

## I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**Ý nghĩa hình học của đạo hàm:** Đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  của hàm số tại điểm  $M(x_0, y_0)$ .

Khi đó, phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(x_0, y_0)$  là:  $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Nguyên tắc chung để lập được phương trình tiếp tuyến là ta phải tìm được hoành độ tiếp điểm  $x_0$ .

## II. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT TIẾP ĐIỂM

#### 1. Phương pháp

**Bài toán:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C): y = f(x)$  tại điểm  $M(x_0, y_0)$ .

**Phương pháp giải:**

- + **Bước 1:** Tính đạo hàm  $y' = f'(x) \Rightarrow$  hệ số góc tiếp tuyến  $k = y'(x_0)$ .
- + **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm  $M(x_0, y_0)$  có dạng:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

**Chú ý:**

- + Nếu đề cho (hoành độ tiếp điểm)  $x_0$  thì tìm  $y_0$  bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức là:  $y_0 = f(x_0)$
- + Nếu đề cho (tung độ tiếp điểm)  $y_0$  thì tìm  $x_0$  bằng cách giải phương trình  $f(x_0) = y_0$ .
- + Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị  $(C): y = f(x)$  và đường thẳng  $d: y = ax + b$ . Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa  $d$  và  $(C)$ .

**Đặc biệt:** Trục hoành  $Ox: y = 0$  và trục tung  $Oy: x = 0$ .

**Sử dụng máy tính cầm tay:**

Phương trình tiếp cần lập có dạng  $d: y = kx + m$ .

- + Đầu tiên tìm hệ số góc tiếp tuyến  $k = y'(x_0)$ .

Bấm **SHIFT** **f(x)** và nhập  $\frac{d}{dx}(f(X))|_{x=x_0}$ , sau đó bấm **=** ta được  $k$ .

- + Tiếp theo: Bấm phím **◀** để sửa lại thành  $\frac{d}{dx}(f(X))|_{x=x_0} \times (-X) + f(X)$ , sau đó

bấm phím **CALC** với  $X = x_0$  và bấm phím **=** ta được  $m$ .

**Nhận xét:** Sử dụng máy tính để lập phương trình tiếp tuyến tại điểm thực chất là rút gọn các bước của cách 1. Sử dụng máy tính giúp ta nhanh chóng tìm ra kết quả và hạn chế được sai sót trong tính toán. Nếu học sinh nào tính nhầm tốt có thể bỏ qua cách này.

## 2. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) :  $y = x^3 + 2x^2$  tại điểm  $M(1;3)$  là

- A.  $y = 7x + 4$ .      B.  $y = 7x - 4$ .      C.  $y = -7x + 4$ .      D.  $y = -7x - 4$ .

**Lời giải:**

**Cách 1.** Ta có:  $y' = 3x^2 + 4x \Rightarrow k = y'(1) = 7$ .

Phương trình tiếp tuyến tại  $M(1;3)$  là:

$$d: y = y'_0(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 7(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = 7x - 4 \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.}$$

**Cách 2 [Sử dụng máy tính cầm tay].**

- + Nhập  $\frac{d}{dx}(X^3 + 2X^2)|_{x=1}$ , sau đó bấm  $\boxed{=}$  ta được kết quả là  $\boxed{7}$ .

- + Bấm phím  $\leftarrow$  để sửa lại thành:

$$\frac{d}{dx}(X^3 + 2X^2)|_{x=1} \times (-X) + X^3 + 2X^2$$

sau đó bấm phím  $\boxed{CALC}$  với  $X = 1$  và bấm phím  $\boxed{=}$  ta được kết quả  $\boxed{-4}$ .

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là:  $y = 7x - 4 \Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Ví dụ 2:** Cho điểm M thuộc đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  và có hoành độ bằng -1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là

- A.  $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ .      B.  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ .      C.  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ .      D.  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ .

**Lời giải:**

**Cách 1.** Ta có:  $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = y(-1) = \frac{1}{2}$  và  $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow k = y'(-1) = \frac{-3}{4}$ .

Phương trình tiếp tuyến tại M là:  $y = -\frac{3}{4}(x+1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Cách 2 [Sử dụng máy tính cầm tay].**

- + Nhập  $\frac{d}{dx}\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)|_{x=-1}$ , sau đó bấm  $\boxed{=}$  ta được kết quả là  $\boxed{-0,75 = -\frac{3}{4}}$ .

- + Bấm phím  $\leftarrow$  để sửa lại thành:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)|_{x=-1} \times (-X) + \frac{2X+1}{X-1}$$

sau đó bấm phím  $\boxed{CALC}$  với  $X = -1$  và bấm phím  $\boxed{=}$

ta được kết quả  $\boxed{-0,25 = -\frac{1}{4}}$ .

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là:  $y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Ví dụ 3:** Cho điểm  $M$  thuộc đồ thị  $(C): y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$  có hoành độ  $x_0 > 0$  và  $y''(x_0) = -1$ . Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M$  là

A.  $y = -3x + \frac{5}{4}$ .      B.  $y = 3x + \frac{5}{4}$ .      C.  $y = 3x - \frac{19}{4}$ .      D.  $y = -3x - \frac{19}{4}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $y' = x^3 - 4x$ ,  $y'' = 3x^2 - 4$ .

Khi đó:  $y''(x_0) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1 \xrightarrow{x_0 > 0} x_0 = 1$

Đến đây bạn đọc có thể giải tiếp bằng nhiều cách như hai ví dụ trình bày ở trên.

**Cách 1.**

Ta có:  $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 = -\frac{7}{4}$  và  $k = y'(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 = -3$ .

Phương trình tiếp tuyến tại  $M$  là:  $y = -3(x - 1) - \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{5}{4} \Rightarrow$  **Chọn đáp án A.**

**Cách 2 [Sử dụng máy tính cầm tay].**

+ Nhập  $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4 - 2X^2\right)$ , sau đó bấm  $\boxed{=}$  ta được

kết quả là  $\boxed{-3}$ .

