



MATH

MỖI THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

***Bài toán Quy hoạch
tuyến tính***

Thanh Hoá, tháng 02, năm 2017

Lời nói đầu.

Từ thời cổ đại, khi thực hiện các công việc của mình, loài người đã luôn hướng tới cách làm tốt nhất trong các cách có thể làm được tức là đi tìm phương án tối ưu trong các phương án. Khi khoa học phát triển, người ta đã mô hình hoá toán học với các việc cần làm, nghĩa là biểu thị các mục tiêu cần đạt được, các yêu cầu hay các điều kiện thoả mãn bằng ngôn ngữ toán học để tìm lời giải tối ưu cho nó. Từ đó, hình thành nên các bài toán tối ưu.

Quy hoạch tuyến tính là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu với hữu hạn biến, trong đó, mục tiêu và các điều kiện ràng buộc được biểu thị bằng các hàm số, các phương trình hay bất phương trình tuyến tính bậc nhất. *Quy hoạch tuyến tính* là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế, trong một số ngành học kinh tế hoặc sư phạm (bậc đại học) có một môn học về bài toán này. Đối với học sinh bậc THPT chỉ xét dạng đơn giản của một bài toán *Quy hoạch tuyến tính* được trình bày trong chương trình Đại số lớp 10.

Với cách tổ chức thi THPTQG theo hình thức trắc nghiệm thì theo quan điểm của cá nhân tôi *Quy hoạch tuyến tính* là một bài toán quan trọng và khả năng rất cao sẽ xuất hiện trong đề thi THPTQG vì đây là một dạng toán xuất phát từ các nhu cầu thiết yếu trong cuộc sống.

Bài viết gồm các mục:

- A. Nội dung kiến thức.
- B. Ví dụ minh hoạ.
- C. Bài tập đề nghị.
- D. Hướng dẫn, đáp án.

Hi vọng rằng bài viết sẽ giúp các em học sinh khối 10 ôn tập tốt nội dung kiến thức này.

Mặc dù trong quá trình biên soạn tác giả đã rất cố gắng để bài viết của mình được hoàn thiện nhất.

Tuy nhiên chắc chắn rằng đâu đó sẽ có những câu, những từ làm bạn đọc thấy không hợp lý. Tác giả rất mong nhận được góp ý từ phía bạn đọc để bài viết được hoàn thiện hơn.

Mọi góp ý từ phía bạn đọc xin gửi về cho tác giả qua hòm thư điện tử: hoang.hoanglap@gmail.com, mạng xã hội Facebook: www.facebook.com/hoang.gd.7 hoặc ĐT: 0936.407.353.

Thanh Hoá, ngày 15, tháng 02, năm 2017

Nguyễn Bá Hoàng

Bài toán Quy hoạch tuyến tính

A. Nội dung kiến thức.

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là: $ax + by \leq c$ (1), Ngoài dạng bất phương trình (1) còn có các dạng $ax + by \geq c, ax + by < c, ax + by > c$. Trong đó a, b, c là các số thực, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.
- Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.
- Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ (tương tự với bất phương trình $ax + by \geq c$).
 - Bước 1: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ đường thẳng $d : ax + by = c$.
 - Bước 2: Lấy một điểm $M(x_0; y_0)$ không thuộc đường thẳng d .
 - Bước 3: Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c .
 - Bước 4: Kết luận:
 - Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$.
 - Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$.

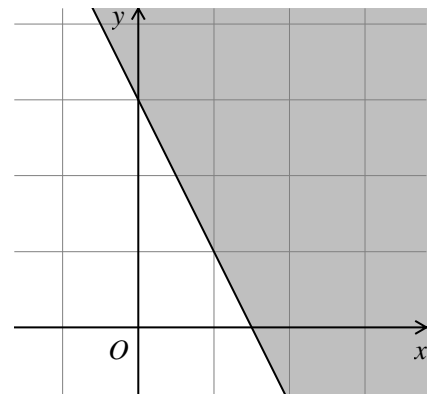
Ví dụ. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x + y \leq 3$.

Lời giải

Vẽ đường thẳng $d : 2x + y = 3$.

Lấy điểm M là gốc tọa độ O .

Ta thấy $O \notin d$ và $2 \cdot 0 + 3 < 3$ nên nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền không bị tô đậm trong hình bên kể cả biên).



2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
- Để biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta thực hiện theo các bước sau:
 - Bước 1: Vẽ tất cả các đường thẳng ứng với mỗi bất phương trình trong hệ bất phương trình đã cho lên cùng một hệ trục tọa độ.
 - Bước 2: Xác định miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ phương trình đã cho (bằng cách gạch chéo hoặc tô đậm phần không nằm trong miền nghiệm) trên hệ trục tọa độ

ban đầu. Phần không bị tô đậm hoặc gạch chéo chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Ví dụ. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 3x - y + 3 \geq 0 \\ -2x + 3y - 6 \leq 0 \quad (I) \\ 2x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải

Trước hết ta vẽ ba đường thẳng:

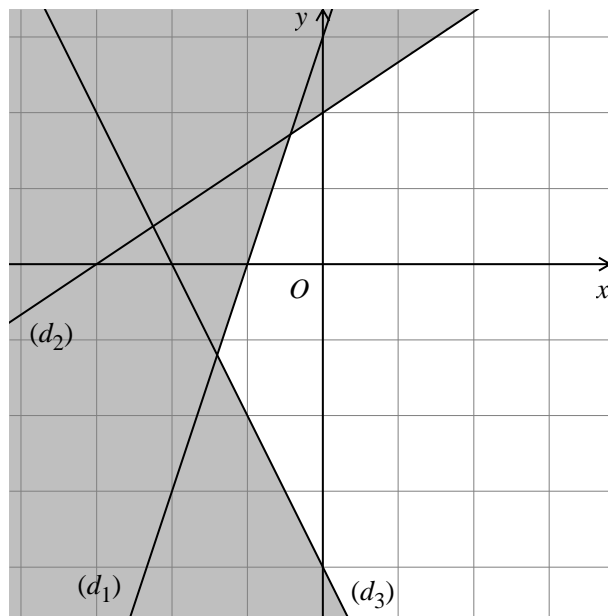
$$(d_1): 3x - y + 3 = 0;$$

$$(d_2): -2x + 3y - 6 = 0;$$

$$(d_3): 2x + y + 4 = 0.$$

Thử trực tiếp thấy $(0;0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình trong hệ bất phương trình đã cho. Điều này có nghĩa là gốc tọa độ thuộc cả ba miền nghiệm của cả ba bất phương trình của hệ (I) .

Sau khi bỏ các miền nghiệm không thích hợp, miền không bị tô đậm trong hình bên (kể cả biên) là miền nghiệm của hệ (I) .



3. Bổ đề.

Cho biểu thức $f(x, y) = ax + by$, (a, b là các số thực không đồng thời bằng 0), trong đó $(x; y)$ là tọa độ của các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$ thì giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của $f(x, y)$ (xét trên miền đa giác đã cho) đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác trên.

Chứng minh

Tác giả sẽ chứng minh trong trường hợp $n = 5$ và $b > 0$ (các trường hợp còn lại xét tương tự).

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là một điểm đã cho thuộc miền đa giác.

Qua điểm M và mỗi đỉnh của đa giác, kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng $ax + by = 0$.

