

HƯỚNG TỚI KÌ THI THPT QUỐC GIA 2021

CÁC BÀI TOÁN

MIN

MAX

QUÀ TẶNG NHÂN NGÀY NHÀ GIÁO

VIỆT NAM 20 – 11

TƯ DUY MỞ

CÁC BÀI TOÁN MIN - MAX VẬN DỤNG CAO

Sưu tầm và $\text{\LaTeX}$ bởi Tư Duy Mở

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau

x	-1	1	3
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	1 3 2		

Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- (A) $m < f(0)$. (B) $m < f(1) - \frac{2}{3}$. (C) $m \leq f(0)$. (D) $m \leq f(3)$.

Lời giải.

Ta có $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$. Xét hàm $h(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ trên $(0; 3)$. Có $h'(x) = f'(x) + x^2 - 2x$. Dựa vào bảng biến thiên, ta có $1 < f'(x) \leq 3, \forall x \in (0; 3)$. Khảo sát hàm số $y = x^2 - 2x$ ta có bảng biến thiên

x	0	1	3	
y'		-	0	+
y	0			3
			-1	

Từ bảng biến thiên ta có $-1 \leq x^2 - 2x < 3$ với mọi $x \in (0; 3)$. Suy ra $h'(x) = f'(x) + x^2 - 2x > 0$ với mọi $x \in (0; 3)$. Cũng từ bảng biến thiên ta có hàm số hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$, liên tục trên $[0; 3)$. Do đó hàm số $h(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ cũng liên tục trên $[0; 3)$. Bảng biến thiên

x	0	3
$h'(x)$		+
$h(x)$	$h(0)$	$h(3)$

Phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3) \Leftrightarrow m \leq h(0) \Leftrightarrow m \leq f(0)$. Vậy $m \leq f(0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho $x^2; \frac{1}{2}; y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3}xy + y^2$. Tính $S = M + m$.

(A) 1.

(B) 3.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$.

(D) 2.

Lời giải.

Do $x^2; \frac{1}{2}; y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $x^2 + y^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (1).

Đặt $x = \sin t; y = \cos t, t \in \mathbb{R}$, ta suy ra

$$P = \sqrt{3} \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 2t + \cos 2t + 1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(2t + \frac{\pi}{3} \right) = P - \frac{1}{2}.$$

Suy ra $-1 \leq P - \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq P \leq \frac{3}{2}$.

Ta có $M = \frac{3}{2}$ khi $\sin \left(2t + \frac{\pi}{3} \right) = 1$ và $m = -\frac{1}{2}$ khi $\sin \left(2t + \frac{\pi}{3} \right) = -1$.

Vậy $S = M + m = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho (S) là một mặt cầu cố định có bán kính R . Một hình trụ (H) thay đổi nhưng luôn có hai đường tròn đáy nằm trên (S) Gọi V_1 là thể tích của khối cầu (S) và V_2 là thể tích lớn nhất của khối trụ (H) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

(A) $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2}$.(B) $\frac{V_1}{V_2} = 2$.(C) $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3}$.(D) $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{6}$.**Lời giải.**

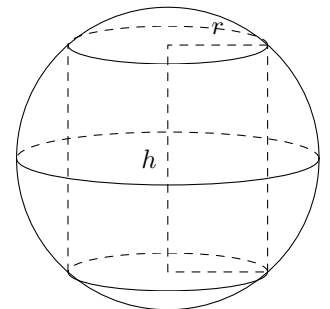
Gọi bán kính đáy hình trụ là r và chiều cao là h , ta có $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$.

$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2 \cdot h} = \frac{4R^3}{3h \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right)} = \frac{4R^3}{3hR^2 - \frac{3}{4}h^3}.$$

Xét $f(h) = 3hR^2 - \frac{3}{4}h^3 \Rightarrow f'(h) = 3R^2 - \frac{9}{4}h^2$. Ta có $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Ta có bảng biến thiên

h	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$
$f(h)$	$\frac{4R^3\sqrt{3}}{3}$



Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là $\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Một công ty cần xây một cái kho chứa hàng dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 2000 m³ bằng vật liệu gạch và xi măng, đáy là hình chữ nhật có chiều dài bằng hai lần chiều rộng. Người ta cần tính toán sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất, biết giá vật liệu xây dựng là 500.000 đồng/ m². Khi đó, chi phí thấp nhất gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

(A) 495.969.987 đồng.

(B) 495.288.088 đồng.

(C) 495.279.087 đồng.

(D) 495.289.087 đồng.

Lời giải.

Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ đáy $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$; cạnh bên $AA' = b$. Diện tích một đáy $S_{ABCD} = 2a^2$. Tổng diện tích 4 mặt bên là $S_{xq} = 6ab$. Thể tích

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^2b = 2000 \Rightarrow ab = \frac{1000}{a}$$

Chi phí thấp nhất $\Leftrightarrow$ diện tích toàn phần là nhỏ nhất.
Diện tích toàn phần của hình hộp là

$$S_{tp} = 4a^2 + 6ab = 4a^2 + \frac{6000}{a}.$$

$$\text{Ta có } 4a^2 + \frac{6000}{a} = 4a^2 + \frac{3000}{a} + \frac{3000}{a} \geq 3\sqrt[3]{36000000}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 4a^2 = \frac{3000}{a} \Leftrightarrow a = 5\sqrt[3]{6}$. Giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần là

$$\min S_{tp} = 100\sqrt[3]{36} + \frac{6000}{5\sqrt[3]{6}} \text{ m}^2.$$

Suy ra chi phí nhỏ nhất là $S = \min S_{tp} \cdot 500.000 \approx 495.289.087$ đồng.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin 2x + m$. Số các giá trị m nguyên để $f^2(x) \leq 36, \forall x$ là

(A) 0.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin 2x + m = 1 - \sin^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin 2x + m$.

Đặt $t = \sin x + \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow t^2 - 1 = \sin 2x$.

Khi đó, ta được $1 - (t^2 - 1)^2 + 2t^3 - 3(t^2 - 1) + m = 1 - (t^2 - 1)(t^2 + 2) + 2t^3 + m$.

Xét $h(t) = 1 + 2t^3 - (t^2 - 1)(t^2 + 2) = -t^4 + 2t^3 - t^2 + 3$.

$$\text{Ta có } f^2(x) \leq 36, \forall x \Leftrightarrow |h(t) + m| \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) + m \leq 6 \\ h(t) + m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) \leq 6 - m \\ h(t) \geq -6 - m \end{cases}$$

$$\text{Ta có } h'(t) = -4t^3 + 6t^2 - 2t \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$				
$h'(t)$	+	0	-	0	+	0	-		
$h(t)$	$-3 + 4\sqrt{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{239}{81}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-3 + 4\sqrt{2}$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} h(t) \leq 6 - m \\ h(t) \geq -6 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} h(t) \leq 6 - m \\ \min_{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} h(t) \geq -6 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 6 - m \\ -3 + 4\sqrt{2} \geq -6 - m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3 - 4\sqrt{2}$. Số giá trị m nguyên là 1.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 6. Cho $y = f(x) = |x^2 - 5x + 4| + mx$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ lớn hơn 1. Tính số các phần tử của tập hợp S .

(A) 8.

(B) 7.

(C) 6.

(D) 5.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $f(0) = 4 > 1$ nên

$$|x^2 - 5x + 4| + mx > 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \max \frac{1 - |x^2 - 5x + 4|}{x}, \forall x > 0 \\ m < \min \frac{1 - |x^2 - 5x + 4|}{x}, \forall x < 0. \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{1 - |x^2 - 5x + 4|}{x} = \begin{cases} -x - \frac{3}{x} + 5 & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (4; +\infty) \\ x + \frac{5}{x} - 5 & \text{khi } x \in [1; 4]. \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (4; +\infty). \text{ Ta có } g'(x) = -1 + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} & (\text{loại}) \\ x = -\sqrt{3} & (\text{nhận}). \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } x \in [1; 4]. \text{ Ta có } g'(x) = 1 - \frac{5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} & (\text{nhận}) \\ x = -\sqrt{5} & (\text{loại}). \end{cases}$$

• Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{5}$	4	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$-$	0	$+$	$-$
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$		1		$\frac{1}{4}$	
		$5 + 2\sqrt{3}$		$-\infty$	$g(\sqrt{5})$			$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có (*) xảy ra khi $1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 7. Cho ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{a^2 + 8bc} + 3}{\sqrt{a^2 + 2ac + 4bc + 2c^2 + 1}}$ có dạng $x\sqrt{y}$, với $x, y \in \mathbb{N}$. Tính $x + y$.

(A) 11.

(B) 10.

(C) 13.

(D) 20.

Lời giải.

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b$. Thay vào biểu thức P , ta có

$$P = \frac{\sqrt{a^2 + 4(a+c)c} + 3}{\sqrt{a^2 + 2ac + 2(a+c)c + 2c^2 + 1}} = \frac{\sqrt{(a+2c)^2} + 3}{\sqrt{(a+2c)^2 + 1}}.$$

Đặt $(a+2c)^2 = x$, ta có hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{-3\sqrt{x} + 1}{2(x+1)\sqrt{x^2+x}}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.

Vì $f(0) = 3, f\left(\frac{1}{9}\right) = \sqrt{10}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ nên $\max_{x \geq 0} f(x) = \sqrt{10}$, khi $x = \frac{1}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{10}$, xảy ra khi $a = \frac{1}{3}, b = 0$ và $c = \frac{2}{3}$, chẳng hạn.

Từ đó suy ra $x + y = 11$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng của tất cả các phần tử thuộc S bằng

(A) 2.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + x^2 + 1 \geq m^3x^3 + mx \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 + x^2 + 1 \geq (mx)^3 + mx. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(x^2 + 1) \geq f(mx) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq mx$.

Với $x \in [1; 3]$ bất phương trình $x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x}$. Đặt $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, ta có

$$m \leq \frac{x^2 + 1}{x}, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 3]} h(x).$$

Ta có $h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$

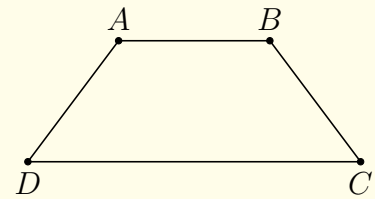
Mà $h(1) = 2; h(3) = \frac{10}{3}$, suy ra $m \leq 2$. Vì m nguyên dương nên $S = \{1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử thuộc S bằng 3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9.

Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 16 m và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (trong đó bờ sông là đường thẳng DC không phải rào và mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ấy có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?

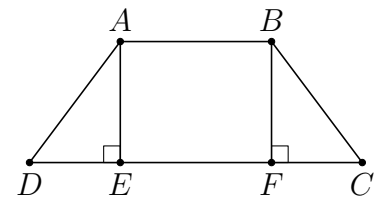


- Ⓐ $192\sqrt{3} m^2$. Ⓑ $194\sqrt{3} m^2$. Ⓒ $190\sqrt{3} m^2$. Ⓓ $196\sqrt{3} m^2$.

Lời giải.

Kẻ AE và BF vuông góc với CD . Vì $ABCD$ là hình thang cân nên giả sử $DE = CF = x$, khi đó ta có $CD = 16 + 2x$ và $AE = \sqrt{216 - x^2}$. Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot AE}{2} = \frac{(32 + 2x)\sqrt{216 - x^2}}{2} = (16 + x)\sqrt{216 - x^2}.$$



Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$S^2 = \frac{1}{3}(16 + x)^3(48 - 3x) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{(16 + x) + (16 + x) + (16 + x) + (48 - 3x)}{4} \right)^4 = 110592.$$

Suy ra $S \leq 192\sqrt{3} (m^2)$.

Dấu bằng xảy ra khi $16 + x = 48 - 3x \Leftrightarrow x = 6 (m)$.

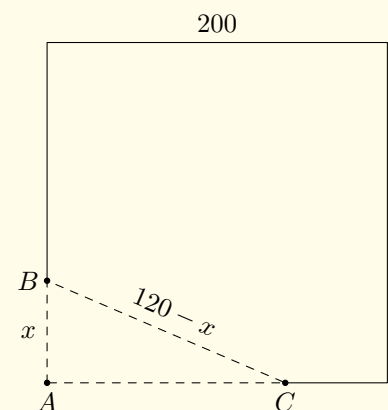
Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 10.

Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ một tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ bên. Biết $AB = x$ cm là một cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $(120 - x)$ cm. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

- Ⓐ 40 cm. Ⓑ 30 cm. Ⓒ 50 cm. Ⓓ 20 cm.



Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(120 - x)^2 - x^2} = \sqrt{14400 - 240x}$ cm. Từ đây suy ra $0 < x < 60$.

Diện tích của tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}x\sqrt{14400 - 240x}$ cm².

Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{14400 - 240x}$ với $0 < x < 60$.

Ta có $f'(x) = \sqrt{14400 - 240x} - \frac{120x}{\sqrt{14400 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{\sqrt{14400 - 240x}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40 \in (0; 60)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0	40	60	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	0	$1600\sqrt{3}$	0	

Từ đó suy ra diện tích tam giác ABC lớn nhất là bằng $800\sqrt{3} \text{ cm}^2$, đạt được khi $x = 40 \text{ cm}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 11. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$ là

(A) $\max P = 16$.

(B) $\max P = 8$.

(C) $\max P = 12$.

(D) $\max P = 4$.

Lời giải.

- Với $y = 0$ thì $x^2 = 4 \Rightarrow P = x^2 = 4$.

- Với $y \neq 0$, ta có $\frac{P}{4} = \frac{(x - y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 3}$.

- Đặt $\frac{x}{y} = t$ thì $\frac{P}{4} = f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 2t + 3}$.

- Có $f'(t) = \frac{4t^2 + 4t - 8}{(t^2 + 2t + 3)^2}$, $f(t)$ có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	1	3	0	1	

- Nhìn vào bảng biến thiên thì $\max f(t) = f(-2) = 3 \Rightarrow \max P = 3 \cdot 4 = 12$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2018|$ bằng

(A) $1008 \cdot 1009$.

(B) 1009^2 .

(C) $1009 \cdot 2019$.

(D) 2018^2 .

Lời giải.

Với mỗi $1 \leq k \leq 2017$, ta thấy nếu $x \in (k; k + 1)$ thì k số hạng đầu trong dấu giá trị tuyệt đối dương và $2018 - k$ số hạng sau trong dấu giá trị tuyệt đối mang dấu âm nên $f(x)$ là hàm bậc nhất với hệ số của x là $k - (2018 - k) = 2k - 2018$. Do đó $f'(x) = 2k - 2018$.

- Với mỗi $k < 1009$ thì $f(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $[k; k + 1]$.
- Với mỗi $k > 1009$ thì $f(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[k; k + 1]$.

- Với $k = 1009$ thì $f(x)$ là hàm hằng trên đoạn $[k; k + 1]$.

Từ đó ta thấy rằng $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1009) = 1009^2$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5, 5)$ sao cho hàm số $f(x) = mx\sqrt{3} - \sin 2x + 4 \sin x$ không có cực trị trên $[-\pi; \pi]$?