+ Bấm phím  $\leftarrow$  để sửa lại thành:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4 - 2X^2\right) \Big|_{x=1} \times (-X) + \frac{1}{4}X^4 - 2X^2$$

sau đó bấm phím  $\boxed{CALC}$  với  $X = 1$  và bấm phím  $\boxed{=}$  ta

được kết quả  $\boxed{\frac{5}{4}}$ .

Vậy phương trình tiếp tuyến tại  $M$  là:  $y = -3x + \frac{5}{4} \Rightarrow$  **Chọn đáp án A.**

## DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT PHƯƠNG (Biết hệ số góc $k$ )

### 1. Phương pháp

**Bài toán:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$ . Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  với hệ số góc  $k$  cho trước.

**Phương pháp giải:**

+ **Bước 1:** Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm và tính  $y' = f'(x)$ .

+ **Bước 2:**

\* Hệ số góc tiếp tuyến là  $k = f'(x_0)$ .

\* Giải phương trình này tìm được  $x_0$ , thay vào hàm số được  $y_0$ .

+ **Bước 3:** Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng:

$$d: y = y'_0(x - x_0) + y_0$$

**Chú ý:** Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

+ Tiếp tuyến  $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$ .

Sau khi lập được phương trình tiếp tuyến thì nhớ kiểm tra lại xem tiếp tuyến có bị trùng với đường thẳng  $\Delta$  hay không? Nếu trùng thì phải loại đi kết quả đó.

+ Tiếp tuyến  $d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k.a = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$ .

+ Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc  $\alpha$  thì  $k = \pm \tan \alpha$ .

Tổng quát: Tiếp tuyến tạo với đường thẳng  $\Delta: y = ax + b$  một góc  $\alpha$ .

Khi đó:  $\left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \tan \alpha$ .

### Sử dụng máy tính cầm tay:

Phương trình tiếp cần lập có dạng  $d: y = kx + m$ .

+ Tìm hoành độ tiếp điểm  $x_0$ .

+ Nhập  $k(-X) + f(X)$  (hoặc  $f(X) - kX$ ) sau đó bấm **⎵** với  $X = x_0$  rồi bấm **⎵** ta được kết quả là  $m$ .

## 2. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = x^3 - 3x + 2$  có hệ số góc bằng 9 là

A.  $y = 9x - 18; y = 9x + 22$ .

B.  $y = 9x - 14; y = 9x + 18$ .

C.  $y = 9x + 18; y = 9x + 22$ .

D.  $y = 9x - 14; y = 9x - 18$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $y' = 3x^2 - 3$ . Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là  $M(x_0; y_0)$ .

$\Rightarrow$  hệ số góc của tiếp tuyến là:  $k = y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$ .

**Cách 1.**

+ Với  $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4$  ta có tiếp điểm  $M_1(2; 4)$ .

Phương trình tiếp tuyến tại  $M_1$  là:  $d_1: y = 9(x - 2) + 4 \Rightarrow d_1: y = 9x - 14$ .

+ Với  $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$  ta có tiếp điểm  $M_2(-2; 0)$ .

Phương trình tiếp tuyến tại  $M_2$  là:  $d_2: y = 9(x + 2) + 0 \Rightarrow d_2: y = 9x + 18$ .

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là  $d_1: y = 9x - 14; d_2: y = 9x + 18 \Rightarrow$  **Chọn đáp án B.**

**Cách 2 [Sử dụng máy tính cầm tay].**

+ Với  $x_0 = 2$  ta nhập  $9(-X) + X^3 - 3X + 2$  **⎵** với  $X = 2$

lúc bấm **⎵** ta được kết quả là **-14**.

$\Rightarrow d_1: y = 9x - 14$ .

+ Với  $x_0 = -2$  ta nhập  $9(-X) + X^3 - 3X + 2$  **⎵** với

$X = -2$  lúc bấm **⎵** ta được kết quả là **18**.

$\Rightarrow d_2: y = 9x + 18$ .

$\Rightarrow$  **Chọn đáp án B.**

**Ví dụ 2:** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x+2}$  song song với đường thẳng  $\Delta: 3x - y + 2 = 0$  có phương trình là

A.  $y = 3x - 4$ .

B.  $y = 3x + 2$ .

C.  $y = 3x + 14$ .

D.  $y = 3x + 4$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$  và  $\Delta: 3x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$ .

Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là  $M(x_0; y_0)$ .

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng  $\Delta$  nên

$$k = \frac{3}{(x_0 + 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 1 \\ x_0 + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

**Cách 1.**

+ Với  $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$  ta có tiếp điểm  $M_1(-1; -1)$ .

Phương trình tiếp tuyến tại  $M_1$  là:  $d_1: y = 3(x + 1) - 1 \Rightarrow d_1: y = 3x + 2$ .

Lúc này:  $d_1 \equiv \Delta \Rightarrow$  Loại.

+ Với  $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5$  ta có tiếp điểm  $M_2(-3; 5)$ .

Phương trình tiếp tuyến tại  $M_2$  là:  $d_2: y = 3(x + 3) + 5 \Rightarrow d_2: y = 3x + 14$ .

Vậy có một tiếp tuyến cần tìm là  $d_2: y = 3x + 14$  Chọn đáp án C.

**Cách 2 [Sử dụng máy tính cầm tay].**

+ Với  $x_0 = -1$  ta nhập  $3(-X) + \frac{2X+1}{X+2}$  [CALC] với  $X = -1$

rồi bấm [=] ta được kết quả là [2].

$\Rightarrow d_1: y = 3x + 2 \Rightarrow d_1 \equiv \Delta \Rightarrow$  Loại.

+ Với  $x_0 = -3$  ta nhập  $3(-X) + \frac{2X+1}{X+2}$  [CALC] với  $X = -3$

rồi bấm [=] ta được kết quả là [14].

$d_2: y = 3x + 14 \Rightarrow$  Chọn đáp án C.

**DẠNG 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT TIẾP TUYẾN ĐI QUA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC**

**1. Phương pháp**

**Bài toán:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$ , biết tiếp tuyến đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$ .

**Phương pháp giải:**

**Cách 1: Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị**

+ **Bước 1:** Phương trình tiếp tuyến đi qua  $A(x_A; y_A)$  hệ số góc  $k$  có dạng:

$$d: y = k(x - x_A) + y_A \quad (*)$$

+ **Bước 2:**  $d$  là tiếp tuyến của  $(C)$  khi và chỉ khi hệ  $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$  có nghiệm.