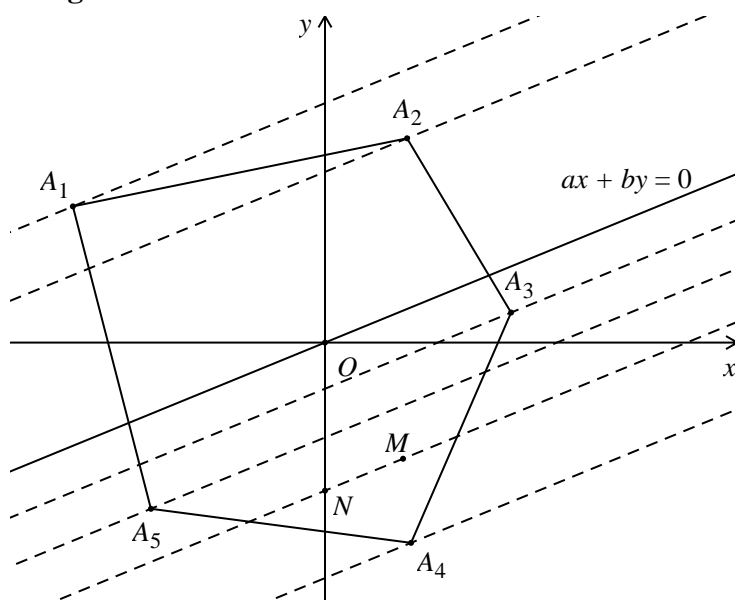
Trong các đường thẳng song song với đường thẳng $ax + by = 0$, đường thẳng Δ qua M có phương trình $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$
 $\Leftrightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0$.

Đường thẳng Δ cắt trục tung tại điểm

$$N\left(0; \frac{ax_0 + by_0}{b}\right).$$

Vì $b > 0$ nên $ax_0 + by_0$ lớn nhất (nhỏ nhất) khi $\frac{ax_0 + by_0}{b}$ lớn nhất (nhỏ nhất).

Quan sát hình vẽ bên ta thấy $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của điểm A_1 và bé nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của điểm A_4 .



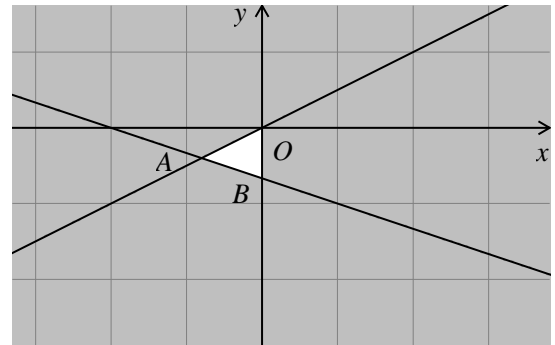
Như vậy để tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $f(x; y)$ trên miền nghiệm của một hệ bất phương trình ta làm như sau:

- Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
- Bước 2: Tính các giá trị của hàm số $f(x; y)$ với $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh của miền nghiệm.
- Bước 3: So sánh các giá trị vừa tính được với nhau, giá trị nào lớn nhất (nhỏ nhất) là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Ví dụ. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \\ x \leq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y) = 2x - 3y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Lời giải

Chúng ta tìm được miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là phần không tô đậm trong hình vẽ bên (kể cả biên).



Như vậy miền nghiệm là tam giác ABC (kể cả biên).

Tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right).$$

Tọa độ của điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(0; -\frac{2}{3}\right).$$

Ta sẽ tính các giá trị của $f(x; y)$ với $(x; y)$ là tọa độ của các đỉnh A, B, O .

$$f\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}.$$

$$f(0; 0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0.$$

$$f\left(0; -\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 2.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của $f(x; y)$ bằng 2 khi $(x; y) = \left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y) = 2x - 3y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho bằng 2 khi $(x; y) = \left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Lưu ý: Các kiến thức mà tác giả vừa nêu là các kiến thức cốt lõi để giải quyết các bài toán Quy hoạch tuyến tính. Tuy nhiên bài toán Quy hoạch tuyến tính lại không cho ta cụ thể hệ bất phương trình và hàm số $f(x; y)$ như trong ví dụ trên mà chúng ta phải thiết lập thông qua các dữ kiện của bài toán.

B. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. (Đề dự bị kỳ thi THPTQG năm 2015) Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất.

A. 7 lít nước cam.

B. 6 lít nước táo.

C. 4 lít nước cam, 5 lít nước táo.

D. 6 lít nước cam, 3 lít nước táo.

Ghi chú: Kỳ thi THPTQG năm 2015 được Bộ GD&ĐT tổ chức thi theo phương thức thi tự luận, đề bài trên tác giả đã thêm vào bốn phương án A, B, C, D để phù hợp với phương thức thi trắc nghiệm như hiện nay.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và táo của một đội pha chế ($x, y \geq 0$).

Số điểm thưởng của đội chơi này là: $f(x; y) = 60x + 80y$.

Số gam đường cần dùng là: $30x + 10y$.

Số lít nước cần dùng là: $x + y$.

Số gam hương liệu cần dùng là: $x + 4y$.

Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường

nên ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y) = 60x + 80y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0;0)$, $A(7;0)$, $B(6;3)$, $C(4;5)$, $D(0;6)$.

Ta có: $f(0;0) = 60.0 + 80.0 = 0$;

$f(7;0) = 60.7 + 80.0 = 420$;

$f(6;3) = 60.6 + 80.3 = 600$;

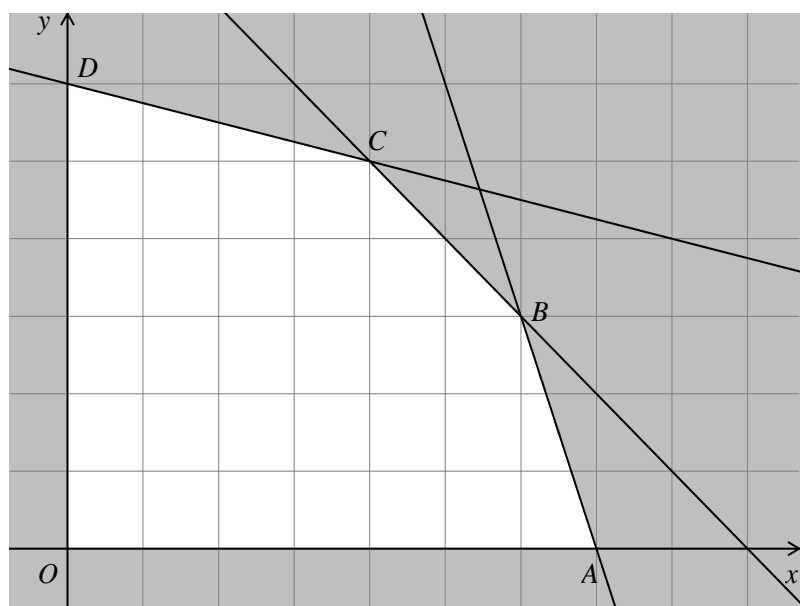
$f(4;5) = 60.4 + 80.5 = 640$;

$f(0;6) = 60.0 + 80.6 = 480$.

Suy ra $f(4;5)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Như vậy để được số điểm thưởng là lớn nhất cần pha chế 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.

Đáp án C.



Ví dụ 2. Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ống cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15 kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất.

- A. 50 cái bánh chưng.
- B. 40 cái bánh chưng.
- C. 35 cái bánh chưng và 5 cái bánh ống.
- D. 31 cái bánh chưng và 14 cái bánh ống.

Lời giải

Gọi số bánh chưng gói được là x , số bánh ống gói được là y . Khi đó số điểm thưởng là:

$$f(x; y) = 5x + 7y.$$

Số kg gạo nếp cần dùng là: $0,4x + 0,6y$.

Số kg thịt ba chỉ cần dùng là: $0,05x + 0,075y$.

Số kg đậu xanh cần dùng là: $0,1x + 0,15y$.

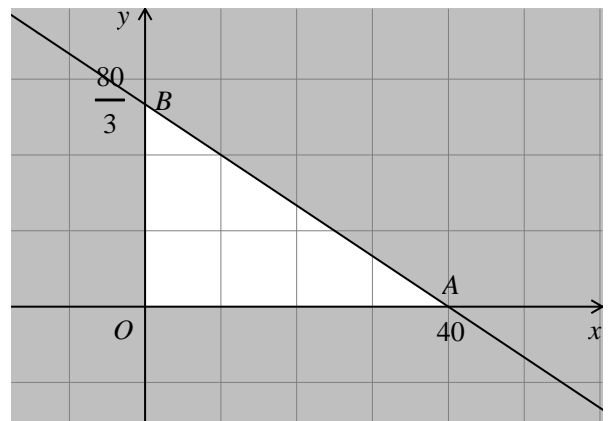
Vì trong cuộc thi này chỉ được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2kg thịt ba chỉ và 5kg đậu xanh nên

ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \leq 20 \\ 0,05x + 0,075y \leq 2 \\ 0,1x + 0,15y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 100 \\ 2x + 3y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tam giác OAB (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y) = 5x + 5y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh $O(0;0)$, $A(40;0)$, $B\left(0; \frac{80}{3}\right)$.



