

BÀI TẬP VẬN DỤNG VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG (Dành cho học sinh muốn chinh phục điểm 8+, 9+)

Câu 1: Cho điểm $M(1;2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

 **Lời giải**

- Xét d qua gốc O thì $d: y = kx \Rightarrow y = 2x$.
- Xét d không qua gốc O thì $a, b \neq 0$ khi đó $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Theo giả thiết thì $|a| = |b|$.

+ Nếu $b = a$ thì $d: x + y = a$. Vì d qua điểm $M(1;2)$ nên $a = 3$, do đó $d: x + y = 3$.

+ Nếu $b = -a$ thì $d: x - y = a$. Vì d qua điểm $M(1;2)$ nên $a = -1$, do đó $d: x - y = -1$.

Vậy có 3 đường thẳng: $2x - y = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

Câu 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;5)$ và cách đều hai điểm $P(-1;2)$, $Q(5;4)$.

 **Lời giải**

Xét $d \parallel PQ$ thì thỏa mãn điều kiện cách đều P và Q .

VTCP $\overrightarrow{PQ} = (6;2)$ nên $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$

Xét d' không song song với PQ , để d' cách đều P, Q thì d' đi qua trung điểm $I(2;3)$ của PQ

VTCP $\overrightarrow{MI} = (0;-2)$ nên $d': \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$.

Câu 3: Đường thẳng $d: 2x - y + 8 = 0$ cắt các trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại các điểm A và B . Gọi M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số -3 . Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với d .

 **Lời giải**

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 8$, $y = 0 \Rightarrow x = -4$. Do đó $A(-4;0)$, $B(0;8)$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ thì $x_0 = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} = \frac{-4 - 0}{4} = -1$. Vậy $M(-1;6)$.

VTCP của $d: 2x - y + 8 = 0$ là $\vec{u} = (1;2)$. Do đó phương trình đường thẳng d' qua điểm M và vuông góc với d là $d': 1(x+1) + 2(y-6) = 0$ hay $x + 2y - 11 = 0$.

Câu 4: Cho đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0$; $d_2: x + y + 3 = 0$ và điểm $M(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của đoạn AB .

 **Lời giải**

$$A(x_A; y_A) \in d_1 \Rightarrow y_A = 2x_A - 2.$$

$$B(x_B; y_B) \in d_2 \Rightarrow y_B = -x_B - 3.$$

Vì M là trung điểm của AB nên:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 6 \\ 2x_A - 2 - x_B - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_A = \frac{11}{3} \Rightarrow y_A = \frac{16}{3}.$$

Vậy $A = \left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và M. Từ đó suy ra $\Delta: 8x - y - 24 = 0$.

Câu 5: Cho đường thẳng $\Delta: 3x - y + 1 = 0$ và điểm $I(1; 2)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua điểm I.

Lời giải.

Lấy một điểm M nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x - y + 1 = 0$, chẳng hạn $M = (0; 1)$. Điểm M' đối xứng với M qua điểm $I = (1; 2)$ có tọa độ $M' = (2; 3)$. Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua I là đường thẳng đi qua điểm M' và song song với Δ , tức là có VTPT $\vec{n} = (2; -1)$. Vậy phương trình của Δ' là: $2(x - 2) - (y - 3) = 0$ hay $2x - y - 1 = 0$.

Câu 6: Cho hai đường thẳng $d_1: x + y - 1 = 0$ và $d_2: x - 3y + 3 = 0$. Hãy lập phương trình của đường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2 .

Lời giải.

Giao điểm $M(x; y)$ của d_1 và d_2 có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1).$$

Lấy $A(1; 0)$ thuộc d_1 , phương trình đường thẳng AH vuông góc với d_2 là $3(x - 1) + 1(y - 0) = 0$
 $\Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0$.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right) \Rightarrow B\left(\frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng MB hay đường thẳng d_3 là
 $(x - 0)\left(\frac{12}{5} - 1\right) - (y - 1)\left(\frac{1}{5} - 0\right) = 0 \Leftrightarrow 7x - y + 1 = 0$.

Câu 7: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(-1; 2)$ và hai đường thẳng $d_1: x + 2y + 1 = 0$, $d_2: 2x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B sao cho $MA = 2MB$.

Lời giải.

Ta có $\Delta \cap d_1 = A$ suy ra $A \in d_1$ nên $A(-1 - 2a; a)$, $\Delta \cap d_2 = B$ suy ra $B \in d_2$ nên $B(b; -2 - 2b)$.
 Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-2a; a - 2)$ và $\overrightarrow{MB} = (b + 1; -2b - 4)$.

Do Δ qua M nên A, B, M thẳng hàng. Hơn nữa $MA = 2MB$, suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \end{cases}$

$$\text{Với } \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 2(b+1) \\ a-2 = 2(-2b-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{5}{3} \end{cases}. \text{ Suy ra } A\left(-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ và } B\left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Khi đó đường thẳng Δ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = (1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến nên Δ : $x - y + 3 = 0$.

$$\text{Với } \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -2(b+1) \\ a-2 = -2(-2b-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}. \text{ Suy ra } A(3;-2) \text{ và } B(-3;4).$$

Khi đó đường thẳng Δ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-6;6)$ làm véc tơ pháp tuyến nên Δ : $x + y - 1 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm Δ : $x - y + 3 = 0$ hoặc Δ : $x + y - 1 = 0$.

Cách 2. Gọi $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

Suy ra Δ : $a(x+1) + b(y-2) = 0$ hay $ax + by + a - 2b = 0$.

$$\text{Do } \Delta \cap d_1 = A \text{ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ } \begin{cases} ax + by + a - 2b = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2a-5b}{b-2a}; \frac{2b}{b-2a}\right).$$

$$\text{Do } \Delta \cap d_2 = B \text{ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ } \begin{cases} ax + by + a - 2b = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{4b-a}{a-2b}; \frac{-4b}{a-2b}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{-4b}{b-2a}; \frac{4a}{b-2a}\right)$ và $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{2b}{a-2b}; \frac{-2a}{a-2b}\right)$. Theo giả thiết

$$\begin{aligned} MA = 2MB &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{-4b}{b-2a}\right)^2 + \left(\frac{4a}{b-2a}\right)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{2b}{a-2b}\right)^2 + \left(\frac{-2a}{a-2b}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{(b-2a)^2}} = 4\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{(a-2b)^2}} \Leftrightarrow (b-2a)^2 = (a-2b)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b-2a = a-2b \\ b-2a = -(a-2b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Với $a-b=0$, ta chọn $a=1$ suy ra $b=1$. Khi đó Δ : $x + y - 1 = 0$.

Với $a+b=0$, ta chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Khi đó Δ : $x - y + 3 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm Δ : $x + y - 1 = 0$ hoặc Δ : $x - y + 3 = 0$.

Câu 8: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

 **Lời giải.**

Gọi $a = 2b$, $\Delta \cap Oy = B(b;0)$ với Δ : $2x + y - 8 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} M \in d \\ S_{\Delta OAB} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ |ab| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + a = 8 \\ ab = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2b + a = -8 \\ ab = -8 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} 2b + a = 8 \\ ab = 8 \end{cases}$ suy ra $\Delta: X + 2y - 4 = 0$.

Với $\begin{cases} 2b + a = -8 \\ ab = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \mp 4\sqrt{2} \\ b = -2 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \Delta: (1 - \sqrt{2})x + 2(1 + \sqrt{2})y - 4 = 0 \\ \Delta: (1 + \sqrt{2})x + 2(1 - \sqrt{2})y + 4 = 0 \end{cases}$

Câu 9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường Δ thẳng song song với đường thẳng $d: 2x - y + 2015 = 0$ và cắt hai trục tọa độ tại M và N sao cho $MN = 3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Do Δ qua $M(m; 0) \in Ox$ và $N(0; n) \in Oy$ (với $m, n \neq 0$) nên

$$\Delta: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \text{ hay } \Delta: nx + my - mn = 0.$$

Theo giả thiết, Δ song song với $d: 2x - y + 2015 = 0$ nên $\frac{n}{2} = \frac{m}{-1} \Leftrightarrow n = -2m$ (*)

Hơn nữa, $MN = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + n^2} = 3\sqrt{5}$. Kết hợp với (*), ta được $\sqrt{5m^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Với $m = 3$ suy ra $n = -6$. Ta được $\Delta: 2x - y - 6 = 0$.

Với $m = -3$ suy ra $n = 6$. Ta được $\Delta: 6x - 3y + 18 = 0$.