+ **Bước 3:** Giải hệ trên tìm được  $x \Rightarrow k$  và thế vào phương trình  $(*)$ , thu được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

**Cách 2:**

+ **Bước 1:**

\* Gọi  $M(x_0; f(x_0))$  là tiếp điểm.

\* Tính hệ số góc tiếp tuyến  $k = f'(x_0)$  theo  $x_0$ .

+ Bước 2: Phương trình tiếp tuyến có dạng:  $d: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  (\*\*)

Vì điểm  $A(x_A; y_A) \in d$  nên  $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$ . Giải phương trình này sẽ tìm được  $x_0$ .

Bước 3: Thay  $x_0$  vừa tìm được vào (\*\*) ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

## 2. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = -4x^3 + 3x + 1$  đi qua điểm  $A(-1; 2)$  có phương trình là

A.  $y = -9x + 7; y = -x + 2.$

B.  $y = -9x - 11; y = -x + 2.$

C.  $y = -9x + 11; y = 2.$

D.  $y = -9x - 7; y = 2.$

**Lời giải:**

Ta có:  $y' = -12x^2 + 3$ .

Đường thẳng  $d$  đi qua  $A(-1; 2)$  với hệ số góc  $k$  có phương trình  $d: y = k(x + 1) + 2$ .

Đường thẳng  $d$  là tiếp tuyến của (C)  $\Leftrightarrow$  hệ  $\begin{cases} -4x^3 + 3x + 1 = k(x + 1) + 2 & (1) \\ k = -12x^2 + 3 & (2) \end{cases}$  có nghiệm.

Thay  $k$  từ (2) vào (1) ta được:

$$-4x^3 + 3x + 1 = (-12x^2 + 3)(x + 1) + 2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Với  $x = -1 \Rightarrow k = -9$ . Phương trình tiếp tuyến là:  $y = -9x + 7$ .

+ Với  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0$ . Phương trình tiếp tuyến là:  $y = 2$ .

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là  $y = -9x - 7; y = 2 \Rightarrow$  **Chọn đáp án D.**

**Bình luận:** Đối với dạng bài toán viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm việc tính toán tương đối mất thời gian và dễ dẫn đến sai lầm đáng có. Do đó, ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi để thử các đáp án như sau:

+ Cho  $f(x)$  bằng kết quả các đáp án, từ đó ta thu được các phương trình.

+ Sử dụng chức năng giải phương trình bậc ba của máy tính bỏ túi bằng cách bấm tổ hợp phím **MODE** **5** **4** và nhập hệ số phương trình.

Thông thường máy tính cho số nghiệm thực nhỏ hơn số bậc của phương trình là 1 thì ta chọn đáp án đó.

Cụ thể trong bài toán này:

+ Đầu tiên thử với đáp án A, ta cho:  $-4x^3 + 3x + 1 = -9x + 7 \Leftrightarrow -4x^3 + 12x - 6 = 0$ .

Máy tính cho 3 nghiệm  $\Rightarrow$  Loại A.

+ Thử với đáp án B, ta cho:  $-4x^3 + 3x + 1 = -x + 2 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x - 1 = 0$ .

Máy tính cho 3 nghiệm  $\Rightarrow$  Loại B.

+ Thử với đáp án C, ta cho:  $-4x^3 + 3x + 1 = -9x + 11 \Leftrightarrow -4x^3 + 12x - 10 = 0$ .

Máy tính hiển thị 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức (phương trình có số nghiệm thực là một nhỏ hơn bậc của phương trình là 2)  $\Rightarrow$  Loại C.

$\Rightarrow$  **Chọn đáp án D.**

Đến đây ta có thể dừng được rồi, tuy nhiên có thể kiểm nghiệm thêm đáp án D, ta cho:

- \*  $-4x^3 + 3x + 1 = -9x - 7 \Leftrightarrow -4x^3 + 12x + 8 = 0$   
máy tính hiển thị 2 nghiệm  $x = -1; x = 2$  (nhận).
- \*  $-4x^3 + 3x + 1 = 2 \Leftrightarrow -4x^3 + 3x - 1 = 0$   
máy tính hiển thị 2 nghiệm  $x = -1; x = \frac{1}{2}$  (nhận).

**Ví dụ 2:** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  đi qua điểm  $A(-1;4)$  có phương trình là

- A.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ .      B.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ .      C.  $y = \frac{1}{3}x + 4$ .  
D. Không tồn tại tiếp tuyến.

**Lời giải:**

Điều kiện:  $x \neq -1$ . Ta có:  $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$ .

Đường thẳng  $d$  đi qua  $A(-1;4)$  với hệ số góc  $k$  có phương trình:  $d: y = k(x+1) + 4$ .

Đường thẳng  $d$  là tiếp tuyến của (C)  $\Leftrightarrow$  hệ  $\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} = k(x+1) + 4 & (1) \\ k = \frac{3}{(x+1)^2} & (2) \end{cases}$  có nghiệm.

Thay  $k$  từ (2) vào (1) ta được:  $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{3}{(x+1)^2}(x+1) + 4$ .

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases} \xrightarrow{x \neq -1} x = -4 \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến là:  $d: y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \Rightarrow$  Chọn đáp án A.

#### DẠNG 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

**Ví dụ 1:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2$  có đồ thị (C). Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số  $m$  thì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng  $d: y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$ ?

- A.  $m = 1$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = -2$ .

**Lời giải:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = 3x^2 - 6x$ .

Phương trình tiếp tuyến của C tại  $M(1; -2) \in (C)$  là:

$$\Delta: y + 2 = (3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 1.$$

Khi đó:  $\Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = m^2 - 4 \\ 2m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Ví dụ 2:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A$  là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số  $m$  thì tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  tại  $A$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: x - 4y + 1 = 0$ ?

A.  $m = 1$ .B.  $m = -1$ .C.  $m = 2$ .D.  $m = -2$ .**Lời giải:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$ .

Gọi  $d$  là tiếp tuyến của  $C$  tại điểm  $A$ .

