b+c+d}{a}.\frac{c+d+a}{b}.\frac{a+b+d}{c}.\frac{a+b+c}{d}}=8$$

Nguyên nhân sai lầm:

Min S = 8 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+c+d \\ b=c+d+a \\ c=d+a+b \\ d=a+b+c \end{cases} \Rightarrow$ a + b + c + d = 3(a + b + c + d) $\Rightarrow$ 1 = 3 $\Rightarrow$ Vô lý.

Phân tích và tìm tòi lời giải

Để tìm Min S ta cần chú ý S lá một biểu thức đối xứng với a, b, c, d do đó Min S nếu có thường đạt tại "điểm rơi tự do" là : a = b = c = d > 0.(nói là điểm rơi tự do vì a, b, c, d không mang một giá trị cụ thể). Vậy ta cho trước a = b = c = d dự đoán $Min\ S=\dfrac{4}{3}+12=\dfrac{40}{3}$. Từ đó suy ra các đánh giá của các BĐT bộ phận phải có điều kiện dấu bằng xảy ra là tập con của điều kiện dự đoán: a = b = c = d > 0.

Ta có sơ đồ điểm rơi: Cho a = b = c = d > 0 ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{c+d+a}=\dfrac{c}{a+b+d}=\dfrac{d}{a+b+c}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b+c+d}{a}=\dfrac{c+d+a}{b}=\dfrac{a+b+d}{c}=\dfrac{a+b+c}{d}=\dfrac{3}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 9$$

Cách 1: Sử dụng BĐT Côsi ta có:

$$S=\sum_{a,b,c,d}\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{9a}\right)+\sum_{a,b,c,d}\frac{8}{9}.\frac{b+c+d}{9a}\ge$$

$$\ge 8\sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d}.\frac{b}{c+d+a}.\frac{c}{a+b+d}.\frac{d}{a+b+c}.\frac{b+c+d}{9a}.\frac{c+d+a}{9b}.\frac{a+b+d}{9c}.\frac{a+b+c}{9d}}$$

$$+\frac{8}{9}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)\ge$$

$$\ge\frac{8}{3}+\frac{8}{9}.12.\sqrt[12]{\left(\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{d}{a}.\frac{c}{b}.\frac{d}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{d}{c}.\frac{a}{d}.\frac{b}{d}.\frac{c}{d}\right)}=\frac{8}{3}+\frac{8}{9}.12=\frac{40}{3}$$

Với a = b = c = d > 0 thì Min S = 40/3.

3.4 Kỹ thuật đánh giá từ trung bình nhân (TBN) sang trung bình cộng (TBC)

Nếu như đánh giá từ TBC sang TBN là đánh giá với dấu " ≥ ", đánh giá từ tổng sang tích, hiểu nôm na là thay dấu " + " bằng dấu " . " thì ngược lại đánh giá từ TBN sang trung bình cộng là thay dấu " . " bằng dấu " + ". Và cũng cần phải chú ý làm sao khi biến tích thành tổng, thì tổng cũng phải triệt tiêu hết biến, chỉ còn lại hằng số.

Bài 1 : CMR $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+c)(b+d)}\quad \forall a,b,c,d>0$ **(1)**

Giải

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{ab}{(a+c)(b+d)}}+\sqrt{\dfrac{cd}{(a+c)(b+d)}}\le 1$ Theo BĐT Côsi ta có:

$$VT\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{b}{b+d}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+d}{b+c}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1 \text{ (đpcm)}$$

Bình luận:

- Nếu giữ nguyên vế trái thì khi biến tích thành tổng ta không thể triệt tiêu ẩn số $\Rightarrow$ ta có phép biến đổi tương đương **(1)** sau đó biến tích thành tổng ta sẽ được các phân thức có cùng mẫu số.
- Dấu " $\le$ " gợi ý cho ta nếu sử dụng BĐT Côsi thì ta phải đánh giá từ TBN sang TBC

Bài 2: CMR $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}\quad \forall\begin{cases}a>c>0\\ b>c>0\end{cases}$ **(1)**

Giải

Ta có (**1**) tương đương với : $\sqrt{\dfrac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\dfrac{c(b-c)}{ab}}\le 1$

Theo BĐT Côsi ta có:

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{(a-c)}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{(b-c)}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a}+\frac{b}{b}\right)=1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 3: CMR $1+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\quad\forall a,b,c\ge 0$ **(1)**

Giải

Ta có biến đổi sau, **(1)** tương đương:

$\sqrt[3]{1.1.1}+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\quad\Leftrightarrow\sqrt[3]{\dfrac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}+\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}\le 1$ Theo BĐT Côsi ta có:

$$VT\le\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{a+1}{1+a}+\frac{b+1}{1+b}+\frac{c+1}{1+c}\right]=\frac{1}{3}.3=1$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c > 0.