Câu 10: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(3; 2)$ và cắt tia Ox tại A , cắt tia Oy tại B sao cho $OA + OB = 12$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ . Suy ra

$$\Delta: a(x - 3) + b(y - 2) = 0 \text{ hay } ax + by - 3a - 2b = 0.$$

$$\text{Ta có } \Delta \cap Ox = A \text{ nên } A\left(\frac{3a + 2b}{a}; 0\right) \text{ và } \Delta \cap Oy = B \text{ nên } B\left(0; \frac{3a + 2b}{b}\right).$$

Theo giả thiết, ta có:

$$OA + OB = 12 \Leftrightarrow \left| \frac{3a + 2b}{a} \right| + \left| \frac{3a + 2b}{b} \right| = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a + 2b}{a} + \frac{3a + 2b}{b} = 12 \Leftrightarrow 3a^2 - 7ba + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 3a = b \end{cases}$$

Với $a = 2b$, ta chọn $b = 1$ suy ra $a = 2$. Ta được $\Delta: 2x + y - 8 = 0$.

Với $3a = b$, ta chọn $a = 1$ suy ra $b = 3$. Ta được $\Delta: x + 3y - 9 = 0$.

Cách 2. Do Δ đi qua $A(a; 0) \in Ox$ và $B(0; b) \in Oy$ (với $a, b > 0$)

$$\text{nên } \Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ hay } \Delta: bx + ay - ab = 0.$$

Theo giả thiết, ta có:

$$OA + OB = 12 \Leftrightarrow a + b = 12 \Leftrightarrow b = 12 - a. (*)$$

Hơn nữa Δ đi qua $M(3; 2)$ nên $3b + 2a - ab = 0$. Kết hợp với (*), ta được

$$3(12 - a) + 2a - a(12 - a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 13a + 36 = 0 \Leftrightarrow a = 9 \text{ hoặc } a = 4.$$

Với $a = 4$, suy ra $b = 12 - a = 8$. Ta được $\Delta: 2x + y - 8 = 0$.

Với $a = 9$, suy ra $b = 12 - a = 3$. Ta được $\Delta: x + 3y - 9 = 0$.

Câu 11: Cho ba điểm $A(2;0), B(3;4)$ và $P(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B .

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua P có dạng $a(x-1)+b(y-1)=0$ ($a^2+b^2 \neq 0$) hay $ax+by-a-b=0$. Δ cách đều A và B khi và chỉ khi:

$$d(A;\Delta)=d(B;\Delta) \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2a+3b \\ b-a=2a+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4b \\ 3a=-2b \end{cases}$$

Nếu $a = -4b$, chọn $a = 4$, $b = -1$ suy ra $\Delta: 4x - y - 3 = 0$.

Nếu $3a = -2b$, chọn $a = 2$, $b = -3$ suy ra $\Delta: 2x - 3y + 1 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\Delta_1: 4x - y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 3y + 1 = 0$.

Câu 12: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm $A(1;1)$ một khoảng bằng 2 và cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm có dạng $\Delta: ax+by+c=0$ với $a^2+b^2 \neq 0$.

Vì Δ cách điểm $A(1;1)$ một khoảng bằng 2 nên

$$d(A,\Delta)=2 \Leftrightarrow \frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow |a+b+c|=2\sqrt{a^2+b^2} \quad (1)$$

Vì Δ cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4 nên

$$d(B,\Delta)=4 \Leftrightarrow \frac{|2a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4 \Leftrightarrow |2a+3b+c|=4\sqrt{a^2+b^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } |2a+3b+c|=2|a+b+c| \Leftrightarrow \begin{cases} c=b \\ 3c=-4a-5b \end{cases}$$

Trường hợp $c=b$. Thay vào (1), ta được:

$$|a+2b|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 3a^2-4ab=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 3a-4b=0 \end{cases}$$

+ Với $a=0$, ta chọn $b=1$ suy ra $c=b=1$. Khi đó $\Delta: y+1=0$.

+ Với $3a-4b=0$, ta chọn $a=4$ suy ra $b=3$ và $c=b=3$. Khi đó $\Delta: 4x+3y+3=0$.

Trường hợp $3c=-4a-5b$. Thay vào (1), ta được $|a+2b|=6\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 35a^2-4ba+32b^2=0$.

Ta coi đây như là phương trình bậc hai theo a và có $\Delta'=(2b)^2-35.32b^2<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là $\Delta: y+1=0$ hoặc $\Delta: 4x+3y+3=0$.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2;4), B(3;5)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $I(0;1)$ sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ gấp hai lần khoảng cách từ B đến Δ .

 Lời giải

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ . Suy ra:

$$\Delta: a(x-0) + b(y-1) = 0 \text{ hay } ax + by - b = 0.$$

Vì khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ gấp hai lần khoảng cách từ B đến Δ nên:

$$d(A; \Delta) = 2d(B; \Delta) \Leftrightarrow \frac{|-2a + 4b - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \cdot \frac{|3a + 5b - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow |-2a + 3b| = 2|3a + 4b| \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 5b = 0 \\ 3a + 11b = 0 \end{cases}$$

Với $8a + 5b = 0$, ta chọn $a = 5$ suy ra $b = -8$. Khi đó $\Delta: 5x - 8y + 8 = 0$.

Với $3a + 11b = 0$, ta chọn $a = 11$ suy ra $b = -3$. Khi đó $\Delta: 11x - 3y + 3 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 5x - 8y + 8 = 0$ hoặc $\Delta: 11x - 3y + 3 = 0$.

Câu 14: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x - 4y + 1 = 0$ và cách d một khoảng bằng 1.

 Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Do Δ song song với đường thẳng d nên có dạng $\Delta: 3x - 4y + c = 0$.

Vì Δ cách d một khoảng bằng 1 nên:

$$d(d; \Delta) = 1 \Leftrightarrow d(A; \Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|3 - 4 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1 \Leftrightarrow |c - 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ c = -4 \end{cases}$$

Với $c = 6$, ta được $\Delta: 3x - 4y + 6 = 0$.

Với $c = -4$, ta được $\Delta: 3x - 4y - 4 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 3x - 4y + 6 = 0$ hoặc $\Delta: 3x - 4y - 4 = 0$.

Câu 15: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ và hai điểm phân biệt $A(1; \sqrt{3})$, B không thuộc d . Viết phương trình đường thẳng AB , biết rằng khoảng cách từ B đến giao điểm của đường thẳng AB với d bằng hai lần khoảng cách từ điểm B đến d .

 Lời giải

Gọi α là góc giữa đường thẳng (AB) và đường thẳng d . Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n}_d = (1; -\sqrt{3}).$$

Gọi C là giao điểm của đường thẳng (AB) với d ; H là hình chiếu vuông góc của B trên d .

Theo giả thiết bài toán:

$$BC = 2BH \text{ nên } \sin \alpha = \frac{BH}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ suy ra } \alpha = 60^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng (AB) . Ta có:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_d \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_d| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|a - \sqrt{3}b|}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow |a - \sqrt{3}b| = \sqrt{3}\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + \sqrt{3}ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + \sqrt{3}b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $a=0$, ta chọn $b=1$. Khi đó AB có phương trình $y-\sqrt{3}=0$.

Với $a+\sqrt{3}b=0$, ta chọn $a=\sqrt{3}$ suy ra $b=-1$. Khi đó AB có phương trình $\sqrt{3}x-y=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm: $y-\sqrt{3}=0; \sqrt{3}x-y=0$.

Câu 16: Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1: \sqrt{3}x-y+7=0$ và $\Delta_2: mx+y+1=0$ một góc bằng 30° .

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|m\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3+1}\sqrt{m^2+1}}.$$

Theo giả thiết, góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng 30° nên:

$$\cos 30^\circ = \frac{|m\sqrt{3}-1|}{2\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)} = |m\sqrt{3}-1|$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2+1) = (m\sqrt{3}-1)^2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cần tìm.

Câu 17: Cho đường thẳng $d: 3x-2y+1=0$ và $M(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc 45° .

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua M có dạng $a(x-1)+b(y-2)=0, a^2+b^2 \neq 0$ hay $ax+by-a-2b=0$.

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 45° nên:

$$\cos 45^\circ = \frac{|3a+(-2b)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|3a-2b|}{\sqrt{13}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sqrt{26(a^2+b^2)} = 2|3a-2b|$$

$$\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=5b \\ 5a=-b \end{cases}.$$

Nếu $a=5b$, chọn $a=5; b=1$ ta được $\Delta: 5x+y-7=0$.

Nếu $5a=-b$, chọn $a=1; b=-5$ ta được $\Delta: x-5y+9=0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn $x-5y+9=0; 5x+y-7=0$.