Mà: $f(0;0) = 0$, $f(40;0) = 200$, $f\left(0; \frac{80}{3}\right) = \frac{560}{3}$.

Suy ra $f(x, y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (40;0)$. Do đó cần phải gói 40 cái bánh chưng để nhận được số điểm thưởng là lớn nhất.

Đáp án B.

Ví dụ 3. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm ký hiệu là A và B. Một tấn sản phẩm loại A lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại B lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày, máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu.

- A. 6,8 triệu đồng.
- B. 4 triệu đồng.
- C. 6,4 triệu đồng.
- D. 8 triệu đồng.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A, B mà phân xưởng này sản xuất trong một ngày ($x, y > 0$).

Khi đó số tiền lãi một ngày của phân xưởng này là $f(x; y) = 2x + 1,6y$ (triệu đồng); số giờ làm việc trong ngày của máy M_1 là $3x + y$ và số giờ làm việc trong ngày của máy M_2 là $x + y$.

Vì mỗi ngày máy M_1 làm việc không quá 6 giờ và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ nên ta có

$$\text{hệ bất phương trình: } \begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \quad (*) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

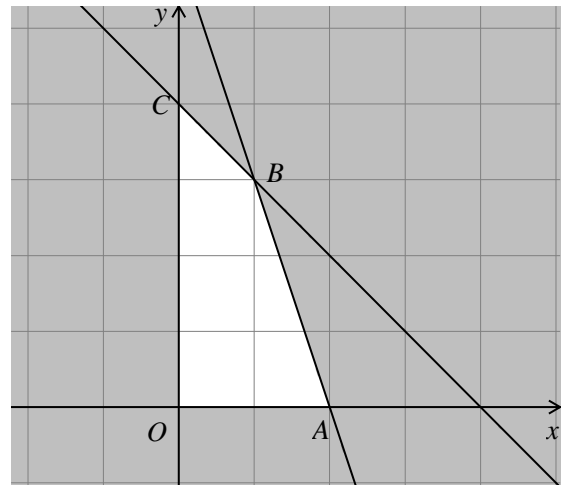
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh $O(0;0)$ $A(2;0)$ $B(1;3)$, $C(0;4)$. Mà ta có: $f(0;0) = 0$; $f(2;0) = 4$; $f(1;3) = 6,8$; $f(0;4) = 6,4$.

Suy ra $\max f(x; y) = 6,8$ khi $(x; y) = (1;3)$.

Đáp án A.



Ví dụ 4. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

- A. 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II.
- B. 10 tấn nguyên liệu loại I và 2 tấn nguyên liệu loại II.
- C. 10 tấn nguyên liệu loại I và 9 tấn nguyên liệu loại II.
- D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I và loại II ($0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 10$). Khi đó số tiền để mua nguyên liệu là: $f(x; y) = 4x + 3y$.

Từ x tấn nguyên liệu loại I chiết xuất được $20x$ kg chất A và $0,6x$ kg chất B.

Từ y tấn nguyên liệu loại II chiết xuất được $10y$ kg chất A và $1,5y$ kg chất B.

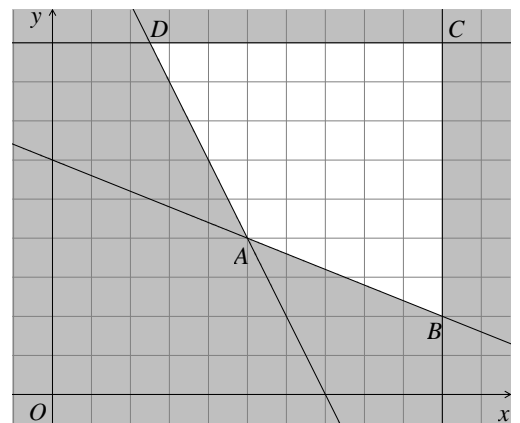
Suy ra từ x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II chiết xuất được $20x + 10y$ kg chất A và $0,6x + 1,5y$ kg chất B.

Do phải chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B nên ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y \geq 30 \\ 2x + y \geq 14 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên).



Hàm số $f(x; y) = 4x + 3y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5;4), B(10;2), C(10;9), D\left(\frac{5}{2};9\right)$.

Ta có: $f(5;4) = 32; f(10;2) = 46; f(10;9) = 67; f\left(\frac{5}{2};9\right) = 37$.

Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (5;4)$. Như vậy để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất cần mua 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II.

Đáp án A.

Ví dụ 5. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

- A. 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. B. 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn.
C. 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. D. 0,6 kg thịt lợn và 0,7 kg thịt bò.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua mỗi ngày ($0 \leq x \leq 1,6; 0 \leq y \leq 1,1$).

Khi đó chi phí để mua số thịt trên là: $f(x; y) = 45x + 35y$ nghìn đồng.

Trong x kg thịt bò chứa $800x$ đơn vị protein và $200x$ đơn vị lipid.

Trong y kg thịt lợn chứa $600y$ đơn vị protein và $400y$ đơn vị lipid.

Suy ra số đơn vị protein và số đơn vị lipid lần lượt là $800x + 600y$ đơn vị và $200x + 400y$ đơn vị.

Do gia đình này cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày nên ta có

$$\text{hệ bất phương trình sau: } \begin{cases} 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

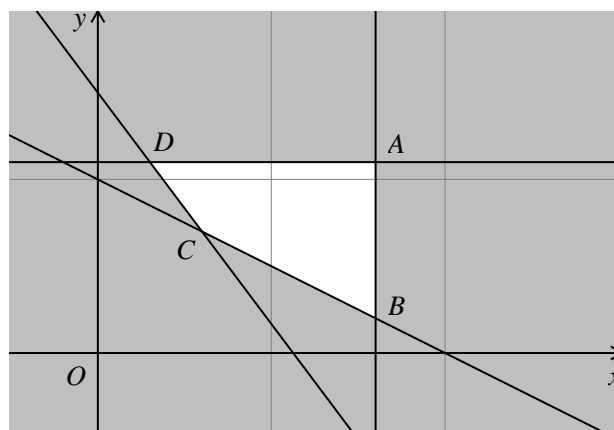
Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y) = 45x + 35y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(1,6;1,1), B(1,6;0,2), C(0,6;0,7), D(0,3;1,1)$.

Mà ta có: $f(1,6;1,1) = 110,5; f(1,6;0,2) = 79; f(0,6;0,7) = 51,5; f(0,3;1,1) = 52$.

Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (0,6;0,7)$. Do đó gia đình này cần phải mua 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Đáp án B.



C. Bài tập đề nghị.

Bài 1. Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể người. Theo đó một người mỗi ngày có thể tiếp nhận được không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B; một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn 3 lần số đơn vị vitamin A. Giá của một đơn vị vitamin A là 9 đồng, giá của một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng. Hỏi cần chi ít nhất bao nhiêu tiền mỗi ngày để dùng đủ cả hai loại vitamin trên.

A. 3400 đồng. B. 3150 đồng. C. 7650 đồng. D. Cả A, B, C đều sai.

Bài 2. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Sản phẩm I	Sản phẩm II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi 30 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 50 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

A. 5 sản phẩm I. B. 4 sản phẩm I và 1 sản phẩm II.
C. 2 sản phẩm I và 2 sản phẩm II. D. Đáp án khác.

Bài 3. Một người thợ mộc làm những cái bàn và những cái ghế. Mỗi cái bàn khi bán lãi 150 nghìn đồng, mỗi cái ghế khi bán lãi 50 nghìn đồng. Người thợ mộc có thể làm 40 giờ/tuần và tốn 6 giờ để làm một cái bàn, 3 giờ để làm một cái ghế. Khách hàng yêu cầu người thợ mộc làm số ghế ít nhất là gấp ba lần số bàn. Một cái bàn chiếm chỗ bằng 4 cái ghế và ta có phòng để được nhiều nhất 4 cái bàn/tuần. Hỏi người thợ mộc phải sản xuất như thế nào để số tiền lãi thu về là lớn nhất.

