

HÀM SỐ VD_VDC

Câu 1: VD. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm

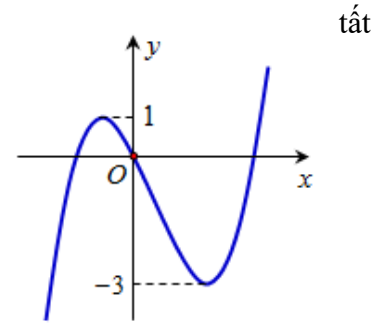
cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị.

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$

D. $1 \leq m \leq 3$



: Đáp án là A

$$(L)y = |f(x) + m| = \begin{cases} f(x) + m & \text{khi } f(x) + m \geq 0 (L_1) \\ -[f(x) + m] & \text{khi } f(x) + m < 0 (L_2) \end{cases}$$

(L) gồm (L_1) và (L_2) , trong đó $y = f(x) + m$ có 2 điểm cực trị

(L) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) + m = 0$ có 1 nghiệm đơn hoặc có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq -3 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Trắc nghiệm: Số cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng số giao điểm của

$f(x) = -m$ (không tính tiếp điểm)

Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị

Do đó hàm số $y = |f(x) + m|$ có 3 cực trị

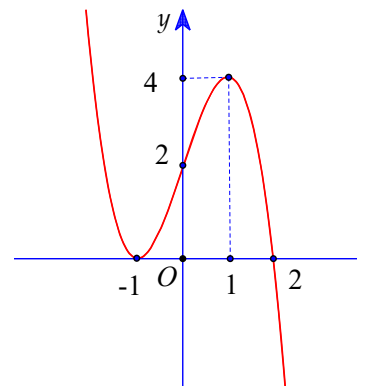
$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = -m$ có 1 nghiệm đơn hoặc có 1 nghiệm đơn và có 1 nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq -3 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Câu 2: VD. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục

trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ. Biết $f(-1) = \frac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị

lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng:



A. $\frac{1573}{64}$

B. 198

C. $\frac{37}{4}$

D. $\frac{14245}{64}$

Đáp án là A

Bảng biến thiên

x	-1	2	
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$		

Ta có $g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) - 3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1; 2]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-1	2	
$g'(x)$	0	+	0
$g(x)$			

$$\Rightarrow \min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \frac{1573}{64}.$$

Câu 3 (VD): Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2x$. Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng:

A. 13

B. 32

C. 4

D. 36

Cách giải:

Ta có: $f'(x) = x^2 - 6x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 2 = 0$ (*)

Có x_1, x_2 là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*).

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6^2 - 2 \cdot (-2) = 40$$

Chọn C.

Câu 4 (VD): Biết rằng đồ thị hàm số $y = (3a^2 - 1)x^3 - (b^3 + 1)x^2 + 3c^2x + 4d$ có hai điểm cực trị là $(1; -7)$, $(2; -8)$. Hãy xác định tổng $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

A. -18**B. 18****C. 15****D. 8****Cách giải:**

Ta có $y' = 3(3a^2 - 1)x^2 - 2(b^3 + 1)x + 3c^2$

Từ giả thiết ta suy ra các điểm có tọa độ $(1; -7)$, $(2; -8)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho và $x = 1$; $x = 2$ là hai điểm cực trị của hàm số nên ta có hệ phương sau

$$\begin{cases} (3a^2 - 1) \cdot 8 - (b^3 + 1) \cdot 4 + 6c^2 + 4d = -8 \\ (3a^2 - 1) \cdot 1 - (b^3 + 1) \cdot 1 + 3c^2 + 4d = -7 \\ 3 \cdot (3a^2 - 1) \cdot 1^2 - 2 \cdot (b^3 + 1) \cdot 1 + 3c^2 = 0 \\ 3 \cdot (3a^2 - 1) \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (b^3 + 1) + 3c^2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $A = 3a^2 - 1$; $B = b^3 + 1$; $C = 3c^2$; $D = 4d$ ta được hệ mới

$$\begin{cases} 8A - 4B + 2C + D = -8 \\ A - B + C + D = -7 \\ 3A - 2B + C = 0 \\ 12A - 4B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8A - 4B + 2C + D = -8 \\ 7A - 3B + C = -1 \\ 3A - 2B + C = 0 \\ 12A - 4B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 9 \\ C = 12 \\ D = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 1 = 2 \\ b^3 + 1 = 9 \\ 3c^2 = 12 \\ 4d = -12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 4 \\ d^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 18$$

Chọn B.

Câu 5 (VD): Tìm m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm M, N sao cho độ dài

MN nhỏ nhất:

A. 3**B. -1****C. 2****D. 1****Cách giải:**

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số là:

$$2x + m = \frac{x+3}{x+1} (x \neq -1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0 (*)$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (m+1)^2 - 8(m-3) = m^2 - 6m + 25 = (m-3)^2 + 16 > 0 \forall m$$

$\Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m+1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{2} \end{cases}$$

Gọi $M(x_1; 2x_1 + m)$, $N(x_2; 2x_2 + m)$ là hai giao điểm của 2 đồ thị hàm số.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
MN^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2 = 5(x_2 - x_1)^2 \\
&= 5 \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right] = 5 \left[\frac{(m+1)^2}{4} - 4 \cdot \frac{m-3}{2} \right] \\
&= \frac{5}{4} (m^2 + 2m + 1 - 8m + 24) = \frac{5}{4} (m^2 - 6m + 25) \\
&= \frac{5}{4} (m-3)^2 + 20 \geq 20 \forall m
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m-3=0 \Leftrightarrow m=3$

Chọn A.

Câu 6 (VD): Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có 3 điểm cực trị đồng thời các điểm cực trị của đồ thị lập thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1. Tính tổng các phần tử của S.

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
B. $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$
C. 0
D. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Cách giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2m + m^4 \Rightarrow A(0; 2m + m^4) \\ x = \sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - m^2 + 2m \Rightarrow B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m) \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - m^2 + 2m \Rightarrow C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m) \end{cases}$

Ta có $d(A; BC) = |m^4 + 2m - m^4 + m^2 - 2m| = m^2$; $BC = 2\sqrt{m}$.

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} d(A; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2\sqrt{m} = m^2 \sqrt{m}$.

Ta có: $AB^2 = m + m^4 = AC^2$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó ta có:

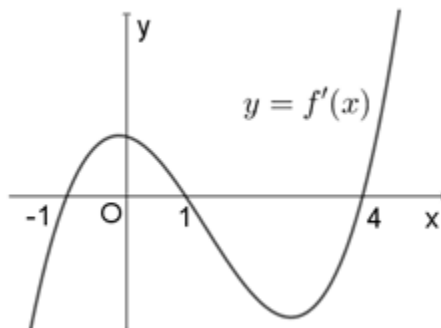
$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow m^2 \sqrt{m} = \frac{(m + m^4) 2\sqrt{m}}{4} \Leftrightarrow m + m^4 = 2m^2$

$\Leftrightarrow m(m^3 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ 0; 1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

Khi đó tổng các phần tử của S là $0 + 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 0$

Chọn C.

Câu 7 (VD): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-2; -1)$

B. $(-1; 2)$

C. $(2; +\infty)$

D. $(-\infty; -1)$

Cách giải:

Đặt $g(x) = f(3-x)$ ta có $g'(x) = -f'(3-x)$

Xét $x \in (-2; -1) \Rightarrow 3-x \in (4; 5) \Rightarrow f'(3-x) > 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-2; -1)$

Xét $x \in (-1; 2) \Rightarrow 3-x \in (1; 4) \Rightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $(-1; 2)$

Chọn B.