Ta có bài toán tổng quát 1:

CMR: $\sqrt[n]{a_1a_2.......a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2......b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)........(a_n+b_n)}\quad\forall\ a_i,b_i>0\left(i=\overline{1,n}\right)$

Bài 4 : Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2\le(a+b)^4\quad\forall a,b>0$

Giải

Ta có: $16ab(a-b)^2=4.(4ab)(a-b)^2\le 4\left[\dfrac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2=4\left[\dfrac{(a+b)^2}{2}\right]^2=(a+b)^4$

Bài 5: Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$ Chứng minh rằng $abc(a+b)(b+c)(c+a)\le\dfrac{8}{729}$

Giải

Sơ đồ điểm rơi:

Ta nhận thấy biểu thức có tính đối xứng do đó dấu " = " của BĐT sẽ xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Nhưng thực tế ta chỉ cần quan tâm là sau khi sử dụng BĐT Côsi ta cần suy ra được điều kiện xảy ra dấu " = " là: a = b = c. Do đó ta có lời giải sau**:**

$$abc(a+b)(b+c)(c+a)\overset{\text{Côsi}}{\le}\left[\frac{a+b+c}{3}\right]^3\left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{729}$$

Trong kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC ta thấy thường nhân thêm các hằng số để sao cho sau biến tích thành tổng các tổng đó triệt tiêu các biến. Đặc biệt là đối với những bài toán có thêm điều kiện ràng buộc của ẩn số thì việc nhân thêm hằng số các em học sinh dễ mắc sai lầm. Sau đây ta lại nghiên cứu thêm 2 phương pháp nữa đó là phương pháp nhân thêm hằng số, và chọn điểm rơi trong việc đánh giá từ TBN sang TBC. Do đã trình bày phương pháp điểm rơi ở trên nên trong mục này ta trình bày gộp cả 2 phần .

3.5 Kỹ thuật nhân thêm hằng số trong đánh giá từ TBN sang TBC

Bài 1: Chứng minh rằng: $a\sqrt{(b-1)}+b\sqrt{(a-1)}\le ab\quad \forall a,b\ge 1$

Giải

Bài này chúng ta hoàn toàn có thể chia cả 2 vế cho ab sau đó áp dụng phương pháp đánh giá từ TBN sang TBC như phần trước đã trình bày, tuy nhiên ở đây ta áp dụng một phương pháp mới: phương pháp nhân thêm hằng số

Ta có : $$\begin{cases} a\sqrt{(b-1)}=a\sqrt{(b-1).1} \overset{\text{Côsi}}{\le} a\dfrac{(b-1)+1}{2}=\dfrac{ab}{2} \\ b\sqrt{(a-1)}=b\sqrt{(a-1).1} \overset{\text{Côsi}}{\le} b.\dfrac{(a-1)+1}{2}=\dfrac{ab}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a\sqrt{(b-1)}+b\sqrt{(a-1)} \le \frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=ab$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ a-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}$

Bình luận:

- Ta thấy việc nhân thêm hằng số 1 vào biểu thức không hoàn toàn tự nhiên, tại sao lại nhân thêm 1 mà không phải là 2. Thực chất của vấn đề là chúng ta đã chọn điểm rơi của BĐT theo quy tắc biên là a = b = 1/2.

Nếu không nhận thức được rõ vấn đề trên học sinh sẽ mắc sai lầm như trong VD sau.