(A) 2.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = m\sqrt{3} - 2 \cos 2x + 4 \cos x = -4 \cos^2 x + 4 \cos x + m\sqrt{3} + 2$. Hàm số $f(x)$ không có cực trị trên $[-\pi; \pi]$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [-\pi; \pi] \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in [-\pi; \pi] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -4 \cos^2 x + 4 \cos x + 2 \geq -m\sqrt{3}, \forall x \in [-\pi; \pi] \\ -4 \cos^2 x + 4 \cos x + 2 \leq -m\sqrt{3}, \forall x \in [-\pi; \pi] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -m\sqrt{3} \leq \min_{x \in [-\pi; \pi]} g(x) \\ -m\sqrt{3} \geq \max_{x \in [-\pi; \pi]} g(x). \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Trong đó, $g(x) = -4 \cos^2 x + 4 \cos x + 2$. Đặt $t = \cos x$, với $x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$. Xét $h(t) = -4t^2 + 4t + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$. Ta có $h'(t) = -8t + 4$, $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in [-1; 1]$. Khi đó, $h(-1) = -6$; $h\left(\frac{1}{2}\right) = 3$; $h(1) = 2$. Suy ra $\min_{x \in [-\pi; \pi]} g(x) = \min_{t \in [-1; 1]} h(t) = -6$ và $\max_{x \in [-\pi; \pi]} g(x) = \max_{t \in [-1; 1]} h(t) = 3$. Vậy

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{3} \leq -6 \\ -m\sqrt{3} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2\sqrt{3} \\ m \leq -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Do m nguyên và thuộc khoảng $(-5; 5)$ nên $m \in \{-4; -3; -2; 4\}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình

$$\frac{x^3 + \sqrt{3x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \leq \frac{m}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2}$$

có nghiệm.

(A) $m = 1$.

(B) $m = 4$.

(C) $m = 13$.

(D) $m = 8$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình tương đương

$$\frac{x^3 + \sqrt{3x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \leq \frac{m}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2} \quad (1) \Leftrightarrow (x^3 + \sqrt{3x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 \leq m \quad (2)$$

Đặt $f(x) = (x^3 + \sqrt{3x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2$ với $x \geq 1$. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min_{x \geq 1} f(x)$. Với $x \geq 1$ ta có $\begin{cases} x^3 + \sqrt{3x^2 + 1} + 1 \geq 1^3 + \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} + 1 = 4 > 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1-1} = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$f(x) \geq 4 \cdot 1^3 = 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Suy ra $m \geq 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $m = 4$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đặt $S = 3t - \frac{6}{\sqrt{t+1}+1}$

với $t = f'(x) - f(x + a - c)$.

Khẳng định đúng với mọi $x \in [b; c]$ là

- (A) $-9 \leq S \leq -4$. (B) $S \leq -9$.
(C) $S \geq -3$. (D) $-4 \leq S \leq -3$.

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [b; c] \\ f(x + a - c) \leq 0, \forall x \in [b; c] \end{cases} \Rightarrow t \geq 0, \forall x \in [b; c]$. Xét $g(t) = 3t - \frac{6}{\sqrt{t+1}+1}$ với $t \geq 0$. Ta thấy $g'(t) = 3 + \frac{6}{(\sqrt{t+1}+1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+1}} > 0, \forall t \geq 0$. Do vậy, ta có $g(t) \geq g(0) = -3, \forall t \geq 0$. Vậy ta được $S \geq -3, \forall t \geq 0$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 16. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$x^4 + 1 - x^2 + x\sqrt{2mx^4 + 2m} \geq 0$$

đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $S = [a; b]$. Giá trị của $a\sqrt{8} + 12b$ bằng

- (A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 6.

Lời giải.

Dễ thấy bất phương trình xác định khi $m \geq 0$. Khi $x \geq 0$, bất phương trình đã cho hiển nhiên đúng. Ta chỉ cần xét khi $x < 0$. Thật vậy, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + 1 - x^2 &\geq -x\sqrt{x^4 + 1}\sqrt{2m} \Leftrightarrow \sqrt{2m} \leq \frac{x^4 + 1 - x^2}{-x\sqrt{x^4 + 1}} \\ &\Leftrightarrow 2m \leq \frac{(x^4 + 1 - x^2)^2}{x^2(x^4 + 1)} \\ &\Leftrightarrow 2m \leq \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right)^2}{x^2 + \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t \geq 2$. Bất phương trình (1) trở thành

$$2m \leq \frac{(t-1)^2}{t} = f(t), \forall t \geq 2. \quad (2)$$

Để (2) xảy ra với mọi $t \geq 2$ thì

$$2m \leq \min_{[2; +\infty)} f(t). \quad (3)$$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{2}{t^2} > 0, \forall t \geq 2$, suy ra $\min_{[2;+\infty)} f(t) = f(2) = \frac{1}{2}$. Từ (3), ta suy ra $2m \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$. Suy ra $a = 0, b = \frac{1}{4} \Rightarrow a\sqrt{8} + 12b = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho phương trình $(1-m)(x^2+1) + 2(x+1)\sqrt{x^2+1} + 2x = 0$. Biết $(a; b]$ là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó $b-a$ có giá trị là

- (A) $2 + 2\sqrt{2}$. (B) $3 + 2\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{2} - 1$. (D) $\sqrt{2} + 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2+1} = m(x^2+1) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + 2\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = m.$$

Đặt $t = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, khi đó $f'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$t = f(x)$	-1	$\sqrt{2}$	1

Suy ra $-1 < t \leq \sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $m = t^2 + 2t$ có nghiệm $t \in (1; \sqrt{2}]$.

Xét hàm số $g(t) = t^2 + 2t$ trên khoảng $(-1; \sqrt{2}]$.

Ta có $g'(t) = t + 2 > 0, \forall t \in (-2; \sqrt{2}]$ nên ta có bảng biến thiên sau

t	-1	$\sqrt{2}$
$g'(t)$	+	
$g(t)$	-1	$2 + 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \in (-1; 2+2\sqrt{2}]$, hay $a = -1, b = 2+\sqrt{2}$ nên $b-a = 3+2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

- (A) 1. (B) -3. (C) -8. (D) -5.

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}.$$

Giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên $[0; 2]$ bằng 5 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 2] \\ \exists x_0 \in [0; 2]: f(x_0) = 5. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \bullet f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 2] &\Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} \leq 5, \forall x \in [0; 2] \\
 &\Leftrightarrow m \geq x^3 + x^2 - 5x - 5, \forall x \in [0; 2] \\
 &\Leftrightarrow m \geq \max_{[0; 2]} h(x), \text{ với } h(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 3x^2 + 2x - 5, h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} \text{ (loại)}.$$

$$\text{Ta có } h(0) = -5, h(2) = -3, h(1) = -8.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0; 2]} h(x) = -3, \min_{[0; 2]} h(x) = -8.$$

$$\text{Vậy } m \geq -3.$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \bullet \exists x_0 \in [0; 2]: f(x_0) = 5 &\Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} = 5 \text{ có nghiệm trên } [0; 2]. \\
 &\Leftrightarrow m = x^3 + x^2 - 5x - 5 \text{ có nghiệm trên } [0; 2].
 \end{aligned}$$

$$\text{Theo phần trên, ta suy ra } -8 \leq m \leq -3.$$

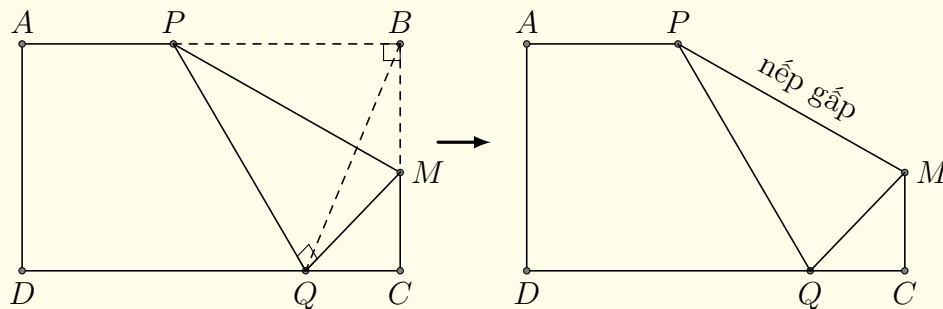
(2)

Từ (1) và (2) suy ra $m = -3$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 19. Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $AB = 9(\text{cm})$ và chiều rộng $BC = 6(\text{cm})$. Gấp tờ giấy một lần sao cho khi gấp ta được đỉnh B nằm trên cạnh CD (xem hình sau).



Để độ dài nếp gấp PM là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

$$\text{(A) } PM = \frac{27 - 9\sqrt{5}}{2} (\text{cm}).$$

$$\text{(B) } PM = \frac{9(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{2} (\text{cm}).$$

$$\text{(C) } PM = \frac{9}{2} (\text{cm}).$$

$$\text{(D) } PM = \frac{9\sqrt{3}}{2} (\text{cm}).$$

Lời giải.

Đặt $PB = x, BM = MQ = y$ với $0 < x < 9$ và $0 < y < 6$. Suy ra

$$MC = 6 - y, QC = \sqrt{12y - 36}, QB = \sqrt{12y}.$$

Ta chứng minh được $PM \perp BQ$ nên suy ra

$$PM = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{xy}{\sqrt{12y}} = \frac{xy}{\sqrt{3y}} \Rightarrow x^2 = \frac{3y^2}{y - 3}.$$

Khi đó $PM = \sqrt{\frac{3y^2}{y - 3} + y^2} = \sqrt{\frac{y^3}{y - 3}} = \sqrt{f(y)}$. Xét hàm số $f(y) = \frac{y^3}{y - 3}$ với $3 < y < 6$. Ta có

$$f'(y) = \frac{y^2(2y - 9)}{(y - 3)^2} \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \in (3; 6).$$

Bảng biến thiên

y	3	$\frac{9}{2}$	6
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$	$+\infty$	$\frac{243}{4}$	72

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(y)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{243}{4}$ khi $y = \frac{9}{2}$. Do đó PM đạt giá trị nhỏ nhất $\sqrt{\frac{243}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[1; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1; +\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min_{x \in [3; 10]} f(x) \geq m$ với mọi hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

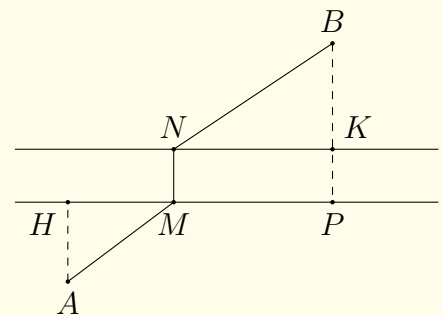
(A) $m = 25$.(B) $m = 15$.(C) $m = 20$.(D) $m = 30$.**Lời giải.**

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1; +\infty)$. Ta có $g'(x) = 6x + 2 > 0 \forall x \in [1; +\infty)$. Vì vậy ta được $g(x) \geq g(1) = 0$. Như vậy $f(x) \geq 0 \forall x \in [1; +\infty)$. Từ đó suy ra $\min_{x \in [3; 10]} f(x) = f(3)$. Ta có

$$\begin{aligned}
 f'(x) - 3x^2 - 2x + 5 &\geq 0 \Rightarrow \int_1^3 (f'(x) - 3x^2 - 2x + 5) dx \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow [f(x) - x^3 - x^2 + 5x] \Big|_1^3 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow f(3) \geq 25.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □**Câu 21.**

Người ta muốn làm một con đường đi từ thành phố A đến thành phố B ở hai bên bờ sông như hình vẽ, thành phố A cách bờ sông $AH = 3\text{km}$, thành phố B cách bờ sông $BK = \sqrt{28}\text{km}$, $HP = 10\text{km}$. Con đường làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm B nhiều gấp $\frac{16}{15}$ lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ A , chi phí làm cầu ở đoạn nào cũng như nhau. M là vị trí để xây cầu sao cho chi phí ít tốn kém nhất. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



(A) $AM \in \left(\frac{16}{3}; 7\right)$. (B) $AM \in \left(\frac{10}{3}; 4\right)$. (C) $AM \in \left(\frac{17}{4}; 5\right)$. (D) $AM \in \left(4; \frac{16}{3}\right)$.

Lời giải.

Đặt $HM = x$, $0 < x < 10$. Khi đó, $NK = MP = 10 - x$.

Ta có $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2 + 9}$, $BN = \sqrt{BK^2 + NK^2} = \sqrt{28 + (10 - x)^2}$. Gọi m là giá thành xây dựng một km đường bên A, suy ra giá thành xây dựng một km bên B là $\frac{16}{15}m$. Vậy giá thành xây dựng hai đoạn đường AM và BN là

$$T = m\sqrt{x^2 + 9} + \frac{16}{15}m\sqrt{28 + (10 - x)^2} = m \left(\sqrt{x^2 + 9} + \frac{16}{15}\sqrt{28 + (10 - x)^2} \right).$$

Để giá thành xây dựng thấp nhất thì hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \frac{16}{15}\sqrt{28 + (10 - x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{16}{15} \cdot \frac{10 - x}{\sqrt{28 + (10 - x)^2}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{16}{15} \cdot \frac{10 - x}{\sqrt{28 + (10 - x)^2}} \Leftrightarrow 15x\sqrt{28 + (10 - x)^2} = 16(10 - x)\sqrt{x^2 + 9} \\ &\Leftrightarrow 225x^2(128 - 20x + x^2) = 256(100 - 20x + x^2)(x^2 + 9) \\ &\Leftrightarrow 31x^4 - 620x^3 - 896x^2 - 46080x + 230400 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)(31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \approx 23,375 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy khi $x = 4$ thì giá thành sẽ nhỏ nhất, khi đó $AM = \sqrt{4^2 + 9} = 5\text{km}$. Nên $AM \in \left(4; \frac{16}{3}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho a, b, c là các số thực dương khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2}$$

gần với giá trị nào nhất trong các đáp án sau.

(A) 4,64.

(B) 4,67.

(C) 4,66.

(D) 4,65.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2} \leq \frac{8a + 3b + 4\left(\frac{a + 4b}{4} + \frac{b + 4c}{4} + \frac{a + 4b + 16c}{12}\right)}{1 + (a + b + c)^2}$$

$$\text{hay } P \leq \frac{28}{3} \cdot \frac{a + b + c}{1 + (a + b + c)^2}.$$

$$\text{Đặt } a + b + c = t, \text{ suy ra } t > 0 \text{ và } f(t) = \frac{28}{3} \cdot \frac{t}{1 + t^2}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{28}{3} \cdot \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Ta có } f(1) = \frac{14}{3} \text{ và } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0 \text{ và } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{28}{3} \cdot \frac{t}{1 + t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{28}{3} \cdot \frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^2}} = 0.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{14}{3}$	0

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{14}{3}$ khi $\begin{cases} a = 4b \\ b = 4c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ hay $a = \frac{16}{21}, b = \frac{4}{21}, c = \frac{1}{21}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Một trang chữ của một quyển sách tham khảo Toán học cần diện tích 384 cm^2 . Biết rằng trang giấy được canh lề trái là 2 cm , lề phải là 2 cm , lề trên 3 cm và lề dưới là 3 cm . Trang sách đạt diện tích nhỏ nhất thì có chiều dài và chiều rộng là

(A) 30 cm và 25 cm . (B) 40 cm và 20 cm . (C) 30 cm và 20 cm . (D) 40 cm và 25 cm .