A. Sản xuất 16 cái bàn và 48 cái ghế trong 7 tuần.
B. Sản xuất 4 cái bàn và 32 cái ghế trong 3 tuần.
C. Sản xuất 1 cái bàn và 10 cái ghế trong 1 tuần.
D. Sản xuất 40 cái ghế trong 3 tuần.

Bài 4. Một công ty cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất.

A. 5 xe loại A và 4 xe loại B. B. 10 xe loại A và 2 xe loại B.
C. 10 xe loại A và 9 xe loại B. D. 4 xe loại A và 5 xe loại B.

Bài 5. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 100 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 70 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

A. 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. B. 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn.

C. 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. D. 0,6 kg thịt lợn và 0,7 kg thịt bò

Bài 6. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4000000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất biết rằng tổng số công không quá 180.

A. 1 ha đậu và 7 ha cà. B. 6 ha đậu và 2 ha cà.
C. 6 ha cà và 2 ha đậu. D. 8 ha cà.

Bài 7. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm. Để sản xuất mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ; để sản xuất mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ. Xưởng sản xuất này có 200 kg nguyên liệu và có thể hoạt động trong 50 ngày liên tục. Biết rằng mỗi kg sản phẩm loại I thu lợi nhuận 40 nghìn đồng, mỗi kg sản phẩm loại II thu lợi nhuận 30 nghìn đồng. Hỏi nên sản xuất mỗi loại bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

A. 20 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II.
B. 50 sản phẩm loại II.
C. 80 sản phẩm loại II.
D. 40 sản phẩm loại I.

Bài 8. Một cơ sở sản xuất dự định sản xuất ra hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo ra từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng đơn vị dự trữ của từng loại nguyên liệu và số lượng đơn vị từng loại nguyên liệu cần để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho tương ứng trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Nguyên liệu dự trữ mỗi tuần	Số đơn vị cần dùng cho việc sản xuất một đơn vị sản phẩm	
		Sản phẩm A	Sản phẩm B
I	18	2	3
II	30	5	4
III	25	1	6

Mỗi đơn vị sản phẩm A lãi 300000 đồng, mỗi đơn vị sản phẩm B lãi 200000 đồng. Hãy cho biết với kế hoạch sản xuất như thế nào thì số tiền lãi thu được hàng tuần là lớn nhất.

A. Sản xuất 18 sản phẩm A và 30 sản phẩm B trong vòng 7 tuần.
B. Sản xuất 80 sản phẩm A và 95 sản phẩm B trong vòng 26 tuần.
C. Sản xuất 33 sản phẩm A và 32 sản phẩm B trong vòng 9 tuần.
D. Cả A, B, C đều sai.

Bài 9. Một công ty điện tử sản xuất hai kiểu radio trên hai dây chuyền độc lập. Radio kiểu một sản xuất trên dây chuyền một với công suất 45 radio/ngày, radio kiểu hai sản xuất trên dây chuyền hai với công suất 80 radio/ngày. Để sản xuất một chiếc radio kiểu một cần 12 linh kiện, để sản xuất một chiếc radio kiểu hai cần 9 linh kiện. Tiền lãi khi bán một chiếc radio kiểu một là 250000 đồng, tiền lãi khi bán một chiếc radio kiểu hai là 180000 đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho tiền lãi thu được là nhiều nhất, biết rằng số linh kiện có thể sử dụng tối đa trong một ngày là 900.

A. Sản xuất 15 radio kiểu một và 80 radio kiểu hai.
B. Sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.
C. Sản xuất 45 radio kiểu một.
D. Sản xuất 80 radio kiểu hai.

Bài 10. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm ký hiệu là A và B. Một tấn sản phẩm loại A lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại B lãi 3 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A phải dùng máy M_1 trong 2 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày,

máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu.

A. 8 triệu đồng. B. 12 triệu đồng. C. 6 triệu đồng. D. 10 triệu đồng.

Bài 11. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước đường cần 30 g đường và 1 lít nước; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 20 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất.

A. 7 lít nước đường. B. 6 lít nước táo.
C. 3 lít nước đường, 6 lít nước táo. D. 6 lít nước đường, 3 lít nước táo.

Bài 12. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 100 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 5 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 1,5 kg chất B. Mỗi kg chất A có giá 0,5 triệu đồng, mỗi kg chất B có giá 5 triệu đồng. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để lợi nhuận thu về là lớn nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 8 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

A. 5 tấn nguyên liệu loại I và 6 tấn nguyên liệu loại II.
B. 5 tấn nguyên liệu loại I và 9 tấn nguyên liệu loại II.
C. 8 tấn nguyên liệu loại I và 6 tấn nguyên liệu loại II.
D. 8 tấn nguyên liệu loại I và 9 tấn nguyên liệu loại II.

Bài 13. Một máy cán thép có thể sản xuất hai sản phẩm thép tấm và thép cuộn (máy không thể sản xuất hai loại thép cùng lúc và có thể làm việc 40 giờ một tuần). Công suất sản xuất thép tấm là 250 tấn/giờ, công suất sản xuất thép cuộn là 150 tấn/giờ. Mỗi tấn thép tấm có giá 25 USD, mỗi tấn thép cuộn có giá 30 USD. Biết rằng mỗi tuần thị trường chỉ tiêu thụ tối đa 5000 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn. Hỏi cần sản xuất bao nhiêu tấn thép mỗi loại trong một tuần để lợi nhuận thu được là cao nhất.

A. 5000 tấn thép tấm và 3000 tấn thép cuộn.
B. 4500 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn.
C. 3500 tấn thép tấm và 2000 tấn thép cuộn.
D. 5000 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn.

Bài 14. Một hộ nông dân định trồng cà phê và ca cao trên diện tích 10 ha. Nếu trồng cà phê thì cần 20 công và thu về 10000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng ca cao thì cần 30 công và thu 12000000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất biết rằng số công trồng cà phê không vượt quá 100 công và số công trồng ca cao không vượt quá 180 công.

A. 10 ha cà phê. B. 5 ha cà phê và 5 ha ca cao.
C. 4 ha cà phê và 6 ha ca cao. D. 6 ha cà phê và 4 ha ca cao.

Bài 15. Một gia đình định trồng cà phê và ca cao trên diện tích 10 ha. Nếu trồng cà phê thì cần 20 công và thu về 10000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng ca cao thì cần 30 công và thu 12000000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất. Biết rằng cà phê do các thành viên trong gia đình tự chăm sóc và số công không vượt quá 80, còn ca cao gia đình thuê người làm với giá 100000 đồng cho mỗi công.

A. 10 ha cà phê. B. 5 ha cà phê và 5 ha ca cao.
C. 4 ha cà phê và 6 ha ca cao. D. 10 ha ca cao.

Bài 16. Một công ty, trong một tháng cần sản xuất ít nhất 12 viên kim cương to và 9 viên kim cương nhỏ. Từ 1 tấn Cacbon loại 1 (giá 100 triệu đồng) có thể chiết xuất được 6 viên kim cương to và 3 viên kim cương nhỏ, từ 1 tấn Cacbon loại 2 (giá 40 triệu đồng) có thể chiết xuất được 2 viên kim cương to và 2 viên kim cương nhỏ. Mỗi viên kim cương to có giá 20 triệu đồng, mỗi viên

kim cương nhỏ có giá 10 triệu đồng. Hỏi trong một tháng công ty này thu về được nhiều nhất là bao nhiêu tiền. Biết rằng mỗi tháng chỉ có thể sử dụng tối đa 4 tấn Cacbon mỗi loại.