Bài 2: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất: $S=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$

Giải

Sai lầm thường gặp:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b}=\sqrt{(a+b).1} \overset{\text{Côsi}}{\le} \dfrac{(a+b)+1}{2} \\ \sqrt{b+c}=\sqrt{(b+c).1} \overset{\text{Côsi}}{\le} \dfrac{(b+c)+1}{2} \\ \sqrt{c+a}=\sqrt{(c+a).1} \overset{\text{Côsi}}{\le} \dfrac{(c+a)+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le \frac{2(a+b+c)+3}{2}=\frac{5}{2}$$

Nguyên nhân sai lầm

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ a + b = b + c = c + a = 1 $\Rightarrow$ a + b + c = 2 trái với giả thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do vai trò của a, b, c trong các biểu thức là như nhau do đó điểm rơi của BĐT sẽ là $a=b=c=\frac{1}{3}$ từ đó ta dự đoán Max S = $\sqrt{6}$. $\Rightarrow$ a + b = b + c = c + a = $\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ hằng số cần nhân thêm là $\frac{2}{3}$. Vậy lời giải đúng là:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(a+b).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\le} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(a+b)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(b+c).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\le} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(b+c)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(c+a).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\le} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(c+a)+\dfrac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2\left(a+b+c\right)+3.\frac{2}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} .2 = \sqrt{6}$$

Bài toán trên nếu cho đầu bài theo yêu cầu sau thì học sinh sẽ có định hướng tốt hơn: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$. Tuy nhiên nếu nắm được kỹ thuật điểm rơi thì việc viết đầu bài theo hướng nào cũng có thể giải quyết được.

Bài 3: Cho $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$ Tìm Max A = (3 – x)(12 – 3y)(2x + 3y)

Giải

$$A = \frac{1}{6}\left(6-2x\right)\left(12-3y\right)\left(2x+3y\right) \overset{\text{Côsi}}{\le} \left[\frac{\left(6-2x\right)+\left(12-3y\right)+\left(2x+3y\right)}{3}\right]^3 = 36$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ 6 -2x = 12 - 3y = 2x + 3y = 6 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

Bình luận:

- Việc chọn điểm rơi trong bài toán này đối với học sinh thường bị lúng túng. Tuy nhiên căn cứ vào yêu cầu khi đánh giá từ TBN sang TBC cần phải triệt tiêu hết biến cho nên căn cứ vào các hệ số của tích ta nhân thêm 2 vào thừa số thứ nhất là một điều hợp lý.

Bài 4: Cho x, y > 0. Tìm Min f(x, y) = $\frac{\left(x+y\right)^3}{xy^2}$

Giải

Ta có: $xy^2 = \frac{1}{16}\left(4x\right)\left(2y\right)\left(2y\right) \le \frac{1}{16}\left(\frac{4x+2y+2y}{3}\right)^3 = \frac{1}{16}\left[\frac{4}{3}\left(x+y\right)\right]^3 = \frac{4}{27}\left(x+y\right)^3$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{\left(x+y\right)^3}{xy^2} \ge \frac{\left(x+y\right)^3}{\frac{4}{27}\left(x+y\right)^3} = \frac{4}{27} \quad \Rightarrow Min\ f(x,y) = \frac{4}{27}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ 4x = 2y = 2y $\Leftrightarrow$ y = 2x > 0. Đó là tập hợp tất cả các điểm thuộc đường thẳng y = 2x với x dương.

Thực ra việc để hệ số như trên có thể tùy ý được miễn là sao cho khi sau khi áp dụng BĐT Côsi ta biến tích thành tổng của x + y. (Có thể nhân thêm hệ số như sau: 2x.y.y).

Bình luận:

- Trong bài toán trên yêu cầu là tìm Min nên ta có thể sử dụng kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC cho phần ở dưới mẫu số vì đánh giá từ TNB sang TBC là đánh giá với dấu " ≤ " nên nghịch đảo của nó sẽ là " ≥ ".
- Ta cũng có thể đánh giá tử số từ TBC sang TBN để có chiều " ≥ "

Bài toán tổng quát 1:

Cho $x_1, x_2, x_3..........x_4 > 0.\ \ Tìm\ \ Min\, f = \frac{\left(x_1+x_2+x_3..........+x_n\right)^{1+2+3+...+n}}{x_1.x_2^2.x_3^3..........x_n^n}$

Bài 5: Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$ (1) $\forall n \in N\ (n\ \ge 1)$

Giải

Với n = 1, 2 ta nhận thấy (1) đúng.