Lời giải.

Gọi x, y ($x, y > 0$) lần lượt là hai kích thước của trang chữ.
($x = MF = NE, y = MN = EF$).

Diện tích trang chữ: $xy = 384 \Rightarrow y = \frac{384}{x}$.

Ta có hai kích thước của trang sách là $x + 6$ và $y + 4$.

($x + 6 = AD = BC, y + 4 = AB = CD$).

Diện tích trang sách:

$$S = (x + 6)(y + 4) = (x + 6) \left(\frac{384}{x} + 4 \right) = 408 + 4x + \frac{2304}{x}.$$

Ta có $S \geq 408 + 2\sqrt{4x \cdot \frac{2304}{x}} \Leftrightarrow S \geq 600$.

S có giá trị nhỏ nhất là 600 xảy ra khi $4x = \frac{2304}{x} \Leftrightarrow x = 24$. Suy ra $y = 16$.

Vậy trang sách đạt diện tích nhỏ nhất thì chiều dài và chiều rộng lần lượt là $24 + 6 = 30 \text{ cm}$ và $16 + 4 = 20 \text{ cm}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Gọi T là tập các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{16x + m - 4} = 4x^2 - 18x + 4 - m$ có đúng một nghiệm. Tính tổng các phần tử của T .

(A) 20 . (B) -20 . (C) 0 . (D) 10 .

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x - 1)^2 - 14x + 3 - m = \sqrt{(2x - 1) + 14x - 3 + m}$.

Đặt $a = 2x - 1, b = \sqrt{(2x - 1) + 14x - 3 + m}$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 - 14x + 3 - m = b & (1) \\ b^2 - 14x + 3 - m = a & (2) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) về theo về ta được $a^2 - b^2 = b - a \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b + 1 = 0. \end{cases}$

Khi $a = b$ ta được $2x - 1 = \sqrt{16x + m - 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 20x + 5 = m. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x) = 4x^2 - 20x + 5$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	—4	—20	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy trong trường hợp này phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $m > -4$ hoặc $m = -20$.

Khi $a + b + 1 = 0$ ta được $-2x = \sqrt{16x + m - 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x^2 - 16x + 4 = m. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = 4x^2 - 16x + 4$ với $x \in (-\infty; 0]$.

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	—	—
$f(x)$	$+\infty$	4

Từ bảng biến thiên ta thấy trong trường hợp này phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 4$. Vậy kết hợp cả hai trường hợp, phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi

$$m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; -20\}$$

Do đó tổng các phân tử của T bằng -20 .

Chọn đáp án (B)

□

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$		
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$							

Bất phương trình $(x^2 + 1)f(x) \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 2)$ khi và chỉ khi

(A) $m < 27$.

(B) $m < 10$.

(C) $m \leq 15$.

(D) $m < 15$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ trên khoảng $(-1; 2)$.

Ta có $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$.

- Với $x \in (-1; 0)$, ta có $\begin{cases} f(x) > 2, x^2 + 1 > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$.
- Với $x \in (0; 2)$, ta có $\begin{cases} f(x) > 2, x^2 + 1 > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0$.

Từ đó suy ra bảng biến thiên của $g(x)$ trên khoảng $(-1; 2)$ như sau

x	-1	0	2
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	8	2	15

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $g(x) \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 2) \Leftrightarrow m < 15$.

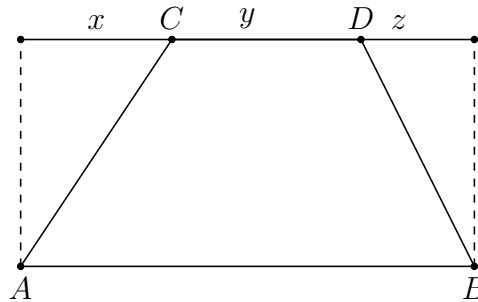
Chọn đáp án (D)



Câu 26. Lúc 10 giờ sáng trên sa mạc, một nhà địa chất đang ở tại vị trí A , anh ta muốn đến vị trí B (bằng ô tô) trước 12 giờ trưa, với $AB = 70$ km. Nhưng trong sa mạc thì xe chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Cách vị trí A 10 km có một con đường nhựa chạy song song với đường thẳng nối từ A đến B . Trên đường nhựa thì xe có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Tìm thời gian ít nhất để nhà địa chất đến vị trí B .

- (A) 1 giờ 56 phút. (B) 1 giờ 54 phút. (C) 1 giờ 52 phút. (D) 1 giờ 58 phút.

Lời giải.



Gọi các giả thiết như trên hình vẽ. Ta có

$$AC = \sqrt{x^2 + 100}; DB = \sqrt{z^2 + 100}.$$

$$\text{Từ đó tổng thời gian đi là } P = \frac{AC + DB}{30} + \frac{y}{50}.$$

Sử dụng bất đẳng thức khoảng cách ta có

$$AC + BD = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{z^2 + 100} \geq \sqrt{(x+z)^2 + (10+10)^2} = \sqrt{(70-y)^2 + 400}.$$

$$\text{Từ đó } P \geq \frac{\sqrt{(70-y)^2 + 400}}{30} + \frac{y}{50} = f(y) \text{ với } 0 \leq y \leq 70.$$

$$\text{Ta có } f'(y) = \frac{y-70}{30\sqrt{(70-y)^2 + 400}} + \frac{1}{50}.$$

$$\begin{aligned} f'(y) = 0 &\Leftrightarrow 50(70-y) = 30\sqrt{(70-y)^2 + 400} \\ &\Leftrightarrow 25(70-y)^2 = 9((70-y)^2 + 400) \\ &\Leftrightarrow (70-y)^2 = 225 \Leftrightarrow 70-y = 15 \Leftrightarrow y = 55 \end{aligned}$$

Ta có $f(0) = \frac{10\sqrt{53}}{30}$; $f(70) = \frac{31}{15}$; $f(55) = \frac{29}{15}$. Trong đó $f(55)$ là bé nhất nên
 $\min_{[0;70]} f(y) = f(55) = \frac{29}{15} \Rightarrow \min P = 1 \text{ giờ } 56 \text{ phút.}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$.

(A) $\frac{296\sqrt{15} - 18}{9}$. (B) $\frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$. (C) $\frac{-4\sqrt{6} + 18}{9}$. (D) $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của biểu thức $3xy - 5 \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} & 9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0 \\ \Leftrightarrow & 9x^3 + 2x = xy\sqrt{3xy - 5} - \sqrt{3xy - 5} \\ \Leftrightarrow & 27x^3 + 6x = (3xy - 5)\sqrt{3xy - 5} + 2\sqrt{3xy - 5} \\ \Leftrightarrow & (3x)^3 + 2 \cdot (3x) = (\sqrt{3xy - 5})^3 + 2 \cdot \sqrt{3xy - 5}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ với $t \in [0; +\infty)$, có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$.

Lại có hàm số $f(t)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Vậy $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Từ đó, suy ra

$$f(3x) = f(\sqrt{3xy - 5}) \Leftrightarrow 3x = \sqrt{3xy - 5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3xy = 9x^2 + 5. \end{cases}$$

Thay $9x^2 + 5 = 3xy - 2$ vào biểu thức P , ta có

$$\begin{aligned} P &= x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2) \\ &= x^3 + y^3 + 6xy + (3xy - 2)(x + y - 2) \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) - 2(x + y) + 4 \\ &= (x + y)^3 - 2(x + y) + 4. \end{aligned}$$

Vì $x \geq 0, 3xy = 9x^2 + 5$ nên $x > 0; y > 0; x + y = 4x + \frac{5}{3x} \geq \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

Đặt $u = x + y$, với $u \geq \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

Xét $g(u) = u^3 - 2u + 4$, có $g'(u) = 3u^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt{6}}{3}$ vì $u \geq \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(u)$ trên nửa khoảng $T = \left[\frac{4\sqrt{15}}{3}; +\infty\right)$ như sau

u	0	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{4\sqrt{15}}{3}$	$+\infty$
$g'(u)$		−	0	+
$g(u)$				$+\infty$
			$\frac{36+28\sqrt{15}}{9}$	$\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$

Vậy min $P = \min_T g(u) = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$, đạt được khi

$$\begin{cases} x + y = \frac{4\sqrt{15}}{3} \\ 3xy = 9x^2 + 5 \\ x > 0, y > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{15}}{6} \\ y = \frac{7\sqrt{15}}{6}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho x, y là hai số thực bất kỳ thuộc đoạn $[1; 3]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Tính $M + m$.

(A) $M + m = \frac{10}{3}$. (B) $M + m = \frac{16}{3}$. (C) $M + m = 3$. (D) $M + m = 5$.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{t}$.

Vì $x, y \in [1; 3] \Rightarrow t \in [1; 3]$

Ta suy ra $S(t) = t + \frac{1}{t} \Rightarrow S'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0, \quad \forall t \in [1; 3]$.

Vậy $M = S(3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ khi $\frac{x}{y} = 3 \Leftrightarrow x = 3y, \quad \forall x, y \in [1; 3]$.

$m = S(1) = 1 + 1 = 2$ khi $\frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in [1; 3]$.

Kết luận $M + m = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$.

(A) $\min P = \frac{17}{3}$. (B) $\min P = \frac{7}{3}$. (C) $\min P = 5$. (D) $\min P = \frac{115}{3}$.

Lời giải.

- Từ $x + y = 2$, ta có $y = 2 - x$. Do $x, y \geq 0$ nên $0 \leq x \leq 2$. Khi đó

$$P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (2 - x)^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5, \quad x \in [0; 2].$$

- Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$ trên $[0; 2]$

Hàm số xác định và liên tục trên $[0; 2]$.

$$f'(x) = x^2 + 4x - 5, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -5 \notin [0; 5] \end{cases}$$

$$f(0) = 5, \quad f(1) = \frac{7}{3}, \quad f(2) = \frac{17}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min_{[0; 2]} f(x) = \frac{7}{3} = \min P.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là

- (A) $A = 17 + \sqrt{6}$. (B) $A = 17 - \sqrt{6}$. (C) $A = 17 - 2\sqrt{6}$. (D) $A = 17 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Đặt $t = xy + 2$, ta có

- $x^2 + y^2 = 1 + xy = t - 1$.
- $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow t \leq 3$.
- $(x^2 + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow t - 1 + 2(t - 2) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{5}{3}$.

Mà

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 1}{2 + xy} \\ &= \frac{(t - 1)^2 - 2(t - 2)^2 + 1}{t} \\ &= \frac{-t^2 + 6t - 6}{t} \\ &= -t + 6 - \frac{6}{t}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = -t - \frac{6}{t} + 6$ trên $\left[\frac{5}{3}; 3\right]$ ta có

- $f'(t) = -1 + \frac{6}{t^2} = \frac{(\sqrt{6} - t)(\sqrt{6} + t)}{t^2}$.
- $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{11}{15}$, $f(3) = 1$ và $f(\sqrt{6}) = 6 - 2\sqrt{6}$.

Do đó $m = \min_{\left[\frac{5}{3}; 3\right]} P = \frac{11}{15}$ và $M = \max_{\left[\frac{5}{3}; 3\right]} P = 6 - 2\sqrt{6}$.

Vậy $A = M + 15m = 17 - 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$.

- (A) 4. (B) 12. (C) 0. (D) 8.

Lời giải.

Từ $x^2 - xy + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{x}$ (vì $x > 0$).

Thay vào

$$2x + 3y - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{3x^2 + 9}{x} - 14 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2 - 14x + 9}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{5}.$$

Ta có

$$P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x = 3x^2 \cdot \frac{x^2 + 3}{x} - x \cdot \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2} - 2x^3 + 2x = \frac{5x^2 - 9}{x} = 5x - \frac{9}{x}.$$

Có $P' = 5 + \frac{9}{x^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow P$ luôn đồng biến trên $\left[1, \frac{9}{5}\right]$. Do đó $P(1) \leq P \leq P\left(\frac{9}{5}\right)$.

GTNN $P = P(1) = -4$ khi $x = 1, y = 4$.

GTLN $P = P\left(\frac{9}{5}\right) = 4$ khi $x = \frac{9}{5}, y = \frac{52}{15}$.

Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức P là 0.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 32. Cho các số thực dương a, b, c, m, n, p thỏa các điều kiện $2^{2017\sqrt{m}} + 2^{2017\sqrt{n}} + 3^{2017\sqrt{p}} \leq 7$

và $4a + 4b + 3c \geq 42$. Đặt $S = \frac{2(2a)^{2018}}{m} + \frac{2(2b)^{2018}}{n} + \frac{3c^{2018}}{p}$ thì khẳng định đúng là

(A) $7 \leq S \leq 7 \cdot 6^{2018}$.

(B) $4 \leq S \leq 42$.

(C) $42 < S \leq 7 \cdot 6^{2018}$.

(D) $S > 6^{2018}$.

Lời giải.

Cho các số x, y, a, b dương và n nguyên dương. Ta chứng minh

$$\frac{x^{n+1}}{a^n} + \frac{y^{n+1}}{b^n} \geq \frac{(x+y)^{n+1}}{(a+b)^n}.$$

Đặt $f(x) = \frac{x^{n+1}}{a^n} + \frac{y^{n+1}}{b^n} - \frac{(x+y)^{n+1}}{(a+b)^n}, x > 0$. Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\frac{x^n}{a^n} - (n+1)\frac{(x+y)^n}{(a+b)^n} \Leftrightarrow x = \frac{ay}{b}.$$

Dễ thấy $f'(x) < 0$ nếu $0 < x < \frac{ay}{b}$ và $f'(x) > 0$ nếu $x > \frac{ay}{b}$ nên $f(x) \geq f\left(\frac{ay}{b}\right) = 0$. Bất đẳng thức được chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức trên $k-1$ lần, với $2k$ số dương $x_1, \dots, x_k; a_1, \dots, a_k$ và số nguyên dương n , ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_1^{n+1}}{a_1^n} + \frac{x_2^{n+1}}{a_2^n} + \dots + \frac{x_k^{n+1}}{a_k^n} &\geq \frac{(x_1 + x_2)^{n+1}}{(a_1 + a_2)^n} + \dots + \frac{x_k^{n+1}}{a_k^n} \\ &\dots \\ &\geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^{n+1}}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n}. \end{aligned} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có

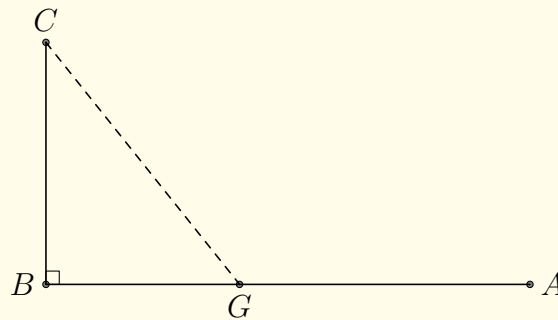
$$\begin{aligned} S &= \frac{(2a)^{2018}}{(2^{2017\sqrt{m}})^{2017}} + \frac{(2a)^{2018}}{(2^{2017\sqrt{m}})^{2017}} + \frac{(2b)^{2018}}{(2^{2017\sqrt{n}})^{2017}} + \frac{(2b)^{2018}}{(2^{2017\sqrt{n}})^{2017}} \\ &\quad + \frac{(c)^{2018}}{(3^{2017\sqrt{p}})^{2017}} + \frac{(c)^{2018}}{(3^{2017\sqrt{p}})^{2017}} + \frac{(c)^{2018}}{(3^{2017\sqrt{p}})^{2017}} \\ &\geq \frac{(2a + 2a + 2b + 2b + c + c + c)^{2018}}{(2^{2017\sqrt{m}} + 2^{2017\sqrt{m}} + 2^{2017\sqrt{n}} + 2^{2017\sqrt{n}} + 3^{2017\sqrt{p}} + 3^{2017\sqrt{p}} + 3^{2017\sqrt{p}})^{2017}} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{(4a + 4b + 3c)^{2018}}{(2^{2017}\sqrt[2017]{m} + 2^{2017}\sqrt[2017]{n} + 3^{2017}\sqrt[2017]{p})} \geq 7 \cdot 6^{2018}.$$

Vậy $S > 6^{2018}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Đường dây điện 110 KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ điểm C đến điểm B trên đất liền là 60 km, khoảng cách từ A đến B là 100 km, góc $ABC = 90^\circ$. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.



