SKILL ĐỈNH KOUT

CHUYÊN ĐỀ LOGARIT – HÀM ĐẶC TRƯNG MŨ-LOGA

(tự luận + tư duy + mẹo + casio)

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \le x \le 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^y$.

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 7.

- *Tự luận:*

Ta có: $x + x^2 - 9^y = 3^y \Leftrightarrow x + x^2 = 3^y + (3^y)^2$ (1).

Xét hàm $f(t) = t + t^2, (t > 0)$.

Ta có: $f'(t) = 1 + 2t > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy, (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(3^y) \Leftrightarrow x = 3^y$.

Theo giả thiết, $1 \le x \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le 3^y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le y \le log_3 2020$.

Vì y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 9; 27; 81; 243; 729\}$.

Vậy có 7 cặp $(x; y)$ thỏa mãn. Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

Ta có: $x + x^2 - 9^y = 3^y \Leftrightarrow x + x^2 = 3^y + (3^y)^2 \Leftrightarrow x = 3^y$.

Theo giả thiết, $1 \le x \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le 3^y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le y \le log_3 2020$

Vì y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 9; 27; 81; 243; 729\}$.

Vậy có 7 cặp $(x; y)$ thỏa mãn. Chọn D

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in [5; 37]$ và $\sqrt{x} = y^2 + 2y - x + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2}$.

A. 32. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 33.

- *Tự luận:*

$\sqrt{x} = y^2 + 2y - x + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} = y^2 + 2y + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2}$ (2)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$f'(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(y^2 + 2y + 2) \Leftrightarrow x = y^2 + 2y + 2$.

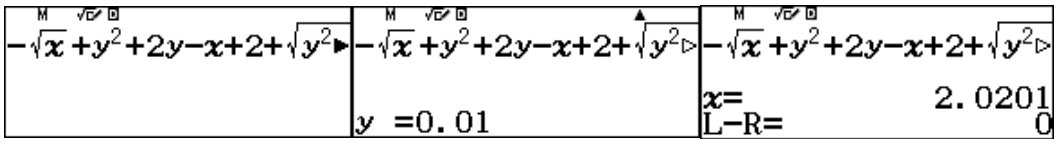
Do $x, y \in [5; 37]$ nên $5 \le y^2 + 2y + 2 \le 37 \Leftrightarrow 4 \le (y+1)^2 \le 36$

$\Leftrightarrow 2 \le y + 1 \le 6 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5.$

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [5; 37]$ nên $y = 5$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị $x = 37 \in [5; 37]$ thoả đề bài. Vậy có 1 cặp số nguyên $(x; y)$ thoả bài toán. Chọn C

- *Tư duy + Casio:*

+ Áp dụng kĩ thuật CALC $y = 0.01 \to x = 2.0201 = y^2 + 2y + 2$.



+ Do $x, y \in [5; 37]$ nên $5 \le y^2 + 2y + 2 \le 37 \Leftrightarrow 4 \le (y+1)^2 \le 36$

$\Leftrightarrow 2 \le y + 1 \le 6 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5.$

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [5; 37]$ nên $y = 5$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị $x = 37 \in [5; 37]$ thoả đề bài. Vậy có 1 cặp số nguyên $(x; y)$ thoả bài toán. Chọn C

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2.2^x + x + sin^2 y = 2^{cos^2 y}$.

A. 4. B. 3. C. 1. D. 0.

- *Tự luận:*

Ta có: $2.2^x + x + sin^2 y = 2^{cos^2 y} \Leftrightarrow 2^{x+1} + x + 1 = 2^{cos^2 y} + cos^2 x$ (3).

Đặt $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t.ln\,2 + 1 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy phương trình (3)$\Leftrightarrow f(x+1) = f(cos^2 x) \Leftrightarrow x + 1 = cos^2 x$

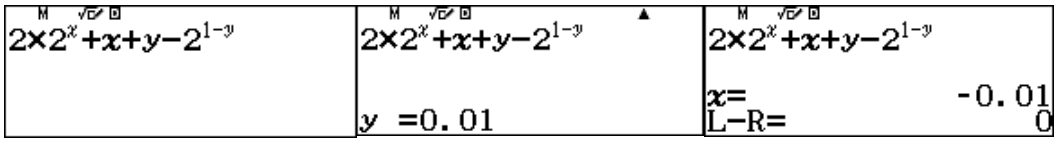
$\Leftrightarrow x = -sin^2 x \Rightarrow x \le 0.$

Mà x là số nguyên dương. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn. Chọn D

- *Casio:*

Ta có: $2.2^x + x + sin^2 y = 2^{cos^2 y} \Leftrightarrow 2.2^x + x + y' = 2^{1-y'}$ (vì $sin^2 y + cos^2 y = 1$)

+ Áp dụng kĩ thuật CALC $y' = 0.01 \to x = -0.01 = -y' = -sin^2 x \Rightarrow x \le 0.$



+ Mà x là số nguyên dương. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn. Chọn D

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le 2020$ và $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y$

A. 2020. B. 2021. C. 2022. D. 2023.

- *Tự luận:*

Ta có: $3^{x+1}+x+1=3^y+y \Leftrightarrow f(x+1)=f(y)$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t \Rightarrow f'(t)=3^t.\ln 3+1>0, \forall t\in R$

Do đó $f(x+1)=f(y) \Leftrightarrow x+1=y \Rightarrow x=y-1$

Vì $0\le x\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le y\le 2021$

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{1;2;3;\ldots;2021\}$

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio:*

+ Ta có: $3^{x+1}+x+1=3^y+y \Leftrightarrow x+1=y \Rightarrow x=y-1$ (tư duy nhanh)

+ Vì $0\le x\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le y\le 2021$

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{1;2;3;\ldots;2021\}$.

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B**

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ có nghiệm thực?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.

- *Tự luận:*

Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x} \Leftrightarrow (m+2^x)+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}+2^x(1)$

Ta có $\sqrt{m+2^x}\ge 0$, $2^x>0$. Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^2+t$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t)=2t+1\ge 0, \forall t\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $0;+\infty)$ do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2^x}\right)=f(2^x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{m+2^x}=2^x \Leftrightarrow m=2^{2x}-2^x$. Đặt $a=2^x, a>0$. Ta có $\Leftrightarrow m=g(a)=a^2-a$.

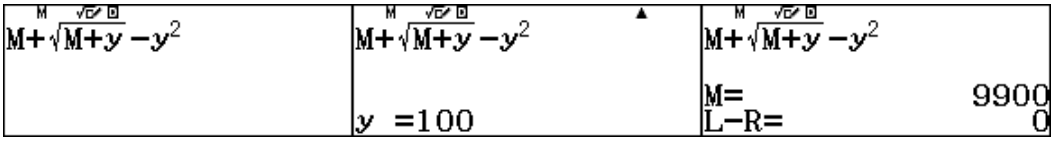
a	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(a)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{4}$, mà m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m\in\{1;2;3;\ldots;2017\}$.Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán. **Chọn A**

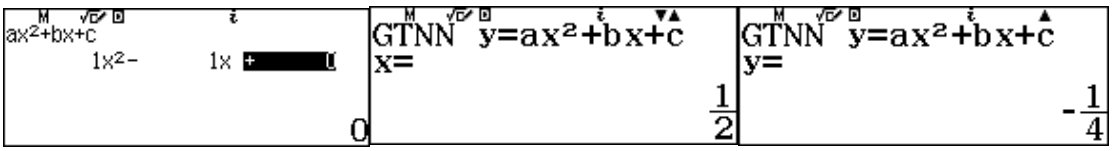
- *Tư duy + Casio:*

+ Ta có phương trình: $log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x \Leftrightarrow m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}$

+ Áp dụng kĩ thuật CALC: Đặt $2^x=y=100 \to m=9900=y^2-y=2^{2x}-2^x$



+ Đặt $a=2^x, a>0$. Ta có $\Leftrightarrow m=g(a)=a^2-a$.



Như vậy: $m \geq -\frac{1}{4}$, mà m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m \in \{1;2;3;\ldots;2017\}$.
Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A**

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện sau $0 \leq y \leq 100$ và $x^6+6x^4y+12x^2y^2-19y^3+3x^2-3y=0$.

A. 10. **B.** 100. **C.** 20. **D.** 21.

- *Tự luận:*

Ta có: $x^6+6x^4y+12x^2y^2-19y^3+3x^2-3y=0$

$\Leftrightarrow x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3-27y^3+3x^2-3y=0$

$\Leftrightarrow x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3+3x^2+6y=27y^3+9y$

$\Leftrightarrow (x^2+2y)^3+3(x^2+2y)=(3y)^3+3.3y$ (2).

Xét hàm $f(t)=t^3+3t$.

Ta có $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy, (2) $\Leftrightarrow f(x^2+2y)=f(3y) \Leftrightarrow x^2+2y=3y \Leftrightarrow x^2=y$.

Theo giả thiết: $0 \leq y \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 100 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10$.

Vì x nguyên nên $x \in \{-10;-9;-8;\ldots 0\ldots 8;9;10\}$, với mỗi x xác định duy nhất giá trị $y=x^2$. Vậy có 21 cặp $(x;y)$ thỏa mãn bài toán. **Chọn D**

- *Tư duy + Casio:*

+ Ta có phương trình: $x^6+6x^4y+12x^2y^2-19y^3+3x^2-3y=0$

+ Áp dụng kĩ thuật – CALC: $Cho\ y=0.01 \to x=0.1=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2=y$

+ Theo giả thiết: $0 \leq y \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 100 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10$.

Vì x nguyên nên $x \in \{-10;-9;-8;\ldots 0\ldots 8;9;10\}$, với mỗi x xác định duy nhất giá trị $y=x^2$. Vậy có 21 cặp $(x;y)$ thỏa mãn bài toán. **Chọn D**

Câu 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện lẫn $x, y \in [3; 48]$ và $(x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5}$ (1).

A. 46. B. 6. C. 45. D. 5.

- *Tự luận:*

$(1) \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{(y+1)+1} = \sqrt{y+1}\sqrt{(x-2)^2+1}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(y+1)+1}}{\sqrt{y+1}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}} = \sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$f'(t) = -\frac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}} < 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow f(y+1) = f((x-2)^2) \Leftrightarrow y+1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 1$

Mà $x, y \in [3; 48]$ nên $3 \le (x-2)^2 - 1 \le 48 \Leftrightarrow 4 \le (x-2)^2 \le 49$

$\Leftrightarrow 2 \le x-2 \le 7 \Leftrightarrow 4 \le x \le 9$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, với mỗi giá trị x cho 1 giá trị y thoả mãn đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x; y)$ thoả đề bài. Chọn B

- *Tư duy + Casio:*

+ Ta có phương trình: $(x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5}$

+ Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $x = 100 \to y = 9603 = x^2 - 4x + 3$.

+ Mà $x, y \in [3; 48]$ nên $3 \le x^2 - 4x + 3 \le 48 \Leftrightarrow 4 \le x \le 9$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, với mỗi giá trị x cho 1 giá trị y thoả mãn đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x; y)$ thoả đề bài. Chọn B

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$.

A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.

- *Tự luận:*

$\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x - 1 = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y.\cos^2 y + 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y.\cos^2 y + 2(\sin^2 y + \cos^2 y)^2$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} + 2(\sin^4 y + \cos^4 y)$ (2).

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t.\ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(t)$ đồng biến $(0; +\infty)$.

Vì vậy (2)$\Leftrightarrow f(log_2(x+1)) = f(2(sin^4 y + cos^4 y)) \Leftrightarrow x + 1 = 2^{2(sin^4 y + cos^4 y)}$.

Ta có: $sin^4 y + cos^4 y = 1 - \frac{1}{2} sin^2 2y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$nên $1 \le 2(sin^4 y + cos^4 y) \le 2$

$\Rightarrow 2 \le x + 1 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

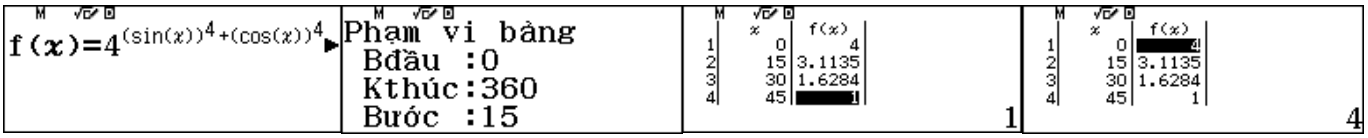
Mà x là số nguyên dương$\Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy có 3 giá trị x thỏa mãn. Chọn B

- *Tư duy + Casio:* *{kĩ thuật độc quyền}*

+ Ta có: $log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{sin^4 y + cos^4 y} - sin^2 2y$ hay VT = VP (Vế trái = Vế phải)

+ Đối với dạng hàm lượng giác thì hãy khảo sát:



+ Ta nhận xét: Hàm lượng giác chỉ dao động từ 1 -> 4.

Suy ra: $1 \le log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

Mà x là số nguyên dương$\Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy có 3 giá trị x thỏa mãn. Chọn B

Câu 9. Cho số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2} - 2^y = y - x^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$.