Câu 8 (VD): Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (m+3)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt A(0;4), B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3

B. 8

C. 1

D. 5

Cách giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0;4) \\ x^2 + 2mx + m+2 = 0(1) \end{cases}$$

Đề $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1)

$$\text{phải có 2 nghiệm phân biệt khác 0} \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Khi đó: x_B, x_C là 2 nghiệm của phương trình (1), áp dụng định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_B + x_C = -2m \\ x_B x_C = m+2 \end{cases}$

$$\text{Ta có } S_{\triangle IBC} = \frac{1}{2} d(I; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} d(I; d) \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{2S_{\triangle IBC}}{d(I; d)}$$

$$\text{Mà } d(I; d) = \frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow BC = \frac{2 \cdot 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 16$$

Ta có

$$BC^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = (x_B - x_C)^2 + (x_B + 4 - x_C - 4)^2 = 2(x_B - x_C)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 = 128 \Rightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_B x_C = 128$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 32 \Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0$$

Phương trình bậc hai ẩn m có 2 nghiệm phân biệt m_1, m_2 và $m_1 + m_2 = 1$.

Chọn C.

Câu 9 (VD): Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 5

B. 3

C. 1

D. vô số

Cách giải:

Hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = x^3 - 3x + m$ có 2 cực trị nằm về hai phía của trục Ox .

$$\text{Ta có: } y' = x^3 - 3x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 + m \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 + m \end{cases}$$

$$\text{Hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục } Ox \Leftrightarrow (-2 + m)(2 + m) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn ycbt.

Chọn B.

Câu 10 (VD): Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $(-3; 3)$

B. $[-3; 3]$

C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

D. $\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Cách giải:

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 2mx + 3$$

$$\text{Hàm số đã cho đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$$

Chú ý: Chỉ kết luận $\Delta' > 0$ là chưa đủ, học sinh có thể thử lại khi $m = \pm 3$ để chắc chắn.

Chọn B.

Câu 11 (VD): Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Cách giải:

$$y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3(m^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

Thử lại:

$$+) \text{ Với } m = -1 \text{ ta có } y = x^3 - x^2 - x + 2. \text{ Khi đó } y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{-1}{3} \Rightarrow y = \frac{59}{27} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } m = 0 \text{ ta có } y = x^3 - x^2 - 2x + 3. \text{ Khi đó}$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{61-14\sqrt{7}}{27} > 0 \\ x = \frac{1-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{61+14\sqrt{7}}{27} > 0 \end{cases} \text{ (ktm)}$$

$$+) \text{ Với } m = 1 \text{ ta có } y = x^3 - x^2 - x + 2. \text{ Khi đó}$$

$$y' = 3x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{20-14\sqrt{7}}{27} < 0 \\ x = \frac{2-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{20+14\sqrt{7}}{27} < 0 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$+) \text{ Với } m = 2 \text{ ta có } y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1. \text{ Khi đó}$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{9+2\sqrt{3}}{27} < 0 \\ x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{-9+2\sqrt{3}}{9} < 0 \end{cases} \text{ (ktm)}$$

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn là $m = 1$

Chọn B.

Câu 12. VD. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C) . Tìm a để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang và

đường tiệm cận đó cách đường tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2} - 1$.

A. $a > 0$

B. $a = 2$

C. $a = 3$

D. $a = 1$

Chọn D.

Nếu hệ số góc của tiếp tuyến khác không thì tiếp tuyến và đường tiệm cận luôn cắt nhau. Nếu đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì tiệm cận đứng luôn cắt tiếp tuyến. Do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì đồ thị hàm số chỉ có tiệm cận ngang. Vậy điều kiện cần là $a > 0$. Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại điểm } x_0 \text{ là } y = \frac{1-ax_0}{\sqrt{ax_0^2+1}^3} (x-x_0) + \frac{x_0+1}{\sqrt{ax_0^2+1}}$$

Từ suy luận trên ta có $1 - ax_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{a}$; phương trình tiếp tuyến là $y = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$.

Theo bài ra ta có phương trình $\left| \sqrt{1 + \frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = \sqrt{2} - 1$. Giải phương trình này ta được $a = 1$.

Câu 13. VD. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$		0	$-$	0	$+$
y				3		-1	
	$-\infty$	$\nearrow$			$\searrow$		$+\infty$

Tìm số nghiệm của phương trình $2|f(x)| - 1 = 0$.

A. 0

B. 3

C. 4

D. 6

Câu 14. VD. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a > 0$ và

$\begin{cases} d > 2019 \\ 8a + 4b + 2c + d - 2019 < 0 \end{cases}$. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2019|$ bằng

A. 3

B. 2

C. 1

D. 5

Chọn D.

Ta có hàm số $g(x) = f(x) - 2019$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$

Do $a > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Để ý

$$g(0) = d - 2019 > 0; g(2) = 8a + 4b + 2c + d - 2019 < 0$$

Nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$. Khi đó đồ thị hàm số $g(x) = f(x) - 2019$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x) - 2019|$ có đúng 5 cực trị.

Câu 15 (VD): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới. Khi đó trên $\mathbb{R}$ hàm số $y = f(x)$

A. có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

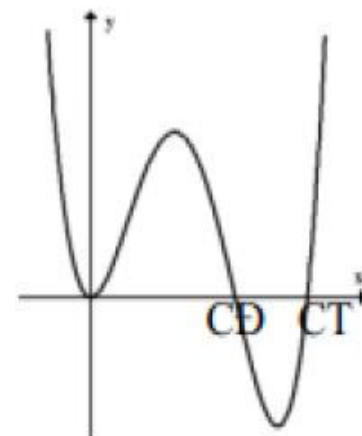
B. có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

C. có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D. có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Cách giải:

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy có hai giao điểm với trục hoành (không tính điểm tiếp xúc), trong đó tính từ trái qua phải một giao điểm cắt theo chiều từ trên xuống và



một giao điểm cắt theo chiều từ dưới lên nên hàm số $y = f(x)$ có một cực đại và một cực tiểu.

Chọn B.

Câu 16: VD. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6}$ xác định trên $(-1;0)$:

- A. $-6 < m \leq -1$ B. $-6 \leq m < -1$ C. $-3 \leq m < -1$ D. $-3 \leq m \leq -1$

Đáp án là D

Điều kiện hàm số đã cho xác định là: $\begin{cases} x-m > 0 \\ -x+2m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < x \leq 2m+6$

Để hàm số có tập xác định $D \neq \emptyset$ thì ta phải có $m < 2m+6 \Leftrightarrow m > -6$ (*). Khi đó hàm số có tập xác định là $(m; 2m+6]$.

Hàm số xác định trên $(-1;0)$ khi và chỉ khi $(-1;0) \subset (m; 2m+6]$, điều này tương đương với

$$\begin{cases} m \leq -1 \\ 2m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1. \text{ Kết hợp với (*) ta được } -3 \leq m \leq -1.$$

Vậy với $-3 \leq m \leq -1$ thì hàm số đã cho xác định trên $(-1;0)$.

Câu 17. VD. Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3ax + b$ với a, b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1, giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{7}{6}$

Chọn C.

Ta có $y' = 3x^2 + 3a$.

Tiếp tuyến tại M và N của (C) có hệ số góc bằng 3 nên tọa độ của M và N thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3a = 3 & (1) \\ y = x^3 + 3ax + b & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x^2 = 1 - a$. (1) có hai nghiệm phân biệt nên $a < 1$.