Khi đó  $d$  có hệ số góc:  $k = y'(1) = 4 - 4(m+1) = 4m$ .

$$\Delta: x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Do đó:  $d \perp \Delta \Leftrightarrow k = -4 \Leftrightarrow 4m = -4 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow$  **Chọn đáp án A.**

**Ví dụ 3:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + (2m-1)x + 2m - 3$  có đồ thị  $(C_m)$ . Với giá trị nào của tham số  $m$  thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị  $(C_m)$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: x - 2y - 4 = 0$ ?

A.  $m = -2$ .B.  $m = -1$ .C.  $m = 0$ .D.  $m = 4$ .**Lời giải:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y' = -3x^2 + 6x + 2m - 1 = -3(x^2 - 2x + 1) + 2m + 2 = -3(x-1)^2 + 2m + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Do đó: GTLN của  $y'$  là  $2m + 2$ , đạt tại  $x_0 = 1$ . Với  $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4m - 2$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại  $M(1; 4m - 2)$  là:

$$d: y - (4m - 2) = (2m + 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = (2m + 2)x + 2m - 4.$$

Theo đề ra ta có:  $\Delta: x - 2y - 4 = 0$  hay  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .

Khi đó:  $d \perp \Delta \Leftrightarrow 2m + 2 = -2 \Leftrightarrow m = -2 \Rightarrow$  **Chọn đáp án A.**

**Ví dụ 4:** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$  có đồ thị  $(C)$ . Giả sử, đường thẳng  $d: y = kx + m$  là tiếp tuyến của  $(C)$ , biết rằng  $d$  cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt  $A, B$  và tam giác  $\Delta OAB$  cân tại gốc tọa độ  $O$ . Tổng  $k + m$  có giá trị bằng

A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. -3.

**Lời giải:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ . Ta có:  $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$ .

Tiếp tuyến  $d: y = kx + m$  cắt  $Ox, Oy$  lần lượt tại hai điểm  $A, B$  nên  $m \neq 0, k \neq 0$ .

Do  $A \in Ox$  nên  $A\left(-\frac{m}{k}; 0\right)$ ,  $B \in Oy$  nên  $B(0; m)$ .

Do tam giác  $\Delta OAB$  cân tại gốc tọa độ  $O$  nên

$$OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{m}{k}\right| = |m| \Leftrightarrow m^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \end{cases}. \text{ Do } k = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} < 0 \text{ nên } k = -1.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow (2x_0+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}.$$

**Chuyên đề 1: Khảo sát hàm số và các bài toán liên quan**

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại  $M_1(-1;1)$  là:  $y = -(x+1)+1 \Leftrightarrow y = -x$  (loại).

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại  $M_2(-2;0)$  là:  $y = -(x+2) \Leftrightarrow y = -x-2$ .

Khi đó:  $k+m = -1-2 = -3 \Rightarrow$  **Chọn đáp án D.**

**Ví dụ 5 [Sở GD & ĐT Vũng Tàu – 2017]:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số thực  $m$  để đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  cắt đường thẳng  $y = 2x + m^2$  tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.

A.  $\{2\}$ .

B.  $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ .

C.  $\{-1; 1\}$ .

D.  $\{-2; 2\}$ .

**Lời giải:**

**Chọn đáp án D.**

## III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN

**Câu 1.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình là

- A.  $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ .      B.  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ .      C.  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ .      D.  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ .

**Câu 2.** Tiếp tuyến của (C):  $y = x^4 - 2x^2$  tại điểm có hoành độ bằng -2 có phương trình là

- A.  $y = -24x - 40$ .      B.  $y = -24x + 40$ .      C.  $y = 24x - 40$ .      D.  $y = 24x + 40$ .

**Câu 3.** Tiếp tuyến của (C):  $y = 5x + 1 + \frac{1}{2(x-1)}$  tại điểm  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  có phương trình là

- A.  $y = 2x - \frac{3}{2}$ .      B.  $y = -2x + \frac{3}{2}$ .      C.  $y = 3x - 1$ .      D.  $y = 3x + 1$ .

**Câu 4.** Tiếp tuyến của (C):  $y = \frac{2x-2}{x-2}$  tại điểm có tung độ bằng 3 có phương trình là

- A.  $y = \frac{1}{2}x - 5$ .      B.  $y = \frac{1}{2}x + 5$ .      C.  $y = -\frac{1}{2}x + 5$ .      D.  $y = -\frac{1}{2}x - 5$ .

**Câu 5.** Tiếp tuyến của (C):  $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$  tại điểm có tung độ bằng 4 có phương trình là

- A.  $y = -12x - 8$ .      B.  $y = -12x + 8$ .      C.  $y = 12x - 8$ .      D.  $y = 12x + 8$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = -2x^3 + 3x^2 + 2$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình  $y'' = 0$  có phương trình là

- A.  $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ .      B.  $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$ .      C.  $y = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{4}$ .      D.  $y = -\frac{9}{2}x + \frac{3}{4}$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - x + 1$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ dương và là nghiệm của phương trình  $y' + x.y'' - 11 = 0$  có phương trình là

- A.  $y = -x - 3$ .      B.  $y = -4x + 2$ .      C.  $y = -x + 2$ .      D.  $y = -4x - 3$ .

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình là

- A.  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ .      B.  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ .      C.  $y = -3x + 2$ .      D.  $y = -3x - 2$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = \frac{-2x+3}{x-1}$  có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) và đường  $\Delta: y = x - 3$  là

- A.  $y = x - 3x$ ;  $y = x + 1$ .      B.  $y = -x - 3$ ;  $y = -x + 1$ .  
C.  $y = x - 3$ ;  $y = -x + 1$ .      D.  $y = -x - 3$ ;  $y = x + 1$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x - 2$  có đồ thị (C). Số phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm (C) với đường thẳng  $\Delta: x + y + 2 = 0$  là

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x-1}$  có đồ thị (C). Biết điểm  $M \in (C)$  sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) bằng 2. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

- A.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ;  $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ .  
 B.  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ ;  $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ .  
 C.  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ;  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ .  
 D.  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ;  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm  $M \in (C)$  có tọa độ nguyên dương có phương trình là

- A.  $y = 1$ .  
 B.  $y = -1$ .  
 C.  $y = -x - 1$ .  
 D.  $y = -x + 5$ .