A. 200 triệu. **B.** 280 triệu. **C.** 150 triệu. **D.** 110 triệu.

Bài 17. Có ba nhóm máy *A, B, C* dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Sản phẩm I	Sản phẩm II
<i>A</i>	10	2	2
<i>B</i>	2	0	1
<i>C</i>	12	1	3

Một đơn vị sản phẩm I lãi 30 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 50 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

A. 5 sản phẩm I. **B.** 3 sản phẩm I và 2 sản phẩm II.
C. 2 sản phẩm II. **D.** 3 sản phẩm II và 1 sản phẩm I.

D. Hướng dẫn, đáp án.

Hướng dẫn.

Bài 1. Gọi x và y lần lượt là số đơn vị vitamin A và B dùng mỗi ngày ($x, y \geq 0$). Số tiền cần chi là $f(x, y) = 9x + 7,5y$ đồng.

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 600 \\ 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \quad (*) \\ \frac{1}{2}x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

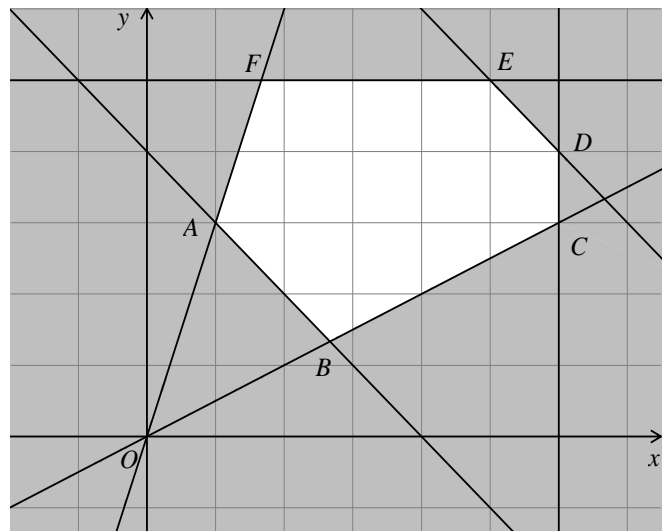
Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác $ABCDEF$ (kể cả biên) với $A(100; 300)$,

$$B\left(\frac{800}{3}; \frac{400}{3}\right), C(600; 300), D(600; 400),$$

$$E(500; 500), F\left(\frac{500}{3}; 500\right).$$

Suy ra $\max f(x, y) = f(100; 300) = 3150$.

Tức là cần chi 3150 đồng hàng ngày để sử dụng vitamin.



Bài 2. Gọi x và y lần lượt là số đơn vị sản phẩm I và II ($x, y \geq 0$). Số tiền lãi của đơn vị này là $f(x, y) = 30x + 50y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 5 \\ y \leq 2 \\ x + 2y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y) = 30x + 50y$ trên miền nghiệm của hệ (*).

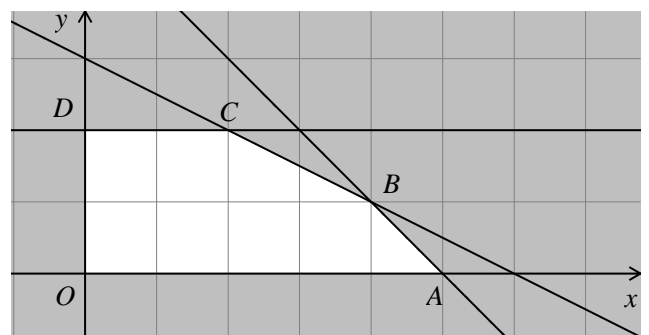
Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên).

Ta có: $O(0; 0)$, $A(5; 0)$, $B(4; 1)$, $C(2; 2)$, $D(0; 2)$.

Ta có: $f(0; 0) = 0$, $f(5; 0) = 150$, $f(4; 1) = 190$, $f(2; 2) = 160$, $f(0; 2) = 100$.

Để thấy $f(x, y)$ lớn nhất khi $(x, y) = (4; 1)$ tức là cần sản xuất 4 sản phẩm I và 1 sản phẩm II để thu về lợi nhuận cao nhất.

Bài 3. Gọi x và y lần lượt là số bàn và số ghế mà người thợ mộc sản xuất trong một tuần ($x, y \geq 0$). Khi đó số tiền mà người thợ mộc thu được là: $f(x, y) = 150x + 50y$ (nghìn đồng).



Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 6x + 3y \leq 40 \\ y \geq 3x \\ x + \frac{y}{4} \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y \leq 40 \\ y \geq 3x \\ 4x + y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y) = 150x + 50y$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 3x \\ 4x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{16}{7}; \frac{48}{7}\right).$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

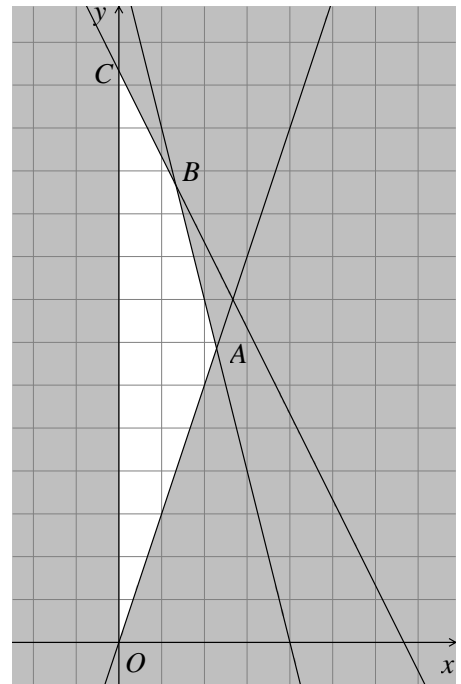
$$\begin{cases} 6x + 3y = 40 \\ 4x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{4}{3}; \frac{32}{3}\right).$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 3y = 40 \end{cases} \Rightarrow C\left(0; \frac{40}{3}\right).$$

Ta thấy $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = \left(\frac{4}{3}; \frac{32}{3}\right)$.

Như vậy người thợ này cần sản xuất 4 cái bàn và 32 cái ghế trong vòng 3 tuần để thu về số tiền lãi lớn nhất.



Bài 4. Gọi x và y lần lượt là số xe loại A và B. Khi đó số tiền cần bỏ ra để thuê xe là $f(x; y) = 4x + 3y$. Ta có x xe loại A sẽ chở được $20x$ người và $0,6x$ tấn hàng; y xe loại B sẽ chở được $10y$ người và $1,5y$ tấn hàng. Suy ra x xe loại A và y xe loại B sẽ chở được $20x + 10y$ người và $0,6x + 1,5y$ tấn hàng.

Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*). Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên).

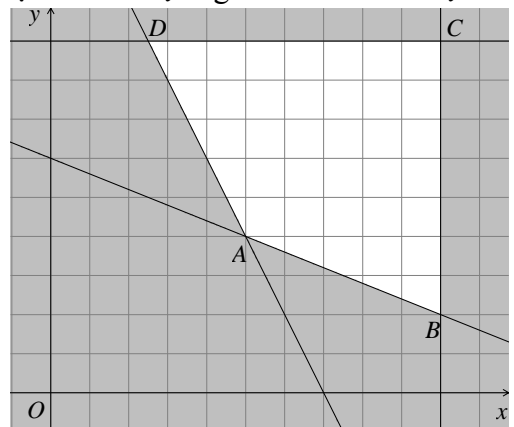
Hàm số $f(x; y) = 4x + 3y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*)

khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5; 4)$, $B(10; 2)$, $C(10; 9)$, $D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$.

Ta có: $f(5; 4) = 32$; $f(10; 2) = 46$; $f(10; 9) = 67$; $f\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 37$.

Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (5; 4)$. Như vậy để chi phí vận chuyển thấp nhất cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B.

Bài 5. Gọi x và y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua mỗi ngày ($0 \leq x \leq 1,6$; $0 \leq y \leq 1,1$). Khi đó chi phí để mua số thịt trên là: $f(x; y) = 100x + 70y$ nghìn đồng. Suy ra số đơn vị protein và số đơn lipit lần lượt là $800x + 600y$ đơn vị và $200x + 400y$ đơn vị.