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x-y-2=0$ và điểm $I(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45° .

Lời giải

Giả sử đường thẳng Δ có phương trình: $ax+by+c=0, a^2+b^2 \neq 0$.

Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a; b)$.

Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_d = (2; -1)$.

Vì Δ tạo với đường thẳng d một góc 45° nên,

$$\cos(\Delta; d) = |\cos(\vec{n}_\Delta; \vec{n}_d)| \Leftrightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ b=-3a. \end{cases}$$

Với $a=3b$, chọn $b=1, a=3$, ta được $\Delta: 3x+y+c=0$.

$$\text{Mặt khác } d(I; \Delta) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|4+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} c=6 \\ c=-14. \end{cases}$$

Với $b=-3a$, tương tự ta có hai đường thẳng $\Delta: x-3y-8; x-3y+12$.

Vậy các đường thẳng cần tìm là: $\Delta: 3x+y+6=0; 3x+y-14=0; x-3y-8; x-3y+12$

Câu 19: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(0;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với d_1, d_2 một tam giác cân tại giao điểm của d_1 và d_2 .

Lời giải

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi d_1 và d_2 là :

$$\frac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1: x+3y-13=0 \\ \Delta_2: 3x-y-4=0. \end{cases}$$

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_1 hoặc Δ_2

-Trường hợp Δ đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_1 thì Δ có phương trình : $x+3y-3=0$.

-Trường hợp Δ đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_2 thì Δ có phương trình : $3x-y+1=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm : $x+3y-3=0; 3x-y+1=0$.

Câu 20: Cho đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$.

a. Tìm tọa độ điểm A thuộc đường thẳng Δ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4.

b. Tìm điểm B thuộc đường thẳng Δ và cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$.

Lời giải

a. Dễ thấy $M(0;-3)$ thuộc đường thẳng Δ và $\vec{u}(4;3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ nên có

$$\text{phương trình tham số là } \begin{cases} x=4t \\ y=-3+4t. \end{cases}$$

Điểm A thuộc Δ nên tọa độ của điểm A có dạng $A(4t; -3+4t)$ suy ra :

$$OA=4 \Leftrightarrow \sqrt{(4t)^2 + (-3+4t)^2} = 4 \Leftrightarrow 25t^2 - 18t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{-7}{25}. \end{cases}$$

Vậy ta tìm được hai điểm là $A_1(4;0)$ và $A_2(\frac{-28}{25}; \frac{-96}{25})$.

b. Vì $B \in \Delta$ nên $B(4t; -3+4t)$. Điểm B cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$ suy ra

$$EB^2 = FB^2 \Leftrightarrow (4t-5)^2 + (3t-3)^2 = (4t-3)^2 + (3t-1)^2 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}.$$

Suy ra $B\left(\frac{24}{7}; -\frac{3}{7}\right)$.

Câu 21: Cho đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$ và điểm $A(4; 1)$.

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d .
- Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua d .

Lời giải

a. Phương trình d' đi qua A , vuông góc với d có dạng $2x + y + C = 0$.

d' qua $A(4; 1)$ nên $8 + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -9$.

Do đó $d': 2x + y - 9 = 0$.

Hình chiếu H là giao điểm của d và d' nên có tọa độ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{5} \\ y = \frac{17}{5} \end{cases}.$$

Vậy $H\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right)$.

b. A' đối xứng với A qua d khi H là trung điểm của AA' $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \frac{8}{5} \\ y_{A'} = \frac{29}{5} \end{cases}.$

Vậy $A'\left(\frac{8}{5}; \frac{29}{5}\right)$.

Câu 22: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(0; 2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và thỏa mãn $AB = 2BC$.

Lời giải

Do $B, C \in d$ nên có tọa độ dạng $B(-2 + 2b; b), C(-2 + 2c; c)$ với $b \neq c$.

Suy ra $\overline{AB}(-2 + 2b; b - 2), \overline{BC}(2c - 2b; c - b)$.

Tam giác ABC vuông ở B nên $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow (c - b)(5b - 6) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{6}{5}$ (do $b \neq c$). Suy ra

$B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Tam giác ABC thỏa mãn

$$AB = 2BC \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25}} = 2\sqrt{\left(2c - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(c - \frac{6}{5}\right)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = \frac{7}{5} \end{cases}.$$

Câu 23: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1), B(4; -3)$ và đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Lời giải

Gọi $C(1+2c; c) \in (d)$.

Phương trình đường thẳng (AB) là : $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x+3y-7=0$.

Theo giả thiết $d(C; AB) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4(1+c)+3c-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow |11c-3| = 30 \Leftrightarrow c = 3$ hoặc $c = -\frac{27}{11}$.

Với $c = 3$ ta được $C(7; 3)$

Với $c = -\frac{27}{11}$ ta được $C\left(\frac{-43}{11}; \frac{-27}{11}\right)$.

Câu 24: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x-3y-6=0$ và điểm $N(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác OMN có diện tích bằng $\frac{15}{2}$ (với O là gốc tọa độ)

 **Lời giải**

$\overrightarrow{ON} = (3; 4) \Rightarrow ON = 5$.

Đường thẳng ON có phương trình : $4x-3y=0$.

Gọi $M(3m+6; m) \in (d)$.

Theo giả thiết ta có : $S_{OMN} = \frac{1}{2} ON \cdot d(M; ON) \Leftrightarrow d(M; ON) = \frac{2S_{OMN}}{ON} = 3$

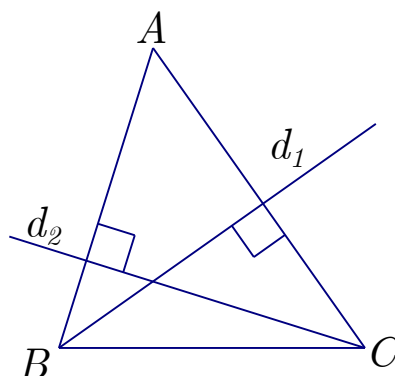
Hay $\frac{|4(3m+6)-3m|}{5} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{13}{3} \end{cases}$.

Với $m = -1$ suy ra $M(3; -1)$.

Với $m = -\frac{13}{3}$ suy ra $M\left(-7; -\frac{13}{3}\right)$.

Câu 25: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh $A(1; 0)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao kẻ từ B, C có phương trình lần lượt là : $d_1: x-2y+1=0, d_2: 3x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh B và C .

 **Lời giải**



Đường thẳng AC đi qua $A(1; 0)$ và vuông góc với d_1 nên AC có phương trình $2x+y-2=0$.

Tương tự, AB có phương trình $x-3y-1=0$.

Do $B = d_1 \cap AB$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases}$, ta được

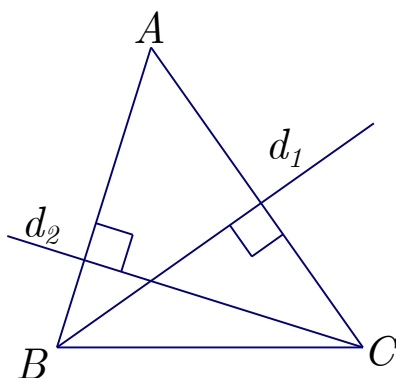
$B(-5;-2)$

Tương tự $C = d_2 \cap AC$, ta được $C(-1;4)$.

Vậy $B(-5;-2), C(-1;4)$.

Câu 26: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình cạnh $BC: x+y-9=0$, đường cao qua đỉnh B và C lần lượt có phương trình $d_1: x+2y-13=0; d_2: 7x+5y-49=0$. Tìm tọa độ đỉnh A .

 **Lời giải**



Do $B = d_1 \cap BC$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y-13=0 \\ x+y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$, ta được $B(5;4)$.

Do $C = d_2 \cap BC$ nên $C(2;7)$.

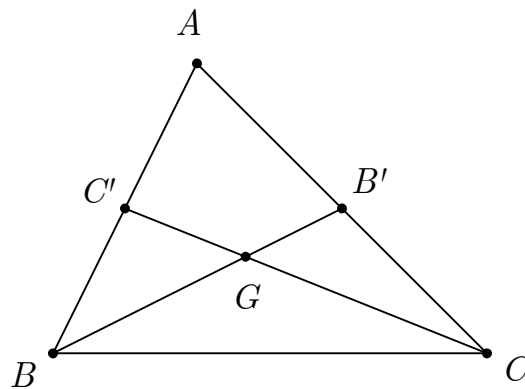
Cạnh AC đi qua C và vuông góc với d_1 nên AC có phương trình $2x-y+3=0$.