A. $P = \frac{1}{4}$. B. $P = \frac{3}{4}$. C. $P = \frac{1}{3}$. D. $P = \frac{1}{8}$.

- *Tự luận:*

Ta có: $2^{x^2} - 2^y = y - x^2 \Leftrightarrow 2^{x^2} + x^2 = 2^y + y \Leftrightarrow f(x^2) = f(y)$, với $f(t) = 2^t + t$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t.ln\,2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

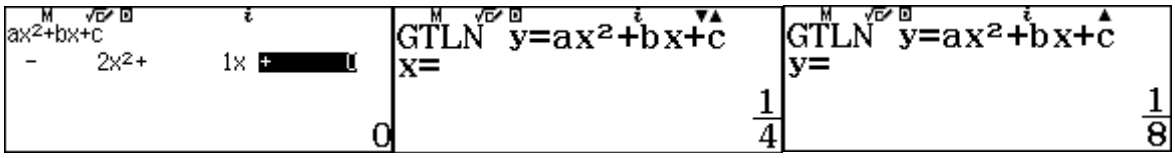
Do đó $f(x^2) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y$.

$P = x - 2y = x - 2x^2 \le \frac{1}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{16}$. Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

+ Nhận thấy $y = x^2 \Rightarrow P_{max} = x - 2x^2$



~ Phương trình bậc 2, bậc 3 thì giải tìm min – max cho nhanh nhé!

~ Thậm chí các bạn vẫn có thể dò bảng câu này!

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{16}$. Chọn D

Câu 10. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \le x, y \le 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.

A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

- *Tự luận:*

Từ điều kiện đề bài và $\frac{x+y}{1-xy} > 0; 1 - xy \ne 0 \Rightarrow x + y > 0; 1 - xy > 0$.

Khi đó: $log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1).(y+1) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow log_3(x+y) + (x+y) = log_3(1-xy) + (1-xy)(1)$.

Xét hàm số $g(t) = log_3 t + t, (t > 0)$ có $g'(t) = \frac{1}{t.ln3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $g(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy phương trình $(1) \Leftrightarrow x + y = 1 - xy \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow P = 2x + \frac{1-x}{1+x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{1-x}{x+1}$ với $x \in [0; 1]$

Ta có $f'(x) = 2 + \frac{-2}{(x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

$f(0) = 1; f(1) = 2 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x) = 1$. Chọn B

- *Tư duy + Casio + Mẹo:* *{3 cách – nhưng giới thiệu 2 cách chính}*

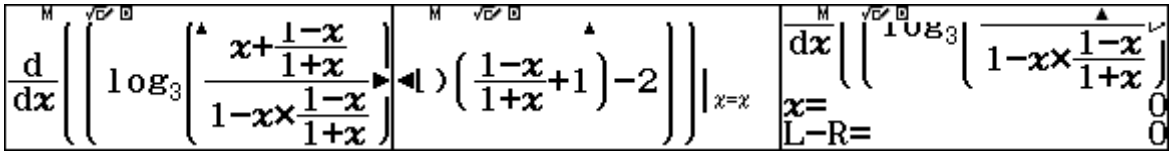
+ Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $x = 0.01 \to y = \frac{99}{101} = \frac{1-x}{1+x}$.

~ Cách 1: Ta có: $P = 2x + \frac{1-x}{1+x}$ (dò bảng – tìm min)

~ Cách 2: Hướng dẫn bên dưới

+ Từ đó ta có: $log_3\left(\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x.\frac{1-x}{1+x}}\right) + (x+1)\left(\frac{1-x}{1+x} + 1\right) - 2 = 0$

+ Đạo hàm hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất tại y bằng bao nhiêu?



+ Như vậy, $x = 0 \to y = 1 \to P_{max} = 2x + y = 1$. Chọn B

- *Tư duy + Mẹo:*

+ Theo đề ta có: $0 \le x, y \le 1$ ---- chọn tại các giá trị đặc biệt là các dấu bằng "=".

+ Như vậy: $x = 0, y = 1 \to P_{max} = 2x + y = 1$. Chọn B

~ Hãy ghi nhớ giá trị min hay max đều liên quan tới dấu bằng "=".

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện đề bài $0 \le x \le 2020$ và $3(9^y + 2y) = x + log_3(x+1)^3 - 2$?

A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.

- *Tự luận:*

Ta có: $3(9^y + 2y) = x + log_3(x+1)^3 - 2 \Leftrightarrow 3.9^y + 6y = x + 3\,log_3(x+1) - 2$

$\Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) = (x+1) + 3\,log_3(x+1)$ (*).

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$. Ta có: $f'(t) = 3^t.ln\,3 + 3 > 0, \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(2y+1) = f(log_3(x+1))$

$\Leftrightarrow 2y + 1 = log_3(x+1) \Leftrightarrow x = 3^{2y+1} - 1$.

Vì $0 \le x \le 2020$ nên $0 \le 3^{2y+1} - 1 \le 2020 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le y \le \frac{log_3 2021 - 1}{2}$

Do y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2\}$.

$\Rightarrow (x; y) \in \{(2; 0); (26; 1); (242; 2)\}$ do đó có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

~ Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $y = 0.01 \to x = ?$ {nhưng hiện số xấu}

~ Tư duy độc quyền xuất hiện: Đặt: $\begin{cases} y' = 9^y + 2y \\ x' = x + log_3(x+1)^3 \end{cases} \Rightarrow 3.y' = x' - 2$

~ Áp dụng kĩ thuật CALC:Cho $y' = 0.01 \to x' = 2.03 = 3y' + 2 = 3(9^y + 2y) + 2$

~ Vì $0 \le x \le 2020$ nên $0 \le 3(9^y + 2y) + 2 \le 2020 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le y \le \frac{log_3 2021 - 1}{2}$

~ Do y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2\}$.

$\Rightarrow (x; y) \in \{(2; 0); (26; 1); (242; 2)\}$ do đó có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Chọn D

- *Tư duy + Mẹo:*

~ Ta thấy đề cho đáp số 2-4-5-3, khá ít cặp thỏa mãn thì các bạn chỉ cần thử lần lượt $y = 0 \to x = ?, y = 1 \to x = ?, y = 2 \to x = ?, \ldots$ khi giải ra không được nữa nè giới hạn chỉ có nhiêu đó cặp số nguyên. →Eazy

Câu 12. Cho $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong số nguyên m thỏa $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0$.

A. $m_0 = 2018$. B. $m_0 = 2019$. C. $m_0 = 2020$. D. $m_0 = 2021$.

- *Tự luận:*

Ta có $f(-x) = 2020^{-x} - 2020^x$; $-f(x) = -(2020^x - 2020^{-x})$.

$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ vậy nên $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0$.

$\Leftrightarrow f(m+1) < f\left(-\frac{m}{2020} + 2020\right)$. (*)

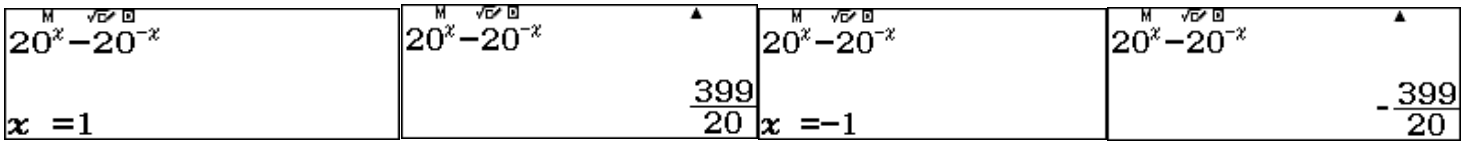
Lại có $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $(*) \Leftrightarrow m + 1 < \frac{-m}{2020} + 2020 \Leftrightarrow m < \frac{2019.2020}{2021}$.

Vậy $m_0 = 2018$. **Chọn A**

- *Tư duy + Casio:*

!!! Cách kiểm tra tính chẵn lẻ: Ta có: $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$



Suy ra: $f(-1) = -f(1)$. Vậy hàm số trên có tính chất chẵn – lẻ.

~ Ta có: $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0 \Leftrightarrow f(m+1) < f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right)$

~ Ta lại có: $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (dò bảng).

$\Leftrightarrow m + 1 < \frac{-m}{2020} + 2020 \Leftrightarrow m < \frac{2019.2020}{2021}$. Vậy $m_0 = 2018$. **Chọn A**

Câu 13. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + \left(2 - y\sqrt{3xy-5}\right)x + \sqrt{3xy-5} = 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2+1)(x+y-2)$.

A. $\frac{4\sqrt{6}+36}{9}$. B. $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. C. $\frac{36-296\sqrt{15}}{9}$. D. $\frac{-4\sqrt{6}+36}{9}$.

- *Tự luận:*

Ta có: $9x^3 + \left(2 - y\sqrt{3xy-5}\right)x + \sqrt{3xy-5} = 0$

$\Leftrightarrow 27x^3 + 6x - 3xy\sqrt{3xy-5} + 3\sqrt{3xy-5} = 0$

$\Leftrightarrow (3x)^3 + 2(3x) = \left(\sqrt{3xy-5}\right)^3 + 2\sqrt{3xy-5}$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$

nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(3x) = f\left(\sqrt{3xy-5}\right) \Leftrightarrow 3x = \sqrt{3xy-5} \Rightarrow x \geq 0$ và $9x^2 = 3xy - 5$.

Với $x = 0$ không thỏa mãn.

Với $x > 0$ thì $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2+1)(x+y-2)$

$= x^3 + y^3 + 6xy + (9x^2+3)(x+y-2) = x^3 + y^3 + 6xy + (3xy-2)(x+y-2)$

$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 2(x+y) + 4 = (x+y)^3 - 2(x+y) + 4$.

Mà $x + y = x + \frac{9x^2+5}{3x} = 4x + \frac{5}{3x} \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t = x + y$ thì $t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét hàm số $g(t) = t^3 - 2t + 4$ với $t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $g'(t) = 3t^2 - 2 > 0, \forall t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $g(t) \geq g\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. Vậy $min\, P = \frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio + Mẹo:* *{kĩ năng xử lý số liệu – tư duy đa chiều}*

~ Bước 1: *Phân tích đáp án và dữ kiện đề bài*

A. $\frac{4\sqrt{6}+36}{9} \approx 5.09$	B. $\frac{36+296\sqrt{15}}{9} \approx 131.4$	C. $\frac{36-296\sqrt{15}}{9} \approx -123.4$	D. $\frac{-4\sqrt{6}+36}{9} \approx 2.91.$

~ Bước 2: *Phân tích đối thủ đang cần gì và làm gì*

+ Ta có: $9x^3 + \left(2 - y\sqrt{3xy-5}\right)x + \sqrt{3xy-5} = 0$. Kĩ thuật cho x giải tìm y

$x = 0 \to y = \emptyset$	$x = 0.4 \to y = \frac{161}{30}$	$x = 0.5 \to y = \frac{29}{6}$	$x = 0.6 \to y = \frac{206}{45}$	$x = 1 \to y = \frac{14}{3}$
$P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2+1)(x+y-2)$.*Thay lần lượt x, y vào P kiểm tra kết quả*				
$\emptyset$	≈ 184.23	≈ 145.04	≈ 132.46	≈ 184.23

+ Như vây khoanh đáp án B – hiểu kĩ hơn thì xem video 😊

Câu 14. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức sau đây $log\frac{x+1}{3y+1} \le 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x(1)$. Biết $y \le 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. B. 1501300. C. 1501400. D. 1501500.

- *Tự luận:*

Ta có phương trình: $log\frac{x+1}{3y+1} \le 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$

$\Leftrightarrow log\frac{xy+y}{3y^2+y} \le (9y^4 + 6y^3 + y^2) - (x^2y^2 + 2xy.y + y^2)$

$\Leftrightarrow log(xy+y) - log(3y^2+y) \le (3y^2+y)^2 - (xy+y)^2$

$\Leftrightarrow log(xy+y) + (xy+y)^2 \le log(3y^2+y) + (3y^2+y)^2 (*)$

Xét hàm $f(t) = log\, t + t^2$ với $t \in (0; +\infty)$

$f'(t) = \frac{1}{t\, ln\, 10} + 2t > 0 \forall t \in (0; +\infty)$. Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $t \in (0; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow f(xy+y) \le f(3y^2+y) \Leftrightarrow xy + y \le 3y^2 + y \Leftrightarrow x \le 3y$.

Vì $y \le 1000$ nên ta có các trường hợp sau

$y = 1 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$

$y = 2 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

.....

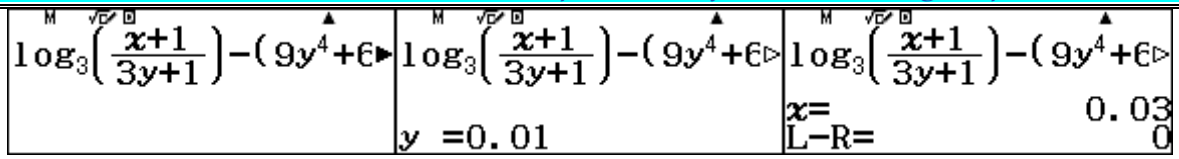
$y = 1000 \Rightarrow x \in \{1; 2; \ldots\ldots; 3000\}$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài là:

$3 + 6 + 9 + \ldots + 3000 = 1501500$. Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

- Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $y = 0.01 \to x = 0.03 = 3y$

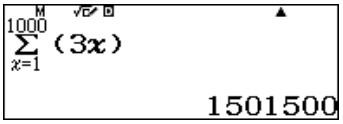


- Đừng quan tâm dấu hãy luôn xử lý tại dấu bằng "=" , suy ra $x \le 3y$

- Nhiều bạn thắc mắc làm sao biết x, y mà khẳng định $x \le 3y$, cách xác định dấu đó là hãy quay trở lại phương trình ban đầu cho x,y bất kì thì sẽ xét được $x \le 3y$ *or* $x \le 3y$.