Do gia đình này cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày nên ta

$$\text{có hệ bất phương trình sau: } \begin{cases} 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} (*)$$

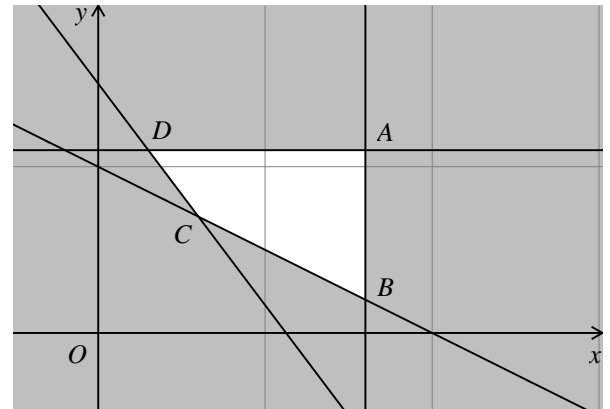
Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y) = 100x + 70y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x; y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $A(1,6; 1,1)$, $B(1,6; 0,2)$, $C(0,6; 0,7)$, $D(0,3; 1,1)$.

Mà ta có: $f(1,6; 1,1) = 237$; $f(1,6; 0,2) = 174$;
 $f(0,6; 0,7) = 109$; $f(0,3; 1,1) = 107$.

Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (0,3; 1,1)$. Do đó gia đình này cần phải mua 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn để số tiền bỏ ra là ít nhất.



Bài 6. Gọi số ha đậu và cà mà hộ nông dân này trồng lần lượt là x và y ($x, y \geq 0$).

Lợi nhuận thu được là: $f(x; y) = 3000000x + 4000000y$ (đồng).

Tổng số công dùng để trồng x ha đậu và y ha cà là: $20x + 30y$.

$$\text{Ta có hệ bất phương trình sau: } \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

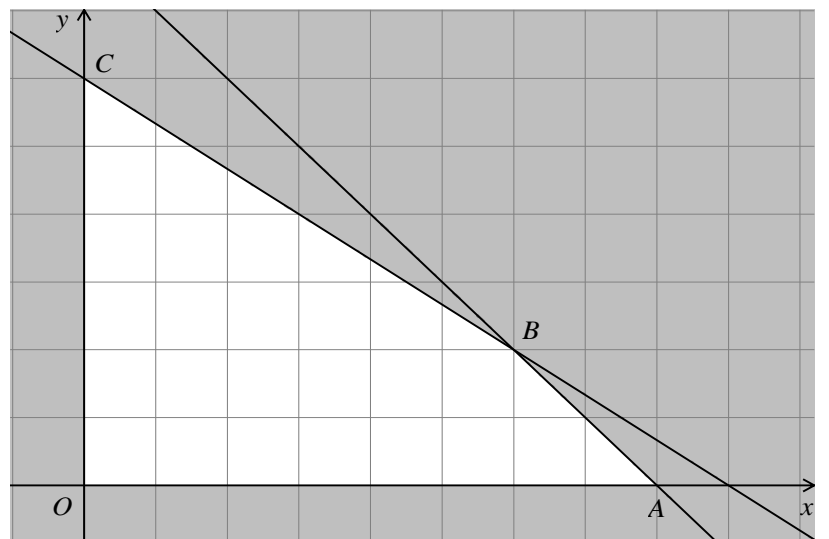
Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, $B(6; 2)$, $C(0; 8)$.

Ta có: $f(0; 0) = 0$,

$f(8; 0) = 24000000$, $f(6; 2) = 26000000$, $f(0; 6) = 24000000$.

Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (6; 2)$ tức là hộ nông dân này cần phải trồng 6 ha đậu và 2 ha cà thì sẽ thu về lợi nhuận lớn nhất.



Bài 7. Gọi x và y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II mà xưởng này sản xuất ($x, y \geq 0$).

Lợi nhuận thu được là: $f(x; y) = 40x + 30y$ nghìn đồng.

$$\text{Ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Ta suy ra $f(x; y)$ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ (*) khi $(x; y) = (20; 60)$.

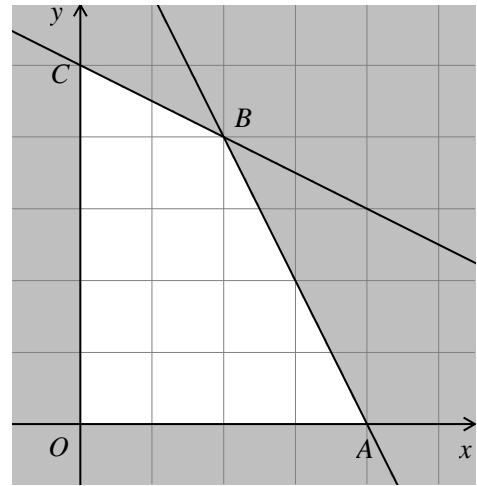
Như vậy để thu lợi nhuận lớn nhất thì xưởng sản xuất này phải sản xuất 20 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II.

Bài 8. Gọi x và y lần lượt là số sản phẩm A và B mà đơn vị này sản xuất hàng tuần ($x; y \geq 0$).

Lợi nhuận thu được hàng tuần là:

$$f(x; y) = 300000x + 200000y \text{ (đồng)}.$$

$$\text{Ta có hệ bất phương trình sau: } \begin{cases} 2x + 3y \leq 18 \\ 5x + 4y \leq 30 \\ x + 6y \leq 25 \\ x; y \geq 0 \end{cases} (*)$$

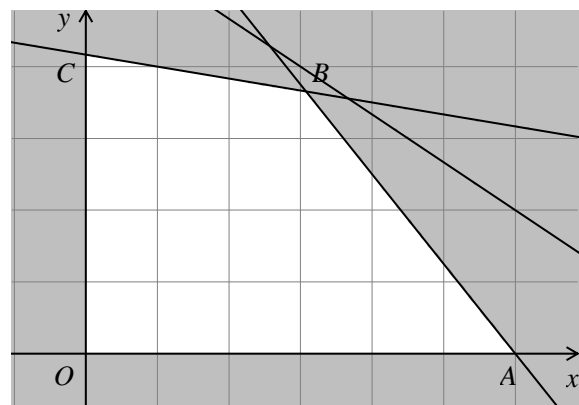


Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(6; 0)$,

$$B\left(\frac{11}{3}; \frac{32}{9}\right), C\left(0; \frac{25}{6}\right).$$



$$\text{Ta có: } f(0; 0) = 0, f(6; 0) = 1800000, f\left(\frac{11}{3}; \frac{32}{9}\right) = \frac{16300000}{9}, f\left(0; \frac{25}{6}\right) = \frac{2500000}{3}.$$

Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = \left(\frac{11}{3}; \frac{32}{9}\right)$ tức là xưởng này cần sản xuất 33 sản phẩm A và 32 sản phẩm B trong vòng 9 tuần để thu lợi nhuận cao nhất.

Bài 9. Gọi x và y lần lượt là số radio kiểu một và số radio kiểu hai mà công ty này sản xuất trong một ngày ($x; y \geq 0$).