(A) 60 km.

(B) 55 km.

(C) 45 km.

(D) 40 km.

Lời giải.

Gọi x km là khoảng cách từ điểm A đến G. Ta có $BG = 100 - x$ với $0 \leq x \leq 100$.

Tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Chi phí tiền mắc điện là $T = 3000x + 5000\sqrt{3600 + (100 - x)^2}$ (USD).

Xét hàm số $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{3600 + (100 - x)^2}$ trên đoạn $[0; 100]$.

Ta có $f'(x) = 3000 - 5000 \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3000\sqrt{3600 + (100 - x)^2} = 5000(100 - x) \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{3600 + (100 - x)^2} = 5(100 - x) \\ &\Leftrightarrow 9[3600 + (100 - x)^2] = 25(100 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow (100 - x)^2 = 2025 \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - x = 45 \\ 100 - x = -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55 \\ x = 145 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $f(0) = 583095$ (USD); $f(55) = 540000$ (USD); $f(100) = 600000$ (USD).

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 55$ km.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt[5]{m + 5\sqrt{m + 5\cos x}} = \cos x$ có nghiệm.

(A) 11.

(B) 9.

(C) 8.

(D) 10.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$m + 5\cos x + 5\sqrt{m + 5\cos x} = \cos^5 x + 5\cos x. \quad (1)$$

Đặt $f(t) = t^5 + 5t$. Dễ thấy $f'(t) = 5t^4 + 5 > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến, do đó

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[5]{m+5\cos x}\right) = f(\cos x) \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{m+5\cos x} = \cos^5 x \Leftrightarrow m = \cos^5 x - 5\cos x. \quad (2)$$

Đặt $g(t) = t^5 - 5t$, $-1 \leq t \leq 1$. Ta có $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ và $g(-1) = 4$, $g(1) = -4$ nên $\max_{[-1;1]} g(t) = 4$ và $\min_{[-1;1]} g(t) = -4$. Suy ra phương trình (2), do đó phương trình ban đầu, có nghiệm khi và chỉ khi $-4 \leq m \leq 4$. Vậy có tất cả 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 - m - \sqrt[3]{3x - 5 + m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ sao cho $f(x) \geq 0 \forall x \in [2; 4]$?

(A) 4038.

(B) 2020.

(C) 2022.

(D) 2021.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (2x - 3)^3 + (2x - 3) - (3x - 5 + m) - \sqrt[3]{3x - 5 + m}$. Do đó

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^3 + (2x - 3) \geq (3x - 5 + m) + \sqrt[3]{3x - 5 + m}. \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(t) = 3t^2 + t > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên

$$(1) \Leftrightarrow g(2x - 3) \geq g(\sqrt[3]{3x - 5 + m}) \\ \Leftrightarrow 2x - 3 \geq \sqrt[3]{3x - 5 + m} \\ \Leftrightarrow m \leq 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22. \quad (2)$$

Xét hàm số $h(x) = 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22$ với $x \in [2; 4]$.

$$h'(x) = 24x^2 - 72x + 51; h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{2}}{4} \notin [2; 4] \\ x = \frac{6 - \sqrt{2}}{4} \notin [2; 4]. \end{cases}$$

Ta có $h(2) = 0$; $h(4) = 118$. Do đó $\min_{[2;4]} h(x) = 0$.

Bởi vậy $f(x) \geq 0 \forall x \in [2; 4] \Leftrightarrow (2)$ đúng với $\forall x \in [2; 4] \Leftrightarrow m \leq \min_{[2;4]} h(x) \Leftrightarrow m \leq 0$.

Các số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ thỏa mãn $f(x) \geq 0 \forall x \in [2; 4]$ là các số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 0]$. Như vậy có tất cả 2020 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 36.

Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{3x+10} - 2x = mu(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 5]$.

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

x	0	1	2	3	5
$u(x)$	4		3		3
		1		1	

Lời giải.

Xét hàm số $v(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ liên tục trên $[0; 5]$.

Ta có $v'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{1}{\sqrt{10-2x}}$; $v'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 5 \\ 2\sqrt{3x} = 3\sqrt{10-2x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

$$v(0) = \sqrt{10}; v(3) = 5; v(5) = \sqrt{15} \Rightarrow \begin{cases} \min_{[0;5]} v(x) = \sqrt{10} \Leftrightarrow x = 0 \\ \max_{[0;5]} v(x) = 5 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases} \quad (1).$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $u(x)$ trên đoạn $[0; 5]$, ta có $\begin{cases} \min_{[0;5]} u(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 3 \\ \max_{[0;5]} v(x) = 4 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \quad (2).$

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} \min_{[0;5]} \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{\sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow x = 0 \\ \max_{[0;5]} \frac{v(x)}{u(x)} = 5 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$

Phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = mu(x) \Leftrightarrow \frac{v(x)}{u(x)} = m \quad (*)$.

Do đó, phương trình $(*)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 5]$ khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{10}}{4} \leq m \leq 5$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho biểu thức $P = \left(\frac{a^2}{b} - \frac{4b^2}{a}\right)(b-a)^2 + 8\sqrt{(7+5\sqrt{2})(ab-a^2)[4(\sqrt{2}+1)b+a]}$ với a, b là hai số thực thỏa mãn $0 < a < -4(1+\sqrt{2})b$. Giá trị lớn nhất của $(5\sqrt{2}-7)P$ thuộc khoảng nào sau đây?

- (A) $(-5; 5)$. (B) $(5; 10)$. (C) $(1; 5)$. (D) $(10; 20)$.

Lời giải.

Đặt $m = \sqrt{2} + 1$, suy ra $7 + 5\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^3 = m^3$.

Từ biểu thức P và điều kiện $0 < a < -4mb$, suy ra $b < 0 < a$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, có

$$(a-2b)^2 = \left(\sqrt{-b} \cdot \frac{a}{\sqrt{-b}} + \sqrt{a} \cdot \frac{-2b}{\sqrt{a}}\right)^2 \leq (a-b) \left(\frac{a^2}{-b} + \frac{4b^2}{a}\right).$$

Vậy, ta có $\frac{a^2}{-b} + \frac{4b^2}{a} \geq \frac{(a-2b)^2}{a-b}$. Từ đó, suy ra

$$\left(\frac{a^2}{b} - \frac{4b^2}{a}\right)(b-a)^2 \leq (b-a)(a-2b)^2.$$

Lại có

$$\begin{aligned} m^3(ab-a^2)(4mb+a) &= m^3a(b-a)(4mb+a) \\ &= m(a-b)[(1+2m)a(-4mb-a)] \leq m(a-b)[2ma-4mb^2] \\ &= 4m^3(a-b)(a-2b)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $8\sqrt{m^3(ab-a^2)(4mb+a)} \leq 16\sqrt{m^3}\sqrt{(a-b)(a-2b)^2}$.

Do đó, $P \leq -t^2 + 16\sqrt{m^3}t \leq 16m^3$ với $t = \sqrt{(a-b)(a-2b)^2}$.

Vậy $(5\sqrt{2}-7)P \leq 16(5\sqrt{2}-7)(7+5\sqrt{2}) = 16$.

Chọn đáp án (D)

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2; 4]$?

(A) 2019.

(B) 2021.

(C) 4037.

(D) 2020.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$(x + 1)^3 + (x + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad \forall x \in [2; 4]$$

Vì $g(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến nên từ đó ta suy ra

$$x + 1 \geq mx \quad \forall x \in [2; 4] \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in [2; 4]} \frac{x + 1}{x} = \min_{x \in [2; 4]} h(x)$$

Ta có $h'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in [2; 4]$. Vậy $\min_{x \in [2; 4]} h(x) = h(4) = \frac{5}{4}$.

Từ đó suy ra $m \leq \frac{5}{4}$. Mà m nguyên nên $m \in \{-2018; -2017; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D)

Câu 39. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

(A) $P = 4$.(B) $P = 6$.(C) $P = 8$.(D) $P = 10$.**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} &= 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x} &= 3(2y^2 + 1) - 2y^3 - 7y \\ \Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x} &= -2y^3 + 6y^2 - 6y + 2 - y + 1 \\ \Leftrightarrow -2(\sqrt{1-x})^3 - \sqrt{1-x} &= -2(y-1)^3 - (y-1). \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t$, $g'(t) = -6t^2 - 1 < 0, \forall t$ nên hàm số nghịch biến. Do đó từ (*) ta có

$$\sqrt{1-x} = y - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ 1 - x = (y - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x = -y^2 + 2y. \end{cases}$$

$P = x + 2y = -y^2 + 2y + 2y = -(y - 2)^2 + 4 \leq 4$. Giá trị lớn nhất của P bằng 4 khi $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án (A)

Câu 40. Một người bán buôn Thanh Long Đỏ ở Lập Thạch - Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 đồng/kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó mỗi khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó mỗi khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 đồng/kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

Ⓐ 16000 đ.

Ⓑ 12000đ.

Ⓒ 22000đ.

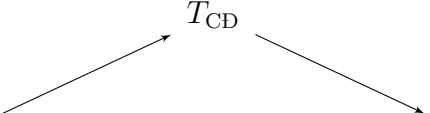
Ⓓ 24000 đ.

Lời giải.

Giả sử giá bán thay đổi x lần, mỗi lần thay đổi 2000 đồng ($x \in \mathbb{Z}$, $x > 0$ là tăng giá, $x < 0$ là giảm giá). Theo thực tế thì $-10 < x < 45$ (giá bán trên 0 đồng và còn ít nhất một khách). Tổng tiền thu được sau khi thay đổi là

$$T = (90 - x)(60 - 5x)(20 + 2x - 2, 2) = 10x^3 - 931x^2 + 1772x + 96120$$

Xét hàm số $T(x) = 10x^3 - 931x^2 + 1772x + 96120$. Bài toán trở thành tìm GTLN của $F(x)$ với $x \geq 20000$. Ta có $T'(x) = 30(x^2 - 62,0667x + 57,4)$; $T' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 1 \\ x \approx 61 \end{cases}$. Bảng biến thiên của $T(x)$

x	-10	1	45
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên suy ra T lớn nhất khi $x = 1$, tức là ta chỉ tăng giá một lần. Vậy giá bán đưa ra để lợi nhuận cao nhất là 22000.

Chọn đáp án Ⓒ

□

Câu 41. Cho ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của biểu

thức $P = \frac{\sqrt{a^2 + 8bc} + 3}{\sqrt{(a + 2c)^2 + 1}}$ có dạng $x\sqrt{y}$ ($x, y \in \mathbb{N}$). Hỏi $x + y$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 7.

Ⓑ 9.

Ⓒ 13.

Ⓓ 11.

Lời giải.

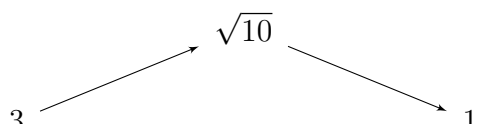
Ta có $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c \Leftrightarrow a^2 = (2b - c)^2 \Leftrightarrow a^2 + 8bc = 4b^2 + 4bc + c^2 \Leftrightarrow a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

Suy ra $P = \frac{2b + c + 3}{\sqrt{(2b + c)^2 + 1}} = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}}$ với $t = 2b + c > 0$.

Xét $f(t) = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}} \Rightarrow f'(t) = \frac{1 - 3t}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}}$.

Giải $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{10}$ khi $t = \frac{1}{3}$.

Suy ra $x = 1, y = 10 \Rightarrow x + y = 11$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 42. Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 70$ km, chiều rộng $AD = 10$ km. Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là 20 km/h, riêng đi trên cạnh CD thì vận tốc là 40 km/h. Một người đi xe máy xuất phát từ A muốn đến B thì cần ít nhất bao nhiêu giờ?

(A) $\frac{20}{\sqrt{3}}$.

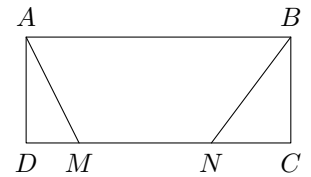
(B) $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

(C) $\frac{7}{2}$.

(D) $\frac{2\sqrt{3} + 7}{4}$.

Lời giải.

- Nếu không đi trên cạnh CD thì cách di chuyển nhanh từ A đến B là di chuyển trên đoạn AB , khi đó mất 3,5 giờ.
- Nếu có di chuyển trên CD giả sử từ A đi đến M , M đến N và N đến B (như hình vẽ), Đặt $MD = m$, $NC = n$. Ta có thời gian di chuyển từ A đến B là



$$t = \frac{\sqrt{100 + m^2} + \sqrt{100 + n^2}}{20} + \frac{70 - (m + n)}{40}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$, ta có

$$t \geq \frac{\sqrt{20^2 + (m + n)^2}}{20} + \frac{70 - (m + n)}{40},$$

dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = n$.

Đặt $m + n = x$, xét hàm $f(x) = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{20} + \frac{70 - x}{40}$, $x \in [0, 70]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{20\sqrt{400 + x^2}} - \frac{1}{40}$, $x \in [0, 70]$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{400 + x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	0	$\frac{20}{\sqrt{3}}$	70
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\frac{11}{4}$	$\frac{2\sqrt{3} + 7}{4}$	$\frac{\sqrt{50}}{2}$

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3} + 7}{4}$.

Vậy thời gian ngắn nhất là $\frac{2\sqrt{3} + 7}{4}$ khi $m = n = \frac{x}{2} = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 43. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị A, B, C (với $A \in Oy$). Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho đoạn thẳng MN chia tam giác

ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN .

(A) 12.

(B) $2\sqrt{3}$.

(C) $\sqrt{6}$.

(D) 6.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{4}{3}x^3 - 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm\sqrt{3} & \Rightarrow y = -2. \end{cases}$

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 1)$, $B(-\sqrt{3}; -2)$, $C(\sqrt{3}; -2)$. Suy ra tam giác ABC đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow AM \cdot AN = \frac{1}{2} AB \cdot AC. \end{aligned}$$

Ta lại có $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \widehat{MAN}$
nên $MN^2 \geq 2\sqrt{AM^2 \cdot AN^2} - AM \cdot AN = AM \cdot AN = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6$.