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 - 4$  có đồ thị (C). Biết điểm  $M \in (C)$  sao cho  $x_M < 0$  và  $x_M$  là nghiệm của phương trình  $y'' = -4$ . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có phương trình là

- A.  $y = 24x + 16$ .  
 B.  $y = -24x + 16$ .  
 C.  $y = -24x - 80$ .  
 D.  $y = 24x - 80$ .

**Câu 14.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  có hệ số góc  $k = 1$  có phương trình là

- A.  $y = x + 1$ ;  $y = x + 5$ .  
 B.  $y = x - 1$ ;  $y = x - 5$ .  
 C.  $y = x + \frac{1}{2}$ ;  $y = x + 5$ .  
 D.  $y = x + 1$ ;  $y = x - \frac{5}{4}$ .

**Câu 15.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = x^3 - 3x^2 + 3$  song song với đường thẳng  $\Delta: 9x - y - 24$  có phương trình là

- A.  $y = 9x - 24$ .  
 B.  $y = 9x + 8$ .  
 C.  $y = 9x - 10$ .  
 D.  $y = 9x + 30$ .

**Câu 16.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x-2}$  song song với đường thẳng  $\Delta: 5x + y - 13 = 0$  có phương trình là

- A.  $y = -5x - 8$ ;  $y = -5x - 2$ .  
 B.  $y = -5x - 2$ ;  $y = -5x + 22$ .  
 C.  $y = -5x + 2$ ;  $y = -5x + 22$ .  
 D.  $y = -5x + 2$ ;  $y = -5x - 8$ .

**Câu 17.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x-4}{x+1}$  tại M có dạng  $y = kx + m$ . Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng  $\Delta: 3x - 2y + 19 = 0$ . Khi đó, tổng  $k + m$  có giá trị bằng

- A. 11.  
 B. 4.  
 C. -8.  
 D. -1.

**Câu 18.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = x^3 + 3x^2 + 5$  vuông góc với đường  $d: x + 9y = 0$  có phương trình là

- A.  $y = 9x$ ;  $y = 9x + 32$ .  
 B.  $y = 9x - 22$ ;  $y = 9x + 18$ .  
 C.  $y = 9x$ ;  $y = 9x - 32$ .  
 D.  $y = 9x + 22$ ;  $y = 9x - 18$ .

**Câu 19.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = -x^4 - x^2 + 6$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: y = \frac{1}{6}x - 1$  có phương trình là

- A.  $y = -6x - 2$ .  
 B.  $y = -6x + 2$ .  
 C.  $y = -6x + 10$ .  
 D.  $y = -6x - 10$ .

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d: y = kx + m$  là tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm có hệ số góc tiếp tuyến nhỏ nhất. Tỉ số  $T = 2m : k$  có giá trị bằng

- A.  $T = -7$ . B.  $T = -5$ . C.  $T = 5$ . D.  $T = 7$ .

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Hai điểm  $A, B$  thuộc  $(C)$  sao cho tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A$  và  $B$  song song với nhau và độ dài đoạn  $AB = 4\sqrt{2}$  là

- A.  $A(-2; 1); B(2; -3)$ . B.  $A(3; 1); B(-1; -3)$ .  
C.  $A(0; -1); B(4; 3)$ . D.  $A(-3; 2); B(1; -2)$ .

**Câu 22.** Tiếp tuyến của đồ thị  $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$  đi qua điểm  $A(-1; 3)$  có phương trình là

- A.  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$ . B.  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ . C.  $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ . D.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Giả sử đường thẳng  $d: y = kx + m$  là tiếp tuyến của  $(C)$  và tiếp tuyến này đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục hoành  $Ox$ . Tỉ số  $T = k : m$  có giá trị bằng

- A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  có đồ thị  $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tạo với đường thẳng  $\Delta: x + y - 1 = 0$  một góc  $\alpha$  sao cho  $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$  và tiếp điểm có hoành độ nguyên có phương trình là

- A.  $y = 9x; y = 9x - 32$ . B.  $y = 9x - 21; y = 9x + 7$ .  
C.  $y = 9x; y = 9x + 32$ . D.  $y = 9x + 21; y = 9x - 7$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = \frac{x+3}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Nếu điểm  $M$  thuộc  $d: 2x - y + 1 = 0$  có hoành độ âm và từ điểm  $M$  kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới  $(C)$  thì tọa độ điểm  $M$  là

- A.  $M(-1; -1)$ . B.  $M(-2; -3)$ . C.  $M(-3; -5)$ . D.  $M(-4; -7)$ .

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Nếu điểm  $M$  thuộc  $(C)$  cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $(C)$  tạo thành tam giác có diện tích bằng 6 thì phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm  $M$  là

- A.  $y = -9x + 7; y = -9x + 25$ . B.  $y = 9x - 25; y = 9x + 7$ .  
C.  $y = -9x - 7; y = -9x - 25$ . D.  $y = 9x + 25; y = 9x - 7$ .

**Câu 27.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị  $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$  cách đều hai điểm  $A(-2; 4)$  và  $B(4; -2)$ ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x-2}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $I$  là giao điểm hai đường tiệm cận của  $(C)$ .

Tiếp tuyến  $d$  của  $(C)$  tại điểm  $M$  thỏa mãn  $IM \perp d$  có phương trình là

- A.  $y = -x + 1; y = -x - 5$ . B.  $y = -x + 1; y = -x + 5$ .  
C.  $y = -x - 1; y = -x - 5$ . D.  $y = -x - 1; y = -x + 5$ .

**Câu 29. [THPT Chuyên Thái Bình – Lần 4 – 2017]** Đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$  có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 30. [THPT Quốc Học Quy Nhơn – Bình Định – Lần 1 – 2017]** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình  $(7x-11).f'(x)=10$ .

- A.  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}; y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ . B.  $y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}; y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ .  
C.  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}; y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$ . D.  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}; y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ .

**Câu 31. [THPT Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi – 2017]** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + 1$  có đồ thị là (C). Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến của (C) tại điểm  $A(1;5)$  và B là giao điểm thứ hai của  $\Delta$  với (C). Tính diện tích S của tam giác OAB, với O là gốc tọa độ.