Số tiền lãi mà công ty này thu về hàng ngày là:

$$f(x; y) = 250000x + 180000y \text{ (đồng)}.$$

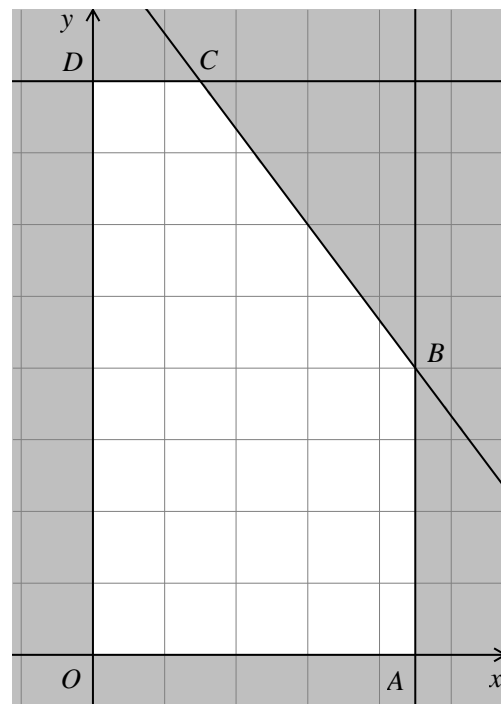
$$\text{Ta có hệ bất phương trình sau: } \begin{cases} 12x + 9y \leq 900 \\ 0 \leq x \leq 45 \\ 0 \leq y \leq 80 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(45; 0)$, $B(45; 40)$, $C(15; 80)$, $D(0; 80)$.

Ta có $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (45; 40)$ tức là công ty này cần sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.



Bài 10. Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A, B mà phân xưởng này sản xuất trong một ngày ($x, y > 0$).

Khi đó số tiền lãi một ngày của phân xưởng này là $f(x; y) = 2x + 3y$ (triệu đồng); số giờ làm việc trong ngày của máy M_1 là $2x + y$ và số giờ làm việc trong ngày của máy M_2 là $x + y$.

Vì mỗi ngày máy M_1 làm việc không quá 6 giờ và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ nên ta có

$$\text{hệ bất phương trình: } \begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \quad (*) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

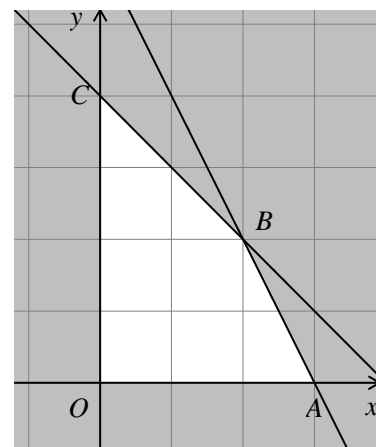
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh $O(0;0)$ $A(3;0)$, $B(2;2)$, $C(0;4)$.

Mà ta có: $f(0;0) = 0$; $f(3;0) = 6$; $f(2;2) = 10$; $f(0;4) = 12$.

Suy ra $\max f(x; y) = 12$ khi $(x; y) = (0;4)$.



Bài 11. Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và táo của một đội pha chế ($x, y \geq 0$).

Số điểm thưởng của đội chơi này là: $f(x; y) = 60x + 80y$.

Số gam đường cần dùng là: $30x + 10y$.

Số lít nước cần dùng là: $x + y$.

Số gam hương liệu cần dùng là: $4y$.

Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường

$$\text{nên ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

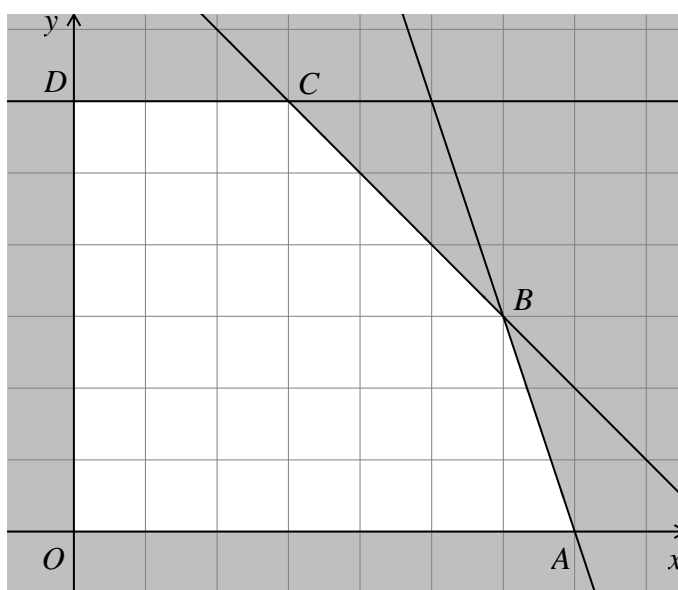
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y) = 60x + 80y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0;0)$, $A(7;0)$, $B(6;3)$, $C(3;6)$, $D(0;6)$.

Suy ra $f(3;6)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Như vậy để được số điểm thưởng là lớn nhất cần pha chế 3 lít nước đường và 6 lít nước táo.



Bài 12. Gọi x và y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I và loại II dùng để chiết xuất ($x; y \geq 0$).

Số tiền cần dùng để mua nguyên liệu là: $f(x; y) = 0,5.20x + 1,5.5x - 5x - 3y = 5x + 4,5y$ (triệu đồng).

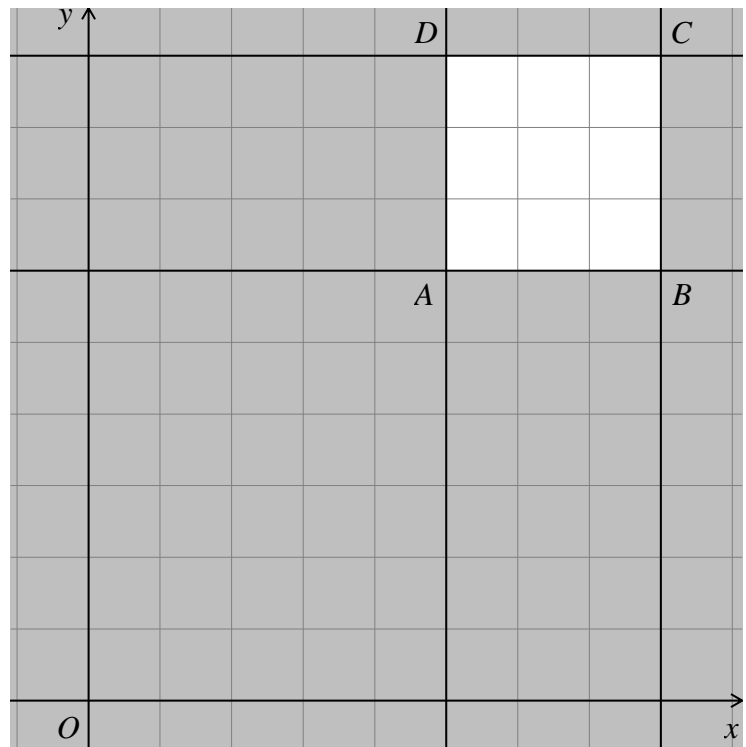
Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x \geq 100 \\ 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ x \geq 5 \\ y \geq 6 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y) = 5x + 4,5y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*). Miền nghiệm của hệ (*) là hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả biên), trong đó $A(5;6)$, $B(8;6)$, $C(8;9)$, $D(5;9)$.

Suy ra $f(x; y)$ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ (*) khi $(x; y) = (8;9)$.

Như vậy cần sử dụng 8 tấn nguyên liệu loại I và 9 tấn nguyên liệu loại II.



Bài 13. Gọi x và y lần lượt là số tấn thép tấm và số tấn thép cuộn mà máy cán thép này sản xuất trong một tuần ($x; y \geq 0$).

Số tiền lãi thu được là: $f(x; y) = 25x + 30y$ (USD).

Thời gian để sản xuất x tấn thép tấm là: $\frac{x}{250}$ (giờ).

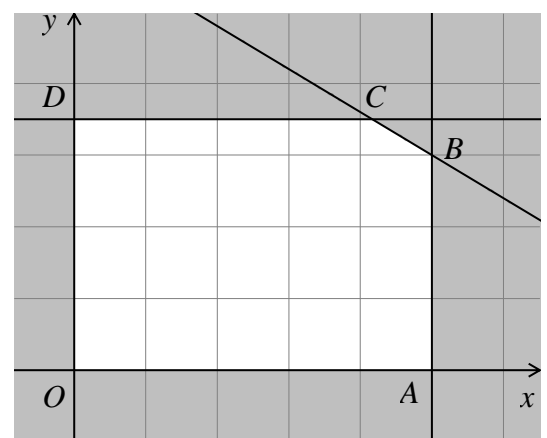
Thời gian để sản xuất y tấn thép cuộn là: $\frac{y}{150}$ (giờ).

$$\text{Ta có hệ bất phương trình sau: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 5000 \\ \frac{x}{250} + \frac{y}{150} \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 3500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5000 \\ 0 \leq y \leq 3500 \\ 3x + 5y \leq 30000 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*). Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên), trong đó $A(5000;0)$, $B(5000;3000)$, $C\left(\frac{12500}{3}; 3500\right)$, $D(0;3500)$.

