

MỞ ĐẦU

Trong môn Toán ở trường THPT, các bài toán về dãy số và giới hạn dãy số là một phần quan trọng của giải tích toán học. Dãy số ngày càng được quan tâm đúng mức và tỏ ra có sức hấp dẫn mạnh mẽ nhờ vẻ đẹp và tính độc đáo của phương pháp và kỹ thuật giải chúng cũng như yêu cầu cao về tư duy cho người giải.

Các bài toán dãy số không những rèn luyện tư duy sáng tạo, trí thông minh mà còn đem lại say mê và yêu thích môn Toán của người học.

Trong các kì thi học sinh giỏi cấp Tỉnh, cấp Quốc gia, Quốc tế các bài toán liên quan đến dãy số đặc biệt là giới hạn dãy số được đề cập rất nhiều và có giá trị phân hóa chất lượng bài thi cao.

Trong bài viết này tác giả trình bày một số phương pháp tìm giới hạn dãy số: phương pháp sử dụng định nghĩa, tính chất của các dãy số đặc biệt, định lý kẹp, phương pháp sử dụng tính đơn điệu và bị chặn, phương pháp dùng sai phân, phương pháp sử dụng tính chất của hàm số, phương trình, phương pháp lượng giác hóa... Một điều quan trọng là sử dụng các kỹ thuật biến đổi linh hoạt, phù hợp, hiểu được các ý tưởng trong từng phương pháp để giải quyết bài toán với hiệu quả tốt nhất.

Các ví dụ và bài tập được chọn lọc là các đề thi HSG cấp tỉnh, cấp quốc gia, quốc tế, các bài trên các tạp chí nổi tiếng. Bài viết được trình bày theo hệ thống:

- Kiến thức sử dụng.
- Ý tưởng chính của phương pháp.
- Các ví dụ và hướng dẫn giải.
- Bài tập tự giải.

Tác giả hy vọng bài viết này sẽ giúp các em học sinh bổ sung kiến thức về phần dãy số trong các kì thi học sinh giỏi và tài liệu tham khảo bổ ích cho bạn đọc.

NỘI DUNG

I) Phương pháp sử dụng định nghĩa giới hạn dãy số

1. Kiến thức sử dụng:

Định nghĩa: $\lim u_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$

Sử dụng:

- Tiêu chuẩn Cô-si: Dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi $m, n \geq N$ ta có $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

- Nguyên lý ánh xạ co: Nếu với mọi x, y ta có $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ với q là hằng số $0 < q < 1$ và $\{x_n\}$ bị chặn thì $\{x_n\}$ hội tụ. Đặc biệt nếu $|f'(x)| \leq q < 1$ thì ta luôn có điều này.

Ý tưởng chính: Đánh giá $|u_n - L| \leq q|u_{n-1} - L|; q < 1$ và $|u_{n+1} - u_n| \leq q|u_n - u_{n-1}|; q < 1$

Phương pháp này thường được dùng khi ta thấy dãy số không tăng, không giảm.

2. Các ví dụ:

Bài 1: (Đề thi HSG Quảng Bình) Cho dãy số $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 1$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh: $-1 < u_n < 0$

Giải phương trình $x = \frac{1}{2}x^2 - 1 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{3} = a$

Xét $|u_n - a| = \left| \frac{u_n^2}{2} - 1 - \left(\frac{a^2}{2} - 1 \right) \right| = \frac{1}{2}|u_n - a||u_n + a| < \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - a|$

Suy ra $\lim u_n = 1 - \sqrt{3}$

Bài 2: (Đề dự bị VMO 2008) Cho số thực a và dãy số thực (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = a \text{ và } u_{n+1} = \ln(3 + \cos u_n + \sin u_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

HD: Đặt $f(x) = \ln(3 + \sin x + \cos x) - 2008$ thì $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}$

Từ đó, sử dụng đánh giá $|\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}$, $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ ta suy ra

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1.$$

Áp dụng định lý Lagrange với $m > n \geq N$, ta có

$$|u_m - u_n| = |f(u_{m-1}) - f(u_{n-1})| \leq q|u_{m-1} - u_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-1}|u_{m-n+1} - u_1|.$$

Do dãy (u_n) bị chặn và $q < 1$ nên dãy (x_n) thỏa mãn điều kiện Cauchy nên có giới hạn hữu hạn.