- A.  $S=12$ . B.  $S=6$ . C.  $S=15$ . D.  $S=24$ .

**Câu 32. [THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam – 2017]** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x + 2$ . Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(1;-3)$ ?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

**Câu 33. [THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng – Lần 2 – 2017]** Cho hàm số  $y = \frac{x+b}{ax-2}$  có đồ thị (C). Biết  $a, b$  là các giá trị thực sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(1;-2)$  song song với đường thẳng  $d: 3x+y-4=0$ . Tính  $a+b$ .

- A.  $a+b=0$ . B.  $a+b=-1$ . C.  $a+b=2$ . D.  $a+b=1$ .

**Câu 34. [THPT Chuyên Sơn La – Lần 2 – 2017]** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  có đồ thị (C). Gọi  $d$  là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C). Tìm giá trị lớn nhất của  $d$ .

- A.  $d_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . B.  $d_{\max} = \sqrt{5}$ . C.  $d_{\max} = \sqrt{3}$ . D.  $d_{\max} = \sqrt{6}$ .

## BẢNG ĐÁP ÁN

| Câu    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Đáp án | B  | A  | D  | C  | C  | A  | A  | D  | B  | C  |
| Câu    | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Đáp án | A  | D  | A  | A  | B  | C  | D  | A  | C  | A  |
| Câu    | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| Đáp án | B  | C  | A  | A  | A  | B  | C  | B  | B  | A  |
| Câu    | 31 | 32 | 33 | 34 |    |    |    |    |    |    |
| Đáp án | A  | B  | C  | D  |    |    |    |    |    |    |

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Ta có:  $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$ .

Với  $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}, y'(1) = \frac{3}{4}$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại  $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$  là:  $y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$  hay  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ .

$\Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Câu 2.** TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = 4x^3 - 4x$ .

Với  $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 8, y'(-2) = -24$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại  $M(-2; 8)$  là:

$$y = -24(x+2) + 8 \Leftrightarrow y = -24x - 40 \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Câu 3.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Ta có:  $y' = 5 - \frac{1}{2(x-1)^2} \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  là:

$$y = 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = 3x + 1 \Rightarrow \text{Chọn đáp án D.}$$

**Câu 4.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Ta có:  $y' = \frac{-2}{(x-2)^2}$ .

Với  $y_0 = 3 \Rightarrow x_0 = 4$ . Khi đó:  $y'(4) = -\frac{1}{2}$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(4; 3)$  là:

$$y = -\frac{1}{2}(x-4) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

**Câu 5.** TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = 6x^2 + 6x$ .

Với  $y_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 1$ . Khi đó:  $y'(1) = 12$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(1; 4)$  là:

$$y = 12(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = 12x - 8 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

**Câu 6.** TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = -6x^2 + 6x; y'' = -12x + 6$ .



Khi đó:  $y''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -12x_0 + 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2}$  và  $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  là:

$$y = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Câu 7.** TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = 3x^2 - 6x$ ;  $y'' = 6x - 6$ .

Xét phương trình:  $y' + x.y'' - 11 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 6x) + x(6x - 6) - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Do  $x > 0$  nên  $x = 2$ .

Với  $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -5$  và  $y'(2) = -1$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(2; -5)$  là:

$$y = -(x - 2) - 5 \Leftrightarrow y = -x - 3 \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Câu 8.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Ta có:  $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$ .

Giao điểm của (C) và trục tung là  $M(0; -2)$  và  $y'(0) = -3$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(0; -2)$  là:  $y = -3x - 2 \Rightarrow \text{Chọn đáp án D.}$

**Câu 9.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Ta có:  $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng  $\Delta$  là:

$$\frac{-2x+3}{x-1} = x-3 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (tm)} \\ x = 2 \text{ (tm)} \end{cases}$$

+ Với  $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -3$  và  $y'(0) = -1$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(0; -3)$  là:  $y = -x - 3$

+ Với  $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -1, y'(2) = -1$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(2; -1)$  là:

$$y = -(x - 2) - 1 \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

$\Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Câu 10.** TXĐ  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = -3x^2 + 3$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng  $\Delta: y = -x - 2$  là:

$$-x^3 + 3x - 2 = -x - 2 \Leftrightarrow -x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do có 3 tiếp điểm nên có 3 tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán  $\Rightarrow$  Chọn đáp án C.

**Câu 11.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Tiệm cận đứng là đường thẳng  $\Delta: x = 1$ .

Ta có:  $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$ . Vì  $M \in (C)$  nên  $M\left(x_0; \frac{x_0-2}{x_0-1}\right)$ .

Theo đề ra ta có:  $d(M; \Delta) = 2 \Leftrightarrow |x_0 - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}, y'(-1) = \frac{1}{4} \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}, y'(3) = \frac{1}{4} \end{cases}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_1\left(-1; \frac{3}{2}\right)$  là:  $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x + 1$  hay  $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_2\left(3; \frac{1}{2}\right)$  là:  $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x - 3$  hay  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ .

$\Rightarrow$  Chọn đáp án A.

**Câu 12.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Ta có:  $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$ . Lấy  $M_0\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0-1}\right) \in (C)$ .

Khi đó,  $M$  có tọa độ nguyên dương nên:

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ \frac{2x_0-1}{x_0-1} > 0 \\ x_0 \in \mathbb{Z} \\ 2 + \frac{1}{x_0-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 < \frac{1}{2} \\ x_0 > 1 \\ x_0 \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{x_0-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 < \frac{1}{2} \\ x_0 > 1 \\ x_0 \in \mathbb{Z} \\ x_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3, y'(2) = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến của  $C$  tại điểm  $M_0(2; 3)$  là:  $y = -(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = -x + 5$ .

$\Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Câu 13.**  $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 - 4 \Rightarrow y' = x^3 - 16x; y'' = 3x^2 - 16$ .

Gọi  $M(x_M; y_M) \in (C)$ ,  $(x_M < 0)$  là tiếp điểm.

Do  $x_M$  là nghiệm của phương trình  $y'' = -4$  nên  $3x_M^2 - 16 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -2 \\ x_M = 2 \end{cases}$ .