Từ (2) $\Rightarrow y = x(1-a) + 3ax + b$ hay $y = (2a+1)x + b$.

Tọa độ M và N thỏa mãn phương trình $y = (2a+1)x + b$ nên phương trình đường thẳng MN là $y = (2a+1)x + b$ hay $MN: (2a+1)x - y + b = 0$.

$$d(O, MN) = 1 \Leftrightarrow \frac{|b|}{\sqrt{(2a+1)^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 4a^2 + 4a + 2.$$

$$a^2 + b^2 = 5a^2 + 4a + 2.$$

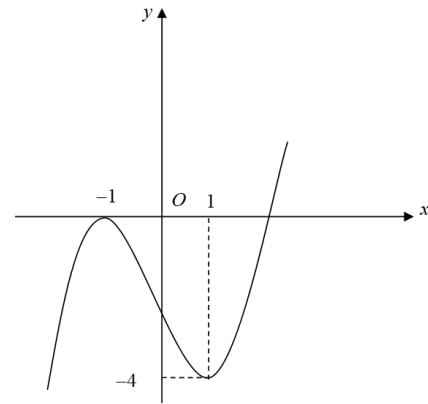
Xét $f(a) = 5a^2 + 4a + 2$ với $a < 1$.

Bảng biến thiên:

Vậy $a^2 + b^2$ nhỏ nhất là $\frac{6}{5}$.

Câu 18 (VD): Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, đồ thị bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$



thị

Cách giải:

Ta có $g(x) = f(x^2 - 2)$ suy ra $g'(x) = (f(x^2 - 2))' = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x \neq 1$

$$+ \text{ Để hàm } g(x) \text{ nghịch biến thì } g'(x) < 0 \Rightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2 < 2 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x < 2 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{cases}$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ và $(-\infty; -2)$

Suy ra D sai.

Chọn D.

Chú ý khi giải:

Các em cũng có thể lập bảng biến thiên của hàm số để tìm khoảng đồng biến $g(x)$ nghịch biến.

Câu 19 (VD): Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

- A. 2009
- B. 2010
- C. 2011
- D. 2012

Cách giải:

$$y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3 \Rightarrow y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 6[x^2 + (m-1)x + m-2]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 = x_1 \\ x = 2 - m = x_2 \end{cases}$$

Nếu $-1 = 2 - m \Leftrightarrow m = 3$ thì $y' = 6(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in R$ nên hàm số đồng biến trên R (không thỏa mãn).

Nếu $m \neq 3$ thì phương trình $y' = 0$ luôn có nghiệm phân biệt nên hàm số nghịch biến có hai điểm cực trị và nó nghịch biến trong khoảng hai điểm đó.

Hàm số nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| > 3 \Leftrightarrow |-1 - 2 + m| > 3 \Leftrightarrow |m - 3| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 > 3 \\ m - 3 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 0 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$

Mà m nguyên dương và nhỏ hơn 2018 nên $m \in \{7; 8; \dots; 2017\}$ hay có $2017 - 7 + 1 = 2011$ số m thỏa mãn.

Chọn C.

Câu 20 (VD): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x^2 + m)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là.

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Cách giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét } g(x) = f(x^2 + m) \text{ có } g'(x) = (x^2 + m)' \cdot f'(x^2 + m) = 2x \cdot f'(x^2 + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 2 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = -1 - m \end{cases} (*)$$

Hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ phân biệt.

$$\text{TH1: } m = 2 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ nên hàm số đã cho không có 5 điểm cực trị. (loại)}$$

$$\text{TH2: } m = 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ nên hàm số đã cho không có 5 điểm cực trị. (loại)}$$

$$\text{TH3: } m = -1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} (x = 0 \text{ là nghiệm bội 3}) \text{ nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.}$$

$$\text{TH4: } m > 2 \text{ thì } \begin{cases} 2 - m < 0 \\ 1 - m < 0 \\ -1 - m < 0 \end{cases} \text{ nên } g'(x) = 0 \text{ chỉ có nghiệm } x = 0 \text{ nên hàm số đã cho không có 5 điểm cực trị}$$

$$\text{TH5: } 1 < m < 2 \text{ thì}$$

+ phương trình $x^2 = 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt.

+ phương trình $x^2 = 1 - m$ và $x^2 = -1 - m$ vô nghiệm.

Do đó $g'(x) = 0$ không có 5 nghiệm phân biệt và hàm số đã cho không có 5 điểm cực trị.

TH6: $-1 < m < 1$

+ phương trình $x^2 = 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt.

+ phương trình $x^2 = 1 - m$ có hai nghiệm phân biệt.

+ phương trình $x^2 = -1 - m$ vô nghiệm.

Do đó $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều là nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

TH7: $m < -1$ thì các phương trình $x^2 = 2 - m$; $x^2 = 1 - m$; $x^2 = -1 - m$ đều có hai nghiệm phân biệt dẫn đến $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt và hàm số đã cho không có 5 điểm cực trị.

Vậy tập hợp các giá trị của m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị là $\begin{cases} m = -1 \\ -1 < m < 1 \end{cases}$ hay $-1 \leq m < 1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0\}$, có 2 giá trị thỏa mãn bài toán.

Chọn D.

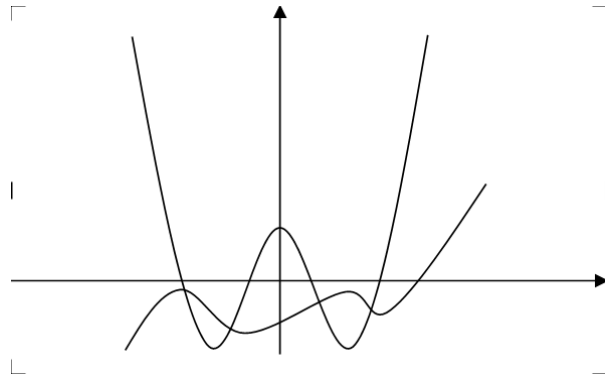
Câu 21 (VD): Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của $f(x); f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $f'(-1) \geq f''(1)$

B. $f'(-1) > f''(1)$

C. $f'(-1) < f''(1)$

D. $f'(-1) = f''(1)$



Cách giải

Từ hình vẽ ta xác định được đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ như hình vẽ (do đồ thị $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị và đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt)

Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$

Lại thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0; f''(1) < 0$

Từ đó ta có $f'(-1) > f''(1)$.

Chọn B.

Câu 22. VD. Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1, f(1) = -3$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$.

A. $f(3) = 81$

B. $f(3) = 27$

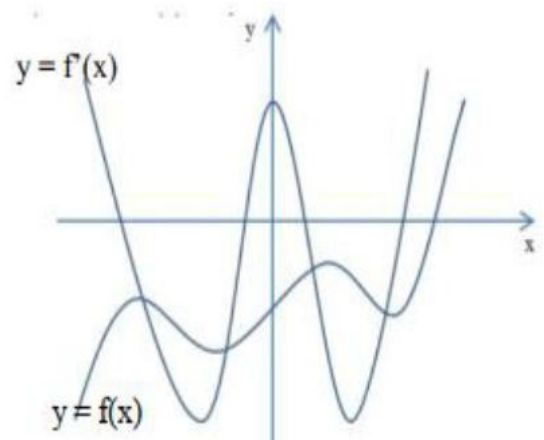
C. $f(3) = 29$

D. $f(3) = -29$

Chọn C.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ nên: $f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -3$



$$f(1) = -3 \Leftrightarrow 1 + a + b + c = -3 \Leftrightarrow a + b + c = -4$$

Mặt khác đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $2 = c$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ c = 2 \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = 3 \\ b = -9 \end{cases}$$

$$\text{Nên } f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2; f(3) = 29$$

Câu 23. VD. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là

A. $m = -\frac{1}{2}; M = 1$ **B.** $m = 1; M = 2$ **C.** $m = -2; M = 1$ **D.** $m = -1; M = 2$

Chọn đáp án C.