Cạnh AB đi qua B và vuông góc với d_2 nên AB có phương trình $5x-7y+3=0$.

Do $A = AB \cap AC$ nên $A(-2;-1)$.

Câu 27: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến là $BB': x-2y+1=0, CC': y-1=0$. Xác định tọa độ đỉnh B và C .

 **Lời giải**



Do $B \in BB'$ nên tọa độ của B có dạng $(2b-1; b)$.

Vì C' là trung điểm của AB nên $C' \left(b; \frac{b+3}{2} \right)$.

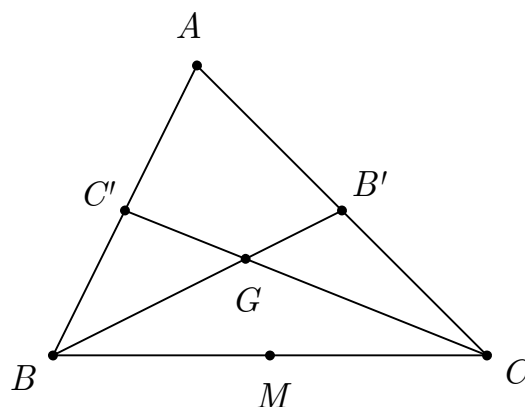
Mặt khác, $C' \in CC'$ nên ta được: $\frac{b+3}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$ hay $B(-3; -1)$.

Tương tự, B' là trung điểm của AC $B' \left(\frac{c+1}{2}; 2 \right)$

Mặt khác $B' \in BB'$ nên $\frac{c+1}{2} - 2 \cdot 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 5$ hay $C(5; 1)$.

Câu 28: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với Oxy , cho tam giác ABC biết phương trình cạnh $BC: x-2y=5=0$, phương trình đường trung tuyến $BB': y-2=0$ và phương trình đường trung tuyến $CC': 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải



Do $B = BB' \cap BC$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y-2=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$, ta được

$B(-1; 2)$.

Tương tự, $C = CC' \cap BC$, ta được $C(3; 4)$.

Gọi G là giao điểm của BB' và CC' , khi đó $G(2; 2)$.

Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $M(1; 3)$ và $\overrightarrow{GM} = (-1; 1)$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $A(x; y)$ thỏa mãn:

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=3 \cdot (-1) \\ 3-y=3 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}, \text{ ta được } A(4;0).$$

Câu 29: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;5), B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A .

Lời giải

Đường thẳng AC đi qua hai điểm A, C nên AC có phương trình $2x + y - 7 = 0$.

Tương tự $AB: 2x - y + 3 = 0$

Phương trình đường phân giác góc A là: $\frac{|2x+y-7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2x-y+3|}{\sqrt{4+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} y-5=0 \\ x-1=0 \end{cases}$.

Xét phân giác $d_1: y-5=0$. Ta có

$P(B; d_1) = -10, P(C; d_1) = -6$ nên suy ra B và C nằm cùng phía đối với d_1 , suy ra d_1 là phân giác ngoài.

Từ đó suy ra $d_2: x-1=0$ là phân giác trong góc A .

Câu 30: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;-4)$ và hai đường phân giác trong của góc B và C có phương trình lần lượt là $d_1: x+y-2=0, d_2: x-3y-6=0$. Tìm tọa độ điểm B và C .

Lời giải

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua phân giác d_1 .

Suy ra tọa độ điểm $A_1(x; y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} - 3 \cdot \frac{y-4}{2} - 6 = 0 \\ 3(x-2) + 1 \cdot (y+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}. \text{ Ta được } A_1\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua phân giác d_2 , tương tự $A_2(6;0)$.

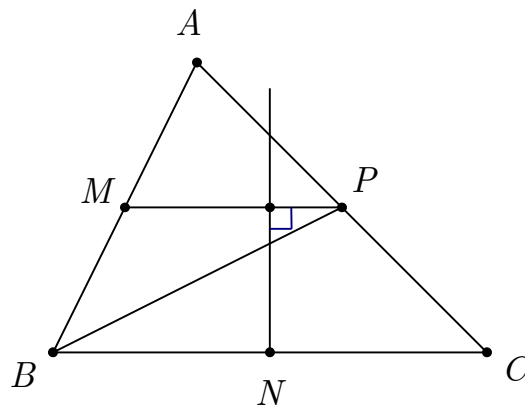
Đường thẳng BC đi qua hai điểm A_1, A_2 nên BC có phương trình $x+7y-6=0$.

$$B = d_1 \cap BC \text{ nên tọa độ của } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x+y-2=0 \\ x+7y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ ta được } B\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Tương tự $C = d_2 \cap BC$ nên ta được $C(6;0)$.

Câu 31: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết trung điểm các cạnh AB, BC và CA lần lượt là: $M(-1;1), N(0;-3)$ và $P(3;-1)$. Viết phương trình đường trung trực của đoạn BC .

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{MP} = (4; -2)$.

Vì M, P là trung điểm của AB, AC nên MP là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra $MP \parallel BC$

Do đó trung trực đoạn BC qua $N(0; -3)$ và nhận $\overrightarrow{MP}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $4(x-0) - 3(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$

Câu 32: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 4), B(4; 1)$ và $C(-2; -1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.

Lời giải

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác ABC .

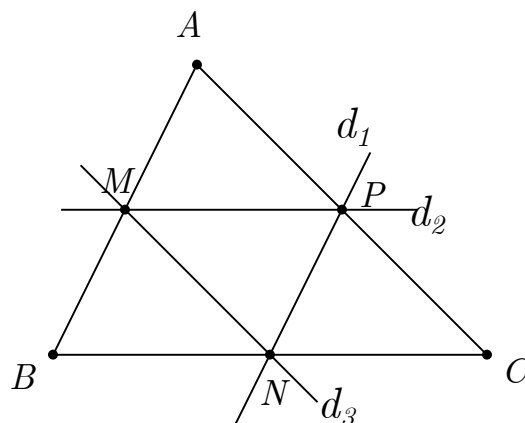
Ta có $\overrightarrow{AH} = (x+2; y-4), \overrightarrow{BC} = (-6; -2), \overrightarrow{BH} = (x-4; y-1), \overrightarrow{AC} = (0; -5)$.

Do H là trực tâm nên ta được $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2) \cdot (-6) + (y-4) \cdot (-2) = 0 \\ (x-4) \cdot 0 + (y-1) \cdot (-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy $H(-1; 1)$.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có các đường trung bình nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: 2x - y + 1 = 0, d_2: x + 4y - 13 = 0, d_3: x - 3y - 1 = 0$. Viết phương trình cạnh AB .

Lời giải



Giả sử d_1 song song với AB , d_2 song song với BC , d_3 song song với CA .

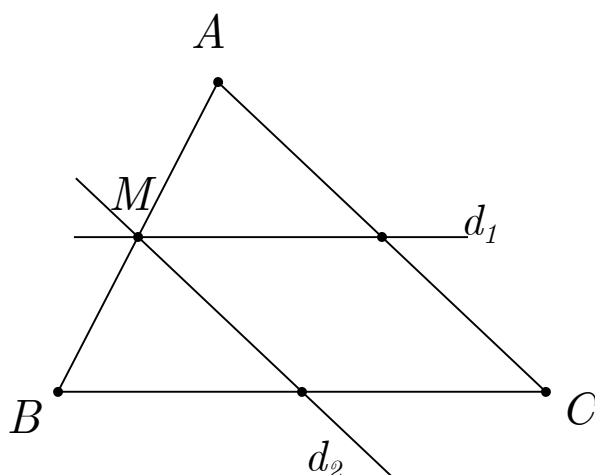
Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó $M = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ $M(x; y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x + 4y - 13 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ ta được } M(5; 2).$$

Đường thẳng AB đi qua M và song song với d_1 nên có phương trình $2x - y - 8 = 0$.

Câu 34: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có hai đường trung bình kẻ từ trung điểm M của AB nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: x - 4y + 7 = 0, d_2: 3x - 2y - 9 = 0$ và tọa độ điểm $B(7; 1)$. Tìm tọa độ điểm C .

 **Lời giải**



TH1: Giả sử d_1 song song với BC , d_2 song song với AC .

Tọa độ $M(x; y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ 3x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$, ta được $M(5; 3)$.

Đường thẳng AC đi qua A và song song với d_2 nên có phương trình: $3x - 2y + 1 = 0$.