Giới hạn của dãy số

Bài 3: (Đề thi vô địch Nga 1982) Cho dãy số $u_1=1$ và $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh: $0 < u_n < 1$

$$\text{Giải phương trình } x = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = a$$

$$\text{Xét } |u_{n+1} - a| = \left| \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+a} \right| = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \frac{|u_n - a|}{|1+u_n|} < \frac{2}{1+\sqrt{5}} |u_n - a|$$

$$\text{Suy ra } \lim u_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = a$$

Bài 4: Cho dãy số (u_n) định bởi $u_1 \in (1, 2)$ và $u_{n+1} = 1 + u_n - u_n^2/2$. Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

HD: Chứng minh: rằng $1 < u_n < 3/2$

$$\text{Giải phương trình } x = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2} = a$$

$$\text{Xét } |u_{n+1} - a| = |u_{n+1} - \sqrt{2}| = |1 + u_n - \frac{u_n^2}{2} - \sqrt{2}| = |u_n - \sqrt{2}| \left| \frac{\sqrt{2} + u_n - 1}{2} \right| < \left| \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} \right| |u_n - \sqrt{2}|$$

$$\text{Suy ra } \lim u_n = \sqrt{2}$$

3. Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho dãy số $u_1=2012$ và $u_{n+1} = \frac{1}{4-3u_n}$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 2: Cho dãy số $u_1=a$ và $u_{n+1} = \frac{2012}{3} \ln(u_n^2 + 2012^2) - 2012^2$. Chứng minh dãy số có giới hạn.

II) Phương pháp sử dụng công thức, tính chất của các dãy số đặc biệt

1. Kiến thức sử dụng:

- Tính chất của các dãy số là cấp số cộng, cấp số nhân
- Các công thức đối với các dãy số quen thuộc:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Ý tưởng chính: Đưa các dãy số về các dãy số quen thuộc

2. Các ví dụ:

Giới hạn của dãy số

Bài 1: Cho dãy số $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: $u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$
Suy ra $\lim u_n = 1$

Bài 2: Cho dãy số $u_n = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: $u_n + 1 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2} = \frac{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}}{4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{(4n+1)}{2(n+1)}$

Suy ra $\lim u_n = 1$.

Bài 3: Cho dãy số $u_1 = 5$ và $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh: $u_n \neq 4$

Ta có: $u_{n+1} - 4 = \frac{u_n - 4}{u_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 4} = 1 + \frac{6}{u_n - 4}$

Xét $x_n = \frac{1}{u_n - 4} + \frac{1}{5} \Rightarrow u_n = 4 + \frac{5}{6^n - 1}$

Suy ra $\lim u_n = 4$

Bài 4: Cho dãy số $u_1 = \frac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}$. Tìm giới hạn dãy số $x_n = \sum_{i=1}^n u_i$?

HD: Đặt $v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_n = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

Suy ra $\lim x_n = 1$

Bài 5: Cho dãy số $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}$ ($0 < a < 1$). Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh: $u_1^2 = 1; u_2^2 = 1 + a; u_3^2 = 1 + a + a^2; \dots; u_n^2 = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$

Suy ra: $u_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}$

Vậy $\lim u_n = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

Bài 6: Cho dãy số $u_1 = 2011$ và $u_{n-1} = n^2(u_{n-1} - u_n)$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Ta có: $0 < u_n = \frac{(n^2 - 1)u_{n-1}}{n^2} < u_{n-1}$

Mặt khác: $u_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} u_{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)(n-2)n}{n^2(n-1)^2} u_{n-2} = \dots = \frac{n+1}{2n} u_1 = \frac{n+1}{2n} 2011$

Vậy $\lim u_n = \frac{2011}{2}$

Giới hạn của dãy số

3. Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho dãy số $u_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 2: Cho dãy số $u_n = \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^2 + \dots + (2n)^3}$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 3: Cho dãy số $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 4: Cho dãy số $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt[n]{u_n^n + a^n}$ ($0 < a < 1$). Tìm giới hạn dãy số?