Do  $x_M < 0$  nên  $x_M = -2 \Rightarrow y_M = -32$  và  $y'(2) = 24$ .

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại  $M(2; -32)$  là:

$$y = 24(x-2) - 32 \Leftrightarrow y = 24x - 80 \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Câu 14.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Ta có:  $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$ .

Gọi  $M\left(x_0; \frac{2x_0+1}{x_0+1}\right)$  là tiếp điểm của tiếp tuyến đồ thị  $C$  có hệ số góc  $k = 1$ .

Khi đó:  $k = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow |x_0+1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \end{cases}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_1(-2; 3)$  là:  $y = x + 5$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_2(0; 1)$  là:  $y = x + 1$ .

$\Rightarrow$  Chọn đáp án A.

**Câu 15.**  $y' = 3x^2 - 6x$ .

Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm của tiếp tuyến  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta: 9x - y - 24$ .

Vì  $d // \Delta$  nên  $d$  có hệ số góc  $k = 9$ . Khi đó:  $3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \end{cases}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_1(-1; -1)$  là:  $y = 9(x + 1) - 1 \Leftrightarrow y = 9x + 8$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_2(3; 3)$  là:  $y = 9(x - 3) + 3 \Leftrightarrow y = 9x - 24$  (loại).

Vậy phương trình tiếp tuyến  $d: y = 9x + 8 \Rightarrow$  **Chọn đáp án B.**

**Câu 16.** TXĐ:  $D \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Ta có:  $y' = \frac{-5}{(x-2)^2}$ .

Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm của tiếp tuyến  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta: 5x + y - 13$ .

Vì  $d // \Delta$  nên  $d$  có hệ số góc  $k = -5$ .

Khi đó:  $\frac{-5}{(x_0-2)^2} = -5 \Leftrightarrow |x_0 - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -5 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 7 \end{cases}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_1(1; -5)$  là:  $y = -5(x - 1) - 3 \Leftrightarrow y = -5x + 2$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M_2(3; 7)$  là:  $y = -5(x - 3) + 7 \Leftrightarrow y = -5x + 22$ .

$\Rightarrow$  **Chọn đáp án C.**

**Câu 17.** TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Ta có:  $y' = \frac{6}{(x+1)^2}$ .

$\Delta: 3x - 2y + 19 = 0$  hay  $y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$

Gọi  $d$  là tiếp tuyến của  $C$  song song với đường thẳng  $\Delta$  và  $M\left(x_0; \frac{2x_0 - 4}{x_0 + 1}\right)$  là tiếp điểm.

Do  $d // \Delta$  nên  $d$  có hệ số góc là  $k = \frac{3}{2}$ .

Khi đó:  $k = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y'(x_0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{(x_0 + 1)^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5 \end{cases}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M_1(1; -1)$  là:  $y = \frac{3}{2}(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M_2(-3; 5)$  là:  $y = \frac{3}{2}(x + 3) + 5 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$  (loại).

Do đó  $d: y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \xrightarrow{y = kx + m} k + m = \frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) = -1 \Rightarrow$  **Chọn đáp án D.**

**Câu 18.** TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y' = 3x^2 + 6x$ .  $d: x + 9y = 0$  hay  $y = -\frac{1}{9}x$ .

Gọi  $d'$  là tiếp tuyến của  $C$  vuông góc với  $d$  và có tiếp điểm là  $M(x_0; y_0)$ .

Do  $d' \perp d$  nên  $d'$  có hệ số góc  $k = 9$ .

Khi đó:  $k = 9 \Leftrightarrow y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 9 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5 \end{cases}$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M_1(1;9)$  là:  $y = 9(x-1) + 9 \Leftrightarrow y = 9x$ .

+ Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M_2(-3;5)$  là:  $y = 9(x+3) + 5 \Leftrightarrow y = 9x + 32$ .

$\Rightarrow$  Chọn đáp án A.

**Câu 19.** TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = -4x^3 - 2x$ .

Gọi  $d$  là tiếp tuyến của  $C$  vuông góc với  $\Delta: y = \frac{1}{6}x - 1$  và có tiếp điểm là  $M_0(x_0; y_0)$ .

Do  $d \perp \Delta$  nên  $d$  có hệ số góc  $k = -6$ .

Khi đó:  $k = -6 \Leftrightarrow y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4$ .

Phương trình tiếp tuyến tại  $M(1;4)$  là:

$$y = -6(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = -6x + 10 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

**Câu 20.**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = 6x^2 - 6x = 6\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2} = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Do đó: GTNN của  $y'$  là  $-\frac{3}{2}$ , đạt tại  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Với  $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{9}{2}$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$  là:

$$y = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4}.$$

Do đó:  $T = 2m : k = 2 \cdot \frac{21}{4} : \left(-\frac{3}{2}\right) = -7 \Rightarrow$  Chọn đáp án A.

**Câu 21.** Đối với bài toán này ta sử dụng phép thử:

Dễ thấy, điểm  $A$  ở đáp án **A, B, D** không thuộc  $(C)$  nên ta chọn đáp án **B**.

$\Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Câu 22.** Thế tọa độ điểm  $A(-1;3)$  lần lượt vào các phương trình ở bốn đáp án, ta được đáp án C

có  $3 = \frac{1}{4}(-1) + \frac{13}{4} \Rightarrow$  Chọn đáp án C.

**Câu 23.** Đồ thị  $(C)$  có đường tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = -\frac{1}{2}$ .

Giao điểm của tiệm cận đứng với trục hoành là  $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  và có hệ số góc  $k$ .

Khi đó, phương trình của  $\Delta$  là:  $y = k\left(x + \frac{1}{2}\right)$ .

$\Delta$  là tiếp tuyến của  $(C)$  khi hệ  $\begin{cases} \frac{-x+1}{2x+1} = k\left(x + \frac{1}{2}\right) & (1) \\ \frac{-3}{(2x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$  có nghiệm.



Thay  $\frac{-3}{(2x+1)^2} = k$  vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{-x+1}{2x+1} = \frac{-3}{(2x+1)^2} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -x+1 = \frac{-3}{2x+1} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x + \frac{5}{2} = 0 \left(x \neq -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $x = \frac{5}{2}$  thì  $k = -\frac{1}{12}$ .