- Vì $1 \le y \le 1000$ *hay* $1 \le x \le 3000$. Sử dụng MCTC – tính tổng.

Chọn D



Câu 15. Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn : $2^{x+\frac{1}{x}} = log_2[14-(y-2)\sqrt{y+1}]$. Giá trị của biểu thức $P = |1-2(x+y)|$ bằng

A. 3. B. 5. C. 1. D. 2.

- *Tự luận:*

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có : $2^{x+\frac{1}{x}} \ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{x}}} = 4, \forall x > 0 (1)$

Mặt khác ta có: $14-(y-2)\sqrt{y+1} = 14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}$.

Đặt $t = \sqrt{y+1} \ge 1$.

Xét hàm : $f(t) = -t^3+3t+14, t \ge 1$.

$f'(t) = -3t^2+3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên như sau :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	16	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow f(t) \le 16$

$\Rightarrow log_2[14-(y-2)\sqrt{y+1}] \le log_2 16 = 4 (2)$

Từ (1), (2) ta có dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ t = \sqrt{1+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy: $P = |1-2(x+y)| = 1$. **Chọn C**

- *Tư duy + Casio:*

~ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có : $2^{x+\frac{1}{x}} \ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{x}}} = 4, \forall x > 0 \Leftrightarrow x = 1$.

~ Ta lại có: $log_2[14-(y-2)\sqrt{y+1}] = 4 \Leftrightarrow y = 0$.

Vậy: $P = |1-2(x+y)| = 1$. **Chọn C**

Câu 16. Cho x, y là các số thực thỏa mãn biểu thức sau $log_2(2x+2)+x-3y = 8^y (*)$. Biết $0 \le x \le 2018$, số cặp x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức (*) là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

- *Tự luận:*

Ta có $log_2(2x+2)+x-3y=8^y \Leftrightarrow 2^{log_2(x+1)}+log_2(x+1)=2^{3y}+3y$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ có $f'(t)=2^t\,ln\,2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(log_2(x+1))=f(3y) \Leftrightarrow log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow x=2^{3y}-1$

Với $0\le x\le 2018 \Leftrightarrow 1\le 8^y\le 2019 \Leftrightarrow 0\le y\le log_8 2\,019\approx 3.7$.

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Rõ ràng với y nguyên thì x nguyên.

Vậy có 4 cặp số x,y nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn C

- *Tư duy + Casio:*

+ Đặt: $8^y=M\to y=\log_8 M \Rightarrow log_2(2x+2)+x-3\log_8 M-M$

+ Áp dụng kĩ thuật CALC: *Cho* $M=100\to x=99=M-1=8^y-1$

+ Với $0\le x\le 2018 \Leftrightarrow 1\le 8^y\le 2019 \Leftrightarrow 0\le y\le log_8 2\,019\approx 3.7$.

+ Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Rõ ràng với y nguyên thì x nguyên.

Vậy có 4 cặp số x,y nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn C

Câu 17. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn biểu thức sau đây $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$. Đặt $P=\frac{3a+2b+c}{a+b+c}$ và gọi S là tập hợp gồm những giá trị nguyên của P. Số phần tử của tập hợp S là

A. Vô số. B. 5. C. 4. D. 3.

- *Tự luận:*

Ta có: $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$

$\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2+c^2+1}+a^2+b^2+c^2+1=2^{2a+2b+2c}+(2a+2b+2c)$

Xét hàm $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$

Ta lại có, $f'(t)=2^t\,ln\,2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình đã cho có dạng $f(a^2+b^2+c^2+1)=f(2a+2b+2c)$.

Suy ra: $2a+2b+2c=a^2+b^2+c^2+1 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$ (*)

Ta lại có, $P=\frac{3a+2b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow (P-3)a+(P-2)b+(P-1)c=0$ (**)

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ lấy $M(a;b;c)$.

Theo (*) ta có M thuộc mặt cầu tâm $I(1;1;1)$,bán kính $R=\sqrt{2}$.

Theo (**) thì M thuộc mặt phẳng (α) có:

Phương trình $(P-3)x+(P-2)y+(P-1)z=0$.

Tồn tại bộ $(a;b;c)$ khi và chỉ khi tồn tại M (mặt cầu và mặt phẳng có điểm chung).

Suy ra $d\left(I;(\alpha)\right)\le R$ hay

$$\frac{|3P-6|}{\sqrt{(P-3)^2+(P-2)^2+(P-1)^2}} \le \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow (3P-6)^2 \le 2.[(P-3)^2+(P-2)^2+(P-1)^2]$$
$$\Leftrightarrow 3P^2-12P+8 \le 0 \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \le P \le \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

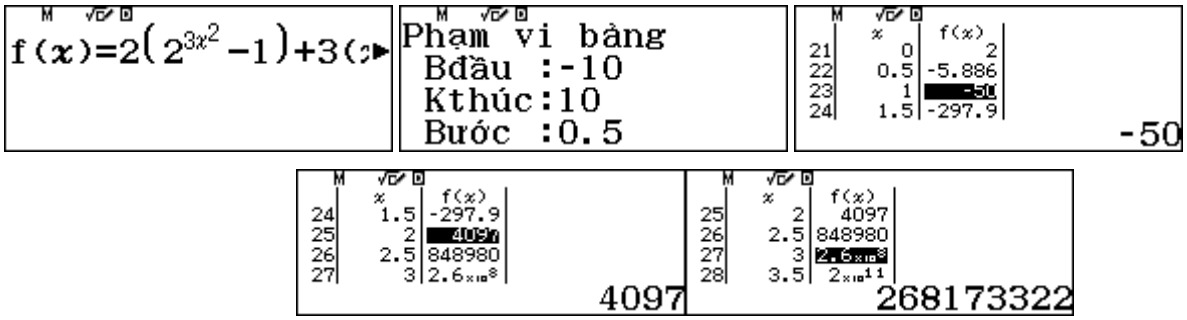
Vậy $S = \{1; 2; 3\}$. **Chọn D**

- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

+ Nhận thấy: Quy đổi a, b, c về dạng chung -> biến thành 1 ẩn chung là a.

+ Ta có: $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 = 4^{a+b+c}$

$\Rightarrow 2\left(2^{3a^2}-1\right)+3(a-1)^2 = 4^{3a}$, dò bảng tìm giá trị nguyên của P.



+ Vậy chỉ có 3 giá trị a thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn D**

~ Đối với tại $x = a = 0$ (vô lí), còn đối với tại $x = a = 4, \ldots$ (số quá lớn và không nguyên nên loại) {ghi chú}

Câu 18. Phương trình $log(x+1) = 2$ có nghiệm là.

A. 11. B. 9. C. 101. D. 99.

- *Tự luận:*

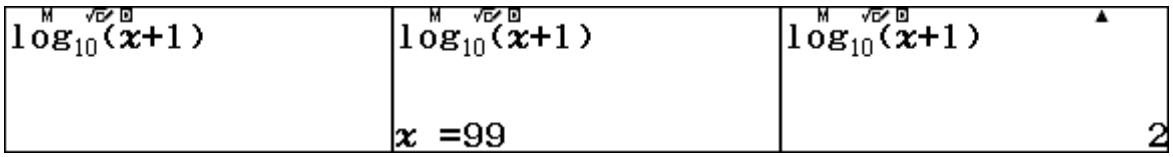
Điều kiện $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Ta có $log(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{99\}$. **Chọn D**

- *Tư duy + Casio:*

+ Gặp dạng này thì chỉ cần dùng lệnh CALC {thử từng đáp án}



Chọn D

Câu 19. Cho $2^a = 3, 3^b = 4, 4^c = 5, 5^d = 6$. Tính 2^{abcd}.

A. $log_2 6$. B. $log_6 2$. C. 2. D. 6.

- *Tự luận:*

Ta có $2^a = 3 \Rightarrow a = log_2 3$.

Tương tự $b = log_3 4, c = log_4 5, d = log_5 6$

$\Rightarrow abcd = log_2 3 . log_3 4 . log_4 5 . log_5 6 = log_2 6 \Rightarrow P = 2^{log_2 6} = 6$. Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

Ta có $2^a = 3 \Rightarrow a = log_2 3$. Tương tự $b = log_3 4, c = log_4 5, d = log_5 6$, trong quá trình giải hãy gán lần lượt cho A,B,C,D hoặc thay thẳng vào yêu cầu.

$\Rightarrow P = 2^{log_2 6} = 6$. Chọn D.

Câu 20. Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 5^y = 10^{-z}$. Tính $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

A. -2. B. 3. C. 0. D. 1.

- *Tự luận:*

Đặt $2^x = 5^y = 10^{-z} = t\ (t > 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = t^{\frac{1}{x}} \\ 5 = t^{\frac{1}{y}} \\ 10 = t^{\frac{-1}{z}} \end{cases} \Rightarrow t^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = t^{-\frac{1}{z}} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

Chọn C

- *Tư duy + Casio:*

Đặt $2^x = 5^y = 10^{-z} = t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 t \\ y = \log_5 t \\ z = -\log_{10} t \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\log_2 t} + \frac{1}{\log_5 t} + \frac{1}{-\log_{10} t}$

SHIFT CALC, giải tìm t - trong đó P là các đáp án, t hiển thị giá trị đẹp thì khoanh.

Chọn C

Câu 21. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn biểu thức $log_4 x = log_6 y = log_9(x + y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

- *Tự luận:*

Đặt $log_4 x = log_6 y = log_9(x + y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \end{cases}$.

Mà $4^t . 9^t = (6^t)^2 \Rightarrow x(x + y) = y^2 \Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (l) \\ \frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (t/m) \end{array}\right.$.

- *Tư duy + Casio:*

Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \Leftrightarrow 4^t + 6^t = 9^t \end{cases} \Rightarrow t \approx 1.2$

Gán t -> A, tính ngược lại tỉ số x/y. Chọn A

Câu 22. Cho x, y, a, b là các số dương thỏa mãn $a > b > 1$ và $a^{x+1} = b^{2y} = \frac{a}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + y$ là

A. -2. B. $\frac{-13}{4}$. C. 4. D. $\frac{3}{4}$.

- *Tự luận:*

Ta có: $\begin{cases} a^{x+1} = \frac{a}{b} \\ b^{2y} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\log_a b \\ y = \frac{1}{2}(-1 + \log_b a) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-x-1}{2x} \Rightarrow 2xy = -x - 1.$

Khi đó $P = x^2 + y^2 + y = (x+y)^2 - 2xy + y = \left(x + y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ 2xy = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}$. Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

~ Gặp dạng này thì các bạn cứ cho a,b gần điều kiền và thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có: $a > b > 1$. Cho $a = 2, b = 1.5$ suy ra $2^{x+1} = 1.5^{2y} = \frac{4}{3}$, giải tìm x,y.

$\begin{cases} 2^{x+1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \approx -0.58 \\ 1.5^{2y} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow y \approx 0.35 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + y \approx 0.81 \approx 0.75.$ Chọn D

Câu 23. Cho biết a, b, c là các số thực dương thỏa mãn biểu thức $2018^a = 2019^b = 2020^c$. Hãy tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$.

A. $\log_{2018} 2019$. B. $\log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2020$.

C. $\log_{2018} 2020$. D. $\log_{2018} 2019.2020$.

- *Tự luận:*

Đặt $2018^a = 2019^b = 2020^c = k \Rightarrow \begin{cases} a = \log_{2018} k \\ b = \log_{2019} k \\ c = \log_{2020} k \end{cases}$

Từ đó suy ra $P = \frac{\log_{2018} k}{\log_{2019} k} + \frac{\log_{2019} k}{\log_{2020} k} = \log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2020$. Chọn B

- *Tư duy + Casio:*

~ Tối giản hóa 2020 -> 20, 2019 -> 19, 2018 -> 18, sau đó xử lý như câu 21.

Câu 24. Cho x, y dương thỏa mãn: $log_3(x^2 + 2y) = 1 + log_3 4$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{xy}$ thuộc khoảng nào

A. $(-1; 1)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. C. $(5; 10)$. D. $(-2; 0)$

- *Tự luận:*

Ta có: $log_3(x^2 + 2y) = 1 + log_3 4 = log_3 3 + log_3 4 = log_3 12 \Rightarrow x^2 + 2y = 12$

Ta lại có: $16 = x^2 + 4 + 2y \geq 2\sqrt{x^2.4} + 2y \geq 4x + 2y \geq 2\sqrt{4x.2y} = 2\sqrt{8}\sqrt{xy}$

$\Rightarrow P = \sqrt{xy} \leq \sqrt{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x^2 = 4, x > 0, y > 0 \\ 4x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy $Max\ P = \sqrt{8}$. Chọn B

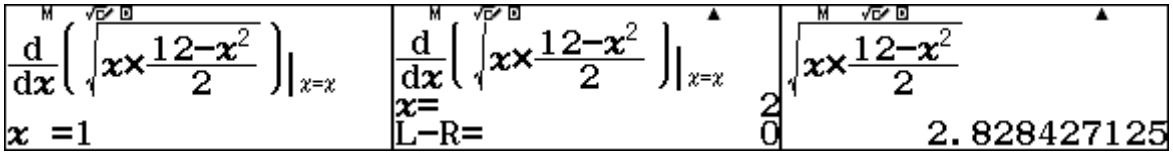
- *Tư duy + Casio:*

~ Thật sự gặp câu này thì giải tay vẫn nhanh hơn.