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

$$\text{Vậy } m = -2; M = 1.$$

Câu 24. VD. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, x \geq 0 \\ ax - b - 1, x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính

$$T = a + 2b.$$

A. $T = -4$ **B.** $T = 0$ **C.** $T = -6$ **D.** $T = 4$

Chọn đáp án C.

$$\text{Ta có } f(0) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, x \geq 0 \\ ax + 1, x < 0 \end{cases}$$

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Câu 25.VD. Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S .

A. 1

B. 5

C. 2

D. 3

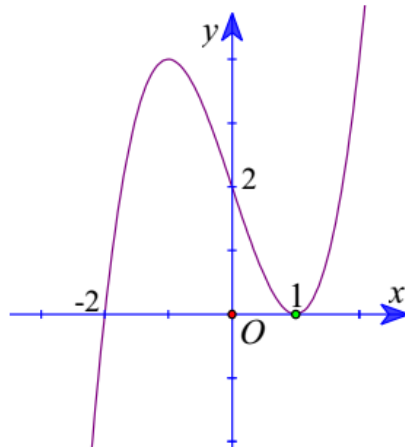
Chọn đáp án C.

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{2} \right\}$$

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(2x + m)^2}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -\frac{m}{2} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \begin{cases} -\frac{m}{2} \leq 0 \\ -\frac{m}{2} \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Câu 26. VD. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



A. 4

B. 2

C. 5

D. 3

Chọn đáp án D.

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Câu 27 (VD): Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$, một học sinh làm như sau:

(1). Tập xác định $D = [-1; 4]$ và $y' = \frac{-2x + 3}{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}$.

(2). Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1; x = 4$ và $\forall x \in (-1; 4): y' = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}$.

(3). Kết luận. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{5}{2}$ khi $x = \frac{3}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1; x = 4$.

Cách giải trên:

A. Cả ba bước (1);(2);(3) đều đúng

B. Sai từ bước (2)

C. Sai ở bước (3)

D. Sai từ bước (1)

Cách giải:

+ Nhận thấy: Tập xác định của hàm số $D = [-1; 4]$ và $y' = \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}$ nên cách giải trên sai ngay từ bước 1

Chọn: D

Câu 28: VD. Cho biểu thức $P = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ với x, y khác 0. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

A. -2

B. 0

C. -1

D. 1

Đáp án C

$$P + 1 = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + 1 = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} \geq 0 \text{ nên } P \geq -1. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = -y \neq 0.$$

Câu 29: VD. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2}{2} - mx + \ln(x - 1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Đáp án C

Hàm số luôn xác định trên $(1; +\infty)$, có $y' = x - m + \frac{1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1} - m$

Với $x > 1$, áp dụng BĐT AM-GM:

$$x + \frac{1}{x - 1} - m = x - 1 + \frac{1}{x - 1} - m + 1 \geq 2\sqrt{(x - 1) \frac{1}{x - 1}} - m + 1 = -m + 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$ (thỏa mãn)

Vậy $\min_{(1;+\infty)} y' = 3 - m$, hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$

$$\forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \min_{(1;+\infty)} y' \geq 0 \Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}.$$

Câu 30: VD. Hàm số $y = \frac{x-2}{x+m-3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi

A. $m < 1$

B. $m = 1$

C. $m \geq 3$

D. $m \neq 1$

Đáp án C

$$y' = \frac{m-3+2}{(x+m-3)^2} = \frac{m-1}{(x+m-3)^2}. \text{ Hàm số đồng biến trên } (0;+\infty) \text{ khi và chỉ khi}$$

$$\begin{cases} m-1 > 0 \\ x+m-3 \neq 0 \forall x \in (0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 3-m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$$

Câu 31: VD. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m = 1$

B. $m \in \{-1; 1\}$

C. $m \in \{-1; 0; 1\}$

D. $m \in \{0; 1\}$

Đáp án là B

Sau đây, trình bày ba cách giải của bài tập này:

Cách 1. (Tự luận)

Ta có: $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2).$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \\ x = -m \end{cases}.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Khi đó đồ thị có 3 điểm cực trị là $A(0;1), B(-m;1-m^4), C(m;1-m^4).$

$$\overrightarrow{AB} = (-m; -m^4), \overrightarrow{AC} = (m; -m^4)$$

Do tam giác ABC cân tại A nên 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân

$$\Leftrightarrow AB \perp AC$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

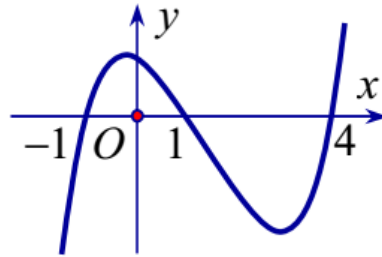
Do $m \neq 0$ nên ta có $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Cách 2. Sử dụng công thức tính nhanh ta có $b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Cách 3. Nhận xét m thỏa mãn thì $-m$ cũng thỏa mãn và hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$ suy ra chọn B.

Câu 32. VD. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.



A. 5

B. 3

C. 4

D. 2

Chọn B.

Ta có $y' = [f(x^2)]' = 2x \cdot f'(x^2)$

Hàm số nghịch biến

$$\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < -2 \vee -1 < x < 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 3 khoảng nghịch biến.

Câu 33. VD. Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3

B. 0

C. 2

D. 1

Chọn đáp án D.

Tập xác định: $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x+1)^2 - x - 1}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})}$$

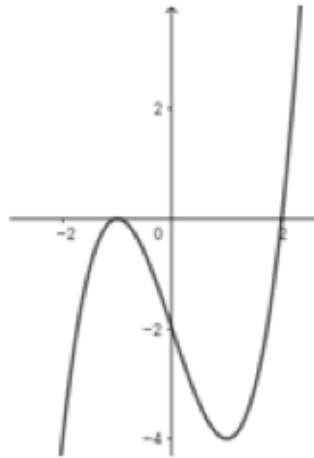
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2+9x}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x+9}{(x-2)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \frac{-9}{4} \Rightarrow x = 0$$

không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 34/VD. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
- B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- C.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
- D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Chọn D

Ta có $g(x) = f(x^2 - 2)$

$$g'(x) = f'(x^2 - 2) \cdot 2x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có $g'(3) = 6$, $f'(7) > 0$, $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đơn hoặc bội lẻ, không đổi dấu qua các nghiệm bội chẵn nên ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$				
g'(x)	-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+

Suy ra đáp án là D.

Câu 35/ VD. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

A. $T = \sqrt{51} + 6$. **B.** $T = \sqrt{61} + 3$. **C.** $T = \sqrt{61} - 3$. **D.** $T = \sqrt{51} - 6$.

Chọn C.