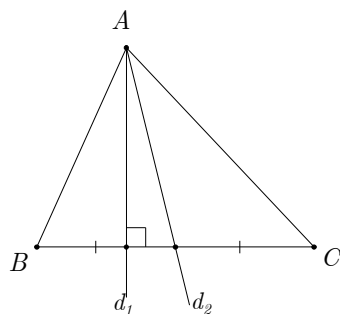
Đường thẳng BC đi qua B và song song với d_1 nên có phương trình: $x - 4y - 3 = 0$.

Ta có $C = AC \cap BC$ nên tọa độ điểm $C(x; y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ x - 4y - 3 = 0 \end{cases}$, ta được $C(-1; -1)$

TH2: Giả sử d_1 song song với AC , d_2 song song với BC . Tương tự TH1 ta được $C(11; 7)$.

Câu 35: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $C(4; -1)$, đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $d_1: 2x - 3y + 12 = 0, d_2: 2x + 3y = 0$. Tìm tọa độ điểm B .

 **Lời giải**



Ta có $A = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ điểm $A(x; y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$, ta được

$A(-3; 2)$

Đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với d_1 nên có phương trình $3x + 2y - 10 = 0$.

Gọi M là trung điểm BC , suy ra $M = BC \cap d_2$ nên tọa độ điểm M là $(6; -4)$.

Suy ra $B(8; -7)$.

Câu 36: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 1)$, đường cao qua đỉnh B và đường trung tuyến qua đỉnh C lần lượt có phương trình $d_1: x - 3y - 7 = 0, d_2: x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C .

Lời giải

Điểm $B \in d_1$ nên tọa độ của B có dạng $(3b + 7; b)$.

Gọi M là trung điểm AB , suy ra $M\left(\frac{3b+9}{2}; \frac{b+1}{2}\right)$.

Mặt khác, $M \in d_2$ nên $\frac{3b+9}{2} + \frac{b+1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -3$.

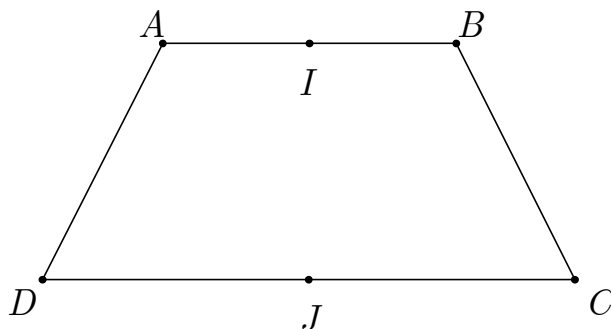
Suy ra $B(-2; -3)$.

Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc d_1 nên có phương trình $3x + y - 7 = 0$.

Ta có $C = AC \cap d_2$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$, ta được $C(4; -5)$.

Câu 37: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(10; 5), B(15; -5), D(-20; 0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó AB song song với CD . Tìm tọa độ điểm C .

Lời giải



Đường thẳng CD đi qua $D(-20;0)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (5; -10)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $2x + y + 40 = 0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD

Ta có $I\left(\frac{25}{2}; 0\right)$ và $IJ \perp CD$.

Phương trình đường thẳng IJ là $2x - 4y - 25 = 0$.

Mà $J = IJ \cap CD$ nên tọa độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y + 40 = 0 \\ 2x - 4y - 25 = 0 \end{cases}$, ta được $J\left(\frac{-27}{2}; -13\right)$.

Theo tính chất hình thang cân thì J là trung điểm của CD , suy ra $C(-7; -26)$.

Câu 38: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ với AB song song CD và $AB < CD$. Biết các đỉnh $A(0; 2), D(-2; 2)$, giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên các đường thẳng $d: x + y - 4 = 0$ sao cho $\widehat{AID} = 45^\circ$. Tìm tọa độ điểm B và C .

Lời giải

Do $I \in d$ nên $I(t; 4-t)$ Ta có $AD = 2\sqrt{5}$, $IA = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$, $ID = \sqrt{2t^2 - 8t + 40}$.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin cho tam giác AID ta được

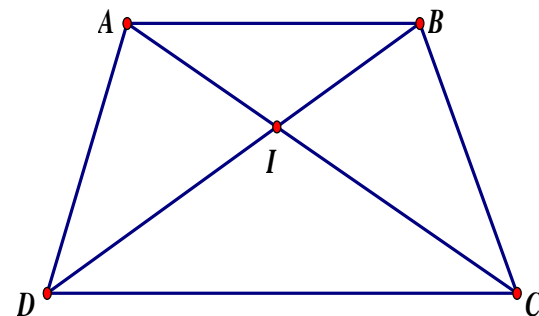
$$\cos \widehat{AID} = \frac{IA^2 + ID^2 - AD^2}{2IA \cdot ID}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t^2 - 3t + 6}{\sqrt{t^2 - 4t + 20} \cdot \sqrt{t^2 - 2t + 2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta được $I(2; 2)$ và $IA = 2, ID = 4\sqrt{2}$.

Do đó $\overrightarrow{ID} = -\frac{ID}{IB} \cdot \overrightarrow{IB} = -2\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{IB}$ suy ra $B(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ và $C(2 + 4\sqrt{2}; 2 + 4\sqrt{2})$.

Tương tự với $t = 4$ ta tìm được $B(4 + 3\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và $C(4 + 4\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.



Câu 39: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, biết hai đường chéo

AC và CD lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x - 3y + 9 = 0$, $d_2: x + 3y - 3 = 0$ và phương trình đường thẳng

$AB: x - y + 9 = 0$. Tìm tọa độ điểm C .

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình bình hành. Ta có $I = AC \cap BD$ nên tọa độ điểm $I(x; y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x - 3y + 9 = 0 \\ x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-3; 2).$$

Do $A = AB \cap AC$ nên tọa độ điểm $A(x; y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y + 9 = 0 \\ x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-9; 0)$

Hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên I là trung điểm AC suy ra $C(3;4)$

Câu 40: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x - y - 4 = 0$, $d_2: 2x + y - 2 = 0$, và hai điểm $A(7;5)$, $B(2;3)$. Tìm điểm trên đường thẳng d_1 và điểm trên đường thẳng d_2 sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Do $C \in d_1$ nên $C(c; c-4)$ và $D \in d_2$ nên $D(d; 2-2d)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5; -2)$, $\overrightarrow{DC} = (c-d; c+2d-6)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} c-d = -5 \\ c+2d-6 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ d = 3 \end{cases}$

Vậy $C(-2; -6)$, $D(3; -4)$

Câu 41: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $A(0; -1)$, $B(2; 1)$ và tâm I thuộc đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C .

Lời giải.

Do $I \in d$ nên $I(t; 1-t)$. Ta có $\overrightarrow{AI} = (t; 2-t)$, $\overrightarrow{BI} = (t-2; -t)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi, suy ra $AI \perp BI$ nên $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow t(t-2) + (2-t)(-t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$.

Với $t = 0$ thì $I(0; 1)$. Do là trung điểm của AC nên suy ra $C(0; 3)$.

Với $t = 2$ thì $I(2; -1)$. Do là trung điểm của AC nên suy ra $C(4; -1)$.

Câu 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: x - 2y + 4 = 0$, phương trình cạnh $AD: 2x - y + 2 = 0$. Điểm $M(2; 2)$ thuộc đường thẳng BD . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2)$.

Phương trình các đường phân giác góc A là $\frac{x-2y+4}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2x-y+2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1: x+y-2=0 \\ d_2: x-y+2=0 \end{cases}$.

Trường hợp $d_1: x+y-2=0$.

Đường thẳng BD đi qua M và vuông góc với d_1 nên có phương trình $x-y=0$.

Do $B = BD \cap AD$ nên tọa độ điểm $B(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow B(4; 4)$.

Do $I = BD \cap d_1$ nên tọa độ điểm $I(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1)$.

Vì C đối xứng với A qua I nên $C(2; 0)$.

Trường hợp $d_2: x - y + 2 = 0$. Tương tự như trường hợp 1.

Câu 43: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng

$$d(I, AB) = \frac{\left|\frac{1}{2} - 2 \cdot 0 + 2\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với AB nên $d: 2x + y - 1 = 0$.