III) Phương pháp sử dụng định lí kẹp

1. Kiến thức sử dụng:

- Định lí kẹp

$$v_n < u_n < w_n \forall n \in \mathbb{N}^* : \lim v_n = \lim w_n = a \Rightarrow \lim u_n = a$$

Ý tưởng chính: Đánh giá dãy số qua hai dãy số tính được giới hạn

2. Các ví dụ:

Bài 1: Cho dãy số $u_n = \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}{n^{n+2}}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: $0 < u_n = \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}{n^{n+2}} < \frac{nn^n}{n^{n+2}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Suy ra $\lim u_n = 0$

Bài 2: Cho dãy số $u_n = \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6.8 \dots (2n)}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: $0 < u_n = \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6.8 \dots (2n)} < \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{\sqrt{1.3} \sqrt{3.5} \sqrt{5.7} \dots \sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$

Suy ra $\lim u_n = 0$.

Bài 3: Cho dãy số $u_n = \sqrt[n]{n}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Ta có:

$$1 < u_n = \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1.1 \dots 1. \sqrt{n} \sqrt{n}} \leq \frac{1+1+\dots+1+\sqrt{n}\sqrt{n}}{n} = \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$$

Suy ra $\lim u_n = 1$

Bài 4: Cho dãy số $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Ta có:

$$n \cdot \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \cdot \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow 1 \leftarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1} \rightarrow 1$$

Giới hạn của dãy số

Suy ra $\lim x_n = 1$

Bài 5: Cho phương trình $x^{2n+1} = x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng phương trình có duy nhất 1 nghiệm dương x_n . Tìm giới hạn dãy số x_n ?

HD: Ta chứng minh phương trình có duy nhất nghiệm thuộc $(1; 2)$ bằng tính chất hàm số liên tục và chứng minh dãy số x_n là dãy số giảm.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 1 < x_n &= \sqrt[2n+1]{x_n^2 + x_n + 1} \leq \frac{1+1+\dots+1+x_n^2+x_n+1}{2n+1} = \frac{2n+1+x_n^2+x_n}{2n+1} \\ &< \frac{2n+1+6}{2n+1} = 1 + \frac{6}{2n+1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Suy ra $\lim x_n = 1$

3. Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho dãy số $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 2: Cho dãy số $u_n = \sqrt[n]{1+a^n}$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 2: Cho dãy số $u_n = \frac{1+2^2+\dots+n^n}{n^n}$. Tìm giới hạn dãy số?

IV) Phương pháp sử dụng tính đơn điệu và bị chặn

1. Kiến thức sử dụng:

- Định lí: Dãy số tăng bị chặn trên (giảm bị chặn dưới) thì tồn tại giới hạn

Ý tưởng chính: Chứng minh dãy số đơn điệu

Chứng minh dãy số bị chặn

Giải phương trình tìm giới hạn

2. Các ví dụ:

Bài 1: (Đề thi HSG lớp 11 Quảng Bình) Cho dãy số $u_1 = 2008$ và

$$u_{n+1} = \frac{1}{2008} \left(2007u_n + \frac{2008}{u_n^{2007}} \right) \quad (n \geq 1)$$

Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2008} \left(2007u_n + \frac{2008}{u_n^{2007}} \right) = \frac{1}{2008} \left(u_n + u_n + \dots + u_n + \frac{2008}{u_n^{2007}} \right) > \sqrt[2008]{2008}$$

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{1}{2008} \left(2007u_n + \frac{2008}{u_n^{2007}} \right) - u_n = \frac{1}{2008} \left(\frac{2008 - u_n^{2008}}{u_n^{2007}} \right) < 0$$

Giới hạn của dãy số

Suy ra $\lim u_n = \sqrt[2008]{2008}$

Bài 2: (Đề thi HSG Quốc gia năm 2012) Cho dãy số $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) \end{cases}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh: $x_{n-1} > \frac{n+2}{n-1} (n \geq 3)$. Khi đó

$$\text{Xét hiệu } x_n - x_{n-1} = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) - x_{n-1} = \frac{2[(n+2) - (n-1)x_{n-1}]}{3n}.$$

Suy ra (x_n) là dãy số giảm kể từ số hạng thứ hai. Ngoài ra, theo (1), nó bị chặn dưới bởi 1. Theo tính chất của dãy đơn điệu, tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Chuyển