Với n ≥ 3 ta có:

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}.\underbrace{1.1......1}_{n-2}}\le\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\underbrace{1+1.......+1}_{n-2}}{n}=\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}<\frac{n+2\sqrt{n}}{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

Bài toán tổng quát 2:

Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \forall\ m<n\in N$ **(1)**

Giải

Ta biến đổi **(1)** về bất đẳng thức tương đương sau: $\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}<1+\frac{1}{n}$

Ta có: $\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}=\sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right).\left(1+\frac{1}{m}\right)......\left(1+\frac{1}{m}\right)}_{m}.\underbrace{1.1........1}_{n-m}}$

$$\overset{\text{Côsi}}{<}\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)+\left(1+\frac{1}{m}\right).......+\left(1+\frac{1}{m}\right)}^{m}+\overbrace{1+1+.........+1}^{n-m}}{n}=\frac{m\left(1+\frac{1}{m}\right)+n-m}{n}=1+\frac{1}{n}$$

Bình luận

- Cần phải bình luận về dấu " = ": trong bài toán trên ta coi 1/m = a thế thì khi đó dấu bằng trong BĐT Côsi xảy ra khi và chỉ khi 1+ a = 1 ⇔ a = 0. Nhưng thực tế thì điều trên tương đương với m tiến tới +∞, khi m là hữu hạn thì dấu "<" là hoàn toàn đúng. Chúng ta cũng nhận thấy nếu m tiến ra + ∞ thì hai vế của BĐT càng dần tới cùng một giá trị là e (cơ số tự nhiên của hàm logarit). Ta hiểu là trong quá trình này thì VP tiến nhanh hơn VT nhưng sau này khi tung ra ∞ thì tốc độ dần bằng nhau và khoảng cách ngày thu hẹp.(Mục này xin chỉ bình luận cùng với các bạn đồng nghiệp)

Tóm lại : Để sử dụng BĐT Côsi từ TBN sang TBC ta cần chú ý: Chỉ số căn thức là bao nhiêu thì số các số hạng trong căn là bấy nhiêu. nếu sốcác số hạng nhỏ hơn chỉ số căn thì phải nhân thêm hằng số để số các số hạng bằng chỉ số căn

Bài 6: Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=1\end{cases}$ Tìm Max $S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}$

Giải

Sai lầm thường gặp:

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{(a+b).1.1}\le\frac{(a+b)+1+1}{3}$$
$$\sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{(b+c).1.1}\le\frac{(b+c)+1+1}{3}$$
$$\sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{(c+a).1.1}\le\frac{(c+a)+1+1}{3}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\frac{2(a+b+c)+6}{3}=\frac{8}{3}\Rightarrow \text{Max S}=\frac{8}{3}$$

Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Max S}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\b+c=1\\c+a=1\end{cases}\Rightarrow\ 2(a+b+c)=3\ \Rightarrow\ 2=3\ \Rightarrow\ \textit{Vô lý}$$

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do S làmột biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S thường xảy ra tại điều kiện:

$$\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ b+c=\frac{2}{3} \\ c+a=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$ Vậy hằng số cần nhân thêm là $\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$

Ta có lời giải:

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(a+b).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}} \le \frac{(a+b)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$$\sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(b+c).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}} \le \frac{(b+c)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$$\sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(c+a).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}} \le \frac{(c+a)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a} \le \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{2(a+b+c)+4}{3}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}.\frac{6}{3}}=\sqrt[3]{18}$$

Vậy Max S = $\sqrt[3]{18}$. Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ b+c=\frac{2}{3} \\ c+a=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

3.6 Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong kỹ thuật ghép đối xứng chúng ta cần nắm được một số kiểu thao tác sau:

Phép cộng: $\begin{cases} 2(x+y+z)=(x+y)+(y+z)+(z+x) \\ x+y+z=\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2} \end{cases}$

Phép nhân: $x^2y^2z^2=(xy)(yz)(zx)$; $xyz=\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx} \quad (x, y, z \ge 0)$

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \ge a+b+c \quad \forall a,b,c>0$

<u>**Giải**</u>

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right) \ge \sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}=c \\ \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right) \ge \sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}=a \\ \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right) \ge \sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ab}{c}}=c \end{cases} \Rightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \ge a+b+c$$. Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \qquad \forall abc \ne 0$