Gọi B là hình chiếu vuông góc của I trên AB . Khi đó tọa độ điểm B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(0; 1).$$

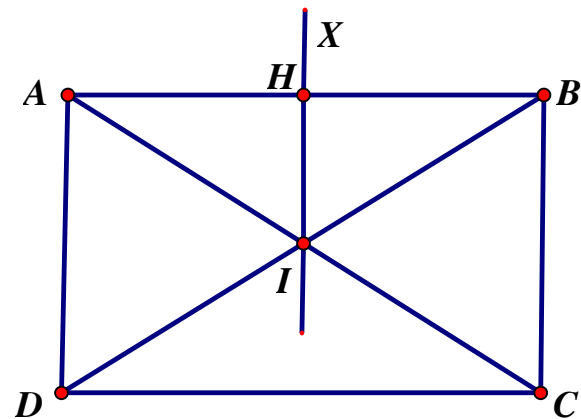
Do $A \in AB$ nên $A(2a - 2; a)$ với $a < 1$. Từ giả thiết $AB = 2AD$, suy ra

$$AH = 2d(I, AB) \Leftrightarrow \sqrt{(2 - 2a)^2 + (1 - a)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1 - a| = 1 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = 2 \text{ (loại)}.$$

Suy ra $A(-2; 0)$, do H là trung điểm AB nên $B(2; 2)$.

Hơn nữa I là trung điểm AC và BD nên $C(3; 0)$, $D(-1; -2)$.

Vậy $A(-2; 0)$, $B(2; 2)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -2)$.



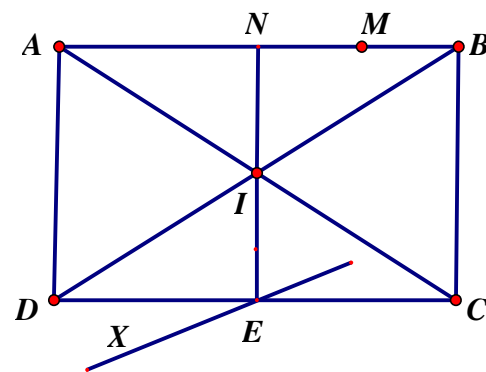
Câu 44: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6; 2)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD . Điểm $M(1; 5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB .

Lời giải.

Do $E \in d$ nên $E(t; 5 - t)$. Gọi N là trung điểm AB , suy ra I là trung điểm NE nên $N(12 - t; t - 1)$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (11 - t; t - 6)$, $\overrightarrow{IE} = (t - 6; 3 - t)$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{IE} = 0 \Leftrightarrow (11 - t)(t - 6)(t - 6)(3 - t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 7 \end{cases}.$$

* Với $t = 6$ suy ra $N(6; 5)$. Đường thẳng AB đi qua hai điểm M và N nên có phương trình $AB: y = 5$.



* Với $t=7$ suy ra $N(5;6)$. Đường thẳng AB đi qua hai điểm M và N nên có phương trình $AB: x-4y+19=0$.

Câu 45: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;1)$ và $M(4;2)$ là trung điểm cạnh BC . Tìm tọa độ điểm B .

Lời giải.

Giả sử $\overrightarrow{n_{AB}} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB . Suy ra đường thẳng BC có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = (b; -a)$.

Đường thẳng AB đi qua $A(1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}} = (a; b)$ nên

$$AB: a(x-1) + b(y-1) = 0 \text{ hay } ax + by - a - b = 0.$$

Đường thẳng BC đi qua $M(4;2)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = (b; -a)$ nên

$$BC: b(x-4) - a(y-2) = 0 \text{ hay } bx - ay + 2a - 4b = 0.$$

$$\text{Ta có } AB = d(A, BC) = \frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ và } BC = 2d(M, AB) = 2 \frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\text{Vì là hình vuông nên } AB = BC \Leftrightarrow |a-3b| = 2|3a+b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ b = 7a \end{cases}.$$

Với $b = -a$ chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Ta được $AB: x-y=0$ và $BC: x+y-6=0$.

$$\text{Tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow B(3;3).$$

Với $b = 7a$ chọn $a=1$ suy ra $b=7$. Ta được $AB: x+7y-8=0$ và $BC: 7x-y-26=0$.

$$\text{Tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x+7y-8=0 \\ 7x-y-26=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{19}{5}; \frac{3}{5}\right).$$

Câu 46: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ trong đó thuộc đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và C, D nằm trên đường thẳng $d_2: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm C , biết hình vuông có diện tích bằng 5 và có hoành độ dương.

Lời giải.

Do $A \in d_1$ nên $A(a; 1-a)$ với $a > 0$. Theo giả thiết bài toán, ta có

$$S_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow d(A, d_2) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|2a - (1-a) + 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = -\frac{7}{3} \text{ (loại)}.$$

Với $a=1$, suy ra $A(1;0)$.

Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với CD nên có phương trình $AD: x+2y-1=0$.

$$\text{Tọa độ điểm } D \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow D(-1;1).$$

Do $C \in d_2$ nên $C(c; 2c+3)$. Suy ra $\overrightarrow{CD} = (-1-c; -2-2c)$. Ta có

$$CD = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-c)^2 + (-2-2c)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-1-c| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $C(0;3)$ hoặc $C(-2;-1)$.

Câu 47: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho MA nhỏ nhất.

Lời giải:

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$.

Khi đó $\overline{AM} = (3-2m;m-4)$, suy ra $AM = \sqrt{(3-2m)^2 + (m-4)^2} = \sqrt{5m^2 - 20m + 25}$

Ta có $\sqrt{5m^2 - 20m + 25} = \sqrt{5(m-2)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=2$

Vậy $M(0;2)$ và giá trị nhỏ nhất của AM bằng $\sqrt{5}$

Câu 48: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Lời giải:

Phương pháp đại số: Đường thẳng d đi qua $A(1;4)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ nên có phương trình

$d: a(x-1) + b(y-4) = 0$ hoặc $ax + by - a - 4b = 0$

Khoảng cách từ B đến đường thẳng d được xác định $d(B,d) = \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Nếu $a=0$ thì $d(B,d)=1$

Nếu $b=0$ thì $d(B,d)=2$

Khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$ ta chọn $b=1$

Suy ra $d(B,d) = \frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} = |f(a)|$, với $f(a) = \frac{2a+1}{\sqrt{a^2+1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Shwarz, ta có $(2a+1)^2 \leq (2^2+1^2)(a^2+1^2) \Rightarrow \frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} \leq \sqrt{5}$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} f(a) = \sqrt{5}$, xảy ra khi $a=2$.

So sánh các trường hợp, ta được $d(B,d)$ lớn nhất khi $a=2$, $b=1$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d: 2x+y-6=0$

Cách 2: Phương pháp hình học:

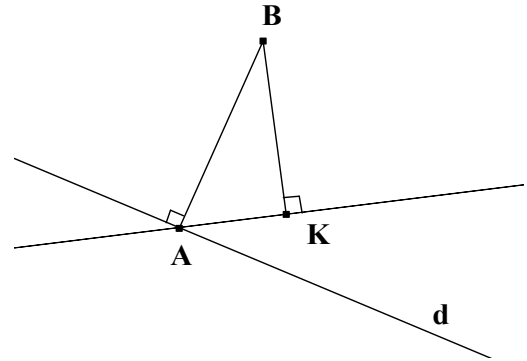
Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng d .

Khi đó $d(B, d) = BK$.

Xét tam giác ABK vuông tại K , ta có

$$d(B, d) = BK \leq AB = \sqrt{5} \quad (\text{BĐT tam giác mở rộng}).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K \equiv A$.



Khi đó d được xác định là đi qua $A(1;4)$ và vuông góc với AB nên nhận $\overrightarrow{AB} = (2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d: 2x + y - 6 = 0$

Câu 49: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$ và $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có: $P(A, d) \cdot P(B, d) = (x_A + 2y_A - 4)(x_B + 2y_B - 4) = 5 \cdot 10 > 0$

Suy ra hai điểm A và B cùng phía so với đường thẳng d .

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d .

Khi đó tọa độ điểm $A'(x; y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2(x-1) - 1(y-4) = 0 \\ \frac{x+1}{2} + 2 \cdot \frac{y+4}{2} - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1; 0).$$

Khi đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 3\sqrt{10}$ (BĐT tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: A', M, B thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng $A'B$.

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1; 0)$ và $B(8; 3)$ nên có phương trình $A'B: x - 3y + 1 = 0$.

Mặt khác, theo giả thiết M thuộc d nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1)$$

! Câu toán này dùng cho hai điểm khác phía so với d . Nếu đề bài đã cho A và B khác phía với d thì ta không làm bước lấy đối xứng.