đẳng thức $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$ sang giới hạn, ta được $a = \frac{1}{3}(a + 2) \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Bài 3: Cho dãy số $u_1 = 2012$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3u_n}{3u_n^2 + 1}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Ta có: $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^3}{3u_n^2 + 1} > 0$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^3 + 2u_n}{3u_n^2 + 1} < 0$. Do đó dãy số giảm và bị chặn dưới nên tồn tại

giới hạn. Suy ra $\lim u_n = 1$

Bài 4: Cho dãy số $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + 1} - \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Ta có: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n + 1} + \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}} > 0$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } \sqrt{u_n^2 + u_n + 1} + \sqrt{u_n^2 - u_n + 1} &= \sqrt{\left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(-u_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &\geq \sqrt{\left(u_n + \frac{1}{2} - u_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2 \end{aligned}$$

Do đó dãy số giảm và bị chặn dưới nên tồn tại giới hạn. Suy ra $\lim u_n = 0$

Bài 5: Cho dãy số $0 < u_n < 1$ và $u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4}$. Tìm giới hạn dãy số?

HD: Ta có: $u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4} \geq u_n(1 - u_n) \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Do đó dãy số tăng và bị chặn nên tồn tại giới hạn. Suy ra $\lim u_n = \frac{1}{2}$

Giới hạn của dãy số

Bài 6: Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

HD: Đặt $f(x) = (\sqrt{2})^x$ thì dãy số có dạng $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$. Ta thấy $f(x)$ là hàm số tăng và $x_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$. Suy ra $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n < 2$.

Vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn. Gọi a là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ sang giới hạn, ta được $a = \sqrt{2}^a$. Ngoài ra ta cũng có $a \leq 2$.

Xét phương trình $x = \sqrt{2}^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2}) \Rightarrow x = 2$. Suy ra $\lim u_n = 2$

3. Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho dãy số $u_1 = 2012$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2012}{u_n} \right)$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 2: Cho dãy số $u_1 = 2012$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 6}{2u_n + 1}$. Tìm giới hạn dãy số?

Cho dãy số $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 3: Cho dãy số $u_1 = 2012$ và $u_{n+1} = \frac{2^{u_n}(u_n \ln 2 - 1) + 1}{2^{u_n} \ln 2 - 1}$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 4: Cho dãy số $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$. Tìm giới hạn dãy số?

Bài 5: Cho dãy số $u_1 = b$ và $u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2$. Xác định a, b để dãy số có giới hạn và tìm giới hạn dãy số?

Bài 6: Cho dãy số $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \right)$. Tìm giới hạn dãy số?

V) Phương pháp sử dụng sai phân

1. Kiến thức sử dụng:

$$\text{- Sai phân: } \Delta_k = x_{k+1} - x_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n \Delta_k = \sum_{k=1}^n x_{k+1} - x_k = x_{n+1} - x_1$$

Ý tưởng chính: Biểu diễn tổng các số hạng qua sai phân

2. Các ví dụ:

Bài 1:
$$\begin{cases} u_1 = 2008 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 4013u_n + 2007^2 \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

a) Chứng minh: $u_n \geq n + 2007$.

b) Đặt $x_n = \frac{1}{u_1 - 2006} + \frac{1}{u_2 - 2006} + \dots + \frac{1}{u_n - 2006}$

Tìm $\lim x_n$

Giới hạn của dãy số

HD: a) Bạn đọc tự giải. Câu b):

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n^2 - 4013u_n + 2007^2 \\ \Leftrightarrow (u_{n+1} - 2007) &= (u_n - 2006)(u_n - 2007) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 2007} &= \frac{1}{(u_n - 2006)(u_n - 2007)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 2007} &= \frac{1}{u_n - 2007} - \frac{1}{u_n - 2006}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{u_1 - 2006} + \frac{1}{u_2 - 2006} + \dots + \frac{1}{u_n - 2006} \\ &= \frac{1}{u_1 - 2007} - \frac{1}{u_{n+1} - 2007} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 2007}\end{aligned}$$

Suy ra $\lim u_n = 1$

Bài 2: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n^{2011}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính $\lim \left(\frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \right)$