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $x = 0.01 \rightarrow y = 5.99995 \Leftrightarrow 2y = 11.9999$

$$\Leftrightarrow 2y = 12 - x^2 \Leftrightarrow y = \frac{12 - x^2}{2} \Longrightarrow P = \sqrt{xy} = \sqrt{x.\frac{12 - x^2}{2}}$$

Đạo hàm tại P tìm cực trị, sau đó thay ngược vào P nhận đáp số.



Vậy $Max\ P = \sqrt{8}$. Chọn B

Câu 25. Cho $a, b, c > 1$ và các số thực dương x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^{\frac{z}{2}} = \sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z^2$.

A. -2. B. 3. C. -1. D. 1.

- *Tự luận:*

Đặt $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc} = t\ (t > 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = t^{\frac{1}{x}} \\ b = t^{\frac{1}{y}} \\ c = t^{\frac{2}{z}} \\ abc = t^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{2}{z}.$$

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z^2 = 2 - \frac{2}{z} - z^2 = 2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + z^2\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho ba số dương $\frac{1}{z}; \frac{1}{z}; z^2$ ta có:

$\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+z^2 \geq 3 \Rightarrow P \leq -1$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{z}=z^2 \Leftrightarrow z=1$.

Vậy $P_{max}=-1$. Chọn C

- *Tư duy + Casio:*

Đặt $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}=t\ (t>0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=t^{\frac{1}{x}} \\ b=t^{\frac{1}{y}} \\ c=t^{\frac{2}{z}} \\ abc=t^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=2 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2-\frac{2}{z}.$$

~ Bài này không thể dùng Casio nhưng vẫn có thể dùng tư duy như sau:

Ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2-\frac{2}{z}$, để cho $P_{max} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0\ or\ z=1$ {kĩ thuật suy luận tìm max}

Vậy $P_{max}=-1$. Chọn C

Câu 26. Cho $x>0; y>0$ và $2020^{2019(x^2-y+4)}=\frac{4x+y}{(x+2)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=y-2x$?

A. $min\,P=4$. B. $min\,P=2$. C. $min\,P=1$. D. $min\,P=3$.

- *Tự luận:*

Ta có phương trình: $2020^{2019(x^2-y+4)}=\frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2020^{2019[(x+2)^2-(4x+y)]}=\frac{4x+y}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{2020^{2019(x+2)^2}}{2020^{2019(4x+y)}}=\frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2020^{2019(x+2)^2}(x+2)^2=2020^{2019(4x+y)}(4x+y)(1)$.

Xét hàm số $f(t)=2020^{2019t}t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=2020^{2019t}+2020^{2019t}t\,ln\,2\,020^{2019}>0 \forall t>0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow (x+2)^2=4x+y \Leftrightarrow y=x^2+4$.

Nên $P=y-2x=x^2+4-2x=(x-1)^2+3 \geq 3$.

$Min\,P=3$ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$. Chọn D

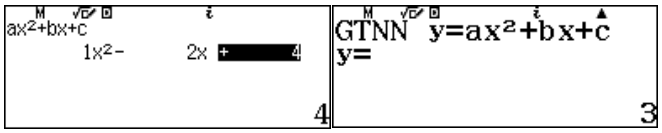
- *Tư duy + Casio:*

~ Vào thi mà ngồi biến đổi tự luận như trên sẽ tốn rất nhiều thời gian!!!

Áp dụng kĩ thuật CALC: $Cho\ x=0.01 \rightarrow y=4.0001=x^2+4$

~ Mẹo nhỏ để bấm nhanh ở đây là tối giản: 2020->20; 2019->19.

$P_{min}=x^2+4-2x$. *Bấm giải phương trình bậc 2 để tìm kết quả nhanh nhất!*



Câu 27. Cho $x > y \geq 0$ thỏa mãn $3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 5y$ là

A. 2. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** 4. **D.** $\frac{50-8\sqrt{5}}{4\sqrt{5}+1}$.

- *Tự luận:*

Điều kiện: $1 - xy > 0$.

Ta có: $3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y} \Leftrightarrow x + y + 2xy - 2 = log_3 \frac{2(1-xy)}{x+y}$.

$\Leftrightarrow log_3[2(1-xy)] + 2(1-xy) = log_3(x+y) + (x+y)$ (*).

Xét hàm $f(t) = t + log_3 t$ với $t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t\ln 3} > 0$.

$(*) \Leftrightarrow f\big(2(1-xy)\big) = f(x+y) \Leftrightarrow 2(1-xy) = x + y \Leftrightarrow y = \frac{2-x}{2x+1}$.

Khi đó $1 - xy > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x+1} > 0$ (luôn đúng).

Ta có $P = x + 5y = x + 5\frac{2-x}{2x+1}$. Đặt $f(x) = x + 5\frac{2-x}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{25}{(2x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	2	↗	

Vậy $P_{Min} = 2$ đạt được khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Chọn A

- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

Đề cho $x > y \geq 0$, chọn $y = 0$ {khắc cốt ghi tâm cái mẹo này}

Ta có: $3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y} \Leftrightarrow 3^{x-2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 2 \Longrightarrow P_{max} = x + 5y = 2$. Chọn A

~ Câu này áp dụng kĩ thuật CALC nhưng số xấu, hên vẫn còn tư duy đỉnh cao.

Câu 28. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a\left(\frac{3b-1}{4}\right) + 12\log_{\frac{b}{a}}{}^2 a - 3$.

A. $min\, P = 13$. **B.** $min\, P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $min\, P = \sqrt[3]{2}$. **D.** $min\, P = 9$.

- *Tự luận:*

Ta có $(2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow 3b - 1 \leq 4b^3$ và từ điều kiện suy ra $\log_a b > 1$.

Từ đó suy ra:

$P \geq 3\log_a b + \frac{12}{(\log_a b-1)^2} - 3 = \frac{3\log_a b.(\log_a b-3)^2}{(\log_a b-1)^2} + 9 \geq 9$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $min\, P = 9$. Chọn D

- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

~ Vẫn áp dụng kĩ thuật liên quan đến điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$.

Nhập cả biểu thức: $P = \log_a\left(\frac{3b-1}{4}\right) + 12\log_{\frac{b}{a}}{}^2 a - 3$ vào máy tính.

Dùng lệnh CALC đồng thời cả a, b với $\frac{1}{3} < b < a < 1$ --- thử nhanh liên tục.

Vậy $min\, P = 9$. Chọn D

Câu 29. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$ thuộc tập hợp nào dưới đây ?

A. $(2; 4)$. B. $(4; 6)$. C. $(6; 8)$. D. $(8; 10)$.

- *Tự luận:*

Ta có: $a, b, c > 1$ và $x, y, z > 0$ nên $a^x; b^y; c^z; \sqrt[3]{abc} > 1$

Do đó: $a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 + log_a b + log_a c) \\ y = \frac{1}{3}(log_b a + 1 + log_b c). \\ z = \frac{1}{3}(log_c a + log_c b + 1) \end{cases}$

Khi đó, ta có:

$$P = x + y + z = \frac{1}{3}(1 + log_a b + log_a c + log_b a + 1 + log_b c + log_c a + log_c b + 1)$$
$$= \frac{1}{3}.(3 + log_a b + log_a c + log_b a + log_b c + log_c a + log_c b)$$
$$= \frac{1}{3}.(3 + log_a b + log_b c + log_c a + log_a c + log_c b + log_b a)$$

Mặt khác $a, b, c > 1$ nên $log_a b, log_b c, log_c a, log_a c, log_c b, log_b a > 0$

Suy ra: $P \geq \frac{1}{3}\left(3 + 3\sqrt[3]{log_a b.log_b c.log_c a} + 3\sqrt[3]{log_a c.log_c b.log_b a}\right) = 3$.

Dấu " = " xảy ra khi: $\begin{cases} log_a b = log_b c = log_c a \\ log_a c = log_c b = log_b a \\ a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} log_a b = log_b c = log_c a \\ \frac{1}{log_c a} = \frac{1}{log_b c} = \frac{1}{log_a b} \\ a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ x = y = z = 1 \end{cases}$. Vậy $min\, P = 3 \in (2; 4)$. Chọn A

- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

~ Nhận thấy a, b, c có vai trò như nhau suy ra $a = b = c$ suy ra x, y, z cũng có vai trò như nhau suy ra $P = x + y + z = 3x$. Mà để $P_{min} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow P_{min} = 3$.

~ Ngoài ra, nếu đề bảo tìm P_{max} thì hãy cho a,b,c >1 thỏa mãn điều kiện rồi giải tương tự các câu trên tìm P_{max}.

Câu 30. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1$, $b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y$ là $P_{min} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m, n \in \mathbb{N}$, khi đó giá trị của biểu thức $T = m^2 + n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 79. **B.** 25. **C.** 34. **D.** 85.

- *Tự luận:*

Theo bài ra ta có: $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x = a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{4}} \\ b^y = a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x-\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}} \\ b^{y-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\log_a b \\ y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\log_b a \end{cases}$.

Do đó: $P = x + 4y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_a b + 1 + \log_b a = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\log_a b + \log_b a$.

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$. Suy ra: $t = \log_a b > 0$.

Khi đó $P = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}t.\frac{1}{t}} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$ khi $\frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = 2$ hay $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Suy ra: $a^x = a^{2y} = \sqrt[4]{a^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases}$.

Khi đó: $m = 9, n = 4 \Rightarrow T = 85$. Chọn D

- *Tư duy + Casio + Mẹo:* *{tư duy ngược}*

A. $79 = m^2 + n$		B. $25 = m^2 + n$		C. $34 = m^2 + n$		D. $85 = m^2 + n$	
$m = 8$	$n = 15$	$m = 4$	$n = 9$	$m = 5$	$n = 9$	$m = 9$	$n = 4$
$\Rightarrow P = \frac{8}{15} \approx 0.53$		$\Rightarrow P = \frac{4}{9} \approx 0.(4)$		$\Rightarrow P = \frac{5}{9} \approx 0.(5)$		$\Rightarrow P = \frac{9}{4} \approx 2.25$	

+ Cho $a = b = 1.01 > 1 \Rightarrow a^x = \sqrt[4]{ab} \Leftrightarrow 1.01^x = 1.01^y = \sqrt[4]{1.0201} \Leftrightarrow x = y = 0.5$.

+ Suy ra $P = x + 4y = 0.5 + 4 * 0.5 = 2.5$ -> Chọn D

~ Bảng giá trị ở trên là rút ra m,n - tư duy ngược từ dữ kiện đề.

Câu 31. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện sau đây $x > -1, y > -3$ và $\log_2(y + 3)(x + 1) + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau đây $P = x + 3y + 10$ thuộc tập nào dưới đây:

A. $[1; 3)$. **B.** $[3; 4)$. **C.** $[4; 5)$. **D.** $[5; 6)$.

- *Tự luận:*

Với điều kiện: $x > -1, y > -3 \Rightarrow x + 1 > 0, y + 3 > 0$.

Ta có: $log_2(y+3)(x+1) + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow log_2(y+3) + log_2(x+1) + (y+3) - \frac{1}{x+1} = 0.$

$\Leftrightarrow log_2(y+3) + (y+3) = log_2 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} (1).$

Xét hàm số: $f(t) = log_2 t + t (t > 0), f'(t) = \frac{1}{t\, ln\, 2} + 1 > 0, \forall t > 0.$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{1}{x+1}$.

Khi đó: $P = x + 3y + 10 = x + 3(\frac{1}{x+1} - 3) + 10 = x + 1 + \frac{3}{x+1} \geq 2\sqrt{3}$.

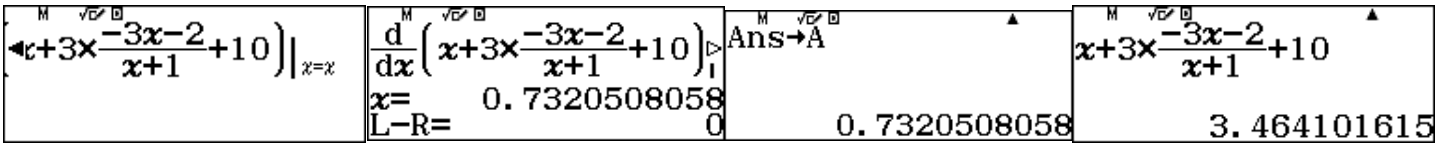
Dấu $'' = ''$ xảy ra $\Leftrightarrow P = x + 1 + \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1$, (vì $x > -1$).

Vậy: $min\, P = 2\sqrt{3}$. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio:*

+ Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $x = 0.01 \rightarrow y = \frac{-203}{101} = \frac{-3x-2}{x+1}$.

+ Ta lại có: $P = x + 3y + 10 = x + 3 * \frac{-3x-2}{x+1} + 10$.



Vậy: $min\, P = 2\sqrt{3}$. **Chọn B**

Câu 32. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $1 > a > b > \frac{1}{4}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) - log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(0; 1)$. B. $\left(4; \frac{11}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. D. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

- *Tự luận:*

Đặt $log_b a = t$. Với điều kiện: $1 > a > b > \frac{1}{4}$.

Khi đó $0 = log_b 1 < log_b a < log_b b = 1 \Rightarrow t \in (0; 1)$

Ta có: $b^2 - b + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow b - \frac{1}{4} \leq b^2 \Rightarrow log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) \geq log_a b^2 \Rightarrow log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \frac{2}{t}$.

$log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} = \frac{1}{2(log_b a - 1)} = \frac{1}{2(t-1)}$. Do đó $P = log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) - log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} \geq \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}$.

