

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh : Số báo danh :

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (4 điểm) Cho phương trình $mx^2 + (2m-1)x + m-2 = 0$, m là tham số

1. Tìm m để phương trình đã cho có một nghiệm.
2. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn nghiệm này gấp hai lần nghiệm kia.

Câu II. (4 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=a \\ x^2+y^2=a \end{cases} \quad (1), \quad a$ là tham số

1. Giải hệ phương trình (1) khi $a = 5$.
2. Tìm a để hệ phương trình (1) có nghiệm.

Câu III. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x+13} = \sqrt{x-3} + \sqrt{16-x}$

Câu IV. (4 điểm)

1. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

2. Trong mặt phẳng tọa độ, cho A(- 2; -1); B(2; - 4). Tìm trên đường thẳng $x = 1$ điểm M sao cho góc $\widehat{MBA} = 45^\circ$.

Câu V. (2 điểm) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác; h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao tương ứng ba cạnh đó; r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Chứng minh: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

Câu VI. (4 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh: $\frac{a^2}{b^2c} + \frac{b^2}{c^2a} + \frac{c^2}{a^2b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
I.1	(2 điểm) Cho phương trình $mx^2 + (2m-1)x + m-2 = 0$, m là tham số 1. Tìm m để phương trình có một nghiệm • $m = 0$: $x = -2$ • $m \neq 0$: $\Delta = 4m + 1$ Pt có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$ Vậy: $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{4}$	0,25đ 0,5đ 0,25đ
I.2	2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn nghiệm này gấp hai lần nghiệm kia Pt có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$ Theo Viet và gt ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1-2m}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-2}{m} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$ Giải được: $m^2 - 10m - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 - 3\sqrt{3} \\ m = 5 + 3\sqrt{3} \end{cases}$ (thỏa) Vậy $\begin{cases} m = 5 - 3\sqrt{3} \\ m = 5 + 3\sqrt{3} \end{cases}$	0,25đ 0, 25đ 0, 5đ
II.1	(2 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$, a là tham số 1. Giải hệ phương trình khi $a = 5$	0,25đ

	$a = 5: \text{ta có } \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x + y)^2 - 2xy = 5 \end{cases}$	0,25đ
	$\text{đặt } S = x + y ; P = xy , \text{ ta có: } \begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 5 \\ P = 10 \end{cases}$	0,25đ
	$+ \text{ Với } \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \text{ giải được } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25đ
	$+ \text{ Với } \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} : \text{ vô nghiệm}$	
	Vậy hpt có 2 nghiệm (1;2);(2;1)	
II.2	2. Tìm a để hệ phương trình có nghiệm Ta có: $S^2 + 2S - 3a = 0$ (*) $\Delta = 3a + 1$ $a < -\frac{1}{3} : (*)$ vô nghiệm $a = -\frac{1}{3} : (*)$ có nghiệm $S = -1 \Rightarrow P = \frac{2}{3} : \text{ vô nghiệm}$ $a > -\frac{1}{3} : (*)$ có 2 nghiệm: $\begin{cases} S_1 = -1 - \sqrt{1+3} \\ P_1 = a + 1 + \sqrt{1+3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S_2 = -1 + \sqrt{1+3} \\ P_2 = a + 1 - \sqrt{1+3} \end{cases}$ ĐK hệ pt có nghiệm $S^2 - 4P \geq 0$ (a) $S_1^2 - 4P_1 \geq 0$ giải được : $0 \leq a \leq 8$ (b) $S_2^2 - 4P_2 \geq 0 : \text{ vô nghiệm}$ Vậy $0 \leq a \leq 8$	0,25đ 0,25đ 0,25đ
III	(1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x+13} = \sqrt{x-3} + \sqrt{16-x}$ (*) ĐK: $3 \leq x \leq 16$ Với ĐK trên (*) $\Leftrightarrow x+13 = (\sqrt{x-3} + \sqrt{16-x})^2$	0,25đ 0,25đ

	$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{(x-3)(16-x)}$ $\Leftrightarrow x^2 = 4(x-3)(16-x)$ $\Leftrightarrow 5x^2 - 76x + 192 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = \frac{16}{5} \end{cases} \text{ (thỏa)}$	0,25đ
	Vậy: $\begin{cases} x = 12 \\ x = \frac{16}{5} \end{cases}$	0,25đ
IV	Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm. Ta có hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ Mà : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ Vậy ta có ĐPCM	0, 5đ 0, 5đ
IV.2	2. Trong mặt phẳng tọa độ, cho A(- 2; -1); B(2; - 4). Tìm trên đường thẳng $x = 1$ điểm M sao cho góc $\angle MBA = 45^\circ$ Gọi M(1; y) thuộc đt $x = 1$ $\overrightarrow{BM} = (-1; y+4)$ $\overrightarrow{BA} = (-4; 3)$ GT: $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = \frac{(-1)(-4) + 3(y+4)}{\sqrt{1+(y+4)^2} \cdot \sqrt{4^2+3^2}} = \cos 45^\circ$ $\Leftrightarrow \frac{3y+16}{5\sqrt{1+(y+4)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow 7y^2 + 8y - 87 = 0$	0,25đ 0, 25đ 0,25đ

	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -\frac{29}{7} \end{cases}$ Vậy : $M_1(1;3); M_2(1; -\frac{29}{7})$	0,25đ
V	(1 điểm) Gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác; h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao tương ứng ba cạnh đó; r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó Chứng minh: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ Ta có : $S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}$ Tương tự: $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}; \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$ Do đó: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r} : \text{ĐPCM}$	0, 5đ 0,5đ
VI	(2 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh: $\frac{a^2}{b^2c} + \frac{b^2}{c^2a} + \frac{c^2}{a^2b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ Áp dụng BĐT Cauchy, ta có: $\left(\frac{a^2}{b^2c} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2a} + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2b} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)$ Mà $2\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) = \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}\right) + \left(\frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) + \left(\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc}\right) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ Suy ra: $\left(\frac{a^2}{b^2c} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2a} + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2b} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ $\Rightarrow \frac{a^2}{b^2c} + \frac{b^2}{c^2a} + \frac{c^2}{a^2b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} : \text{ĐPCM}$	0, 5đ 0, 5đ 0, 5đ 0, 5đ