Suy ra $f(x; y)$ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ (*) khi $(x; y) = (5000; 3000)$.

Như vậy cần phải sản xuất 5000 tấn thép tấm và 3000 tấn thép cuộn trong một tuần để lợi nhuận thu được lớn nhất.



Bài 14. Gọi x và y lần lượt là số ha cà phê và ca cao mà hộ nông dân này trồng ($x, y \geq 0$).

Lợi nhuận thu được là: $f(x; y) = 10000000x + 12000000y$ (đồng).

Vì số công để trồng cà phê không vượt quá 100 nên $20x \leq 100 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Vì số công để trồng ca cao không vượt quá 180 nên $30y \leq 180 \Leftrightarrow y \leq 6$.

Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 5 \quad (*) \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

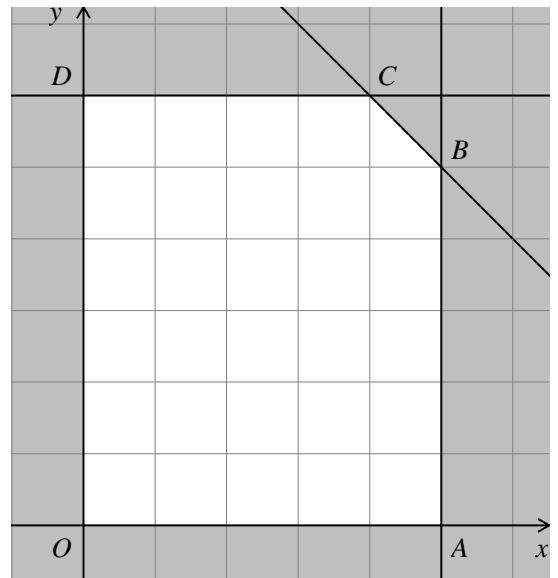
Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(5; 0)$, $B(5; 5)$, $C(4; 6)$, $D(0; 6)$.

Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (4; 6)$.

Như vậy cần phải trồng 4 ha cà phê và 6 ha ca cao để thu về lợi nhuận lớn nhất.



Bài 15. Gọi x và y lần lượt là số ha cà phê và ca cao mà hộ nông dân này trồng ($x, y \geq 0$).

Số tiền cần bỏ ra để thuê người trồng ca cao là:

$$30y \cdot 100000 = 3000000y \text{ (đồng)}.$$

Lợi nhuận thu được là:

$$\begin{aligned} f(x; y) &= 10000000x + 12000000y - 3000000y \\ &\Leftrightarrow f(x; y) = 10000000x + 9000000y \text{ (đồng)}. \end{aligned}$$

Vì số công để trồng cà phê không vượt quá 80 nên $20x \leq 80 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 4 \quad (*) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

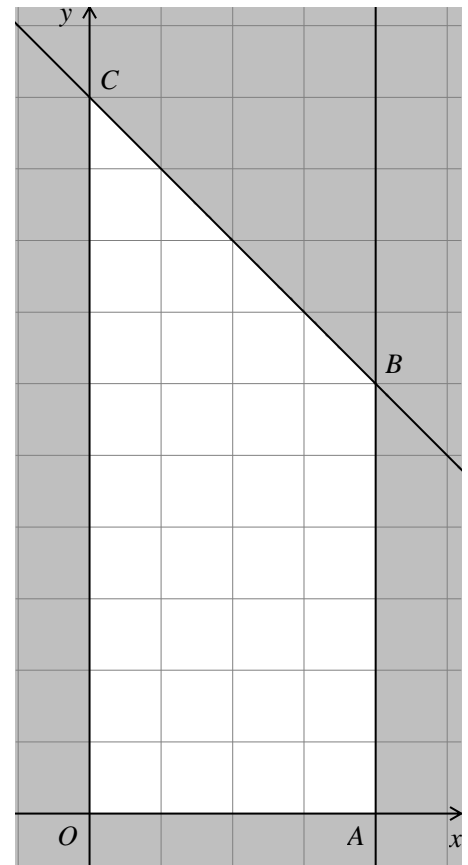
Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(4; 0)$, $B(4; 6)$, $C(0; 10)$.

Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (4; 6)$.

Như vậy cần phải trồng 4 ha cà phê và 6 ha ca cao để thu về lợi nhuận lớn nhất.



Bài 16. Gọi x và y lần lượt là số tấn Cacbon loại 1 và loại 2 mà công ty này sử dụng để chiết xuất kim cương ($x; y \geq 0$).

Số tiền mua nguyên liệu là: $100x + 40y$ (triệu đồng).

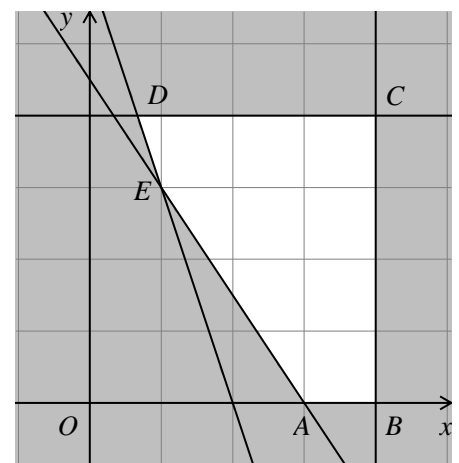
Với nguyên liệu trên sẽ sản xuất được $6x + 2y$ viên kim cương to và $3x + 2y$ viên kim cương nhỏ.

Số tiền thu được từ các viên kim cương là:

$$(6x + 2y) \cdot 20 + (3x + 2y) \cdot 10 = 150x + 60y \text{ (triệu đồng)}.$$

Lợi nhuận hàng tháng của công ty là:

$$f(x; y) = 50x + 20y \text{ (triệu đồng)}.$$



Từ giả thiết ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 6x + 2y \geq 12 \\ 3x + 2y \geq 9 \quad (*) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác $ABCDE$ (kể cả biên). Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh A, B, C, D, E .

Suy ra: $\max f(x; y) = f(4; 4) = 280$. Như vậy mỗi tháng công ty này có thể thu về nhiều nhất 280 triệu tiền lãi.

Bài 17. Gọi x và y lần lượt là số đơn vị sản phẩm I và II ($x, y \geq 0$). Số tiền lãi của đơn vị này là $f(x; y) = 30x + 50y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ y \leq 2 \\ x + 3y \leq 12 \quad (*) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

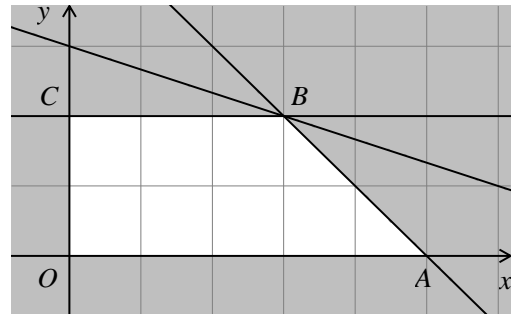
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y) = 30x + 50y$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên).

Ta có: $O(0; 0), A(5; 0), B(3; 2), C(0; 2)$.

Ta có: $f(0; 0) = 0, f(5; 0) = 150, f(3; 2) = 190, f(0; 2) = 100$.

Để thấy $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (3; 2)$ tức là cần sản xuất 3 sản phẩm I và 2 sản phẩm II để thu về lợi nhuận cao nhất.



Đáp án.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	A	A	B	A	C	B	B
11	12	13	14	15	16	17			
C	D	A	C	C	B	B			