(do $\cos \widehat{MAN} = \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$).

Vậy $MN \geq \sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi $AM = AN = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{4\sin x + m} + \sin x = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4\sin x + m - 8} + 2$$

có nghiệm thực?

(A) 20.

(B) 22.

(C) 18.

(D) 21.

Lời giải.

Đặt $a = \sqrt[3]{4\sin x + m}$ và $b = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4\sin x + m - 8}$.

Khi đó: $a^3 + \sin^3 x = b^3 + 8$ và

$$\begin{aligned} a + \sin x = b + 2 &\Leftrightarrow (a + \sin x)^3 = (b + 2)^3 \\ &\Leftrightarrow a^3 + \sin^3 x + 3a\sin x(a + \sin x) = b^3 + 8 + 3 \cdot b \cdot 2(b + 2) \\ &\Leftrightarrow (a + \sin x)(a\sin x - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + \sin x = 0 \\ a\sin x - 2b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Trường hợp 1. $a + \sin x = 0$. Suy ra $m = -\sin^3 x - 4\sin x$.

Đặt $f(t) = -t^3 - 4t$, $t \in [-1; 1]$. Ta có $f'(t) = -3t^2 - 4 < 0$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Suy ra

$$\min(-\sin^3 x - 4\sin x) = \min_{[-1; 1]} f(t) = f(-1) = -5,$$

$$\max(-\sin^3 x - 4\sin x) = \max_{[-1; 1]} f(t) = f(1) = 5.$$

Vậy trong trường hợp này, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-5 \leq m \leq 5$.

Trường hợp 2. $a \sin x - 2b = 0$. Suy ra

$$\begin{aligned}\sin^3 x (4 \sin x + m) &= 8(\sin^3 x + 4 \sin x + m - 8) \\ \Leftrightarrow (8 - \sin^3 x) m &= 4 \sin^4 x - 8 \sin^3 x - 32 \sin x + 64 \\ \Leftrightarrow (8 - \sin^3 x) m &= 4(\sin x - 2)(\sin^3 - 8) \\ \Leftrightarrow m &= 8 - 4 \sin x.\end{aligned}$$

Do $\sin x \in [-1; 1]$ nên $(8 - 4 \sin x) \in [4; 12]$ hay phương trình có nghiệm khi $m \in [4; 12]$.

Từ hai trường hợp ta thu được $m \in [-5; 12]$ hay có 18 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \geq 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9; 9]$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$?

(A) 4.

(B) 10.

(C) 8.

(D) 5.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$m(\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x}) + 12\sqrt{1-x^2} - 16x \geq 2m + 15.$$

Đặt $t = \sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x}$. Khi đó hàm số t xác định trên $[-1; 1]$ và

$$t' = \frac{-\sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x^2}} < 0, \forall x \in (-1; 1).$$

Ta có $t(-1) = \sqrt{2}$, $t(1) = -3\sqrt{2}$. Suy ra tập giá trị của t là $[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Do $t^2 = 8x + 10 - 6\sqrt{1-x^2}$ nên bất phương trình đã cho có dạng

$$mt - 2t^2 - 2m + 20 - 15 \geq 0 \Leftrightarrow m(t-2) - 2t^2 + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{2t^2 - 5}{t-2} = g(t).$$

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của $m \in [-9; 9]$ sao cho $g(t) \geq m, \forall t \in [-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Xét $g(t) = \frac{2t^2 - 5}{t-2}$ trên $[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$g'(t) = \frac{4t(t-2) - (2t^2 - 5)}{(t-2)^2} = \frac{2t^2 - 8t + 5}{(t-2)^2}.$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4 + \sqrt{6}}{2} \\ t = \frac{4 - \sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $g(t)$ trên $[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]$:

x	$-3\sqrt{2}$	$\frac{4-\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2}$
g'	+	0	-
g	$\frac{-93\sqrt{2}+62}{14}$	$g\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}+2}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]} g(t) = \frac{-93\sqrt{2}+62}{14}$ tại $t = -3\sqrt{2}$.

Do đó $g(t) \geq m, \forall t \in [-3\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Leftrightarrow m \leq \min_{[-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]} g(t) \Leftrightarrow m \leq \frac{-93\sqrt{2}+62}{14}$.

Vậy trong $[-9; 9]$ có tất cả 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán gồm $-9; -8; -7; -6; -5$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 46. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ bằng 20. Mệnh đề sau đây đúng?

- (A) $0 < m \leq 2$. (B) $4 < m \leq 8$. (C) $2 < m \leq 4$. (D) $m > 8$.

Lời giải.

Ta có $y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}$. Xét các trường hợp sau

- Với $m \leq 0$, suy ra $y' < 0, \forall x \in [0; 3]$. Suy ra $\min_{[0;3]} y = y(3) = 3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$ (loại)..
- Với $m > 0$, ta có $mx + \frac{36}{x+1} = m(x+1) + \frac{36}{x+1} - m \geq 12\sqrt{m} - m$.

Theo giả thiết, ta có $\min_{[0;3]} y = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m(x+1) = \frac{36}{x+1} \\ 12\sqrt{m} - m = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ m = 4 \\ m = 100. \end{cases}$

Trường hợp 1. Khi $m = 4$, ta có $4(x+1) = \frac{36}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 2$ do $x \in [0; 3]$.

Trường hợp 2. Khi $m = 100$, ta có

$$100(x+1) = \frac{36}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow x+1 = \pm \frac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \notin [0; 3] \\ x = -\frac{8}{5} \notin [0; 3]. \end{cases}$$

Trường hợp này loại.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2; 4]$.

- (A) 2019. (B) 4037. (C) 2020. (D) 2021.

Lời giải.

Ta có: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2 \geq 0$.

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \geq (mx)^3 + mx \Leftrightarrow (x + 1)^3 + (x + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad (1).$$

Hàm số $h(t) = t^3 + t$ liên tục và có $h'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $h(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow x + 1 \geq mx \quad (2)$$

$$\text{Xét } x \in [2; 4], (2) \Leftrightarrow m \leq \frac{x+1}{x} = g(x).$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m sao cho $m \leq g(x), \forall x \in [2; 4]$.

$$\text{Suy ra } m \leq \min_{x \in [2; 4]} g(x) = g(4) = \frac{5}{4}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2018; 2018]$ nên suy ra $m \in \{-2018; -2017; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có 2020 giá trị m cần tìm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y = m \\ (2x^2 + xy)(x + 2) = 9. \end{cases}$$

(A) $m \leq -10$.

(B) $m \geq 6$.

(C) $-10 \leq m \leq 6$.

(D) $m \leq -10$ hoặc $m \geq 6$.

Lời giải.

Xét hệ

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y = m \\ (2x^2 + xy)(x + 2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2x) + (2x + y) = m \\ (x^2 + 2x)(2x + y) = 9. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) ta có } x^2 + 2x \neq 0 \Rightarrow 2x + y = \frac{9}{x^2 + 2x}.$$

$$\text{Thế vào phương trình (1) ta được } x^2 + 2x + \frac{9}{x^2 + 2x} = m. \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1, t \in [-1; +\infty).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t + \frac{9}{t}, t \in [-1; +\infty) \setminus \{0\}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{t^2 - 9}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \text{ (loại)} \\ t = 3 \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$

x	-1	0	3	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	-10	$+\infty$	6	$+\infty$

Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên $[-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\text{Từ bảng biến thiên của } f(t) \Rightarrow \text{phương trình (3) có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -10 \\ m \geq 6. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{9a^3 + a}{b + 1} = \sqrt{3b + 2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 6a - b$ là

(A) $\frac{11}{3}$. (B) $\frac{17}{12}$. (C) $\frac{89}{12}$. (D) $\frac{82}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{9a^3 + a}{b + 1} = \sqrt{3b + 2} \Leftrightarrow (\sqrt{3b + 2})^3 + \sqrt{3b + 2} = (3a)^3 + 3a \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{3b + 2}) = f(3a) \Leftrightarrow \sqrt{3b + 2} = 3a \Leftrightarrow 3b + 2 = 9a^2 \Leftrightarrow b = 3a^2 - \frac{2}{3}$$

Khi đó $S = 6a - b = -3a^2 + 6a + \frac{2}{3} = -3(a - 1)^2 + \frac{11}{3}, \forall a.$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của S là $\frac{11}{3}$, đạt được khi $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$ là

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $\frac{114}{11}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) 3 .

Lời giải.

- Từ giả thiết ta có $6x + 2y = x^2 + y^2 + 5$. Do đó,

$$P = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y + 4}{x + 2y + 1} = x + 2y + \frac{4}{x + 2y + 1}.$$

- Đặt $t = x + 2y$, $P = t + \frac{4}{t + 1}$. Theo bất đẳng thức B.C.S, ta có

$$[(x - 3) + 2(y - 1)]^2 \leq 5 [(x - 3)^2 + (y - 1)^2] = 25.$$

Suy ra $-5 \leq (x - 3) + 2(y - 1) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq t \leq 10.$

- Theo bất đẳng thức Cauchy $t + 1 + \frac{4}{t + 1} \geq 4 \Rightarrow P \geq 3.$

- Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t + 1 = \frac{4}{t + 1} \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 0) \vee \left(x = \frac{17}{5} \wedge y = -\frac{6}{5} \right).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Đặt $P = \frac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2}$. Khẳng định nào

sau đây đúng?

(A) Giá trị lớn nhất của P là 1.

(B) P không có giá trị lớn nhất.

(C) Giá trị nhỏ nhất của P là -3 .

(D) P không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Đặt $x = \sin t$; $y = \cos t$. Khi đó ta được

$$P = \frac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{\sin^2 t + 6 \sin t \cdot \cos t}{1 + 2 \sin t \cdot \cos t + 2 \cos^2 t} = \frac{6 \sin 2t - \cos 2t + 1}{2 \sin 2t + 2 \cos 2t + 4}.$$

(1) tương đương $(2P - 6) \sin 2t + (2P + 1) \cos 2t = 1 - 4P$ (2). Phương trình (2) có nghiệm khi

$$(2P - 6)^2 + (2P + 1)^2 \geq (1 - 4P)^2 \Leftrightarrow 2P^2 + 3P - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq P \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -3 khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 6xy = -3 - 6xy - 6y^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 12xy + 6y^2 + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (2x + 3y)^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{-6\sqrt{13}}{13}; y = \frac{4\sqrt{13}}{13} \\ x = \frac{6\sqrt{13}}{13}; y = \frac{-4\sqrt{13}}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 52. Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2; 4]$?

(A) 2020.

(B) 4037.

(C) 2019.

(D) 2021.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(x + 1)^3 + (x + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad \forall x \in [2; 4]$.

Vì $g(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến nên từ đó ta suy ra

$$x + 1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in [2; 4]} \frac{x + 1}{x} = \min_{x \in [2; 4]} h(x)$$

. Ta có $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [2; 4]$. Vậy $\min_{x \in [2; 4]} h(x) = h(4) = \frac{5}{4}$.

Từ đó suy ra $m \leq \frac{5}{4}$. Mà m nguyên nên $m \in \{-2018; -2017; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A)



Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3) - x^4 f(x) = x^7 - x^9$ với $\forall x \neq 0$. Biết $f(1) = 2$, gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|\frac{5}{2} - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|\right)$. Khi đó $3M + 8m$ bằng

(A) 17.

(B) 21.

(C) 12.

(D) 28.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = \frac{5}{2} - 2\sqrt{6x - 9x^2}$ trên $\left(0; \frac{2}{3}\right]$.

Vì trên $\left(0; \frac{2}{3}\right]$ ta có $0 \leq 6x - 9x^2 \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq h(x) \leq \frac{5}{2}$.

Mặt khác từ $f(x^3) - x^4 f(x) = x^7 - x^9 \Leftrightarrow \frac{f(x^3)}{x^6} + x^3 = \frac{f(x)}{x^2} + x$. (1)

Đặt $g(t) = \frac{f(t)}{t^2} + t$, nên từ (1) $\Leftrightarrow g(x^3) = g(x), \forall x \neq 0$ và $g(1) = 3$.

Suy ra $g(x) = g(\sqrt[3]{x}) \Rightarrow g(x) = g(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}})$.

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $g(x) = g(1) = 3$. Suy ra $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right] \\ x = 2 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right] \end{cases}$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}, f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{8}, f(2) = 4$.

Do đó giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $M = 4, m = \frac{5}{8} \Rightarrow 3M + 8m = 15 + 5 = 17$.

Chọn đáp án (A)



Câu 54. Xét hai số thực thay đổi x, y thỏa mãn $x^3(x-2)^3 + x^2 + y^6 + y^2 = 2x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3x - 4y + 1$ là

(A) $3 + \sqrt{2}$.(B) $2 + 5\sqrt{2}$.

(C) 9.

(D) $7\sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$x^3(x-2)^3 + x^2 + y^6 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (y^2)^3 + y^2 = (-x^2 + 2x)^3 + (-x^2 + 2x). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) ta có $f(y^2) = f(-x^2 + 2x) \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + 2x$. (2)

Từ (2) ta suy ra $-x^2 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

- Nếu $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$

$$\Rightarrow P = 3x - 4\sqrt{-x^2 + 2x} + 1 \Rightarrow P' = 3 - \frac{4x - 4}{\sqrt{-x^2 + 2x}} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 3\sqrt{-x^2 + 2x} = 4 - 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 25x^2 - 50x + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{5}.$$

Ta suy ra $P(0) = 1, P(2) = 7, P\left(\frac{2}{5}\right) = -1$.

- Nếu $y = -\sqrt{-x^2 + 2x}$

$$\Rightarrow P = 3x + 4\sqrt{-x^2 + 2x} + 1 \Rightarrow P' = 3 + \frac{-4x + 4}{\sqrt{-x^2 + 2x}} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 3\sqrt{-x^2 + 2x} = 4x - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 25x^2 - 50x + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8}{5}.$$

$$\text{Ta suy ra } P(0) = 1, P(2) = 7, P\left(\frac{8}{5}\right) = 9.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 9 khi $x = \frac{8}{5}$ và $y = -\frac{4}{5}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 55. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$, tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

- (A) 4. (B) 1. (C) -4. (D) 0.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$

Dễ thấy $\max_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = 2 + m$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = m - 2$.

Để yêu cầu bài toán xảy ra, ta xét hai trường hợp

- TH1:** $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$, khi đó $\min_{[-1;1]} y = m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 3$ (nhận)
- TH2:** $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$, khi đó $\min_{[-1;1]} y = -2 - m = 1 \Leftrightarrow m = -3$ (nhận)

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 56. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0; 2019]$ để bất phương trình $x^2 - m + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq 0$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Số phần tử của tập S bằng

- (A) 2019. (B) 1. (C) 2. (D) 2020.

Lời giải.

Ta có $x^2 - m + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq m$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^3}$ trên $[-1; 1]$.