HD: Ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n^{2011} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + u_n^{2012} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = u_n^{2012} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}}$$

Suy ra:
$$\frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}}$$

Chứng minh $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_{n+1}} = 0$

Vậy
$$\lim \left(\frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \right) = 1$$

Bài 3: Cho dãy số:
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^{2010} + 3u_n + 16}{u_n^{2009} - u_n + 11} \end{cases}$$

Tính
$$\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^{2009} + 7}$$

HD: Ta có:

Giới hạn của dãy số

$$u_{n+1} - 4 = \frac{(u_n^{2009} + 7)(u_n - 4)}{u_n^{2009} + 7 - (u_n - 4)} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 4} = \frac{1}{u_n - 4} - \frac{1}{u_n^{2009} + 7}$$

$$\text{Suy ra: } \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^{2009} + 7} = \frac{1}{u_1 - 4} - \frac{1}{u_{n+1} - 4} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 4}$$

$$\text{Chúng minh } \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_{n+1} - 4} = 0$$

$$\text{Vậy } \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^{2009} + 7} = 1$$

$$\text{Bài 4: Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định như sau: } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} + u_n}{2}, \forall n \in N, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Tính } \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^2}$$

$$\text{HD: Ta có: } \frac{1}{u_i^2} = \frac{1}{u_{i-1}} - \frac{1}{u_i}$$

$$\text{Suy ra: } \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} = 6 - \frac{1}{u_n}$$

$$\text{Chúng minh } \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0$$

$$\text{Vậy } \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^2} = 6$$

$$\lim x_n = 1$$

3. Bài tập tự giải:

$$\text{Bài 1: Cho dãy số: } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2 \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

$$\text{Tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} ?$$

$$\text{Bài 2: Cho dãy số: } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n + 1)(u_n + 2)(u_n + 3) + 1} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Giới hạn của dãy số

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i + 2}$?

Bài 3: Cho dãy số:
$$\begin{cases} u_1 = a > 1 \\ 2010u_{n+1} = u_n^2 + 2009u_n \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{u_{i+1} - 1}$?

VI) Phương pháp lượng giác hóa

1. Kiến thức sử dụng:

- Biểu diễn số hạng tổng quát của dãy số bằng công thức lượng giác để tính giới hạn: công thức nhân đôi, nhân ba, các hằng đẳng thức lượng giác.

- Ý tưởng chính: Nhận dạng và dùng công thức lượng giác phù hợp để biểu diễn các số hạng của dãy số. Chú ý các số hạng đầu là các giá trị lượng giác đặc biệt nào?

2. Các ví dụ:

Bài 1: Cho dãy số $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$. Tìm giới hạn dãy số $\frac{u_n}{n}$?

HD: Ta có: $u_1 = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

Ta có $u_{n+1} = \cos \frac{2^n \pi}{3}$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0$

Bài 2: Cho dãy số
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n^2} - 1}{x_n} \end{cases}$$
 .Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh: $x_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Bài 3: Cho dãy số $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{4^n}} \right)$ Tìm giới hạn dãy số?

HD: Chứng minh: $x_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Bài 4: Cho dãy số $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^4}{u_n^4 - 8u_n^2 + 8}$. Tìm giới hạn dãy số $\frac{u_n}{n}$?

Giới hạn của dãy số

HD: Ta có: $\frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{8}{u_n^2} + \frac{8}{u_n^4} \Rightarrow a_{n+1} = 1 - 8a_n^2 + 8a_n^4 = 2(2a_n^2 - 1)^2 - 1$

Mặt khác: $a_1 = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$. Ta có $u_{n+1} = \cos \frac{4^n \pi}{3}$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0$

Bài 5: Cho dãy số $u_n = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 \dots + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 \dots + \sqrt{2}}}}}$. Tìm giới hạn dãy số u_n ?

HD: Chứng minh: $x_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3. Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho dãy số $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - u_n^2}}}{2}$. Tìm giới hạn dãy số $2^n u_n$?

Bài 2: Cho dãy số $u_1 = \sqrt{3}$ và $u_{n+1} = \frac{\sqrt{3} + u_n}{1 - \sqrt{3}u_n}$. Tìm giới hạn dãy số $\frac{u_n}{n}$?