Xét hàm $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}$ với $t \in (0; 1)$.

$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2}$. Với $t \in (0;1)$ ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Do: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^-}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}\right) = +\infty$.

Lập BBT của hàm số $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}$ với $t \in (0;1)$ ta có:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$	‖	-	0	+	‖
$f(t)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$ ‖

Dựa vào BBT ta tìm được $Min\, f(t) = \frac{9}{2}$ tại $t = \frac{2}{3}$.

Vậy $min\, P = \frac{9}{2}$. Chọn B

- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

~ Vẫn áp dụng kĩ thuật liên quan đến điều kiện $1 > a > b > \frac{1}{4}$.

Nhập cả biểu thức: $P = log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) - log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$ vào máy tính.

Dùng lệnh CALC đồng thời cả a, b với $1 > a > b > \frac{1}{4}$ --- thử nhanh liên tục.

Vậy $min\, P = \frac{9}{2}$. Chọn B

Câu 33. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \le 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x+y)}{x} + ln\frac{x+2y}{y}$ là $a + ln\, b$. Giá trị của tích $a.b$ là

A. 45. B. 81. C. 108. D. 115.

- *Tự luận:*

Ta có: $xy \le 4y - 1 \Leftrightarrow 4y \ge xy + 1 \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow 4y \ge 2\sqrt{xy}$ nên: $\sqrt{\frac{x}{y}} \le 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \le 4$.

Xét $P = \frac{6(2x+y)}{x} + ln\frac{x+2y}{y} = 12 + 6.\frac{y}{x} + ln\left(\frac{x}{y} + 2\right)$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$, $0 < t \le 4$. Suy ra : $P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + ln(t+2)$.

Ta có: $f'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{t^2-6t-12}{t^2.(t+2)} = \frac{(t-3)^2-21}{t^2.(t+2)}$.

Với $0 < t \le 4$ thì $-3 < t - 3 \le 1 \Rightarrow 0 \le (t-3)^2 < 9$ nên $(t-3)^2 - 21 < 0, \forall t \in (0;4]$.

Do đó: $f'(t) < 0$. Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;4]$.

Suy ra: $f(t) \ge f(4), \forall t \in (0;4]$. Hay $P \ge f(4) = 12 + \frac{6}{4} + ln\, 6 \Leftrightarrow P \ge \frac{27}{2} + ln\, 6$.

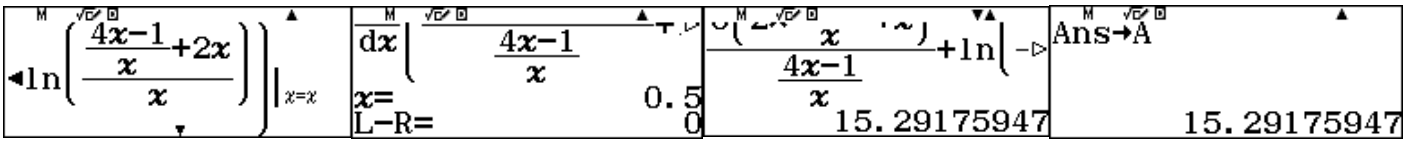
Vậy $P_{min} = \frac{27}{2} + ln\,6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó : $a = \frac{27}{2}$; $b = 6$ nên $ab = 81$. **Chọn B**

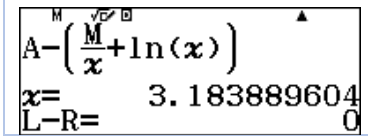
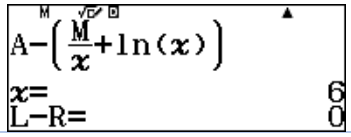
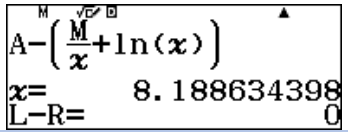
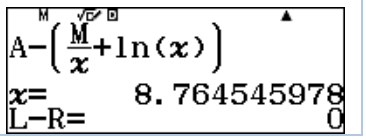
- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

Ta có: $xy \le 4y - 1 \Leftrightarrow x \le \frac{4y-1}{y}$ *{x,y thực dương -> không đổi dấu bất phương trình}.*

Ta lại có: $P = \frac{6(2x+y)}{x} + ln\frac{x+2y}{y} = \frac{6\left(2*\frac{4y-1}{y}+y\right)}{\frac{4y-1}{y}} + ln\frac{\frac{4y-1}{y}+2y}{y}$. *{xem y là x trong Casio}*



Như vậy, ta có: $\begin{cases} A = a + ln\,b = \frac{M}{b} + ln\,b \\ M = a.b \Rightarrow a = \frac{M}{b} \end{cases}$, *trong đó M là các đáp án.*

Key $A.M = 45$.	*Key* $B.M = 81$.	*Key* $C.M = 108$.	*Key* $D.M = 115$.
			

Qua đó, nhận thấy tại Key B có $x = b = 6$ *(đẹp).* **Chọn B**

Câu 34. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $1 < a \le b \le a^3$ và $a^x = b^y = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[1;\ 2)$. **B.** $[2;\ 3)$. **C.** $[3;\ 4)$. **D.** $[4;\ 5)$.

- *Tự luận:*

Ta có $a^x = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(1 + log_a b)$, $b^y = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(1 + log_b a)$.

$P = x + 3y = \frac{1}{3}(1 + log_a b) + 1 + log_b a = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}log_a b + \frac{1}{log_a b}$.

Đặt $log_a b = t$, do $1 < a \le b \le a^3 \Rightarrow 1 \le log_a b \le 3 \Rightarrow t \in [1;\ 3] \Rightarrow P = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}$; với $t \in [1;\ 3]$.

$f'(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right.$. Do $t \in [1;\ 3] \Rightarrow t = \sqrt{3}$.

$f(1) = f(3) = \frac{8}{3}$; $f(\sqrt{3}) = \frac{4+2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(t) = \frac{8}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{8}{3}$. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

~ Như đã nói ở các bài trên thì luôn chọn tại các giá trị đặc biệt.

Ta có: $1 < a \le b \le a^3$. *Chọn* $a = b = 2 \Rightarrow 2^x = 2^y = \sqrt[3]{4} \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}$

Như vậy, $P = x + 3y = \frac{2}{3} + 3.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. **Chọn B**

Câu 35. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $log_2 a + log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{log_3 a} + \sqrt{log_2 b}$ bằng.

A. $\sqrt{log_2 3} + \sqrt{log_3 2}$.
B. $\sqrt{log_2 3 + log_3 2}$.
C. $\frac{1}{2}(log_2 3 + log_3 2)$.
D. $\frac{2}{\sqrt{log_2 3 + log_3 2}}$.

- *Tự luận:*

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$$P = \sqrt{log_3 a} + \sqrt{log_2 b} = \sqrt{\frac{log_2 a}{log_2 3}} + \sqrt{\frac{log_3 b}{log_3 2}} = \sqrt{\frac{log_2 a}{log_2 3}} + \sqrt{\frac{1 - log_2 a}{log_3 2}}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{log_2 3}} + \sqrt{log_2 3}.\sqrt{1-t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{log_2 3}} - \frac{\sqrt{log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}$.

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t} = log_2 3\sqrt{t} \Leftrightarrow 1 - t = t.log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1+log_2^2 3}$.

$\Rightarrow f(t) \ge f\left(\frac{1}{1+log_2^2 3}\right) = \sqrt{log_2 3 + log_3 2} \Rightarrow min\, P = \sqrt{log_2 3 + log_3 2}$.

Chọn B

- *Tư duy + Casio:*

~ Quy đổi các đáp án thành số liệu cụ thể

Key A. $P \approx 2.05$.	*Key B.* $P \approx 1.49$.	*Key C.* $P \approx 1.11$.	*Key D.* $P \approx 1.34$.

Ta có: $log_2 a + log_3 b = 1$, *cho* a *tìm* b $\{a, b > 1\}$*-điều kiện của biểu thức P.*

$a = 1 \to b = 3$	$a = 1.25 \to b \approx 2.1$	$a = 1.5 \to b \approx 1.57$	$a = 1.75 \to b \approx 1.24$
$\sqrt{log_3(A)} + \sqrt{log_2(B)}$ 1.258952938	$\sqrt{log_3(A)} + \sqrt{log_2(B)}$ 1.485277936	$\sqrt{log_3(A)} + \sqrt{log_2(B)}$ 1.414211315	$\sqrt{log_3(A)} + \sqrt{log_2(B)}$ 1.270793386

Chọn B

~ Nhiều bạn thắc mắc tại sao không chọn $a < 1$ *or* $a > 2$ *đơn giản vì khi chọn như thế thì* $b < 1$ *dẫn đến điều kiện sai.*

Câu 36. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $log_{16} x = log_{20} y = log_{25} \frac{2x-y}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{y}{x}$.

A. $T = \frac{2}{3}$.
B. $T = \frac{3}{2}$.
C. $T = -\frac{2}{3}$.
D. $T = -\frac{3}{2}$.

- *Tự luận:*

Đặt $log_{16} x = log_{20} y = log_{25} \frac{2x-y}{3} = t\ (t > 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 16^t \\ y = 20^t \\ \frac{2x-y}{3} = 25^t \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{2.16^t - 20^t}{3} = 25^t \Leftrightarrow 2.16^t - 20^t = 3.25^t \Leftrightarrow 3.\left(\frac{5}{4}\right)^{2t} + \left(\frac{5}{4}\right)^t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{3}\ (N) \\ \left(\frac{5}{4}\right)^t = -1\ (L) \end{array}\right.$.

Vậy $\frac{y}{x} = \left(\frac{20}{16}\right)^t = \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{3}$. **Chọn A**

- *Tư duy + Casio:*

Đặt $log_{16} x = log_{20} y = log_{25} \frac{2x-y}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 16^t \\ y = 20^t \\ \frac{2x-y}{3} = 25^t = \frac{2*16^t - 20^t}{3} \end{cases} \Rightarrow t \approx -1.8 \rightarrow A$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 16^t = 16^A \\ y = 20^t = 20^A \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{20^A}{16^A} = \frac{2}{3}$. **Chọn A**

Câu 37. Cho p và q là các số thực dương sao cho: $log_9 p = log_{12} q = log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{q}{p}$

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ D. $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

- *Tự luận:*

Đặt: $t = log_9 p = log_{12} q = log_{16}(p+q)\ (t > 0)$ ta có $\begin{cases} p = 9^t \\ q = 12^t \\ p + q = 16^t \end{cases}$.

Từ đó suy ra $9^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^{2t}$.

Đặt $x = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{q}{p} > 0$ phương trình trở thành: $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Do $x > 0$nên suy ra $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vậy $\frac{q}{p} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn D**

- *Tư duy + Casio:*

~ Tương tự câu 36 nhé --- tập làm lại cho quen tay nào!!!

*~ Nhớ bấm máy luôn cho nhanh, khỏi phải ghi vào giấy nhé ^.^*

Câu 38. Cho x, y là hai số nguyên không âm thỏa mãn $log_2(x+y) = log_3(x-y)$. Hỏi tổng $x+y$ là bao nhiêu?

A. 1. B. 4. C. 3. D. 7.

- *Tự luận:*

Điều kiện: $x > y \geq 0$.

Đặt: $log_2(x+y) = log_3(x-y) = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 2^t \\ x-y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2^t+3^t}{2} \\ y = \dfrac{2^t-3^t}{2} \end{cases}$$

Ta có $y \geq 0 \Rightarrow \frac{2^t-3^t}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2^t \geq 3^t \Leftrightarrow t \leq 0$

Do đó $\begin{cases} 0 < 2^t \leq 1 \\ 0 < 3^t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 2^t + 3^t \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{2^t+3^t}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1;\ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1$

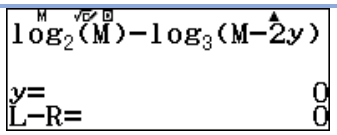
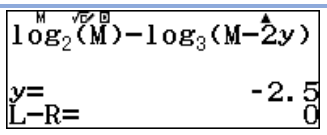
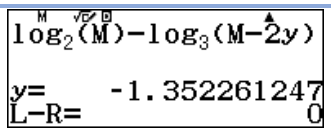
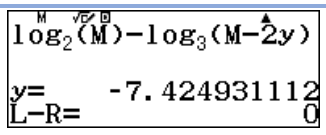
Với $x = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 0$

Vậy $x + y = 1$. **Chọn A**

- *Tư duy + Casio:*

Ta có: $log_2(x+y) = log_3(x-y)$. Mà $x + y = M \to x = M - y$

Suy ra: $log_2(M-y+y) = log_3(M-y-y) \Leftrightarrow log_2(M) = log_3(M-2y)$.

Key A. $M = 1$	*Key B.* $M = 4$	*Key C.* $M = 3$	*Key D.* $M = 7$
			
Khoanh A	*Loại -> y < 0*	*Loại -> y < 0*	*Loại -> y < 0*

Vậy $x + y = 1$. **Chọn A**

Câu 39. Cho số thực $1 \leq x \leq 8$. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{log_2 \frac{x}{128}}{log_2 x + 1} - log_{\sqrt{2}} x$ lần lượt là a, b. Tính ab.