Với mọi x thuộc $[-1; 1]$, ta có: $f'(x) = x(2 - 3\sqrt{(1 - x^2)})$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$

Vì $f(\pm 1) = 1$, $f(0) = 1$, $f\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{23}{27}$ nên $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

Do đó, $x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq m \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [-1;1]} f(x) \Leftrightarrow m \geq 1$.

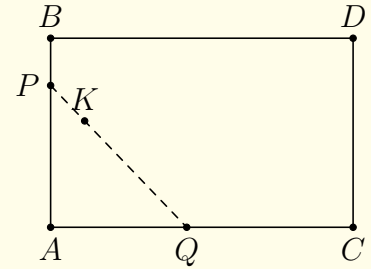
Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thuộc $[0; 2019]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 57.

Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



(A) $\frac{4\sqrt{71}}{4}$.

(B) $9\sqrt{2}$.

(C) $5\sqrt{5}$.

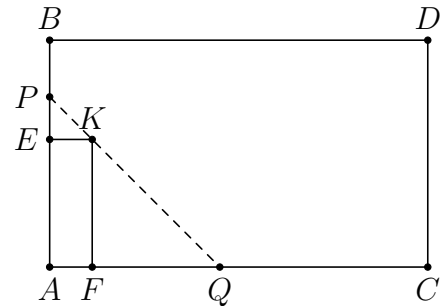
(D) $\frac{5\sqrt{65}}{4}$.

Lời giải.

Đặt $PE = x$, $FQ = y$, ($x, y > 0$).

Có

$$\frac{PE}{PA} = \frac{EK}{AQ} \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{1}{1+y} \Rightarrow x + xy = x + 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}.$$



Có

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 = (x+8)^2 + (1+y)^2 = (x+8)^2 + \left(1 + \frac{8}{x}\right)^2 = x^2 + 16x + 65 + \frac{16}{x} + \frac{64}{x^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 16x + 65 + \frac{16}{x} + \frac{64}{x^2}$ với $x > 0$.

$$f'(x) = 2x + 16 - \frac{16}{x^2} - \frac{128}{x^3} = \frac{2x^4 + 16x^3 - 16x - 128}{x^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 8x^3 - 8x - 64 = 0 \Leftrightarrow 8(x^3 - 8) + x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 8)(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	2	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên chiều dài ngắn nhất của cây sào là $PQ = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3 \cos^2 x - m \sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(A) 2020.

(B) 2019.

(C) 2028.

(D) 2018.

Lời giải.

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in [0; 1]$ do $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ có $f'(t) = 3t^2 + 6t - m$.

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$ thì

$$\begin{aligned} f'(t) &\geq 0, \forall t \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m &\geq 0, \forall t \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow 3t^2 + 6t &\geq m, \forall t \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t$; $g'(t) = 6t + 6$. Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Ta có $g(0) = 0$, $g(1) = 9 \Rightarrow \min_{[-1; 1]} g(t) = 0$.

Do đó $m \leq 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$ khi đó hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (B)



Câu 59. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) - x + e^{x-1} \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của S là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) - x + e^{x-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = m^2(4x^3 - 3x^2) - m(3x^2 - 2x) - 1 + e^{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(1) = 0$ nên từ giả thiết ta có $f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) = f(1)$.

$$\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0. \end{cases}$$

- Với $m = 0$ ta có $f(x) = e^{x-1} - x \Rightarrow f'(x) = e^{x-1} - 1$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Trường hợp $m = 0$, yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

- Với $m = 1$ ta có $f(x) = x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + e^{x-1} - x = (x-1)^2 x^2 + e^{x-1} - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp $m = 1$, yêu cầu bài toán cũng được thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị của m là $S = \{0; 1\}$. Số tập con của S là $2^2 = 4$.

Chọn đáp án (C)



Câu 60. Trong tất cả các hình thang cân có cạnh bên bằng 2 và cạnh đáy nhỏ bằng 4, tính chu vi P của hình thang có diện tích lớn nhất.

(A) $P = 10 + 2\sqrt{3}$.

(B) $P = 12$.

(C) $P = 5 + \sqrt{3}$.

(D) $P = 8$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là hình thang cân thỏa mãn yêu cầu đề bài như hình trên.

Đặt $AD = 2x \Rightarrow 2 < x < 4$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên đáy lớn

AD , dễ thấy $\triangle ABH = \triangle DCK$

$$\Rightarrow AH = DK = x - 2$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{4 - (x - 2)^2} = \sqrt{4x - x^2}.$$

Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S = \frac{(2x + 4)\sqrt{4x - x^2}}{2} = (x + 2)\sqrt{4x - x^2}. \text{ Đặt } f(x) = (x + 2)\sqrt{4x - x^2} \text{ với } 2 < x < 4.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \sqrt{4x - x^2} + (x + 2) \frac{(4 - 2x)}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{4x - x^2 + (x + 2)(2 - x)}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-2x^2 + 4x + 4}{\sqrt{4x - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}. \text{ (vì } 2 < x < 4 \text{ nên loại } x = 1 - \sqrt{3}).$$

Bảng biến thiên

x	2	$1 + \sqrt{3}$	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	8	$(3 + \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{3}})$	0

Vậy diện tích hình thang lớn nhất khi $S = (3 + \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{3}})$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 1 + \sqrt{3}$ khi đó chu vi của hình thang là $P = 2(1 + \sqrt{3}) + 2 + 4 + 2 = 10 + 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 61. Cho hàm số $f(t) = t^{2019} + \sqrt[3]{1+t} - \sqrt[3]{1-t}$. Cho hai số thực x, y thay đổi thuộc nửa khoảng $(0; 1]$ và thỏa mãn $f\left(\frac{5xy+1}{x+1}\right) + f(-y-1) = 0$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |2(x^2 + y^2) - 5(x + y) + m^2 - 2m|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tích các phần tử của S bằng

(A) $-\frac{38}{9}$.

(B) $-\frac{76}{9}$.

(C) $\frac{160}{9}$.

(D) $-\frac{17}{4}$.

Lời giải.

Hàm số $f(t)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và

$$f(-t) = (-t)^{2019} + \sqrt[3]{1-t} - \sqrt[3]{1+t} = -\left(t^{2019} + \sqrt[3]{1+t} - \sqrt[3]{1-t}\right) = -f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(t)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Lại có $f'(t) = 2019t^{2018} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+t)^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-t)^2}} > 0, \forall t \neq \pm 1$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Theo bài ra

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5xy+1}{x+1}\right) + f(-y-1) &= 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{5xy+1}{x+1}\right) = f(y+1) \\ \Leftrightarrow \frac{5xy+1}{x+1} &= y+1 \Leftrightarrow x+y = 4xy. \end{aligned}$$

Do $x, y \in (0; 1]$ nên $\begin{cases} 4xy = x + y \leq 2 \\ 4xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq xy \leq \frac{1}{2}$. Suy ra

$$P = |2(x + y)^2 - 4xy - 5(x + y) + m^2 - 2m| = |32(xy)^2 - 24xy + m^2 - 2m|.$$

Đặt $xy = u$, $u \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. Từ kết quả trên ta có

$$P = |g(u)| = \left| 2\left(4u - \frac{3}{2}\right)^2 + m^2 - 2m - \frac{9}{2} \right| = \left| 2\left(4u - \frac{3}{2}\right)^2 + (m - 1)^2 - \frac{11}{2} \right|.$$

Mặt khác $u \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq 4u - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow (m - 1)^2 - \frac{11}{2} \leq g(u) \leq (m - 1)^2 - 5$ nên ta có

$$\begin{cases} \max P = \left| (m - 1)^2 - \frac{11}{2} \right| & \text{nếu } \left| (m - 1)^2 - \frac{11}{2} \right| \geq |(m - 1)^2 - 5| \\ \max P = |(m - 1)^2 - 5| & \text{nếu } \left| (m - 1)^2 - \frac{11}{2} \right| < |(m - 1)^2 - 5|. \end{cases}$$

• Nếu $\frac{2 - \sqrt{21}}{2} \leq m \leq \frac{2 + \sqrt{21}}{2}$ thì $(m - 1)^2 - \frac{11}{2} < 0$ nên

$$\max P = \frac{11}{2} - (m - 1)^2 \geq \frac{11}{2} - \frac{21}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \min(\max P) = \frac{1}{4} \text{ khi } m = \frac{2 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

• Nếu $m < \frac{2 - \sqrt{21}}{2}$ hoặc $m > \frac{2 + \sqrt{21}}{2}$ thì $(m - 1)^2 - 5 > 0$ nên

$$\max P = (m - 1)^2 - 5 > \frac{1}{4} \text{ không có giá trị nhỏ nhất.}$$

Vậy các giá trị m tìm được là $m = \frac{2 \pm \sqrt{21}}{2}$ và tích các giá trị đó là $-\frac{17}{4}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \sqrt[3]{m + \frac{1}{2} \cos 2x} = 3$ có nghiệm thực?

(A) 6.

(B) 7.

(C) 4.

(D) 5.

Lời giải.

• Đặt $u = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ và $v = \sqrt[3]{m + \frac{1}{2} \cos 2x} = \sqrt[3]{m + \frac{1}{2} - \sin^2 x}$ với $u \in [1; \sqrt{2}]$.

• Ta có $\begin{cases} u^2 + v^3 = \frac{3}{2} + m \\ \frac{1}{u} + v = 3 \end{cases}$ nên $u^2 + \left(3 - \frac{1}{u}\right)^3 - \frac{3}{2} = m$ (1).

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm thuộc $[1; \sqrt{2}]$.

• Đặt $f(u) = u^2 + \left(3 - \frac{1}{u}\right)^3 - \frac{3}{2}$ trên $[1; \sqrt{2}]$.

Ta có $f'(u) = 2u + 3\left(3 - \frac{1}{u}\right)^2 \cdot \frac{1}{u^2} > 0$ với mọi $u \in [1; \sqrt{2}]$.

Do đó $\min_{u \in [1; \sqrt{2}]} f(u) = \frac{15}{2}$ và $\max_{u \in [1; \sqrt{2}]} f(u) = \frac{128 - 55\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm trên $[1; \sqrt{2}] \Leftrightarrow \frac{15}{2} \leq m \leq \frac{128 - 55\sqrt{2}}{4}$.

• Vậy có 5 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x + 1) = m$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 0.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(\sin x + 1) = (\sin x + 1)^3 - 3(\sin x + 1) + 1 = \sin^3 x + 3\sin^2 x - 1$.

Ta có $g'(x) = 3\sin^2 x \cos x + 6\sin x \cos x = 3\sin x \cos x(\sin x + 2)$.

Với $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ thì $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\pi; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	
$g'(x)$	0	+	0	-	0	+	0
$g(x)$	1 -1 3 -1 1 -1						

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(\sin x + 1) = m$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

khi $-1 < m < 1$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 64. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2 \cdot (a^2 + b^2) + ab = (a + b) \cdot (ab + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4 \cdot \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ bằng

(A) $\frac{23}{4}$.

(B) -10.

(C) $-\frac{21}{4}$.

(D) $-\frac{23}{4}$.

Lời giải.

Với $a, b > 0$ ta có

$$\begin{aligned} 2 \cdot (a^2 + b^2) + ab &= (a + b) \cdot (ab + 2) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 &= (a + b) \cdot \left(1 + \frac{2}{ab}\right) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 &= a + b + 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Theo BDT Cô-si, ta có $a + b + 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2 \cdot \sqrt{(a + b) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$.

Khi đó, ta được $2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$.

Ta thấy $P = 4 \cdot \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) = 4 \cdot t^3 - 9 \cdot t^2 - 12 \cdot t + 18$ với $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$.

Xét $f(t) = 4 \cdot t^3 - 9 \cdot t^2 - 12 \cdot t + 18$ với $t \geq \frac{5}{2}$.

Ta thấy $f'(t) = 6 \cdot (2t + 1) \cdot (t - 2) > 0, \forall t \geq \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Một người thợ gò làm một cái thùng đựng nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng đường chéo hình hộp bằng 6 dm và chỉ được sử dụng vừa đủ 36 dm² tôn. Với yêu cầu như trên, người thợ làm được cái thùng có thể tích lớn nhất là V dm³. Giá trị của V gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

(A) 11, 3.

(B) 11, 33.

(C) 11, 31.

(D) 11, 32.

Lời giải.

Gọi các kích thước của thùng đựng nước là a, b, c . Giả sử $0 < a \leq b \leq c$.

Do đường chéo của thùng bằng 6 dm nên $a^2 + b^2 + c^2 = 6^2 = 36$.

Ta có $36 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3a^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 12$. Suy ra $0 < a \leq 2\sqrt{3}$.

Diện tích toàn phần của thùng là $S_{\text{tp}} = 2(ab + bc + ca) = 36 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 18$.

Ta có $a + b + c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = 6\sqrt{2}$.

Thể tích của thùng đựng nước là

$$V = abc = a(18 - ab - ac) = 18a - a^2(b + c) = 18a - a^2(6\sqrt{2} - a) = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a.$$

Xét hàm số $f(a) = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a$ với $0 < a \leq 2\sqrt{3}$.

Ta có $f'(a) = 3a^2 - 12\sqrt{2}a + 18, f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$ (do $0 < a \leq 2\sqrt{3}$).

Bảng biến thiên

a	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$
$f'(a)$	+	0	-
$f(a)$			

Suy ra $\max_{a \in (0, 2\sqrt{3}]} f(a) = f(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$. Do đó $V_{\max} = 8\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ a + b + c = 6\sqrt{2} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 36 \\ a \leq b \leq c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b + c = 5\sqrt{2} \\ b^2 + c^2 = 34 \\ a \leq b \leq c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \\ c = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy $V_{\max} = 8\sqrt{2} \approx 11,31$ khi thùng đựng nước có các kích thước là $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Cho x, y là các số thực thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(x + 2y)^3 + 8xy \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8y^4 + \frac{1}{2}(x^4 - 2xy)$ bằng

- (A) 0. (B) -4. (C) $-\frac{1}{16}$. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $(x + 2y)^3 + 8xy \geq 2$ và $(x + 2y)^2 \geq 8xy$ suy ra

$$\begin{aligned}(x + 2y)^3 + (x + 2y)^2 &\geq 2 \Leftrightarrow (x + 2y - 1)((x + 2y)^2 + 2(x + 2y) + 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2y \geq 1.\end{aligned}$$

$$\text{Xét } P = 8y^4 + \frac{1}{2}(x^4 - 2xy) = 8y^4 + \frac{1}{2}x^4 - xy \geq 4x^2y^2 - xy \geq -\frac{1}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy = \frac{1}{8}$.

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } -\frac{1}{16} \text{ khi } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ xy = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa điều kiện $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ và $x + y \neq -1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y + 1}$.

Tính $S = 6M + 5m$.

- (A) $S = \frac{26}{3}$. (B) $S = -\frac{13}{3}$. (C) $S = 6$. (D) $S = -3$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$ suy ra

$$x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \Rightarrow 3xy \leq x + y + 1 \Leftrightarrow xy \leq \frac{x + y + 1}{3} = \frac{t + 1}{3} \quad (1)$$

với $t = x + y$.

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 &\Leftrightarrow (x + y)^2 - xy = x + y + 1 \\ &\Leftrightarrow xy = (x + y)^2 - (x + y) - 1 \\ &\Leftrightarrow xy = t^2 - t - 1 \quad (2)\end{aligned}$$

Kết hợp với (1) ta được $t^2 - t - 1 \leq \frac{t + 1}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq t \leq 2$.