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases} (*)$$

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 , theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 25 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} (**)$$

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Câu 36/ VD. Cho hàm số có đồ thị (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Gọi tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt các tiệm cận của (C) tại hai điểm P và Q. Gọi G là trọng tâm tam giác IPQ (với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C)). Diện tích tam giác GPQ là

A. 2. **B.** 4. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1

Chọn A

$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Giả sử $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là $d: y = \frac{-3}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{2a+1}{a-1}$

Đồ thị (C) có hai tiệm cận có phương trình lần lượt là $d_1: x=1$; $d_2: y=2$

d cắt (d_1) tại điểm $P\left(1; \frac{2a+4}{a-1}\right)$; d cắt d_2 tại điểm $Q(2a-1; 2)$, d_1 cắt d_2 tại điểm $I(1; 2)$.

$$IP = \frac{6}{|a-1|}; IQ = 2|a-1|$$

Ta có $S_{GPQ} = \frac{1}{3}S_{IPQ} = \frac{1}{6}IPIQ = \frac{1}{6}2|a-1|\frac{6}{|a-1|} = 2$.

Câu 37. VDC. Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M \geq 2m$.

A. 15

B. 14

C. 17

D. 16

Chọn đáp án A.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^4 + ax + a}{x+1}$. Ta có $f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$

Do đó $f(1) \leq f(x) \leq f(2), \forall x \in [1; 2]$ hay $a + \frac{1}{2} \leq f(x) \leq a + \frac{16}{3}, \forall x \in [1; 2]$

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu $a + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$ thì $M = a + \frac{16}{3}; m = a + \frac{1}{2}$

Theo đề bài $a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{13}{3}$

Do a nguyên nên $a \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

TH2: Nếu $a + \frac{16}{3} < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{16}{3}$ thì $m = -\left(a + \frac{16}{3}\right); M = -\left(a + \frac{1}{2}\right)$

Theo đề bài $-\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{61}{6}$

Do a nguyên nên $a \in \{-10; -9; \dots; -6\}$.

TH3: Nếu $a + \frac{1}{2} \leq 0 \leq a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ thì $M \geq 0; m = 0$ (Luôn thỏa mãn)

Do a nguyên nên $a \in \{-5; -4; \dots; -1\}$

Vậy có 15 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. VDC. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Biết rằng đường thẳng $d: y = ax + b$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P . Tiếp tuyến tại ba điểm M, N, P của đồ thị (C) cắt (C) tại các điểm M', N', P' (tương ứng khác M, N, P). Khi đó đường thẳng đi qua ba điểm M', N', P' có phương trình là

A. $y = (4a + 9)x + 18 - 8b$

B. $y = (4a + 9)x + 14 - 8b$

C. $y = ax + b$

D. $y = -(8a + 18)x + 18 - 8b$

Chọn đáp án A.

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$. Ta có phương trình tiếp tuyến tại A của đồ thị (C) là $\Delta_1: y = (3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và Δ_1 là

$$(3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2 = x^3 - 3x + 2 \Leftrightarrow (x - x_1)^2 (x + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = -2x_1 \end{cases}$$

Do đó $A'(-2x_1; -8x_1^3 + 6x_1 + 2)$

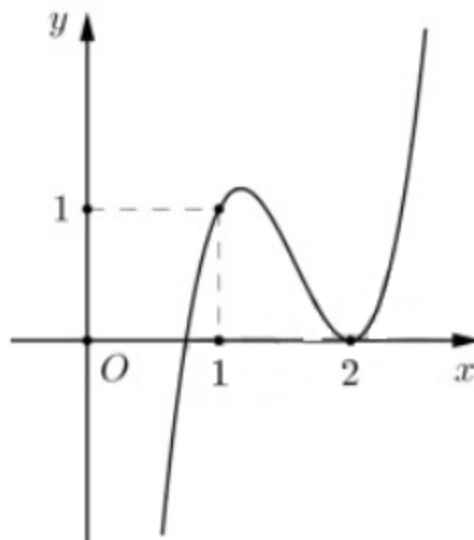
Lại có $-8x_1^3 + 6x_1 + 2 = -8(x_1^3 - 3x_1 + 2) - 18x_1 + 18 = -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18$

$= -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18 = -2x_1(4a + 9) + 18 - 8b$

Khi đó $y_{A'} = x_{A'}(4a + 9) + 18 - 8b$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm A', B', C' là $y = x(4a + 9) + 18 - 8b$

Câu 39. VDC. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5

B. 4

C. 6

D. 3

Chọn đáp án A.

ĐK $x \geq \frac{1}{2}; f(x) \neq 0; f(x) \neq 1$.

Xét phương trình $x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \# (a \in (0; 5; 1)) \\ x = 2 \\ x = 1 \\ x = b \# (b \in (1; 2)) \\ x = c \# (c \in (2; 3)) \end{cases}$

Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng $x = a; x = b; x = c; x = 2$.

Câu 40/ VDC. Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. Giá trị của của M + m bằng

A. -4.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -6.

D. $1 - 4\sqrt{2}$.

Chọn B.

$$P = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x + y)(x^2 + y^2 - xy) - 3xy = 2(x + y)(2 - xy) - 3xy \text{ (do } x^2 + y^2 = 2 \text{)}$$

$$\text{Đặt } x + y = t. \text{ Ta có } x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x + y)^2}{2} - 1 = \frac{t^2}{2} - 1$$

$$\text{Từ } (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow t^2 \geq 4\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2 \quad P = f(t) = 2t\left[2 - \left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right] - 3\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3.$$

Xét $f(t)$ trên $[-2; 2]$.

$$\text{Ta có } f'(t) = -3t^2 - 3t + 6, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-2; 2] \\ t = -2 \in [-2; 2] \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

t	-2	1	2	
$f'(t)$	0	+	0	-
$f(t)$	-7	$\frac{13}{2}$	1	

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max f(t) = \frac{13}{2}$; $\min P = \min f(t) = -7$

Lời bình: Có thể thay bbt thay bằng

Ta có $t = 1 \in [-2; 2]$; $t = -2 \in [-2; 2]$; $f(0) = -7$; $f(1) = \frac{13}{2}$; $f(2) = 1$ suy ra kết luận.

Bài tương tự.

(D-2009). Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy \\ &= 16x^2y^2 + 12[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] + 34xy = 16x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy \\ &= 16x^2y^2 - 2xy + 12 \end{aligned}$$

Đặt $t = x.y$, vì $x, y \geq 0$ và $x + y = 1$ nên $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$. Khi đó $S = f(t) = 16t^2 - 2t + 12$.

Xét $f(t)$ trên $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

$$f'(t) = 32t - 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16} \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \quad S(0) = 12; \quad S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}; \quad s\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}.$$

$$\text{Max } S = \frac{25}{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2} \text{ và } \text{min } S = \frac{191}{16} \text{ khi } \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

Câu 41/ VD. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có T điểm cực trị là:

A. (0;6).

B. (6;33).

C. (1;33).

D. (1;6).

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1			0			2			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$m-6$			$m-1$			$m-33$			$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có T điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6 < 0 < m-1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$.

Câu 42/ VD. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị là (C) . Trong các tiếp tuyến của (C) , tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất, thì hệ số góc của tiếp tuyến đó là

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Chọn B

+) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ và Δ là tiếp tuyến của (C) tại M .

+) $y' = 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow$ hệ số góc của Δ là $k = 3x_0^2 - 2x_0 + 2$.