<u>**Giải**</u>

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}\right) \ge \sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}.\dfrac{b^2}{c^2}} = \left|\dfrac{a}{c}\right| \ge \dfrac{a}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right) \ge \sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}.\dfrac{c^2}{a^2}} = \left|\dfrac{b}{a}\right| \ge \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right) \ge \sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}.\dfrac{c^2}{a^2}} = \left|\dfrac{c}{b}\right| \ge \dfrac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \ge \left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|+\left|\frac{a}{c}\right| \ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

Bài 3: Cho tam giác ΔABC, a,b,c là số đo ba cạnh của tam giác. CMR:

a) $(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{1}{8}abc$; **b)** $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c} \ge 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

<u>Giải</u>

a) Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(p-a)(p-b)} \le \dfrac{(p-a)+(p-b)}{2} = \dfrac{c}{2} \\ \sqrt{(p-b)(p-c)} \le \dfrac{(p-b)+(p-c)}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \sqrt{(p-a)(p-c)} \le \dfrac{(p-a)+(p-c)}{2} = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{1}{8}abc$$

b) Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-b)}{2}} = \dfrac{2}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-b)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-c}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-c)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Dấu “ = ” xảy ra cho cả a) và b) khi vào chỉ khi Δ ABC đều: a = b = c

(p là nửa chu vi của tam giác ΔABC: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$)

Bài 4: Cho Δ ABC, a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$$

<u>Giải</u>

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\begin{cases} 0 \le (b+c-a)(c+a-b) \le \dfrac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = c \\ 0 \le (c+a-b)(a+b-c) \le \dfrac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = a \\ 0 \le (b+c-a)(a+b-c) \le \dfrac{(b+c-a)+(a+b-c)}{2} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ Δ ABC đều: a = b = c.

3.7 Kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo cho 3 số, n số

Nội dung cần nắm đượccác thao tác sau:

1. $$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9 \quad \forall x,y,z>0$$

2. $$\left(x_1+x_2+........+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+........+\frac{1}{x_n}\right)\ \ge\ n^2 \quad \forall x_1,x_2,........,x_n>0$$

Bài 1: Chứng minh rằng : $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 6 \ \ \forall a,b,c>0$ **(1)**

Giải

Ta biến đổi **(1)** tương đương: $\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)\ \ge\ 9$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{c+a+b}{c}\ge 9 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ \ge\ 9 \text{ (đpcm)}$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\ge\frac{9}{a+b+c} \quad \forall a,b,c>0$

Giải

Ta biến đổi tương đương BĐT như sau: $2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ \ge\ 9$

$$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ \ge\ 9 \text{ (đpcm)}$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\ge\frac{3}{2} \ \ \forall a,b,c>0$ (BĐT Nesbit)

Giải

Ta có biến đổi tương đương sau: $\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ \ge\ \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ \ge\ 9 \text{ (đpcm)}$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{2} \quad \forall a,b,c>0$

Giải

Ta biến đổi BĐT như sau: $\left(c+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(a+\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(b+\frac{b^2}{c+a}\right)\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad c\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+a\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+b\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)\left[\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right]\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ \ge\ 9$$

3.8 Kỹ thuật đổi biến số

Có những bài toàn về mặt biểu thức toán học tương đối còng kềnh hoặc khó giải, khó nhận biết được phương hướng giải,ta có thể chuyển bài toán từ tình thế khó biến đổi về trạng thái dễ biến đổi hơn. Phương pháp trên gọi là phương pháp đổi biến.

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\ge\frac{3}{2}\ \forall a,b,c>0$ (BĐT Nesbit)

<u>Giải</u>

Đặt: $\begin{cases} b+c=x>0\\ c+a=y>0\\ a+b=z>0\end{cases} \Leftrightarrow\ a=\frac{y+z-x}{2};\ b=\frac{z+x-y}{2};\ c=\frac{x+y-z}{2}.$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ \ge\ \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\ge 6$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, Thật vậy áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\text{VT}\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}}=2+2+2=6$$