A. $ab = 5$. B. $ab = 35$. C. $ab = -7$. D. $ab = 35$.

- *Tự luận:*

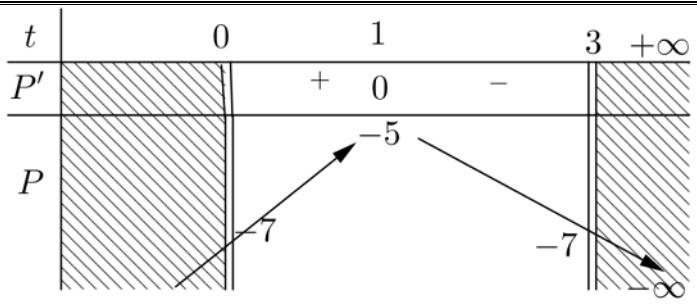
$P = \frac{log_2 \frac{x}{128}}{log_2 x + 1} - log_{\sqrt{2}} x = \frac{log_2 x - log_2 128}{log_2 x + 1} - 2\,log_2 x = \frac{log_2 x - 7}{log_2 x + 1} - 2\,log_2 x.$

Đặt $t = log_2 x\ (0 \leq t \leq 3)$.

Ta có: $P = \frac{t-7}{t+1} - 2t$ trên $[0; 3]$.

$P' = \frac{8}{(t+1)^2} - 2,\ P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



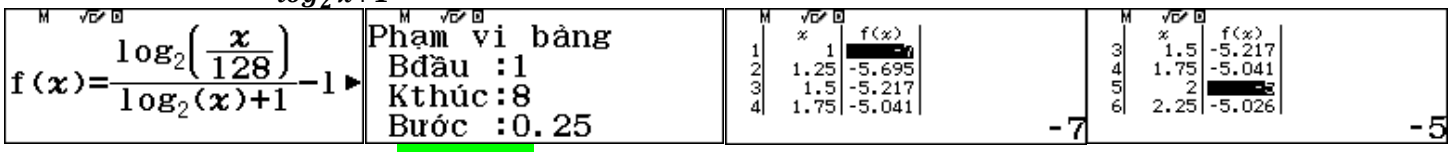
Giá trị lớn nhất của biểu thức là $b = -5$, giá trị lớn nhất của biểu thức là $a = -7$.

Như vậy $ab = 35$. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio:*

~ Dạng này siêu đơn giản nè – dò bảng là xong nhé.

Ta có: $P = \frac{log_2 \frac{x}{128}}{log_2 x + 1} - log_{\sqrt{2}} x,\ 1 \le x \le 8$



Như vậy $ab = 35$. **Chọn B**

Câu 40. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y), x \le 2020$ và thỏa mãn phương trình sau đây $log_2 x + log_2(x - y) = 1 + 4\, log_4 y$

A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 1011.

- *Tự luận:*

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$.

Ta có: $log_2 x + log_2(x - y) = 1 + 2\, log_2 y \Leftrightarrow log_2 x\,(x - y) = 1 + log_2 y^2$

$\Leftrightarrow log_2 x\,(x - y) = log_2 2\,y^2 \Leftrightarrow x^2 - xy = 2y^2 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -y (L) \end{array}\right.$. Xét $x = 2y$, mà $x \le 2020 \Rightarrow 2y \le 2020$

$\Leftrightarrow y \le 1010$, kết hợp điều kiện ta có $y \in \{1; 2; \ldots . 1010\}$.

Vậy có 1010 giá trị của y, tương ứng với có 1010 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Chọn B

- *Tư duy + Casio:*

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $y = 100 \to x = 200 = 2y$

Mà $x \le 2020 \Rightarrow 2y \le 2020 \Leftrightarrow y \le 1010$

Kết hợp điều kiện ta có $y \in \{1; 2; \ldots . 1010\}$.

Vậy có 1010 giá trị của y, tương ứng với có 1010 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Chọn B

Câu 41. Biết $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $log_2\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right) = 6x - 4x^2$ và $2x_1 - x_2 = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b}), (a, b \in \mathbb{N})$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = -4$. B. $P = 6$. C. $P = -6$. D. $P = 4$.

- *Tự luận:*

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có $log_2\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right) = 6x - 4x^2 \Leftrightarrow log_2(4x^2 - 4x + 1) - log_2 x = 6x - 4x^2$

$\Leftrightarrow log_2(4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) = log_2 x + (2x + 1)$

$\Leftrightarrow log_2(2x - 1)^2 + (2x - 1)^2 = log_2(2x) + 2x \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$.

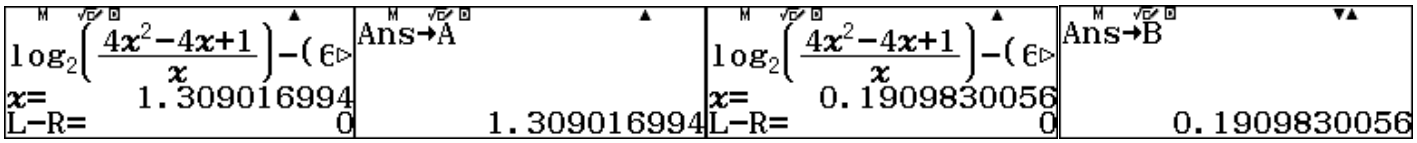
Do $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow 2x_1 - x_2 = 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{3-3\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{4}(1 - \sqrt{5})$.

Vậy $a = 1, b = 5 \Rightarrow P = a + b = 6$. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio:*

Ta có: $log_2\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right) = 6x - 4x^2$, *giải phương trình trên lưu lần lượt vào A,B.*



Ta lại có: $2x_1 - x_2 = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b}), (a, b \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow 2B - A = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b}), (a, b \in \mathbb{N})$

Như vậy, ta có hpt sau:

$\begin{cases} 2B - A = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b}) \\ P = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b}) \\ a = P - b \end{cases} \Leftrightarrow M = \frac{3}{4}(P - b - \sqrt{b}), M = 2B - A$

~ SHIFT SOLVE giá trị b được kết quả đẹp thì khoanh. **Chọn B**

Câu 42. Cho phương trình $2\,log_3(cot\,x) = log_2(cos\,x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 2020\pi)$

A. 2020 **B.** 2019 **C.** 1009 **D.** 1010

- *Tự luận:*

Điều kiện $sin\,x > 0, cos\,x > 0$.

Đặt $u = 2\,log_3(cot\,x) = log_2(cos\,x)$ ta có $\begin{cases} cot^2\,x = 3^u \\ cos\,x = 2^u \end{cases}$

Vì $cot^2\,x = \frac{cos^2\,x}{1-cos^2\,x}$ nên suy ra $\frac{(2^u)^2}{1-(2^u)^2} = 3^u$

$\Leftrightarrow (2^u)^2 = 3^u.(1-(2^u)^2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0$ (1)

Xét hàm số $f(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1$ ta có: $f'(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4^u\,ln\,4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(u) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm. Dễ thấy $f(-1) = 0$ suy ra phương trình (1) có nghiệm duy nhất $u = -1$

$u = -1 \Rightarrow cos\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

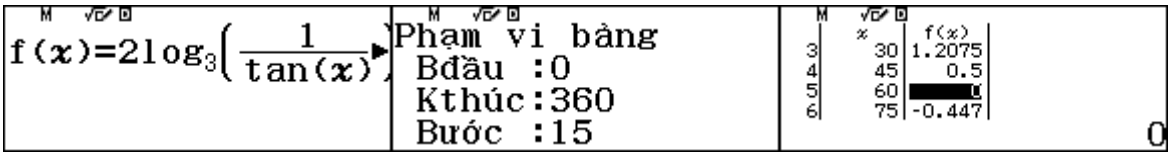
Đối chiếu điều kiện suy ra nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Mà $x \in (0; 2020\pi)$ nên $-\frac{1}{6} < k < \frac{6059}{6}$ ta chọn $k \in \{0; 1; 2\ldots; 1009\}$.

Khi đó số nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; 2020\pi)$ là 1010. Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

~ Gặp dạng lượng giác như thế này thì dò bảng nhé các chiến binh!!!

~ Xử lý trên một vòng tròn lượng giác, rồi nhân số vòng tròn sẽ tìm được đáp số.



Như vậy, 1 vòng tròn (360 độ = 2pi) thì chỉ có một nghiệm ⇒ 2020pi = 1010 vòng nghĩa là có 1010 nghiệm. Chọn D

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y thỏa mãn $5^x = log_5(x+y) + y$. Biết rằng $|y| \le 2020$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

- *Tự luận:*

Điều kiện $x + y > 0$. Đặt $log_5(x+y) = t \Leftrightarrow x + y = 5^t$

Khi đó: $\begin{cases} 5^x = t + y \\ 5^t = x + y \end{cases} \Leftrightarrow 5^t + t = 5^x + x$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u.\ln 5 + 1 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến với $\forall u \in \mathbb{R}$

Ta có: $f(t) = f(x) \Rightarrow t = x$

Khi đó: $5^x = x + y \Leftrightarrow y = 5^x - x$

Đặt $g(x) = 5^x - x \Rightarrow g'(x) = 5^x.\ln 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5(\ln 5)$

x	$-\infty$		$-\log_5(\ln 5)$		$+\infty$
$g'(x)$					
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5)$	$\nearrow$	

Để phương trình có nghiệm thì $y \geq \frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5) \approx 0,917$

Mà $|y| \leq 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A

- *Tư duy + Casio:*

Đặt $\log_5(x + y) = t \Leftrightarrow x + y = 5^t \Rightarrow \begin{cases} 5^x = t + y \\ 5^t = x + y \end{cases} \Leftrightarrow 5^t + t = 5^x + x$

Áp dụng kĩ thuật CALC: $Cho\ x = 0.01 \rightarrow t = 0.01 = x \Leftrightarrow x + y = 5^x \Leftrightarrow y = 5^x - x$.

Ta lại có: $|y| \leq 2020 \Leftrightarrow |5^x - x| \leq 2020$. Bấm đạo hàm tìm cực trị.

Để phương trình có nghiệm thì $y \geq \frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5) \approx 0,917$

Mà $|y| \leq 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A

Câu 44. Cho bất phương trình $\log 10x + \log^2 x + 3 \geq m.\log 100x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên dương để bất phương trình có nghiệm thuộc $[1; +\infty)$.

A. 1. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 2.

- *Tự luận:*

Tập xác định: $D = [1; +\infty)$.

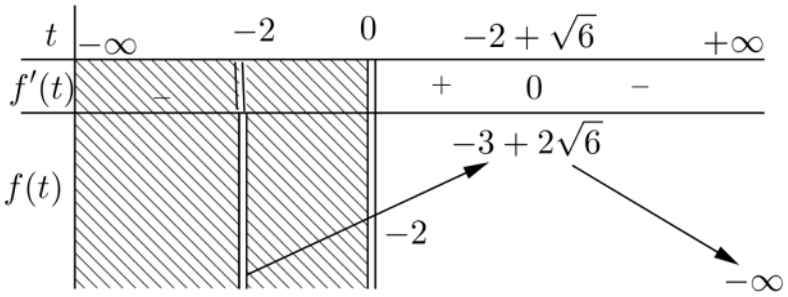
Ta có: $log\,10x + log^2 x + 3 \geq m\,log\,100x \Leftrightarrow m \leq \frac{log\,10x + log^2 x + 3}{log\,100x} = \frac{log\,x + log^2 x + 4}{log\,x + 2}$

Đặt $t = log\,x\; x \geq 1 \Rightarrow t \geq 0$, bất phương trình trở thành: $m \leq \frac{t^2+t+4}{t+2}\,(2)$.

Để bất phương trình ban đầu có nghiệm trên $[1; +\infty)$ thì bất phương trình (2) có nghiệm $[0; +\infty)$. Xét $f(t) = \frac{t^2+t+4}{t+2}$ trên $[0; +\infty)$.

Trên $[0; +\infty)$ ta có: $f'(t) = \frac{t^2+4t-2}{(t+2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 + \sqrt{6}(tm) \\ x = -2 - \sqrt{6}(l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

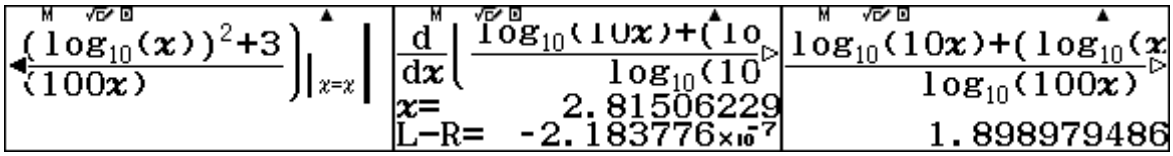


Bất phương trình (2) có nghiệm $[0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \max\limits_{[0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \leq -3 + 2\sqrt{6}$

Mà m nguyên nên $m = \{1\}$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương thõa mãn. **Chọn A**

- *Tư duy + Casio:*

Cô lập m nhanh nè: $m \leq \frac{log\,10x + log^2 x + 3}{log\,100x}$. *Dò bảng hoặc đạo hàm tại x.*



Vậy $m \leq \max\limits_{[0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \leq 1.89$. *Mà* $m \in \mathbb{Z}$ *suy ra* $m = \{1\}$. **Chọn A**

~ Bạn nào cảm thấy chưa chắc ăn thì dò lại bảng nhé!

Câu 45. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $log_3(x + y) = log_4(x^2 + y^2)$. Tập giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^3$ có chứa bao nhiêu giá trị nguyên.

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** Vô số.

- *Tự luận:*

+ Điều kiện $x + y > 0; x^2 + y^2 \neq 0$.

Ta đặt: $log_3(x + y) = log_4(x^2 + y^2) = t$. Ta có $\begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 4^t \end{cases}(1)$

Vì $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \leq 2.4^t \Rightarrow t \leq log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,85$.