+) Ta có $k = 3\left(x_0^2 - \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{9}\right) + \frac{5}{3}$

$$= 3\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3}, \forall x_0.$$

$$\Rightarrow \min k = \frac{5}{3}, \text{ đạt được khi } x_0 = \frac{1}{3}.$$

Câu 43 (VD): Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và

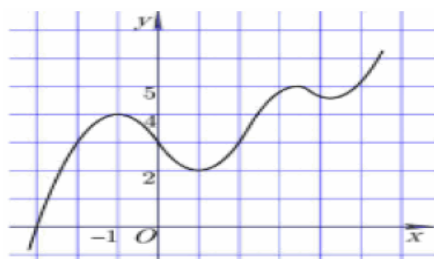
giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $M + m > 7$

B. $Mm > 10$

C. $M - m > 3$

D. $\frac{M}{m} > 2$



Cách giải:

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x, x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Rightarrow \left[-1; \frac{21}{4}\right]$$

$$\text{Từ đồ thị hàm số ta xét hàm số } y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$$

$$\Rightarrow m = \min_{\left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f(2) = 2, M = \max_{\left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) > f\left(\frac{21}{4}\right) = 5$$

$$\Rightarrow M + m > 7$$

Chọn A.

Câu 44 (VD): Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) biết cả hai đường thẳng $d_1: y = a_1x + b_1$; $d_2: a_2x + b_2$ đi qua

điểm I(1;1) và cắt đồ thị (C) tại 4 điểm tạo thành một hình chữ nhật. Khi $a_1 + a_2 = \frac{5}{2}$, giá trị biểu thức $P = b_1b_2$

bằng:

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{5}{2}$

Cách giải:

Gọi α, β lần lượt là các góc tạo bởi tia Ox và phần đồ thị phía trên trục Ox của d_1, d_2

Khi đó ta có: $a_1 = \tan \alpha, a_2 = \tan \beta$.

Vẽ đồ thị như hình vẽ bên.

Theo tính chất đối xứng của đồ thị hàm số ta có:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{a_2}$$

$$\text{Lại có: } a_1 + a_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = b_1b_2 = -\frac{1}{2}$$

Chọn C.

Câu 45 (VD): Cho hàm số $f(x)$ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như

vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào các khoảng sau?

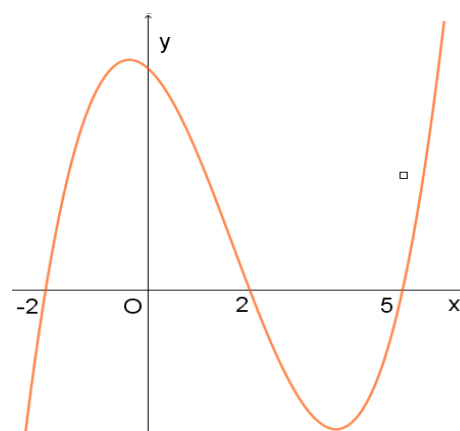
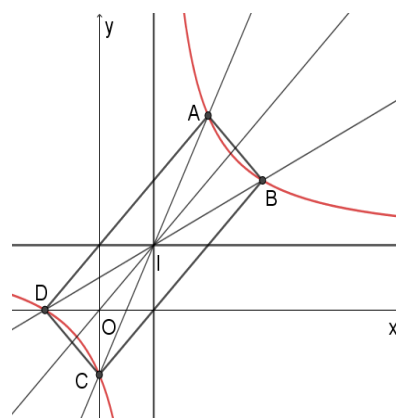
A. $(0; 2)$

B. $(1; 3)$

C. $(-\infty; -1)$

D. $(-1; +\infty)$

Cách giải:



hình
trong

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$g'(x) = [f(3-2x)]' = -2f'(3-2x)$$

Ta có: $\Rightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{cases}$$

Chọn C.

Câu 46/ VD. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1

Chọn B

Nhận xét:

+ $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

+ Do đó: Yêu cầu bài toán 9 đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

+ $m = 0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 0$ thỏa bài toán.

+ $m \neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$ có nghiệm kép

$$\text{hoặc nhận } x = 1 \text{ làm nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -1 \end{cases}$$

$$+ \text{KL: } m \in \left\{0; \frac{1}{3}; -1\right\}.$$

Câu 47 (VD): Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 6x - x^2 - 4$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

A. -6

B. 3

C. -3

D. 6

Cách giải:

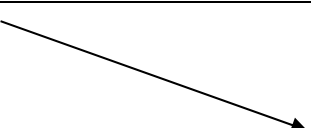
$$f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 6x - x^2 - 4$$

$$f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} - (x^2 - 6x + 12) + 8$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{(x-3)^2 + 3} \geq 3, \text{ khi đó ta có } f(t) = -t^2 + 6t + 8 \forall x \geq 3$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

BBT:

t	3		$+\infty$
$f'(t)$	0	—	
$f(t)$	17		$-\infty$

$$\Rightarrow \max_{[3;+\infty)} f(t) = 17 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 3} = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \max f(x) = 17 = M \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy phương trình $f(x) = M$ có nghiệm duy nhất $x = 3$, do đó tích các nghiệm của chúng bằng 3.

Chọn B.

Câu 48 (VD): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2 - 3x + m^2 + 5m + 6$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(3; 5)$.

A. $m \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$

B. $m \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$

C. $m \in [-3; -2]$

D. Với mọi $m \in \mathbb{R}$

Cách giải:

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(3; 5) \Leftrightarrow y' > 0 \forall x \in (3; 5)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + m^2 + 5m + 6 \geq 0 \forall x \in (3; 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x \geq -m^2 - 5m - 6 \forall x \in (3; 5) (*)$$

Đặt $g(x) = x^2 - 3x$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow g(x) \geq -m^2 - 5m - 6 \forall x \in (3; 5)$$

$$\Rightarrow -m^2 - 5m - 6 \leq \min_{(3;5)} g(x)$$

Khảo sát hàm số $g(x) = x^2 - 3x$ ta được:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	3	5	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	+	+
$g(x)$	$+\infty$			10	$+\infty$
		$-\frac{9}{4}$	0		

$$\Rightarrow -m^2 - 5m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Chọn B.

Câu 49/ VDC. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2018 của hàm số $f(x)$ là:

A. $f^{(2018)}(x) = \frac{2018! \cdot x^{2013}}{(1-x)^{2013}}$

B. $f^{(2018)}(x) = \frac{2018!}{(1-x)^{219}}$

C. $f^{(2018)}(x) = -\frac{2018!}{(1-x)^{2019}}$

D. $f^{(2018)}(x) = \frac{2018! \cdot x^{2013}}{(1-x)^{2013}}$

Chọn B

Ta có $f(x) = -x - 1 - \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2.1}{(x-1)^3} = -\frac{2!}{(x-1)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3.2.1}{(x-1)^4} = \frac{3!}{(x-1)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{4.3.2.1}{(x-1)^5} = -\frac{4!}{(x-1)^5}$$

....

$$\text{Suy ra: } f^{(2018)}(x) = \frac{-2018!}{(x-1)^{2019}} = \frac{2018!}{(1-x)^{2019}}$$

Chú ý: Có thể dùng phương pháp quy nạp toán học chứng minh được $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 50: VDC. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là

A. $A = 17 - 2\sqrt{6}$

B. $A = 17 - \sqrt{6}$

C. $A = 17 + \sqrt{6}$

D. $A = 17 + 2\sqrt{6}$

Đáp án A

Đặt $xy + 2 = t$, ta có $x^2 + y^2 = 1 + xy = t - 1$

$$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow t - 1 \geq 2(t - 2) \Rightarrow t \leq 3$$

$$(x + y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Rightarrow t - 1 + 2(t - 2) \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{5}{3}$$

Các dấu bằng đều xảy ra nên $t \in \left[\frac{5}{3}; 3\right]$

Ta có $x^2 + y^2 + 1 = 2 + xy = 2 + (t - 2) = t$;

$$x^4 + y^4 + 1 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 1 = (t - 1)^2 - 2(t - 2)^2 + 1 = -t^2 + 6t - 6$$