Dấu " = " xảy ra ⇔ x = y = z ⇔ a = b = c

Bài 2: Cho ΔABC. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$

<u>Giải</u>

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0\\ c+a-b=y>0\\ a+b-c=z>0\end{cases} \Leftrightarrow\ a=\frac{y+z}{2};\ b=\frac{z+x}{2};\ c=\frac{x+y}{2}.$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\ge x+y+z \qquad \textbf{(2)}$$

Ta có: VT **(2)** $\ge \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)$

$$\overset{\text{Côsi}}{\ge}\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}=x+y+z$$

Bài 3: Cho Δ ABC. CMR : (b + c – a).(c + a – b).(a + b – c) ≤ abc **(1)**

<u>Giải</u>

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0\\ c+a-b=y>0\\ a+b-c=z>0\end{cases} \Leftrightarrow\ a=\frac{y+z}{2};\ b=\frac{z+x}{2};\ c=\frac{x+y}{2}.$

Khi đó ta có BĐT **(1)** tương đương với bất đẳng thức sau: $xyz\le\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2} \geq \sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx} = xyz$ (đpcm)

Bài 4: Cho ΔABC. CMR: $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ **(1)**

Giải

Đặt: $\begin{cases} p-a=x>0 \\ p-b=y>0 \\ p-c=z>0 \end{cases}$ thì **(1)** $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \geq \frac{x+y+z}{xyz}$ **(2)**

Ta có:

VT **(2)** $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{x^2}.\frac{1}{y^2}}+\sqrt{\frac{1}{y^2}.\frac{1}{z^2}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}.\frac{1}{z^2}}$

$= \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx} = \frac{x+y+z}{xyz}$

Dấu " = " xảy ra ⇔ x = y = z ⇔ a = b = c ⇔ Δ ABC đều.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 va abc = 1 thì : $\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c} \leq 1$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$1-\frac{1}{2+a}+1-\frac{1}{2+b}+1-\frac{1}{2+c} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c} \geq 1$$

Đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x};$ thỏa điều kiện $a.b.c=\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}=1$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\big(x(x+2y)+y(y+2z)+z(z+2x)\big)\left(\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\right) \geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\right) \geq \frac{(x+y+z)^2}{\big(x(x+2y)+y(y+2z)+z(z+2x)\big)} = \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2} = 1$$

3.9. MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Kỹ thuật chọn điểm rơi và đánh giá từ TBC sang TBN:

3.9.1 Cho a ≥ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a^2 + \frac{18}{\sqrt{a}}$

3.9.2 Cho 0 < a ≤ $\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + \frac{1}{a^2}$

3.9.3 Cho $\begin{cases} a,b>0 \\ a+b\leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = ab + \frac{1}{ab}$

3.9.4 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = abc + \frac{1}{abc}$

3.9.5 Cho a, b > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

3.9.6 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

3.9.7 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

3.9.8 Cho a, b, c, d > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

3.9.9 $S=\left(1+\dfrac{2a}{3b}\right)\left(1+\dfrac{2b}{3c}\right)\left(1+\dfrac{2c}{3d}\right)\left(1+\dfrac{2d}{3a}\right)$

3.9.10 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{2}{bc}+\dfrac{2}{ca}\ge 81$

3.9.11 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S=\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 28$

Kỹ thuật chọn điểm rơi và đánh giá từ TBN sang TBC:

3.9.12 CMR: $-\dfrac{1}{2}\le \dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\le \dfrac{1}{2}$

3.9.13 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng $ab+bc+ca-abc\le \dfrac{8}{27}$

3.9.14 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng $16abc\le a+b$

Kỹ thuật chọn điểm rơi và nhân thêm hằng số trong đánh giá từ TBN sang TBC

3.9.15 Cho $\begin{cases} a\ge 3 \\ b\ge 4 \\ c\ge 2 \end{cases}$ $Tìm\ Max\ S\ =\ \dfrac{ab\sqrt{c-2}+bc\sqrt{a-3}+ca\sqrt{b-4}}{2\sqrt{2}}$

3.9.16 Cho x, y, z >0. Tìm Min f(x, y, z) = $\dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$

3.9.17 Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (1) $\forall\ 1\le n\in N$

3.9.18 Chứng minh rằng: $S=1+\sqrt{\dfrac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{3+1}{3}}+..........+\sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}}<n+1$

3.9.19 (Gợi ý: CMR $\sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}}<1+\dfrac{1}{k^2}$)