+ Ta có $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \Rightarrow xy=\frac{9^t-4^t}{2}$.

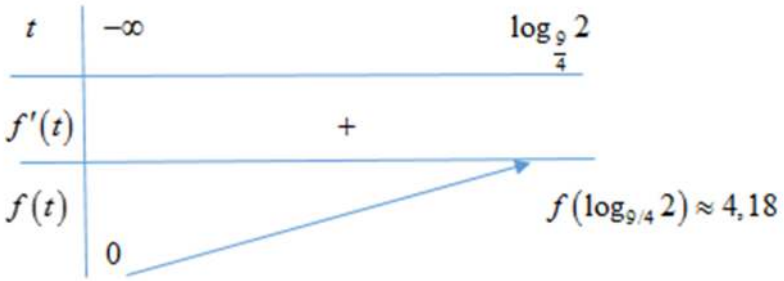
+ Khi đó, $P=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=27^t-3.3^t.\frac{9^t-4^t}{2}$

$=-\frac{1}{2}.27^t+\frac{3}{2}.12^t=f(t)$.

+ Xét $f(t)=-\frac{1}{2}.27^t+\frac{3}{2}.12^t$ với $t\le log_{\frac{9}{4}}2$, có $f'(t)=-\frac{1}{2}.27^t.ln\,27+\frac{3}{2}.12^t.ln\,12$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.27^t.ln\,27=\frac{3}{2}.12^t.ln\,12 \Leftrightarrow \left(\frac{27}{12}\right)^t=3.\frac{ln\,12}{ln\,27} \Leftrightarrow t=log_{\frac{27}{12}}\left(3.\frac{ln\,12}{ln\,27}\right)\approx 1.006(L)$

BBT:



+ Gọi T là tập giá trị của P. Từ BBT ta có $\begin{cases}T=(0;4]\\P\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \{1;2;3;4\}\in T$ nên suy ra tập giá trị của P có chứa 4 giá trị nguyên. Chọn A

- *Tư duy + Casio:*

+ *Ta đặt:* $log_3(x+y)=log_4(x^2+y^2)=t$. *Suy ra* $\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases}$

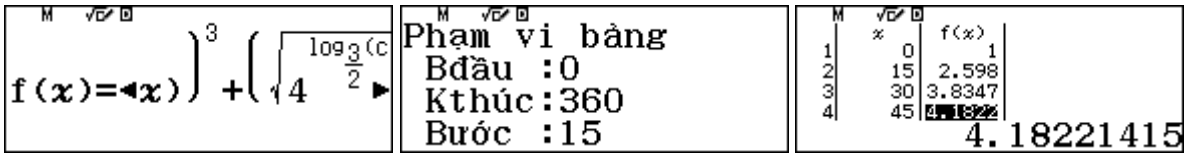
+ *Lượng giác hóa: Đặt* $\begin{cases}x=\sqrt{4^t}.cos(\alpha)\\y=\sqrt{4^t}.sin(\alpha)\end{cases}, (\alpha)\in(0;2\pi)$.

+ *Từ đó ta được:* $\sqrt{4^t}.cos(\alpha)+\sqrt{4^t}.sin(\alpha)=3^t \Rightarrow cos(\alpha)+sin(\alpha)=\frac{3^t}{\sqrt{4^t}}=\left(\frac{3}{2}\right)^t$

$\Rightarrow t=log_{\frac{3}{2}}(cos(\alpha)+sin(\alpha))$.

Ta có: $\begin{cases}x=\sqrt{4^t}.cos(\alpha)=\sqrt{4^{log_{\frac{3}{2}}(cos(\alpha)+sin(\alpha))}}.cos(\alpha)\\y=\sqrt{4^t}.sin(\alpha)=\sqrt{4^{log_{\frac{3}{2}}(cos(\alpha)+sin(\alpha))}}.sin(\alpha)\end{cases} \Rightarrow P=x^3+y^3$

+ *Dò bảng để tìm đáp số nè ^.^*



+ *Như vậy ta thấy, x chạy trong khoảng từ 1 đến 4.18. Vì theo đề x nguyên nên* $x\in\{1;2;3;4\}$. *Chọn A*

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn biểu thức $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

- *Tự luận:*

Ta có: $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} = 2^{y-x+1}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = y - x + 1 \Leftrightarrow y^2 - y = -x^2 - x + 1 (*)$

Cách 1:

Yêu câu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm $x \in \mathbb{Z}$ để phương trình (*) có nghiệm y dương

Xét hàm số $f(y) = y^2 - y$ trên $(0, +\infty)$.

$f'(y) = 2y - 1, f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên :

y	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Phương trình (*) có nghiệm y dương $\Leftrightarrow -x^2 - x + 1 \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình $(*)$ có nghiệm thực y dương. **Chọn B**

Cách 2:

Yêu cầu của bài toán được thỏa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z};\ y > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z};\ y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \mathbb{Z};\ y > 0 \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z};\ y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z};\ \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$ ta chọn $x \in \{-1; 0\}$.

TH2: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z};\ y > 0 \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z};\ \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2};\ y > 0 \end{cases}$, $\nexists x \in \mathbb{Z}$ để $y > 0$.

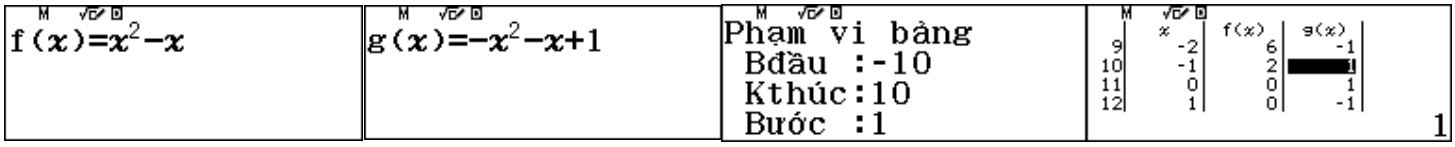
Vậy có 2 số nguyên x để phương trình $(*)$ có nghiệm thực y dương. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio + Mẹo:*

~ Vẫn như kĩ thuật ở trên - xử lý bảng đồng thời 2 giá trị x và y.

Ta có: $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} = 2^{y-x+1}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = y - x + 1 \Leftrightarrow y^2 - y = -x^2 - x + 1$. *Dò bảng đồng thời x,y.*



Vậy chỉ có hai số nguyên x tồn tại số thực dương y. **Chọn B**

Câu 47. Tìm m để phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-2}\right) + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$.

A. $-3 < m \le \frac{7}{3}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \in \{1\}$. D. $-3 \le m \le \frac{7}{3}$.

- *Tự luận:*

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$ nên $t \in [-1; 1]$

Ta có phương trình: $4(m-1)t^2 - 4(m-5)t + 4m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m(t^2 - t + 1) = t^2 - 5t + 1$

$\Leftrightarrow m = \frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1} \Leftrightarrow m = f(t)$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ với $t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = \frac{-4(1 - t^2)}{(t^2 - t + 1)^2} \le 0\ \forall t \in [-1; 1]$$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$

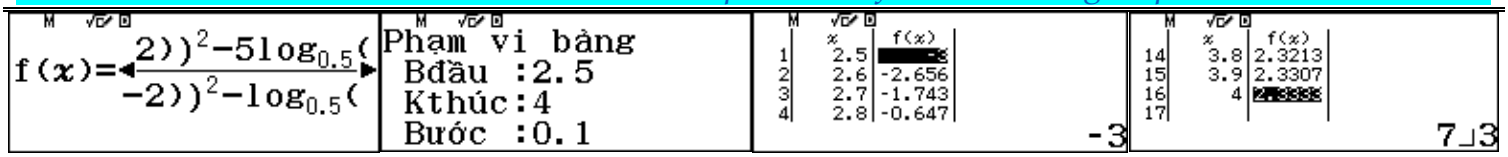
Phương trình có nghiệm khi đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 1] \Leftrightarrow f(1) \le m \le f(-1) \Leftrightarrow -3 \le m \le \frac{7}{3}$. **Chọn D**

- *Tư duy + Casio:*

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \Rightarrow 4(m-1)t^2 - 4(m-5)t + 4m - 4 = 0$

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $t = 100 \to m = \frac{9501}{9901} = \frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1} = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 - 5\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1}{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1}$.

Nhập cả biểu thức vào bảng giá trị, trên đoạn $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$ *kiểm tra kết quả đúng nhất.*



Vậy: $-3 \le m \le \frac{7}{3}$. **Chọn D**

Câu 48. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn biểu thức sau $\log_4(x+y+3) = \log_5(x^2+y^2+2x+4y+5)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

- *Tự luận:*

Cách 1:

Ta có: $\log_4(x+y+3) = \log_5(x^2+y^2+2x+4y+5)$

$\Leftrightarrow \log_4[(x+1)+(y+2)] = \log_5[(x+1)^2+(y+2)^2]$

Đặt $X = x+1;\ Y = y+2$. Khi đó ta có $\log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$

Đặt $t = \log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} X+Y = 4^t \\ X^2+Y^2 = 5^t \end{cases}$

Theo bất đẳng thức $B.C.S$ ta có: $(X+Y)^2 \le 2(X^2+Y^2)$

$\Leftrightarrow 16^t \le 2.5^t \Leftrightarrow t \le log_{\frac{16}{5}} 2$.

Mặt khác $X^2 = 5^t - Y^2 \le 5^t \le 5^{log_{\frac{16}{5}} 2}$

$\Leftrightarrow -5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2} \le X \le 5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2}$ vì $X \in \mathbb{Z} \Rightarrow X \in \{-1, 0, 1\}$

Tương tự ta có $-5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2} \le Y \le 5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2}$.

TH1: $X = 0$ ta có $\log_4 Y = \log_5 Y^2$ nghiệm là $Y = 1$. Do đó $x = y = -1$.

TH2: $X = -1$ ta có $\log_4(Y-1) = \log_5(1+Y^2)$

Xét hàm số $f(Y) = \log_4(Y-1) = \log_5(1+Y^2)$ với $-5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2} \le Y \le 5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2}$, ta lấy đạo hàm và lập bảng biến thiên chứng minh được như sau

$\max\limits_{\left(-5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2} \le Y \le 5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2}\right)} f(Y) \approx -0,93 < 0$ nên không tồn tại Y.

TH3: $X = 1$ ta có $\log_4(Y+1) = \log_5(1+Y^2)$ ta lập bảng biến thiên và chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $Y = 0$ và một nghiệm còn lại thỏa $-5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2} \le Y \le 5^{\frac{1}{2}log_{\frac{16}{5}} 2}$.

Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\left[\begin{array}{l} X = 0 \\ X = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$. **Chọn B**

<u>Cách 2</u>: (Dùng đồ thị)

Ta có: $\log_4(x + y + 3) = \log_5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)$

$\Leftrightarrow \log_4[(x + 1) + (y + 2)] = \log_5[(x + 1)^2 + (y + 2)^2]$

Đặt $X = x + 1;\ Y = y + 2$. Khi đó ta có $\log_4(X + Y) = \log_5(X^2 + Y^2)$

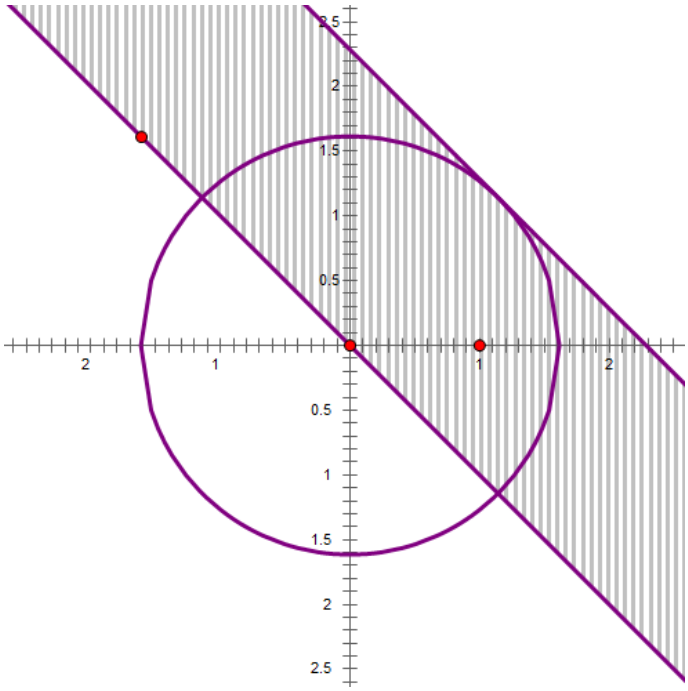
Đặt $t = \log_4(X + Y) = \log_5(X^2 + Y^2)$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} X + Y = 4^t \\ X^2 + Y^2 = 5^t \end{cases}$

Theo bất đẳng thức $B.C.S$: $(X + Y)^2 \le 2(X^2 + Y^2) \Leftrightarrow 16^t \le 2.5^t \Leftrightarrow t \le log_{\frac{16}{5}} 2$.