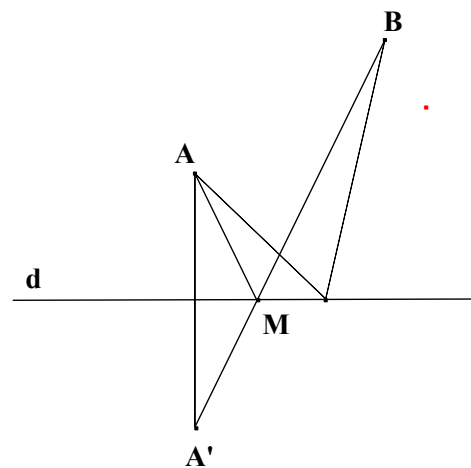
Câu 50: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (7; -1)$; suy ra $AB = \sqrt{50}$. Chu vi tam giác ABM là:

$$C_{\triangle ABM} = MA + MB + AB = MA + MB + \sqrt{50}$$

Để $C_{\triangle ABM}$ nhỏ nhất khi $MA + MB$ nhỏ nhất. Bạn đọc làm tương tự như bài trên.



Câu 51: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(3;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải:

Ta có $P(A, d) \cdot P(B, d) = (x_A + 2y_A - 4)(x_B + 2y_B - 4) = 5 \cdot 3 > 0$

Suy ra hai điểm A và B cùng phía so với đường thẳng d .

Theo bất đẳng thức tam giác mở rộng, ta có

$$|MA - MB| \leq AB = 2\sqrt{2}.$$

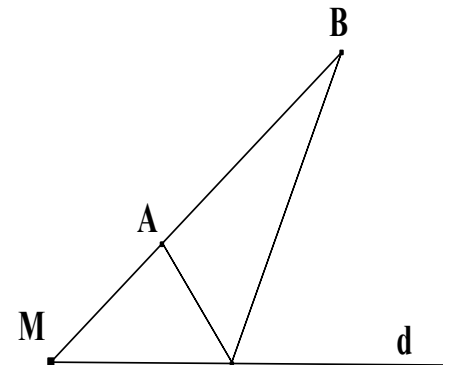
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, M, B thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng AB .

Đường thẳng AB đi qua $A(1;4)$ và $B(3;2)$ nên có phương trình $AB: x + y - 5 = 0$.

Mặt khác, theo giả thiết M thuộc d nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(6; -1).$$

! Câu toán này dùng cho hai điểm cùng phía so với d . Nếu đề bài đã cho A và B khác phía với d thì ta lấy đối xứng một trong hai điểm A hoặc B qua d .



Câu 52: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(9;0)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(4 - 2m; m)$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (2m - 3; 4 - m)$; $\overrightarrow{MB} = (2m + 5; -m)$, suy ra $3\overrightarrow{MB} = (6m + 15; -3m)$

Do đó $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (8m + 12; 4 - 4m)$. Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| &= \sqrt{(8m + 12)^2 + (4 - 4m)^2} = \sqrt{80m^2 + 160m + 160} = 4\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 2m + 2} \\ &= 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{(m + 1)^2 + 1} \geq 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{1} = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Câu 53: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(8; \frac{1}{2})$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $5MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(4 - 2m; m)$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (2m - 3; 4 - m)$, suy ra $5MA^2 = 5[(2m - 3)^2 + (4 - m)^2]$;

$$\overrightarrow{MB} = \left(2m + 4; \frac{1}{2} - m\right), \text{ suy ra } 2MB^2 = 2\left[\left(2m + 4\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - m\right)^2\right].$$

$$\text{Do đó } 5MA^2 + 2MB^2 = 35m^2 - 70m + \frac{315}{2} = 35(m-1)^2 + \frac{245}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $M(2;1)$ và $5MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{245}{2}$.

Câu 54: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 2y - 2 = 0$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(-1;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

Lời giải:

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(2m+2; m)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (1-2m; 4-m)$, suy ra $MA^2 = (1-2m)^2 + (4-m)^2$;

$\overrightarrow{MB} = (-3-2m; 2-m)$, suy ra $2MB^2 = 2[(-3-2m)^2 + (2-m)^2]$.

$$\text{Do đó: } MA^2 - 2MB^2 = -5m^2 - 28m - 9 = -5\left(m + \frac{14}{5}\right)^2 + \frac{151}{5} \leq \frac{151}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -\frac{14}{5}$.

Vậy $M\left(-\frac{18}{5}; -\frac{14}{5}\right)$ và $MA^2 - 2MB^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{151}{5}$.

Câu 55: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B thuộc Ox có hoành độ

không âm và điểm C thuộc Oy có tung độ không âm sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm

tọa độ điểm B và C sao cho diện tích tam giác ABC .

a) Lớn nhất

b) Nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với điều kiện $b^2 + c^2 \neq 0$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (b-2;1)$, $\overrightarrow{AC} = (2;c-1)$. Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2) \cdot 2 + 1 \cdot (c-1) = 0 \Leftrightarrow 2b + c - 5 = 0$ (*). Từ (*) suy ra

$b = \frac{5-c}{2}$, do $c \geq 0$ nên $b \leq \frac{5}{2}$. Vậy $0 \leq b \leq \frac{5}{2}$. Ta có:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{4 + (c-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{4 + 4(b-2)^2} = (b-2)^2 + 1.$$

a) Khảo sát hàm số bậc hai $f(b) = (b-2)^2 + 1$ trên $\left[0; \frac{5}{2}\right]$, ta tìm được $\max_{\left[0; \frac{5}{2}\right]} f(b) = f(0) = 5$.

Với $b = 0$, suy ra $c = 5$. Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ và diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng 5.

b) Ta có $S_{\triangle ABC} = (b-2)^2 + 1 \geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = 2$, suy ra $c = 1$. Vậy $B(2;0)$, $C(0;1)$ và diện tích tam giác

ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 56: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3;2)$ cắt tia Ox tại A và tia Oy tại B sao cho diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(3;2)$ và cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại A và B khác O , nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a > 0$, $b > 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Đường thẳng d đi qua $M(3;2)$ nên $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}|a| \cdot |b| = \frac{1}{2}ab$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta được $1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{6}{ab}} = 2\sqrt{\frac{3}{S_{\Delta OAB}}}$, suy ra $S_{\Delta OAB} \geq 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

Câu 57: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA + OB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ nên có phương trình $d: a(x-4) + b(y-1) = 0$ hay $ax + by - 4a - b = 0$. Khi đó $d \cap Ox = A\left(\frac{4a+b}{a}; 0\right)$ và $d \cap Oy = B\left(0; \frac{4a+b}{b}\right)$.

Điều kiện: $\frac{4a+b}{a} > 0$; $\frac{4a+b}{b} > 0$.

Ta có

$$OA + OB = \left| \frac{4a+b}{a} \right| + \left| \frac{4a+b}{b} \right| = \frac{4a+b}{a} + \frac{4a+b}{b} = 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b} \Leftrightarrow b^2 = 4a^2$. Ta chọn $a = 1$, suy ra $b = 2$. Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: x + 2y - 6 = 0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và cắt các chiều dương Ox , Oy lần lượt tại A và B nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a > 0$, $b > 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ nên $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Ta có $OA + OB = |a| + |b| = a + b$.

Áp dụng BDT Bunhiacopski, ta được

$$\left(\sqrt{\frac{4}{a}} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{b}} \cdot \sqrt{b} \right)^2 \leq \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \right) (a + b) = a + b \quad (\text{do } \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1).$$

Suy ra $a+b \geq 9$ hay $OA+OB \geq 9$. Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4}{a}} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{b}} : \sqrt{b} \\ \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$.

Câu 58: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B sao cho $12OA+9OB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ nên có phương trình $d: a(x-3)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-3a-b=0$.

Khi đó $d \cap Ox = A\left(\frac{3a+b}{a}; 0\right)$ và $d \cap Oy = B\left(0; \frac{3a+b}{b}\right)$.

Điều kiện $\frac{3a+b}{a} > 0; \frac{3a+b}{b} > 0$.

Ta có

$$12OA+9OB=12\left|\frac{3a+b}{a}\right|+9\left|\frac{3a+b}{b}\right|=12\cdot\frac{3a+b}{a}+9\cdot\frac{3a+b}{b}=45+\frac{12b}{a}+\frac{27a}{b} \geq 45+2\sqrt{\frac{12b}{a} \cdot \frac{27a}{b}}=81$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{12b}{a} = \frac{27a}{b} \Leftrightarrow 4b^2 = 9a^2$. Ta chọn $a=2$, suy ra $b=3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: 2x+3y-9=0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ nên $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Ta có: $12OA+9OB=12|a|+9|b|=12a+9b$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{12a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot 3\sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right)(12a+9b) = 12a+9b.$$

Suy ra: $12a+9b \geq 81$ hay $12OA+9OB \geq 81$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} : \sqrt{12a} = \frac{1}{\sqrt{b}} : 3\sqrt{b} \\ \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: \frac{2x}{9} + \frac{y}{3} = 1$.