3.9.20 Cho $\begin{cases} a,b,c,d>0 \\ a+b+c+d=1 \end{cases}$ Tìm Max $S=\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b+c+d}+\sqrt{c+d+a}+\sqrt{d+a+b}$

3.9.21 Cho $\begin{cases} a,b,c,d>0 \\ a+b+c+d=1 \end{cases}$ Tìm Max $S=\sqrt[3]{2a+b}+\sqrt[3]{2b+c}+\sqrt[3]{2c+d}+\sqrt[3]{2d+a}$

3.9.22 Cho a ≥ 2, b ≥ 6; c ≥ 12. Tìm Min $S=\dfrac{bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt[3]{b-6}+ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}$

Kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo cho 3 số, n số

3.9.23 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ CMR : $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ \ge\ \dfrac{9}{2}$

3.9.24 Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le 1 \end{cases}$ CMR: $\dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ca}+\dfrac{1}{c^2+2ab} \ge 9$

3.9.25 Cho tam giác ABC, M thuộc miền trong tam giác. Gọi MA, MB, MC thứ tự giao với BC, AC, AB tại D, E, F. Chứng minh:

a) $\dfrac{MD}{DA}+\dfrac{ME}{EB}+\dfrac{MF}{FC}=1$; b) $\dfrac{MA}{DA}+\dfrac{MB}{EB}+\dfrac{MC}{FC}=2$; c) $\dfrac{MA}{MD}+\dfrac{MB}{ME}+\dfrac{MC}{MF}\ge 6$;

d) $\dfrac{MA}{MD}.\dfrac{MB}{ME}.\dfrac{MC}{MF}\ge 8$ e) $\dfrac{DA}{MA}+\dfrac{EB}{MB}+\dfrac{FC}{MC}\ge 9/2$; f) $\dfrac{MD}{MA}+\dfrac{ME}{MB}+\dfrac{MF}{MC}\ge 3/2$

5. MỘT SỐ ỨNG DỤNG KHÁC CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Áp dụng BĐT để giải phương trình và hệ phương trình

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$

Giải

Điều kiện : x ≥ 0, y ≥ 1, z ≥ 2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm ta có:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x.1}\le\frac{x+1}{2}$$

$$\sqrt{y-1}=\sqrt{(y-1).1}\le\frac{(y-1)+1}{2}$$

$$\sqrt{z-2}=\sqrt{(z-2).1}\le\frac{(z-2)+1}{2}=\frac{z-1}{2}$$

Suy ra : $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}\le\dfrac{1}{2}(x+y+z)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y-1=1 \\ z-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm (x, y, z) = (1; 2; 3)

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1+x}=3$

Giải

Điều kiện: -1 ≤ x ≤ 1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt[4]{1-x^2}=\sqrt{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}}\le\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{1-x}=\sqrt{\sqrt{1-x}\ .1}\le\frac{\sqrt{1-x}+1}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{1+x}=\sqrt{\sqrt{1+x}\ .1}\le\frac{\sqrt{1+x}+1}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) ta được: $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}\le 1+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

Mặt khác, lại theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x}=\sqrt{(1-x).1}\le\dfrac{(1-x)+1}{2}=\dfrac{2-x}{2} \\ \sqrt{1+x}=\sqrt{(1+x).1}\le\dfrac{(1+x)+1}{2}=\dfrac{2+x}{2} \end{cases} \Rightarrow 1+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\le 1+\frac{2-x}{2}+\frac{2+x}{2}=3$$

Từ (4) và (5) suy ra: $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1+x}\le 3$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\\ 1-x=1\\ 1+x=1\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 0

Bài3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$ **(1)**

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x-1}\le\dfrac{(x^2+x-1)+1}{2}=\dfrac{x^2+x}{2}\\ \sqrt{x-x^2+1}\le\dfrac{(x-x^2+1)+1}{2}=\dfrac{x-x^2+2}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le x+1 \qquad \textbf{(2)}$$

Kết hợp (1) và (2) ta có: $x^2-x+2\le x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow x=1$.