Khi đó ta có $\begin{cases} 0 < X + Y = 4^t \le 4^{log_{\frac{16}{5}} 2} \\ 0 < X^2 + Y^2 = 5^t \le 5^{log_{\frac{16}{5}} 2} \end{cases}$

Minh họa bằng hình vẽ:



Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\left[\begin{array}{l} X = 0 \\ X = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$. **Chọn B**

- *<u>Tư duy + Casio:</u>*

+ *Ta có:* $log_4(x + y + 3) = log_5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)$

$\Leftrightarrow log_4[(x + 1) + (y + 2)] = log_5[(x + 1)^2 + (y + 2)^2]$

+ *Đặt* $X = x + 1;\ Y = y + 2$. *Khi đó ta có* $log_4(X + Y) = log_5(X^2 + Y^2)$

+ *Ta đặt:* $t = log_4(X + Y) = log_5(X^2 + Y^2)$. *Suy ra* $\begin{cases} X + Y = 4^t \\ X^2 + Y^2 = 5^t \end{cases}$

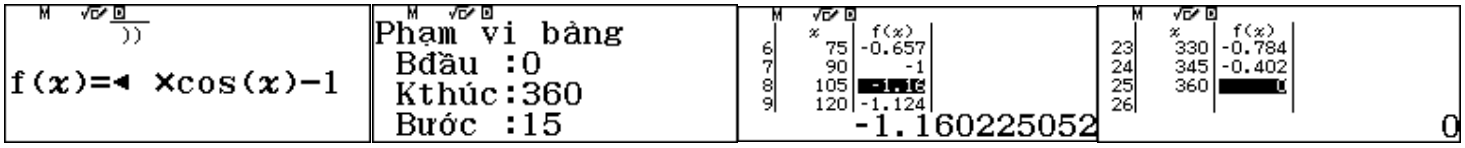
+ *Lượng giác hóa: Đặt* $\begin{cases} X = \sqrt{5^t}.\cos(\alpha) \\ Y = \sqrt{5^t}.\sin(\alpha) \end{cases}, (\alpha) \in (0; 2\pi).$

+ *Từ đó ta được:* $\sqrt{5^t}.\cos(\alpha) + \sqrt{5^t}.\sin(\alpha) = 4^t \Rightarrow \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \frac{4^t}{\sqrt{5^t}} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^t$

$\Rightarrow t = \log_{\frac{4}{\sqrt{5}}}(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)).$

+ *Ta có:* $x = X - 1 = \sqrt{5^t}.\cos(\alpha) = \sqrt{5^{\log_{\frac{4}{\sqrt{5}}}(\cos(\alpha)+\sin(\alpha))}}.\cos(\alpha) - 1.$

+ *Dò bảng để tìm đáp số nè ^.^*



+ *Như vậy ta thấy, x chạy trong khoảng từ -1.16 đến 0. Vì theo đề x nguyên nên* $x \in \{-1; 0\}$. *Chọn B*

Câu 49. Cho x, y thỏa mãn $2^{2x-y+1} + 3^{2x-y+1} - 5^{2x-y+1} = 5^{-2x+y+1} - 2^{-2x+y+1} - 3^{-2x+y+1}$(*) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 3.

- *Tự luận:*

Phương trình (*)$\Leftrightarrow 2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1}$

Đặt $2x - y = a$, phương trình trở thành $2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a})$

Nhận thấy nếu a là nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a \geq 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^t + x^{-t}, x > 1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có: $f'(x) = tx^{t-1}(1 - x^{-2t})$, do $x > 1$ nên $1 - x^{-2t} > 0$

$\Rightarrow$ hàm số này đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a + 2^{-a} \leq 3^a + 3^{-a} \leq 5^a + 5^{-a}, \forall a \geq 0$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$.

Suy ra $2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) \leq 5(5^a + 5^{-a})$

Đẳng thức phải xảy ra nên $a = 0$ hay $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

Khi đó $P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1 = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3 \leq 3$

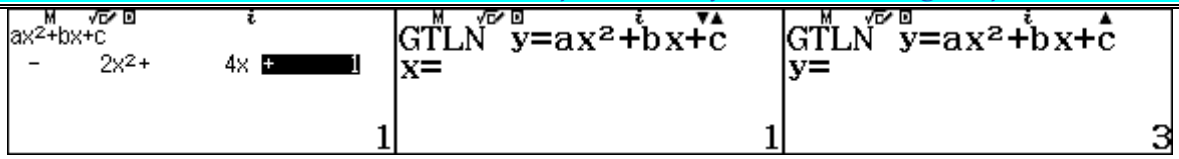
Dấu " = " xảy ra khi $x = 1$.Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x = 1$. Chọn D

- *Tư duy + Casio:*

Ta có: $2^{2x-y+1} + 3^{2x-y+1} - 5^{2x-y+1} = 5^{-2x+y+1} - 2^{-2x+y+1} - 3^{-2x+y+1}$

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $y = 0.01 \to x = 0.005 \Leftrightarrow 2x = y$.

Khi đó $P_{max} = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1 = -2x^2 + 4x + 1$



Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x = 1$. **Chọn D**

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn biểu thức $log_3(x+\sqrt{2}y) = log_2(x^2+y^2)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

- *Tự luận:*

Điều kiện $x+\sqrt{2}y > 0; x^2+y^2 \neq 0$.

Đặt $log_3(x+\sqrt{2}y) = log_2(x^2+y^2) = t$

Khi đó $\begin{cases} x+\sqrt{2}y = 3^t \\ x^2+y^2 = 2^t \end{cases}$

Vì $(x+\sqrt{2}y)^2 \leq 3(x^2+y^2) \Rightarrow 9^t \leq 3.2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t \leq 3 \Leftrightarrow t \leq log_{\frac{9}{2}} 3$.

Như vậy $x^2+y^2 = 2^t \Rightarrow x^2 \leq 2^t \leq 2^{log_{\frac{9}{2}} 3} \approx 1,65$. Vì x nguyên nên $x^2 \in \{0;1\}$.

Với $x = 0$ ta có hệ $\begin{cases} y = \frac{3^t}{\sqrt{2}} \\ y^2 = 2^t \end{cases}$. Suy ra $\frac{9^t}{2} = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t = 2 \Leftrightarrow t = log_{\frac{9}{2}} 2 \Rightarrow y = \frac{3^{log_{\frac{9}{2}} 2}}{\sqrt{2}} \approx 1,17$.

Với $x = 1$ ta có phương trình $log_3(1+\sqrt{2}y) = log_2(1+y^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y \approx 0,7686 \end{array}\right.$

Với $x = -1$ ta có phương trình $log_3(\sqrt{2}y-1) - log_2(1+y^2) = 0$.

Xét hàm số $f(y) = log_3(\sqrt{2}y-1) - log_2(1+y^2)$. Lập bảng biến thiên, ta chứng minh được $max\, f(y) \approx f(1,369) \approx -1,583 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó ta chọn được $x \in \{0;1\}$.

Vậy có 2 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn B**

- *Tư duy + Casio:*

+ *Ta có:* $log_3(x+\sqrt{2}y) = log_2(x^2+y^2)$

+ *Ta đặt:* $t = log_3(x+\sqrt{2}y) = log_2(x^2+y^2)$. *Suy ra* $\begin{cases} x+\sqrt{2}y = 3^t \\ x^2+y^2 = 2^t \end{cases}$

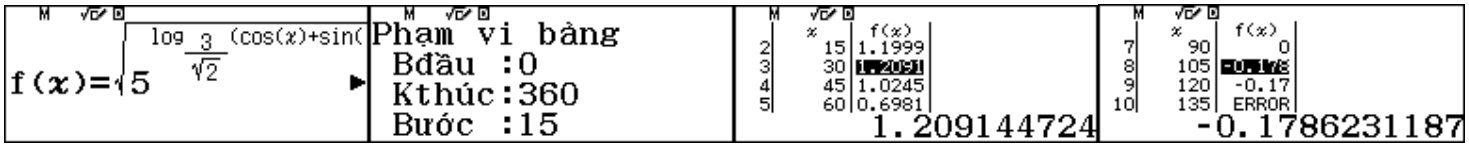
+ *Lượng giác hóa: Đặt* $\begin{cases} x = \sqrt{2^t}.cos(\alpha) \\ y = \sqrt{2^t}.sin(\alpha) \end{cases}, (\alpha) \in (0;2\pi)$.

+ *Từ đó ta được:* $\sqrt{2^t}.cos(\alpha) + \sqrt{2^t}.sin(\alpha) = 3^t \Rightarrow cos(\alpha) + sin(\alpha) = \frac{3^t}{\sqrt{2^t}} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^t$

$\Rightarrow t = \log_{\frac{3}{\sqrt{2}}}(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))$.

+ *Ta có:* $x = \sqrt{5^t}.\cos(\alpha) = \sqrt{5^{\log_{\frac{3}{\sqrt{2}}}(\cos(\alpha)+\sin(\alpha))}}.\cos(\alpha)$

+ *Dò bảng để tìm đáp số nè ^.^*



+ *Như vậy ta thấy, x chạy trong khoảng từ -0.178 đến 1.209.*

+ *Vì theo đề x nguyên nên* $x \in \{0; 1\}$. *Chọn B*

Câu 51. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thuộc đoạn $[1; 2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x + \ln x = y + e^y$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 7. **D.** 6.

- *Tự luận:*

Xét hàm số $f(t) = t + e^t \Rightarrow f'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (1).

Ta lại có: $x + \ln x = y + e^y \Leftrightarrow f(\ln x) = f(y)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

Để $1 \le x \le 2020$ thì $1 \le e^y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le y \le \ln 2020$.

Mà y nguyên và $y \in [1; 2020]$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Với mỗi giá trị $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta có 1 giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1; 2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn. Chọn C

- *Tư duy + Casio:*

~ Thật ra, nhận diện giỏi thì khẳng định $x = e^y$*, nếu không thì xem dưới đây!*

+ *Ta có:* $x + \ln x = y + e^y$. *Đặt* $M = \ln x \to x = e^M \Rightarrow e^M + M = y + e^y \Rightarrow x = e^y$.

+ Để $1 \le x \le 2020$ thì $1 \le e^y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le y \le \ln 2020$.

+ Mà y nguyên và $y \in [1; 2020]$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

+ Với mỗi giá trị $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta có 1 giá trị x tương ứng thuộc $[1; 2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn. Chọn C

Câu 52. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x > \frac{1}{10}$ và $\log x + \log y + 1 \ge \log(x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $\left[\frac{5}{3}; 2\right)$. **B.** $\left[0; \frac{4}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. **D.** $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

- *Tự luận:*

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Với điều kiện trên ta có: $log(10xy) \geq log(x+y) \Leftrightarrow 10xy \geq x+y$

$\Leftrightarrow y(10x-1) \geq x > 0 \Rightarrow y \geq \frac{x}{10x-1}\left(do\ x > \frac{1}{10}\right)$

Do đó $S = x + 3y \geq f(x) = x + \frac{3x}{10x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{3}{(10x-1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (10x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow 10x - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}+1}{10}\ \left(do\ x > \frac{1}{10}\right)$.

Lập bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left(\frac{1}{10};+\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{5}$.

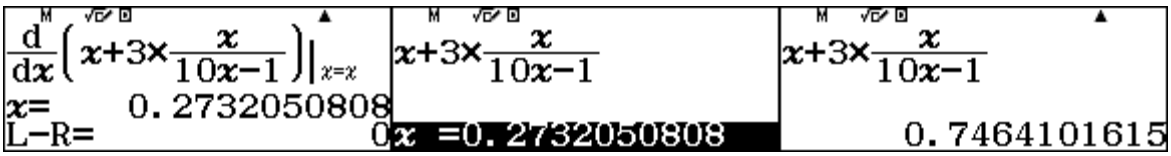
$S = x + 3y \geq f(x) = x + \frac{3x}{10x-1} \geq \min\limits_{\left(\frac{1}{10};+\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{5} \in \left[0;\frac{4}{3}\right]$. **Chọn B**

- ***Tư duy + Casio + Mẹo:***

~ Nhận thấy có dấu "=", xét tại chính nó – hãy luôn nhớ mẹo nhỏ này nhé!!!

Ta có: $log\,x + log\,y + 1 \geq log(x+y) \Leftrightarrow 10xy \geq x+y \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{10x-1}\left(do\ x > \frac{1}{10}\right)$

Ta lại có: $S = x + 3y = x + 3.\frac{x}{10x-1}$. *Bấm đạo hàm tìm điểm cực trị.*



Kết quả đó! **Chọn B**

<3 Thân tặng <3

Mọi thắc mắc, góp ý xin liên lạc:

Facebook: https://www.facebook.com/profile.php?id=100011662810941

Đặt hàng giáo án, tài liệu hoặc soạn thảo đề Toán xin liên hệ:

Thanh Phong 0913600971

Đóng góp giúp đỡ tác giả qua Số tài khoản

- **Thông tin chuyển tiền**
  - **Chuyển khoản**
  - **Chủ tài khoản: Hoàng Thanh Phong**
  - **Số tài khoản: 58210000125792**
  - **Tên ngân hàng: BIDV – Chi nhánh Phú Tài**
  - **MoMo**
  - **Số điện thoại: 0913600971**
  - **Nội dung: "Họ và tên" – " số điện thoại cá nhân"**

Tác giả xin chân thành cảm ơn

Video bài giảng free: https://www.facebook.com/groups/398922834415126/
or kênh Youtube: http://www.youtube.com/c/HoàngThanhPhong

Tài liệu bài giảng free: https://bom.to/K4SNfp *or* https://bom.to/OsGvlL *{Vấn đề Sự Biến Thiên}*

Đề thi thử free: https://bom.to/rfzjr4

Bài tập tự luyện trên lớp Shub free: https://shub.edu.vn/class/XEMXC/info - *Mã lớp:* **XEMXC**

---Hết---