Do đó $P = -t + 6 - \frac{6}{t}$; xét hàm $f(t) = -t - \frac{6}{t} + 6$ có $f'(t) = -1 + \frac{6}{t^2} = \frac{(\sqrt{6} - t)(\sqrt{6} + t)}{t^2}$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{11}{15}; f(3) = 1; f(\sqrt{6}) = 6 - 2\sqrt{6}. \text{ Do đó } m = \min_{\left[\frac{5}{3}; 3\right]} P = \frac{11}{15}; M = \max_{\left[\frac{5}{3}; 3\right]} P = 6 - 2\sqrt{6}$$

$$A = M + 15m = 17 - 2\sqrt{6}.$$

Câu 51 (VDC): Cho a, b, c là các số thực dương khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2}$ gần với giá trị nào nhất trong các đáp án sau:

A. 4,65

B. 4,66

C. 4,67

D. 4,64

Cách giải:

Áp dụng bất đẳng thức cho hai số dương ta có:

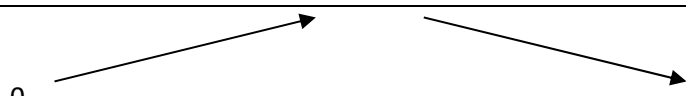
$$P = \frac{8a+3b+4(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc})}{1+(a+b+c)^2} \leq \frac{8a+3b+4\left(\frac{a+4b}{4}+\frac{b+4c}{4}+\frac{a+4b+16c}{12}\right)}{1+(a+b+c)^2} = \frac{28}{3} \cdot \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}$$

Đặt $a+b+c=t, (t>0)$.

Ta có: $P = \frac{28}{3} f(t) = \frac{28}{3} \cdot \frac{t}{t^2+1} (t>0)$

Có: $f'(t) = \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 (tm) \\ t=-1 (ktm) \end{cases}$

Ta có BBT:

t	0	1	$+\infty$	
f'(t)	+	0	-	
f(t)	0			

Dựa vào BBT ta có: $\max f(t) = \frac{1}{2}$ khi $t=1$

$$\Rightarrow \text{Max} P = \frac{28}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4}=b \\ \frac{b}{4}=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4b \\ b=4c \\ 21c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{16}{21} \\ b=\frac{4}{21} \\ c=\frac{1}{21} \end{cases}$

Chọn B.

Câu 52 (VDC): Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$

Hàm số $y=f(x^2+2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. (0;1)

B. (-2;-1)

C. (-2;1)

D. (-4;-3)

Cách giải:

Đặt $g(x)=f(x^2+2x)$ ta có $g'(x)=(2x+2)f'(x^2+2x)=2(x+1)f'(x^2+2x)$

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0 \forall x \in (a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

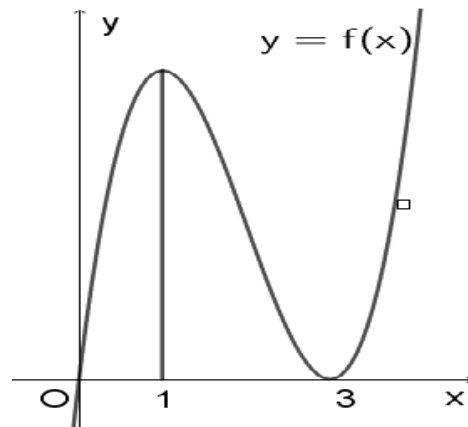
Xét đáp án A ta có: $g'\left(\frac{1}{2}\right)=3f'\left(\frac{5}{4}\right)>0 \Rightarrow$ Loại đáp án A.

Xét đáp án C ta có: $g'\left(\frac{-3}{2}\right)=2f'(0)>0 \Rightarrow$ Loại đáp án C.

Xét đáp án D ta có: $g'\left(-\frac{7}{2}\right) = -5f'\left(\frac{21}{4}\right) > 0 \Rightarrow$ Loại đáp án D.

Chọn B.

Câu 53 (VDC): Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có số điểm cực trị ít nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số $m = m_0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A. $m_0 \in (0;1)$

B. $m_0 \in (-1;0)$

C. $m_0 \in (-\infty; -1)$

D. $m_0 \in (1; +\infty)$

Cách giải:

Xét hàm số: $g(x) = f^2(x) + f(x) + m \Rightarrow g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + f'(x) = f'(x)[2f(x) + 1]$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2f(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = a (a < 0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m > m \\ g(3) = f^2(3) + f(3) + m = m \\ g(a) = f^2(a) + f(a) + m = m - \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	1	3	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-	+
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$g(a)$	$g(1)$	m	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

$$\Rightarrow h(x) = |g(x)| = |f^2(x) + f(x) + m| = \left| \left[f(x) + \frac{1}{2} \right]^2 + m - \frac{1}{4} \right| \text{ có điểm cực trị ít nhất là 3.}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ nằm phía trên trục Ox (kể cả trường hợp tiếp xúc với Ox)

$$\Rightarrow m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow m_0 = \frac{1}{4}$$

Chọn A.

Câu 54 (VDC): Biết hai điểm $B(a; b)$, $C(c; d)$ thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ sao cho tam giác

ABC vuông cân tại đỉnh $A(2; 0)$, khi đó giá trị biểu thức $T = ab + cd$ bằng:

A. 6

B. 0

C. -9

D. 8

Cách giải:

$$\text{Gọi } B\left(a; 2 + \frac{2}{a-1}\right), C\left(c; 2 + \frac{2}{c-1}\right) (a < 1 < c)$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên trục $Ox \Rightarrow H(a, 0), K(c; 0)$

$$\Delta ABC \text{ vuông cân} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAC = 90^\circ \end{cases}$$

Ta có: $\angle BCA = \angle CAK + \angle ACK = \angle BAH + \angle ABH$

Mà: $\angle BAH + \angle CAK = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BAH = \angle ACK$

Xét ΔABH và ΔCAK ta có:

$\angle BAH = \angle ACK$ (CMT)

$AC = AB$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta CAK$ (ch - gn)

$\Rightarrow AH = CK, HB = AK$ (các cạnh tương ứng bằng nhau)

Ta có: $AH = |a - 2| = 2 - a; AK = |c - 2|; (a < 1)$

$$BH = \left| 2 + \frac{2}{a-1} \right|; CK = \left| 2 + \frac{2}{c-1} \right| = 2 + \frac{2}{c-1} (c > 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH = CK \\ HB = AK \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - a = 2 + \frac{2}{c-1} \\ \left| 2 + \frac{2}{a-1} \right| = |c - 2| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{1-c} \\ 2 + \frac{2}{a-1} = c - 2 \\ 2 + \frac{2}{a-1} = 2 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{1-c} \\ 4 + \frac{2}{\frac{2}{1-c} - 1} = c - 2 \\ c = \frac{2}{1-a} = \frac{2}{1 - \frac{2}{1-c}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \text{ (tm)} \\ c = 3 \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(-1; 1) \\ C(3; 3) \end{cases} \Rightarrow T = (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 8$$

Chọn D.

Câu 55 (VDC): Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số: $y = x^8 + (m+1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số

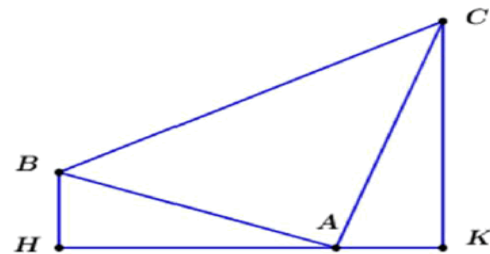
B. 3

C. 2

D. 4

Cách giải:

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m+1)x^4 - 4(m^2-1)x^3; y'' = 56x^6 + 20(m+1)x^3 - 12(m^2-1)x^2$



$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 8x^7 + 5(m+1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 [8x^4 + 5(m+1)x - 4(m^2-1)] = 0$$

TH1: Xét $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

+) Khi $m = 1$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 10x) = x^4(8x^3 + 10) \Rightarrow x = 0$ là nghiệm bội 4 $\Rightarrow x = 0$ không là cực trị của hàm số.