Với $t = x + y$, kết hợp (2), ta có $P = \frac{xy}{x + y + 1} = \frac{t^2 - t - 1}{t + 1}$.

Đặt $g(t) = \frac{t^2 - t - 1}{t + 1}$, ta đi tìm GTLN và GTNN của $g(t)$ với $t \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$.

$$g'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t + 1)^2} \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g\left(-\frac{2}{3}\right) = g(2) = \frac{1}{3}, g(0) = -1.$$

Vậy $M = \frac{1}{3}$ và $m = -1$ suy ra $S = 6M + 5m = -3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m sao cho tồn tại các số thực không âm x, y thỏa mãn đồng thời $x^3 + y^3 = 1 + xy$ và $x^2 + y^2 + xy = m$. Tìm số phần tử của S .

(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 + xy \\ x^2 + y^2 + xy = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 1 + xy & (1) \\ (x+y)^2 - xy = m. & (2) \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Đặt } a = x + y \text{ và } b = xy \text{ thì hệ trở thành } \begin{cases} a^2 - 3ab - b - 1 = 0 & (3) \\ a^2 - b = m. & (4) \end{cases} \quad (II)$$

Hệ (I) có nghiệm $x \geq 0, y \geq 0$ khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm a, b thỏa $\begin{cases} a \geq 0, b \geq 0 \\ a^2 \geq 4b \end{cases}$.

Với $a \geq 0$, từ (3) ta có $b = \frac{a^3 - 1}{3a + 1}$. Do đó

$$\begin{cases} b \geq 0 \\ a^2 \geq 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^3 - 1}{3a + 1} \geq 0 \\ a^2 \geq 4 \cdot \frac{a^3 - 1}{3a + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ (a - 2)(a^2 + a + 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 2.$$

Từ (2) ta được $m = a^2 - b = a^2 - \frac{a^3 - 1}{3a + 1} = \frac{2a^3 + a^2 + 1}{3a + 1}$. (5)

Xét hàm số $f(a) = \frac{2a^3 + a^2 + 1}{3a + 1}$ với $a \in [1; 2]$ có

$$f'(a) = \frac{12a^3 + 9a^2 + 2a - 3}{(3a + 1)^2} \geq \frac{12a^3 + 2a + 6}{(3a + 1)^2} > 0 \quad \forall a \in [1; 2].$$

Suy ra $\min_{a \in [1; 2]} f(a) = f(1) = 1, \max_{a \in [1; 2]} f(a) = f(2) = 3$.

Hệ (II) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (5) có nghiệm $a \in [1; 2]$, lúc này $1 \leq m \leq 3$.

Vậy $S = \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \sin x + \cos x + 1}{\cos x + 2}$ có giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ sao cho $y_{\min} < 1$.

(A) $m \neq 0$.

(B) $m \in [-1; 1]$.

(C) $m \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(D) $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$y = \frac{m \sin x + \cos x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow m \sin x + (1 - y) \cos x = 2y - 1$. Hàm số $y = \frac{m \sin x + \cos x + 1}{\cos x + 2}$ tồn tại giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ khi và chỉ khi

$$m^2 + (1 - y)^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{6} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{6}.$$

Từ đây, ta có $y_{\min} = \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{6} < 1$ với mọi giá trị thực m .

Chọn đáp án (D)



Câu 70. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 1]$.

(A) $8a - d$.

(B) $24a + d$.

(C) $d - 16a$.

(D) $d + 16a$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + c$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{3a}$.

- Nếu $-\frac{c}{3a} \leq 0$ thì $f'(x)$ không đổi dấu với mọi $x \in (0; +\infty)$.
Khi đó $f(x)$ không đạt GTLN/GTNN trên $(0; +\infty)$.

- Do vậy $-\frac{c}{3a} > 0$. Khi đó $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{3a}}$.

Để $\min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = f(2)$ thì $\sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2$ và lúc này ta có BBT:

x	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Ta có $\sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$. Hàm số trở thành $y = ax^3 - 12ax + d$. Xét trên đoạn $[-3; 1]$ ta có:

x	-3	-2	1
y'	+	0	-
y			

Chọn đáp án (D)



Câu 71. Biết m là giá trị để hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

(B) $m \in (-2; -1)$.

(C) $m \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$.

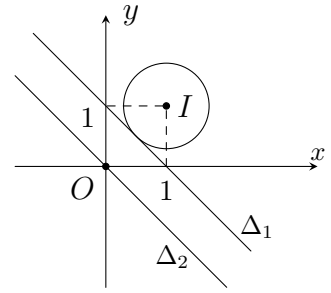
(D) $m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 & x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \\
 \Leftrightarrow & 2xy + m \geq (1 - x - y)^2 \\
 \Leftrightarrow & m \geq x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1 \\
 \Leftrightarrow & m + 1 \geq (x - 1)^2 + (y - 1)^2.
 \end{aligned}$$

Trong mặt phẳng Oxy , xét đường tròn tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{m+1}$.
 Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$R = d(I; \Delta_1) \Leftrightarrow \sqrt{m+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 6]$ là $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$, khi đó kết quả của $a+b$ là

(A) -1 .

(B) 10 .

(C) 3 .

(D) 1 .

Lời giải.

Xét hàm số $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$ trên $[-3; 6]$.

$$\text{Ta có } t' = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Tính được $t(-3) = 3, t(6) = 3, t\left(\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{2}$. Từ đó suy ra miền giá trị của t trên $[-3; 6]$ là $[3; 3\sqrt{2}]$.

Lại có $t^2 = 9 + 2\sqrt{18+3x-x^2}$ suy ra, $2\sqrt{18+3x-x^2} = t^2 - 9$. Với cách đặt t như vậy, bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 6]$ khi và chỉ khi, bất phương trình

$$-t^2 + 2t + 9 \leq 2m^2 - 2m + 2$$

nghiệm đúng với mọi $t \in [3; 3\sqrt{2}]$. Hay $\max_{[3; 3\sqrt{2}]} (-t^2 + 2t + 9) \leq 2m^2 - 2m + 2$.

Xét hàm số $g(t) = -t^2 + 2t + 9$ trên $[3; 3\sqrt{2}]$. Có $g'(t) = -2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \notin [3; 3\sqrt{2}]$. Tính được, $g(3) = 6, g(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 9$. Từ đó suy ra $\max_{[3; 3\sqrt{2}]} g(t) = 6$. Tóm lại yêu cầu bài toán tương đương với

$$2m^2 - 2m + 2 \geq 6 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2. \end{cases}$$

Vậy $a+b = -1+2 = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d, a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} y = y(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 3]$ bằng

(A) $d + 8a$.

(B) $d + 2a$.

(C) $d - 16a$.

(D) $d - 11a$.

Lời giải.

• Nếu $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, do đó hàm số không có giá trị nhỏ nhất; Mâu thuẫn với giả thiết nên $a < 0$.

• Ta có $y' = 3ax^2 + c$.

Nếu $c \leq 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất, mâu thuẫn với giả thiết nên $c > 0$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}.$$

- Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{c}{3a}}$	$\sqrt{-\frac{c}{3a}}$	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	$\nearrow$	$y\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right)$	$\rightarrow$	$y\left(\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên ta có $y\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) = \min_{(-\infty, 0)} y = y(-2)$ nên $\sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$.
- Khi đó, ta có $\max_{[1;3]} y = y(2) = 8a + 2c + d = d - 16a$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 74. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc của dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

- (A) 6 km/h. (B) 12 km/h. (C) 9 km/h. (D) 15 km/h.

Lời giải.

Vận tốc bơi ngược dòng là $v - 6$ km/h. Điều kiện $v > 6$. Thời gian bơi ngược dòng để vượt 300 km là $\frac{300}{v-6}$ h. Suy ra $E(v) = 300 \cdot c \cdot \frac{v^3}{v-6}$. Ta có $E'(v) = 600 \cdot c \cdot \frac{v^3 - 9v^2}{(v-6)^2}$. Cho $E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$.

Bảng biến thiên

v	6	9	$+\infty$
$E'(v)$	$-$	0	$+$
$E(v)$	$+\infty$		$+\infty$

Vậy $v = 9$ km/h thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 75. Cho phương trình $4 \sin x + 3 \cos x + \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 1} = m$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- (A) $m \in \left(\frac{13}{4}; \frac{31}{6}\right)$. (B) $m \in (-1; 1)$. (C) $m \in (1; 3)$. (D) $m \in \left(1; \frac{31}{6}\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = 4 \sin x + 3 \cos x = 5 \left(\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x\right) = 5 \sin(x + \alpha)$, với $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$ và $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $x + \alpha \in \left(\arccos \frac{4}{5}; \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{4}{5}\right)$ và $t \in (3; 5)$.

Với điều kiện trên, phương trình tương đương $t + \frac{1}{t+1} = m$ (1).

Đặt $f(t) = t + \frac{1}{t+1}$, hàm số $f(t)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dễ thấy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(3; 5)$ nên $f(3) < f(t) < f(5) \Leftrightarrow \frac{13}{4} < f(t) < \frac{31}{6}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in \left(\frac{13}{4}; \frac{31}{6}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- (A) $(-10; -9)$. (B) $(-6; -5)$. (C) $(-5; -4)$. (D) $(-11; -9)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2) &\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}}\right) \\ &\geq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \Rightarrow t^2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = t^2 - 2. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2)} &\Rightarrow 2(t^2 - 2) + 1 \geq 2\sqrt{2}t \Leftrightarrow 2t^2 - 2\sqrt{2}t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ t \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \text{Kết hợp điều kiện } t &\geq 2 \Rightarrow t \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t^2 \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Dấu đẳng thức của (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = 1, b = 2. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } P = 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 - 12\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 9\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + 18.$$

$$\text{Xét hàm số } f(u) = 4u^3 - 9u^2 - 12u + 18, u \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

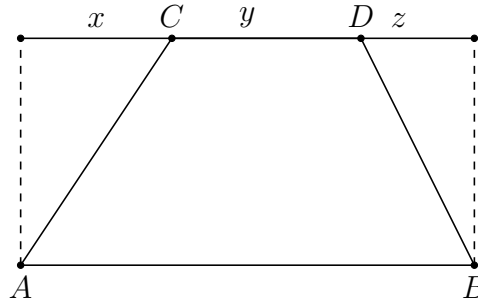
$$\text{Ta có } f'(u) = 12u^2 - 18u - 12, \text{ bảng biến thiên của } f(u).$$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có } \min_{\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)} f(u) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Lúc 10 giờ sáng trên sa mạc, một nhà địa chất đang ở tại vị trí A, anh ta muốn đến vị trí B (bằng ô tô) trước 12 giờ trưa, với $AB = 70$ km. Nhưng trong sa mạc thì xe chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Cách vị trí A 10 km có một con đường nhựa chạy song song với đường thẳng nối từ A đến B. Trên đường nhựa thì xe có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Tìm thời gian ít nhất để nhà địa chất đến vị trí B.

- (A) 1 giờ 58 phút. (B) 1 giờ 56 phút. (C) 1 giờ 52 phút. (D) 1 giờ 54 phút.

Lời giải.

Gọi các giả thiết như trên hình vẽ. Ta có

$$AC = \sqrt{x^2 + 100}; DB = \sqrt{z^2 + 100}.$$

Từ đó tổng thời gian đi là $P = \frac{AC + DB}{30} + \frac{y}{50}$.

Sử dụng bất đẳng thức khoảng cách ta có

$$AC + BD = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{z^2 + 100} \geq \sqrt{(x+z)^2 + (10+10)^2} = \sqrt{(70-y)^2 + 400}.$$

Từ đó $P \geq \frac{\sqrt{(70-y)^2 + 400}}{30} + \frac{y}{50} = f(y)$ với $0 \leq y \leq 70$.

Ta có $f'(y) = \frac{y-70}{30\sqrt{(70-y)^2 + 400}} + \frac{1}{50}$.

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 50(70-y) = 30\sqrt{(70-y)^2 + 400}$$

$$\Leftrightarrow 25(70-y)^2 = 9((70-y)^2 + 400)$$

$$\Leftrightarrow (70-y)^2 = 225 \Leftrightarrow 70-y = 15 \Leftrightarrow y = 55$$

Ta có $f(0) = \frac{10\sqrt{53}}{30}$; $f(70) = \frac{31}{15}$; $f(55) = \frac{29}{15}$. Trong đó $f(55)$ là bé nhất nên

$$\min_{[0;70]} f(y) = f(55) = \frac{29}{15} \Rightarrow \min P = 1 \text{ giờ } 56 \text{ phút.}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 78. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m (biết $m \geq -2019$) để hệ phương trình sau có nghiệm thực?

$$\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2 \cdot \sqrt[3]{y} - 2x^2 + x\sqrt[3]{y} = m. \end{cases}$$

(A) 2020.

(B) 2018.

(C) 2019.

(D) 2021.

Lời giải.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2 \cdot \sqrt[3]{y} - 2x^2 + x\sqrt[3]{y} = m. \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{y}$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + x - t = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2 \cdot t - 2x^2 + xt = m. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2x - t = 1 - 2m \\ (x^2 - x)(2x - t) = m. \end{cases}$$

Đặt $a = x^2 - x \geq -\frac{1}{4}$, $b = 2x - t$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 1 - 2m \\ ab = m. \end{cases} \quad (II)$$

Do vậy a, b là nghiệm của phương trình $X^2 - (1 - 2m)X + m = 0$. (*)

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có ít nhất một nghiệm $X \geq -\frac{1}{4}$.

$$(*) \Leftrightarrow m = \frac{-X^2 + X}{2X + 1}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{-x^2 + x}{2x + 1}$ với $x \geq -\frac{1}{4}$ có $g'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(2x + 1)^2}$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$			+	0	-
$g(x)$				$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$

Như vậy để thỏa yêu cầu bài toán khi và chỉ khi $m \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$. Mặt khác do $m \in \mathbb{Z}, m \geq -2019$ nên có tất cả 2020 giá trị thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 79. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $-1 - 2\sqrt{2} < x < -1 + 2\sqrt{2}, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{8 - (y+z)^2}$.

(A) $P_{\min} = \frac{9}{8}$.

(B) $P_{\min} = \frac{4}{3}$.

(C) $P_{\min} = \frac{3}{4}$.

(D) $P_{\min} = \frac{8}{9}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} -1 - 2\sqrt{2} < x < -1 + 2\sqrt{2} \\ y > 0, z > 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -2\sqrt{2} < x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{8}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{8}{(1-x)^2} + \frac{1}{8 - (x+1)^2}.$$

$$\text{Đặt } t = x + 1, t \in (-2\sqrt{2}; 0).$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{8}{(2-t)^2} + \frac{1}{8-t^2}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-16}{(t-2)^3} + \frac{2t}{(t^2-8)^2} = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Bảng biến thiên

x	$-2\sqrt{2}$	-2	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Vậy $P_{\min} = \frac{3}{4}$ tại $x = -3; y = z = 1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 80. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Tập hợp S có bao nhiêu phần tử?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 6.