Câu 59: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d . Tam giác OAB vuông tại H nên

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} \geq \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{25}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và vuông góc với OM nên nhận $\overrightarrow{OM} = (-4;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng d : $4x - 3y + 25 = 0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B khác O nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a \neq 0$, $b \neq 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ nên $\frac{-4}{a} + \frac{3}{b} = 1$. Ta có $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{-4}{a} + \frac{3}{b}\right)^2 \leq [(-4)^2 + 3^2] \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Suy ra $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{25}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} -4 : \frac{1}{a} = 3 : \frac{1}{b} \\ \frac{-4}{a} + \frac{3}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{25}{4} \\ b = \frac{25}{3} \end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: \frac{-4x}{25} + \frac{3y}{25} = 1$.

Cách 3. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ nên có phương trình $d: a(x+4) + b(y-3) = 0$ hay $ax + by + 4a - 3b = 0$.

Khi đó $d \cap Ox = A\left(\frac{3b-4a}{a}; 0\right)$ và $d \cap Oy = B\left(0; \frac{3b-4a}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2}{(3b-4a)^2} + \frac{b^2}{(3b-4a)^2} = \frac{a^2 + b^2}{(3b-4a)^2} \geq \frac{a^2 + b^2}{(3^2 + 4^2)(b^2 + a^2)} = \frac{1}{25}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{b} = \frac{-4}{a} \Leftrightarrow 3a = -4b$. Chọn $a = 4$, suy ra $b = -3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: 4x - 3y + 25 = 0$.

Câu 60: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B khác O

nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a \neq 0$, $b \neq 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ nên $\frac{2}{a} - \frac{1}{b} = 1$. Ta có $\frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} = \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{b}\right)^2 \leq \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right).$$

$$\text{Suy ra } \frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} = \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} \geq \frac{36}{25}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{2}{3} : \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} : \frac{2}{b} \\ \frac{2}{a} - \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{25}{8} \\ b = -\frac{25}{9} \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: \frac{8x}{25} - \frac{9y}{25} = 1$.

Cách 2. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ nên có phương trình $d: a(x-4) + b(y+1) = 0$ hay $ax + by - 2a + b = 0$.

Khi đó $d \cap Ox = A\left(\frac{2a-b}{a}; 0\right)$ và $d \cap Oy = B\left(0; \frac{2a-b}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} = \frac{9a^2}{(2a-b)^2} + \frac{4b^2}{(2a-b)^2} = \frac{9a^2 + 4b^2}{(2a-b)^2} = \frac{9a^2 + 4b^2}{\left(\frac{2}{3} \cdot 3a - \frac{1}{2} \cdot 2b\right)^2} \geq \frac{9a^2 + 4b^2}{\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\right)(9a^2 + 4b^2)} = \frac{36}{25}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{3} : 3a = -\frac{1}{2} : 2b$. Chọn $a = 8$, suy ra $b = -9$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: 8x - 9y - 25 = 0$.

Câu 61: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(0;2)$ và hai đường $d_1: 3x + y + 2 = 0$, $d_2: x - 3y + 4 = 0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 . Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1 , d_2 lần lượt tại B , C (B và C khác A) sao cho $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tọa độ giao điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;1).$

Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (3;1)$; Đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1;-3)$.

Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Suy ra $d_1 \perp d_2$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d .

Tam giác ABC vuông tại A nên

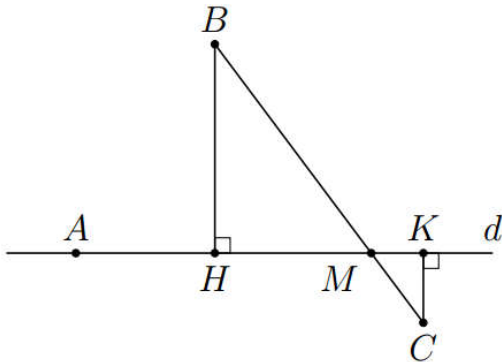
$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \geq \frac{1}{AM^2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ và vuông góc với $\overrightarrow{AM}$ nên nhận $\overrightarrow{AM} = (1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$.

Câu 62: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$ và $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến d là lớn nhất.

Lời giải

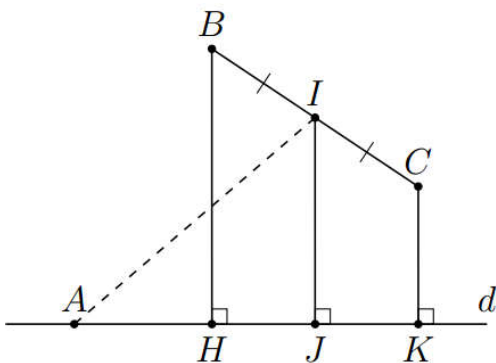
Trường hợp 1.



Giả sử d cắt BC tại M . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d . Ta có $d(B, d) + d(C, d) = BH + CK \leq BM + CM = BC$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi d vuông góc với BC .

Trường hợp 2.



Giả sử d không cắt BC . Gọi I là trung điểm BC . Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C và I trên d . Ta có $d(B, d) + d(C, d) = BH + CK = 2IJ \leq 2AI$.

Dấu “=” xảy ra khi d vuông góc với AI . Bây giờ ta so sánh BC và $2AI$. Vì I là trung điểm BC nên $I(5;6)$. Ta có $2AI = 2\sqrt{41} > BC = 4\sqrt{5}$. Vậy đường thẳng d cần tìm qua $A(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{AI} = (4;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên $d: 4x + 5y - 9 = 0$.

Chú ý: Nếu $BC > 2AI$ thì đường thẳng d cần tìm qua A , có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC}$.

Câu 63: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có phương trình cạnh $AB: x + 2y - 2 = 0$, phương trình cạnh $AC: 2x + y + 1 = 0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn BC . Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đường thẳng AB có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (1; 2)$; Đường thẳng AC có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{AC} = (2; 1)$. Giả sử đường thẳng BC có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{BC} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Do đó $BC: a(x-1) + b(y-2) = 0$ hay $ax + by - a - 2b = 0$.

Tam giác ABC cân tại A nên

$$\cos \widehat{ABC} = \cos \widehat{ACB} \Leftrightarrow |\cos(\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{BC})| = |\cos(\vec{n}_{AC}, \vec{n}_{BC})| \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = b \end{cases}$$

• Với $a = -b$, chọn $b = -1$ suy ra $a = 1$. Ta được $BC: x - y + 1 = 0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; 1)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MB} = (-1; -1)$, $\overrightarrow{MC} = \left(-\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. Suy ra M không thuộc đoạn BC .

• Với $a = b$, chọn $a = 1$ suy ra $b = 1$. Ta được $BC: x + y - 3 = 0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4; -1)$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-4; 7)$.

Ta có $\overrightarrow{MB} = (3; -3)$, $\overrightarrow{MC} = (-5; 5)$. Suy ra M thuộc đoạn BC .

Gọi trung điểm của BC là $I(0; 3)$. Ta có

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC}) = DI^2 - \frac{BC^2}{4} \geq -\frac{BC^2}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $D \equiv I$. Vậy $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ nhỏ nhất khi $D(0; 3)$.

Câu 64: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0; 1)$, $B(2; -1)$ và hai đường thẳng có phương trình $d_1: (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$, $d_2: (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại P . Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất.

 **Lời giải**

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + (m-2)y = m-2 \\ (2-m)x + (m-1)y = -3m+5 \end{cases}$

Ta có $D = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix} = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy d_1 và d_2 luôn cắt nhau.

Ta có $A(0; 1) \in d_1$, $B(2; -1) \in d_2$ và $d_1 \perp d_2$. Suy ra tam giác APB vuông tại P nên P nằm trên đường tròn đường kính AB .

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $(PA + PB)^2 \leq (1^2 + 1^2)(PA^2 + PB^2) = 2AB^2 = 16$. Suy



ra $PA + PB \leq 4$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $PA = PB$.

Với $PA = PB$ suy ra P là trung điểm của cung AB trong đường tròn đường kính AB . Đường tròn đường kính AB có phương trình $(C): (x-1)^2 + y^2 = 2$. Gọi Δ là trung trực của đoạn AB , suy ra Δ qua tâm $I(1;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (2; -2)$ nên có phương trình $\Delta: x - y - 1 = 0$.

Khi đó tọa độ điểm P thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow P(2;1) \text{ hoặc } P(0;-1).$$

Với $P(2;1)$, thay vào d_1 ta được $m = 1$; Với $P(0;-1)$, thay vào d_1 ta được $m = 2$.

Vậy $PA + PB$ lớn nhất khi $m = 1$ hoặc $m = 2$.

----- TOANMATH.com -----