+) Khi $m = -1$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot 8x^4 = 0 \Leftrightarrow 8x^7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow x = 0$ là điểm cực trị của hàm số. Hơn nữa qua điểm $x = 0$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

TH2: Xét $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 [8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x = 0 \end{cases}$$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội chẵn không là cực trị của hàm số, do đó cực trị của hàm số ban đầu là nghiệm của phương trình $g(x) = 8x^5 + 5(m+1)x^2 - 4(m^2-1)x = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g'(0) > 0$

Ta có $g'(x) = 40x^4 + 10(m+1)x - 4(m^2-1)$

$$\Rightarrow g'(0) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

Vậy kết hợp 2 trường hợp ta có $-1 \leq m < 1$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$

Chọn C.

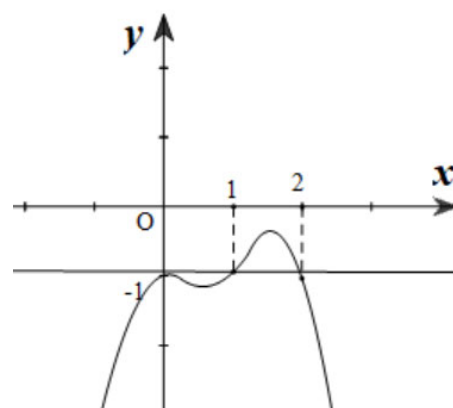
Câu 56 (VDC): Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

- A. Không có giá trị
- B. $x = 0$
- C. $x = 1$
- D. $x = 2$

Cách giải:

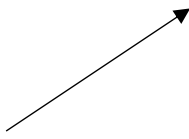
$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

BBT



$\mathbb{R}$, có
Xác định

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	$-$

$g(x)$	
--------	--

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực đại là $x = 2$.

Chọn D.

Câu 57 (VDC): Cho hàm số $y = \frac{3x+b}{ax-2}$ ($ab \neq -2$). Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -4)$ song song với đường thẳng $d: 7x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng:

A. -2

B. 4

C. 5

D. -1

Cách giải:

Điều kiện: $ax - 2 \neq 0$. Ta có $y' = \frac{-6-ab}{(ax-2)^2}$; $d: 7x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -7x + 4$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có dạng: $d': y = -7x + y_0$ ($y_0 \neq 4$)

Ta có: $A(1; -4) \in d' \Rightarrow -4 = -7.1 + y_0 \Leftrightarrow y_0 = 3$ (tm) $\Rightarrow d': y = -7x + 3$

$A(1; -4)$ thuộc đồ thị hàm số và hệ số góc của d' là: $f'(1) = -7$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 = \frac{3.1+b}{a-2} \\ \frac{-6-ab}{(a-2)^2} = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+3 = -4(a-2) \\ -6-ab = -7(a-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a+5 \\ -6-a(-4a+5) = -7a^2+28a-28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a+5 \\ 11a^2-33a+22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a+5 \\ \begin{cases} a=2 \\ a=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \text{ (tmab} \neq -2) \\ \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \text{ (tmab} \neq -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3b=11 \\ a-3b=-2 \end{cases}$$

Chọn A.

Câu 58 (VDC): Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+3)x^2 + 3$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho qua điểm $A(-1;1)$ kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến (C), Một tiếp tuyến là $\Delta_1: y = -1$ và tiếp tuyến thứ 2 là thỏa mãn tiếp xúc với (C) tại N đồng thời cắt (C) tại P (khác N) có hoành độ bằng 3.

A. Không tồn tại m thỏa mãn

B. $m = 2$

C. $m = 0, m = -2$

D. $m = -2$

Cách giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, ta có $y' = 3x^2 - 6(m+3)x$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = x_0$ là:

$$y = (3x_0^2 - 6(m+3)x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3(m+3)x_0^2 + 3$$

Có một tiếp tuyến là $\Delta_1: y = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 6(m+3)x_0 = 0 \\ x_0^3 - 3(m+3)x_0^2 + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2(m+3) \\ x_0^3 - 3(m+3)x_0^2 + 3 = -1 \end{cases}$$

TH1: $x_0 = 0 \Rightarrow 3 = -1$ (vô nghiệm).

$$\text{TH2: } x_0 = 2(m+3) \Rightarrow 8(m+3)^3 - 3(m+3).4(m+3)^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(m+3)^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow (m+3)^3 = 1 \Leftrightarrow m+3 = 1 \Leftrightarrow m = -2.$$

Thử lại khi $m = -2$, phương trình đường thẳng (d) trở thành

$$y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 3(d)$$

$$A(-1; -1) \in (d) \Rightarrow -1 = (3x_0^2 - 6x_0)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow -1 = -3x_0^2 + 6x_0 - 3x_0^3 + 6x_0^2 + x_0^3 - 3x_0^2 + 3$$

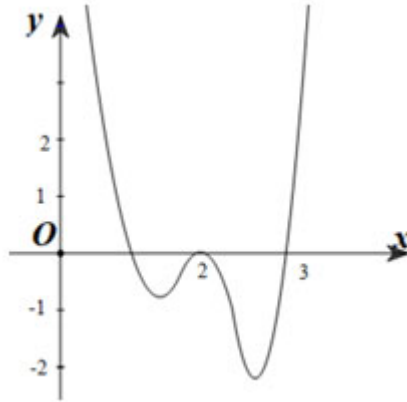
$$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 6x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt, do đó từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số khi $m = -2$ (tm).

Vậy $m = -2$.

Chọn A.

Câu 59 (VDC): Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6 B. 8
C. 7 D. 9

Cách giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị $x = 2$, $x = x_1 \in (1; 2)$, $x = x_2 \in (2; 3)$.

$$\text{Xét hàm số } y = f(f(x)) \text{ có } y' = f'(x).f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x) = x_1 \in (1; 2) \\ f(x) = x_2 \in (2; 3) \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = x_1 \in (1; 2) \\ x = x_2 \in (2; 3) \end{cases}.$$

Phương trình $f(x) = 2$ có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Phương trình $f(x) = x_1 \in (1; 2)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Phương trình $f(x) = x_2 \in (2; 3)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Các nghiệm này không trùng nhau, do đó phương trình $y' = 0$ có 9 nghiệm phân biệt (không trùng nhau),
 Các nghiệm đều là nghiệm đơn. Do vậy hàm số $y = f(f(x))$ có 9 điểm cực trị

Chọn D.

Câu 60/ VD: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			4		-2		$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$ có nghiệm?

A. $m \geq 1$.

B. $m \geq -2$.

C. $m \geq 4$.

D. $m \geq 0$.

Cách giải:

Đặt $t(x) = \sqrt{x-1}+1 \geq 1$, khi đó ta có $f(t) \leq m$ (*)

Để phương trình (*) có nghiệm $t \geq 1$ thì $\min_{[1;+\infty)} f(t) \leq m$

Dựa vào BBT ta thấy $\min_{[1;+\infty)} f(t) = -2 \Rightarrow m \geq -2$

Chọn B.