Phương trình tiếp tuyến là  $y = -\frac{1}{12}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{12}x - \frac{1}{24}$ .

$$\Delta \equiv d: y = kx + m \rightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{12} \\ m = -\frac{1}{24} \end{cases} \Rightarrow T = \frac{k}{m} = 2 \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Câu 24.** Đường thẳng  $\Delta: x + y - 1 = 0$  có vector pháp tuyến là:  $\vec{n}_1 = (1; 1)$ .

Goi  $(d): y = kx + m$  là tiếp tuyến cần tìm  $\Rightarrow d$  có vector pháp tuyến là:  $\vec{n}_1 = (k; -1)$ .

Theo giả thiết, ta có:  $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} \Leftrightarrow |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{4}{\sqrt{41}} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{41}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{41}|k-1| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+1} \Leftrightarrow 9k^2 - 82k + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 9 \\ k = \frac{1}{9} \end{cases}$$

+ Với  $k = 9$  thì  $d: y = 9x + m$ .

$d$  tiếp xúc với  $(C)$  khi hệ  $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x = 9x + m & (1) \\ 3x^2 - 12x + 9 = 9 & (2) \end{cases}$  có nghiệm

Ta có:  $(2) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = 9x \\ x = 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -32 \Rightarrow y = 9x - 32 \end{cases}$

+ Với  $k = \frac{1}{9}$  thì  $d: y = \frac{1}{9}x + m$ .

$d$  tiếp xúc với  $(C)$  khi hệ  $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x = \frac{1}{9}x + m & (3) \\ 3x^2 - 12x + 9 = \frac{1}{9} & (4) \end{cases}$  có nghiệm

Ta có:  $(4) \Leftrightarrow 27x^2 - 108x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm 2\sqrt{21}}{9} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$  loại.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là:

$y = 9x; y = 9x - 32 \Rightarrow$  Chọn đáp án A.

**Câu 25.**

Vì  $M \in d: 2x - y + 1 = 0$  nên  $M(m; 2m+1)$ .

Tiếp tuyến của  $(C)$  qua  $M$  có phương trình dạng  $y = k(x - m) + 2m + 1$ .

Từ điểm  $M$  kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới  $(C)$

$$\Leftrightarrow \text{hệ } \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = k(x-m) + 2m+1 & (1) \\ \frac{-4}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

Thay (2) vào (1), ta được:  $\frac{x+3}{x-1} = \frac{-4}{(x-1)^2}(x-m) + 2m+1$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = -4(x-m) + (2m+1)(x-1)^2, (x \neq 1)$$

Lần lượt thử từng phương án:

Với  $m = -1$  thì phương trình trên trở thành  $2x^2 + 4x + 2 = 0$  có nghiệm duy nhất là  $x = -1$ .

Vậy  $m = -1 \Rightarrow M(-1; -1) \Rightarrow$  **Chọn đáp án A.**

**Câu 26.**  $(C)$  có hai điểm cực trị là  $A(0; 2)$  và  $B(2; -2)$ . Gọi  $M(m; m^3 - 3m^2 + 2) \in (C)$ .

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết, ta có: } S_{\Delta MAB} = 6 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}d(M; AB) \cdot AB = 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|2m - m^3 + 3m^2 - 2 + 2|}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = 6 \\ &\Leftrightarrow |2m - m^3 + 3m^2| = 6 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -m^3 + 3m^2 + 2m = 6 & (3) \\ -m^3 + 3m^2 + 2m = -6 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Với  $m = 3$  thì  $M(3; 2)$ . Khi đó, tiếp tuyến tại  $M$  có phương trình  $y = 9x - 25$ .

Loại trừ các phương án, chỉ có B thỏa mãn  $\Rightarrow$  **Chọn đáp án B.**

**Câu 27.** Gọi  $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0-1}\right) \in (C)$  với  $x_0 \neq 1$ .

Phương trình tiếp tuyến  $(d)$  của  $(C)$  tại  $M$  là:

$$y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0-1} \Leftrightarrow (d): x + (x_0-1)^2 y - 2x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$$

$(d)$  cách đều hai điểm  $A(-2; 4)$  và  $B(4; -2)$

$$\Leftrightarrow d(A, d) = d(B, d)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2 + (x_0-1)^2 \cdot 4 - 2x_0^2 + 2x_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (x_0-1)^4}} = \frac{|4 + (x_0-1)^2(-2) - 2x_0^2 + 2x_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (x_0-1)^4}}$$

$$\Leftrightarrow |2x_0^2 - 6x_0 + 1| = |-4x_0^2 + 6x_0 + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_0^2 - 12x_0 = 0 \\ -2x_0^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy có 3 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán  $\Rightarrow$  **Chọn đáp án C.**



**Câu 28.** Giao điểm  $I$  của hai tiệm cận có tọa độ  $(2;1)$ .

Gọi  $M\left(x_0; \frac{x_0-1}{x_0-2}\right) \in (C)$  với  $x_0 \neq 2$ .

Phương trình tiếp tuyến  $(d)$  của  $(C)$  tại  $M$  là:

$$y = \frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-1}{x_0-2} \Leftrightarrow (d): x + (x_0-2)^2 y - x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0$$

Đường thẳng  $IM$  có vectơ chỉ phương là  $\overrightarrow{IM} = \left(x_0-2; \frac{1}{x_0-2}\right) \Rightarrow$  đường thẳng  $IM$  có vectơ

pháp tuyến là  $\vec{n}_{IM} = \left(\frac{-1}{x_0-2}; x_0-2\right)$ .

Khi đó:  $IM \perp d \Leftrightarrow \vec{n}_{IM} \perp \vec{n}_d \Leftrightarrow \vec{n}_{IM} \cdot \vec{n}_d = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x_0-2} + (x_0-2)(x_0-2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_0-2)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2=1 \\ x_0-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=3 \Rightarrow (d): y=-x+5 \\ x_0=1 \Rightarrow (d): y=-x+1 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $(d_1): y=-x+1, (d_2): y=-x+5$ .

$\Rightarrow$  Chọn đáp án B.