Bài 3: Cho 2 dãy số $u_1 = a > 0$ và $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_1 = b > 0$, $b < a$ và $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$. Tìm giới hạn hai dãy số?

VI) Phương pháp sử dụng các tính chất của hàm số (dãy số cho bởi phương trình)

1. Kiến thức sử dụng:

- Tính chất của hàm số: tính liên tục và các định lý liên quan: định lý về giá trị trung gian, chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất; đạo hàm, ứng dụng của đạo hàm và định lý Lagrange, ...

- Ý tưởng chính: Sử dụng các tính chất của hàm số để xác định số hạng dãy số cho bởi phương trình.

2. Các ví dụ:

Bài 1: Cho x_n là nghiệm của phương trình: $x^n + \frac{x^{n-1}}{2} + \frac{x^{n-2}}{2^2} + \dots + \frac{x}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$

Chứng minh rằng phương trình có duy nhất một nghiệm dương. Tính $\lim x_n$?

HD: Phương trình tương đương $f_n(x) = 2^n x^n + 2^{n-1} x^{n-1} + \dots + 2x - 1 = 0$

Ta có: $f_n(0) < 0$ và $f_n(\frac{1}{2}) > 0$ nên $x_n \in (0; \frac{1}{2})$. Dãy số x_n giảm, suy ra tồn tại giới hạn

$\lim x_n = a$. Ta có: $\frac{2x_n(1 - (2x_n)^n)}{1 - 2x_n} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

Bài 2: Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n} = 0$

thuộc khoảng $(0, 1)$

a) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ có giới hạn.

Giới hạn của dãy số

b) Hãy tìm giới hạn đó.

HD: x_n được xác định duy nhất vì hàm số $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$ liên tục và đơn điệu trên $(0, 1)$. Ta có: $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{x-n-1} \Rightarrow f_{n+1}(x) = 0$ có nghiệm $x_{n+1} \in (0; x_n)$. Do đó dãy số giảm. Giả sử $\lim x_n = a$. Ta có:

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n-1} + \dots + \frac{1}{x_n-n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \dots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Vậy ta phải có $\lim x_n = 0$.

Bài 3: (VMO 2007) Cho số thực $a > 2$ và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1$.

- a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.
b) Gọi nghiệm đó là x_n , chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

HD: a) Hàm số $f_n(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$ và $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$ nên $0 < x_n < 1$.

Chứng minh dãy x_n tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$.

Xét $f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \dots + x + 1 = x_n f_n(x_n) + 1 = ax_n + 1$

Suy ra $f(1) > a$ và $f(x_n) < a$, do đó $x_n < x_{n+1} < 1$. Đặt $c = (a-1)/a < 1$

$$f_n(c) - f_n(x_n) = kc^n \text{ (với } k = (a-1)((a-1)^9 - 1) > 0)$$

Theo định lý Lagrange thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n) \text{ với } \xi \text{ thuộc } (x_n, c)$$

Nhưng $f'(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \dots + 1 > 1$ nên từ đây suy ra $kc^n > c - x_n$

Từ đó ta có $c - kc^n < x_n < c$

Vậy $\lim x_n = c$.

3. Bài tập tự giải:

Bài 1: (VMO 2002) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình

$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$ có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$. Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4.

Bài 2: Cho n là một số nguyên dương > 1 . Chứng minh rằng phương trình $x^n = x^2 + x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n . Hãy tìm số thực a sao cho giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a (x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.

KẾT LUẬN

Dãy số là một chuyên đề quan trọng trong giải tích toán học. Các bài toán liên quan đến dãy số luôn mang đến sự hấp dẫn bởi kỹ thuật và phương pháp giải chúng.

Bài viết trình bày một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số, các ý tưởng, ví dụ và bài tập đã được sắp xếp một cách có hệ thống nhằm giúp cho đối tượng học sinh có điều kiện ôn tập, nghiên cứu, phát triển.

Do trình độ còn hạn chế nên trong bài viết không thể tránh khỏi những sai sót về trình bày cũng như về chuyên môn. Rất mong bạn đọc góp ý kiến.

Xin chân thành cảm ơn.