Thử lại ta có x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x}=\sqrt{2xy}\\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy\end{cases}$

Giải

Điều kiện: x ≥ 1, y ≥ 1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{1.(x-1)}\le\frac{1+(x-1)}{2}=\frac{x}{2}\Rightarrow y\sqrt{x-1}\le\frac{xy}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Tương tự: $\sqrt{y-1}\le\dfrac{y}{2}\Rightarrow x\sqrt{y-1}\le\dfrac{xy}{2}$ **(2)**

Cộng (1), (2) ta được $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le xy$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-1=1\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=2$.

Thử lại thấy: x = y = 2 cũng thỏa mãn phương trình thứ nhất của hệ

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (2;2)

Bài 5: Cho số nguyên n >1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)\\ x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_3+\dfrac{1}{x_3}\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)\end{cases}$

Giải

Từ hệ đã cho suy ra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là cùng dấu. Giả sử $x_i > 0$ với mọi i. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$x_1=\dfrac{1}{2}\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)\ge 1$.Tương tự: $x_i \ge 1$ với mọi i.

Cộng n phương trình của hệ theo từng vế ta được: $x_1+x_2+\ldots+x_n=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}$

Vì $x_i \ge 1$ nên $x_i\ge\dfrac{1}{x_i}$ với mọi i, suy ra: $x_1+x_2+\ldots+x_n\ge\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$

Giải

Rõ ràng hệ có nghiệm x = y = z = 0. Với x,y,z ≠ 0, từ hệ đã cho suy ra x>0, y>0, z>0. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$1+x^2 \geq 2x \Rightarrow y = \frac{2x^2}{1+x^2} \leq \frac{2x^2}{2x} = x$$

Tương tự: $z = \dfrac{2y^2}{1+y^2} \leq y$ *và* $x = \dfrac{2z^2}{1+z^2} \leq z.$

Vậy : $y \leq x \leq z \leq y$, suy ra x = y = z.

Thay y = x vào phương trình thứ nhất ta được:

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = x \Leftrightarrow 2x = 1+x^2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì x } > 0)$$

Vậy hệ có hai nghiệm (x, y, z) = {(0; 0; 0) ; (1; 1; 1)}

Bài 7: Tìm số nguyên dương n và các số dương $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ thỏa các điều kiện

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n = 2 & (1) \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots. + \dfrac{1}{a_n} = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế, ta được: $\left(a_1 + \dfrac{1}{a_1}\right) + \left(a_2 + \dfrac{1}{a_2}\right) + .. + \left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) = 4$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $a_i + \dfrac{1}{a_i} \geq 2$ với i = 1, 2, … , n

Suy ra $4 \geq 2n$ hay $n \leq 2$:

Với n = 1: hệ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ \dfrac{1}{a_1} = 2 \end{cases}$ vô nghiệm; Với n = 2: hệ $\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} = 2 \end{cases}$ có nghiệm $a_1 = a_2 = 1$

Vậy: n = 2 và $a_1 = a_2 = 1$

Sau đây sẽ là một số bài tập tương tự giúp học sinh ôn luyện kiến thức

BÀI TẬP ĐỂ HỌC SINH VẬN DỤNG

1. Giải các phương trình sau:

$a)\quad (x^2+1)(y^2+2)(z^2+8) = 32xyz \quad (x,y,z>0)$

$b)\quad x + \sqrt{2-x^2} = 4y^2 + 4y + 3$

$c)\quad \dfrac{16}{\sqrt{x-3}} + \dfrac{4}{\sqrt{y-1}} + \dfrac{1225}{\sqrt{z-665}} = 82 - \sqrt{x-3} - \sqrt{y-1} - \sqrt{z-665}$

$d)\quad \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \dfrac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 10$

2. Giải phương trình:

$a)\quad \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}.$

$$b)\quad \frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{2y+z+x}+\frac{z}{2z+x+y}=\frac{3}{4}.$$

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2}=y \\ \dfrac{3y^3}{1+y^2+y^4}=z \\ \dfrac{4z^4}{1+z^2+z^4+z^6}=x \end{cases}$

4. Xác định số nguyên dương n và các số dương x_1, x_2, … , x_n thỏa:

$$\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=9 \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}=1 \end{cases}$$

5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$

6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+....+\sqrt{1+x_n}=n\sqrt{\dfrac{n+k}{n}} \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+....+\sqrt{1-x_n}=n\sqrt{\dfrac{n-k}{n}} \end{cases}$