(D) 0.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[0; 2]$. Khi đó $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$

Vậy $f(0) = m; f(1) = m - 2; f(2) = m + 2$.

Do đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = \{|m + 2|; |m|; |m - 2|\}$.

$$\begin{aligned} \bullet \max_{[0;2]} y = |m + 2| &\Rightarrow \begin{cases} |m + 2| \geq |m - 2| \\ |m + 2| \geq |m| \\ |m + 2| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq -1 \\ \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow m = 1. \\ \bullet \max_{[0;2]} y = |m - 2| &\Rightarrow \begin{cases} |m - 2| \geq |m + 2| \\ |m - 2| \geq |m| \\ |m - 2| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq 1 \\ \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow m = -1. \\ \bullet \max_{[0;2]} y = |m| &\Rightarrow \begin{cases} |m| \geq |m + 2| \\ |m| \geq |m - 2| \\ |m| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \\ \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp S có hai phần tử là $m = 1, m = -1$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	1	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq mx^2(x^2 - 2) + 2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$. Số phần tử của tập S là

- (A) 0. (B) Vô số. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{f(x)}{x^4 - 2x^2 + 2} \geq m$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $5 \leq f(x) \leq 9$ với mọi $x \in [0; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ với $x \in [0; 3]$ ta có $g'(x) = 4x^3 - 4x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

Ta lại có $g(0) = 2$, $g(1) = 1$, $g(3) = 65$. Từ đó suy ra $1 \leq g(x) \leq 65$ với mọi $x \in [0; 3]$.

Xét hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in [0; 3]$. Từ đó ta có đánh giá $\frac{5}{65} \leq h(x) \leq 9$ với mọi $x \in [0; 3]$.

Từ đó suy ra $\min_{x \in [0; 3]} h(x) = \frac{5}{65}$ khi $x = 3$; $\max_{x \in [0; 3]} h(x) = 9$ khi $x = 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ khi và chỉ khi $m \leq 9$.

Vì m nguyên dương nên có tất cả 9 giá trị thỏa đề bài.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 82. Cho $M = \frac{9}{x^2 + 3z - x + 1} + \frac{9}{y^2 + 3x - y + 1} + \frac{9}{z^2 + 3y - z + 1} - \frac{1}{2 \min\{x; y; z\} - 3}$.

Khẳng định đúng với mọi $x, y, z \geq \frac{7}{4}$ là

- (A) $3 \leq M \leq \frac{10 + \sqrt{2}}{3}$. (B) $-4 \leq M \leq \frac{1}{3}$.
(C) $\frac{1}{3} \leq M \leq \frac{190}{121}$. (D) $M \leq 3$.

Lời giải.

Giả sử $x \geq y \geq z \geq \frac{7}{4}$. (1)

Xét $f(t) = t^2 - t$ với $t \geq \frac{7}{4}$. Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{7}{4}$	z	y	x	$+\infty$
$f'(t)$			+		
$f(t)$	$\frac{21}{16}$	$f(z)$	$f(y)$	$f(x)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} x^2 - x \geq z^2 - z \\ y^2 - y \geq z^2 - z. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có
$$\begin{cases} x^2 + 3z - x + 1 = x^2 - x + 3z + 1 \geq (z+1)^2 \\ y^2 + 3x - y + 1 = y^2 - y + 3x + 1 \geq (z+1)^2 \\ z^2 + 3y - z + 1 = z^2 - z + 3y + 1 \geq (z+1)^2. \end{cases} \quad (3)$$

Từ (3), ta có $M \leq \frac{27}{(z+1)^2} - \frac{1}{2(z+1)-5}$.

Xét $g(u) = \frac{27}{u^2} - \frac{1}{2u-5}$ với $u \geq \frac{11}{4}$.

Ta có $g'(u) = -\frac{54}{u^3} + \frac{2}{(2u-5)^2} = 2 \cdot \frac{(u-3)(u^2-105u+225)}{u^3(2u-5)^2}$.

Ta thấy $g'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{105-45\sqrt{5}}{2} < \frac{11}{4} \\ u = 3 \\ u = \frac{105+45\sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

u	$\frac{11}{4}$	3	$\frac{105+45\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(u)$	$+$	0	$-$	0
$g(u)$	$\frac{190}{121}$	2		0

Từ bảng biến thiên, ta được $g(u) \leq 2, \forall u \geq \frac{11}{4}$.

Vậy $M \leq 2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 83. Cho phương trình $5(5\cos x + 5 + m) = [(\cos x + 1)^5 - m]^5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình trên có nghiệm thực?

(A) 9.

(B) 4.

(C) 27.

(D) 22.

Lời giải.

$$5(5\cos x + 5 + m) = ((\cos x + 1)^5 - m)^5 \Leftrightarrow 5\sqrt[5]{5(\cos x + 1) + m} = (\cos x + 1)^5 - m.$$

Đặt $u = \cos x + 1, v = \sqrt[5]{5(\cos x + 1) + m} \Rightarrow \begin{cases} u^5 = 5v + m \\ v^5 = 5u + m \end{cases}$

$$\Rightarrow u^5 - v^5 = 5v - 5u \Leftrightarrow u^5 + 5u = v^5 + 5v. \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = t^5 + 5t \Rightarrow f'(t) = 5t^4 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Khi đó

$$\cos x + 1 = \sqrt[5]{5(\cos x + 1) + m} \Leftrightarrow (\cos x + 1)^5 - 5(\cos x + 1) = m. \quad (2)$$

Xét hàm $g(a) = a^5 - 5a$, với $(0 \leq a = \cos x + 1 \leq 2)$. Ta có $g'(a) = 5a^4 - 5; g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Có $g(-1) = 4, g(0) = 0, g(1) = -4, g(2) = 22 \Rightarrow -4 \leq g(a) \leq 22$.

Để phương trình (2) có nghiệm thì $-4 \leq m \leq 22$. Vì $m \in \mathbb{Z}^-$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m .

Chọn đáp án (B)

□

Câu 84. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$. Tổng $M + m$ bằng

(A) $-4 - 3\sqrt{2}$. (B) $-4 - 4\sqrt{2}$. (C) $-4 - 5\sqrt{2}$. (D) $-4 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$$

Suy ra tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ để

$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \cos \alpha \\ \frac{y\sqrt{3}}{2} = \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - y = 5 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha \\ x + y = \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha. \end{cases}$$

Đặt

$$t = \frac{5x - y + 2}{x + y + 4} = \frac{5 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha + 2}{\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha + 4} \Leftrightarrow (\sqrt{3}t - \sqrt{3}) \sin \alpha + (t - 5) \cos \alpha = 2 - 4t.$$

Vì tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ nên

$$(\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2 + (t - 5)^2 \geq (2 - 4t)^2 \Leftrightarrow 12t^2 - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Ta có

$$f'(t) = 6t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1.$$

$$f(0) = 1, f(1) = 0, f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}, f(\sqrt{2}) = -5 + 4\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow M = \max_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = 1, m = \min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = -5 - 4\sqrt{2}.$$

Vậy $M + m = -4 - 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Gọi $S = (a + b\sqrt{2}; c]$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ là tập hợp tất cả giá trị m để phương trình $x + \sqrt{9 - x^2} = m + x\sqrt{9 - x^2}$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt. Tính $T = a + b + c$.

(A) $T = \frac{3}{2}$. (B) $T = \frac{25}{2}$. (C) $T = \frac{7}{2}$. (D) $T = \frac{21}{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2} - x\sqrt{9 - x^2}$ trên đoạn $[-3; 3]$.

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} - \sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{2x^2 + \sqrt{9-x^2} - x - 9}{\sqrt{9-x^2}}$. Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{9-x^2} - x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + x + 9 \geq 0 \\ 9 - x^2 = (-2x^2 + x + 9)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + x + 9 \geq 0 \\ -2(x^2 - x - 4)(2x^2 - 9) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ như sau

x	-3	$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	3	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	-3	5	$-\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$	3	

Vậy phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-\frac{9}{2} + 3\sqrt{2} < m \leq 3$, nên $a = -\frac{9}{2}$, $b = 3$, $c = 3$ suy ra $T = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 86. Xét các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 1 = \sqrt{2x-4} + \sqrt{y+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + 2xy + \frac{4}{\sqrt{x+y}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $M > 20$. (B) $M < 10$. (C) $10 < M < 15$. (D) $15 < M < 20$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} x + y - 1 &= \sqrt{2x-4} + \sqrt{y+1} \\ \Leftrightarrow (x + y - 1)^2 &= \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{x-2} + 1 \cdot \sqrt{y+1} \right)^2 \leq 3(x + y - 1) \\ \Rightarrow 0 &\leq x + y - 1 \leq 3 \\ \Rightarrow 1 &\leq x + y \leq 4. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $P = (x + y)^2 + \frac{4}{\sqrt{x+y}} - y^2 \leq (x + y)^2 + \frac{4}{\sqrt{x+y}}$.

Đặt $t = \sqrt{x+y}$, điều kiện $t \in [1; 2]$, ta có $P \leq f(t) = t^4 + \frac{4}{t}$.

Ta có $f'(t) = \frac{4(t^5 - 1)}{t^2} \geq 0 \forall t \in [1; 2]$. Bảng biến thiên

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$f(1)$	$f(2)$

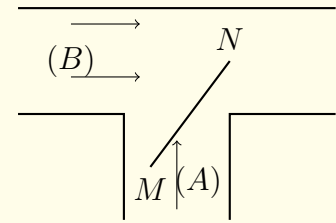
Suy ra $P \leq f(2) \Leftrightarrow P \leq 18$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 4; y = 0$. Vậy $M = 18$.

Chọn đáp án (D)



Câu 87.

Có hai mương nước (A) và (B) thông nhau, bờ của mương nước (A) vuông góc với mương nước (B), chiều rộng của hai mương nước bằng nhau và bằng 8 mét (tham khảo hình vẽ). Một khúc gỗ MN có bề dày không đáng kể trôi từ mương nước (A) sang mương nước (B) theo dòng chảy. Độ dài lớn nhất của khúc gỗ bằng bao nhiêu để nó có thể trôi lọt? (tính gần đúng đến chữ số hàng trăm).

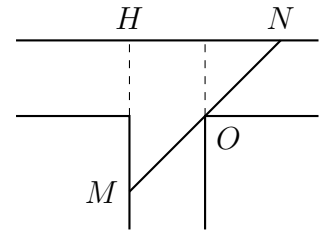


- (A) 23,62 mét. (B) 22,63 mét. (C) 22,61 mét. (D) 23,26 mét.

Lời giải.

Thanh gỗ MN trôi được khi thanh gỗ chạm điểm O thì $OM \leq ON$.

Vậy $MN_{\min}$ khi $OM = ON$. Khi đó tam giác HMN vuông cân tại H và $MN = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2} \approx 22,63$ mét.



Chọn đáp án (B)



Câu 88. Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $3 \tan^2 x + 2 \cot^2 y = 5 \left(\frac{60}{4 \cos x + 9 \sin y} - 7 \right)$. Giá trị của biểu thức $P = \sin^4 y + \cos^4 x$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{2}{9}$. (C) $\frac{97}{1296}$. (D) $\frac{35}{216}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{(4+6)^2}{4 \cos x + 9 \sin y} \leq \frac{16}{4 \cos x} + \frac{36}{9 \sin y} = \frac{4}{\cos x} + \frac{4}{\sin y}. \quad (1)$$

$$\text{Đẳng thức (1) xảy ra} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{3 \sin y}. \quad (2)$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} 3 \tan^2 x + 2 \cot^2 y &= 5 \left(\frac{60}{4 \cos x + 9 \sin y} - 7 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 y} + 30 &= 3 \cdot \frac{100}{4 \cos x + 9 \sin y} \\ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 y} + 30 &\leq 3 \cdot \left(\frac{4}{\cos x} + \frac{4}{\sin y} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos x} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin y} - 3\right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn (2)}).$$

Vậy $P = \frac{97}{1296}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1; 7)$ để phương trình $(m-1)x + (m+2)\sqrt{x(x^2+1)} = x^2+1$ có nghiệm?

- (A) 5. (B) 7. (C) 6. (D) 1.

Lời giải.

- Điều kiện $x \geq 0$.
- Thấy rằng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, ta chia hai vế của phương trình cho x ta có

$$m-1 + (m+2)\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^2+1}{x}.$$

- Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$, ta có phương trình

$$(m-1) + (m+2)t = t^2 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t+1}. \quad (*)$$

Với $x > 0$, ta có $x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} \geq \sqrt{2}$.

Hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = +\infty$.

Do đó, tập giá trị của t là $[\sqrt{2}; +\infty)$.

- Xét $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t+1}$ trên $[\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$, $f'(t) > 0$ với mọi $t \geq \sqrt{2}$.

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[\sqrt{2}; +\infty)$.

Suy ra $f(t) \geq f(\sqrt{2}) \forall t \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow f(t) \geq (\sqrt{2}-1)^3$.

- Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm $t \geq \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow m \geq \min_{[\sqrt{2}; +\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \geq (\sqrt{2}-1)^3.$$

Suy ra có 6 giá trị nguyên của m là 1, 2, 3, 4, 5, 6 thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Số giá trị nguyên của $m \in (-2017; 2017)$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng 2 là

(A) 4033.

(B) 1.

(C) 2018.

(D) 2017.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(0) = 2; y(3) = 29 - 12m \text{ và } y(2m) = 2 - 4m^2.$$

$$\text{Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 29 - 12m \geq 2 \\ 2 - 4m^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{9}{4} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Mặt khác, theo giả thiết $m \in (-2017; 2017)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên ta có $m \in \{-2016; -2015; \dots; -1; 0\}$. Vậy có 2017 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Bác An dự định xây dựng một bể chứa nước sạch cho gia đình sử dụng dạng hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 m^2 và độ dài đường chéo bằng 6 m. Bể nước đó có thể chứa được tối đa $V \text{ m}^3$. Giá trị của V ở trong khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) (12; 13).

(B) (11; 12).

(C) (9; 10).

(D) (10; 11).

Lời giải.

Gọi các kích thước của bể nước lần lượt là a, b, c (m), với $a, b, c > 0$.

$$\text{Theo bài ra ta có } \begin{cases} 2(ab + bc + ca) = 36 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + bc + ca = 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 36. \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta có } (a + b + c)^2 = 72 \Rightarrow a + b + c = 6\sqrt{2}.$$

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz ta có

$$2(b^2 + c^2) \geq (b + c)^2 \Leftrightarrow 2(36 - a^2) \geq (6\sqrt{2} - a)^2 \Leftrightarrow a(a - 4\sqrt{2}) \leq 0 \Rightarrow a \leq 4\sqrt{2}.$$

Thể tích bể nước là

$$V = abc = a(6 - ab - ac) = a[6 - a(6\sqrt{2} - a)] = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a.$$

Xét hàm số $f(a) = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a$ với $0 < a \leq 4\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } f'(a) = 3a^2 - 12\sqrt{2}a + 18, f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ a = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(a)$ như sau

a	0	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$		
$f'(a)$		+	0	-	0	+
$f(a)$			$8\sqrt{2}$		$8\sqrt{2}$	
	0				0	

Vậy $\max V = 8\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = 4\sqrt{2}, b = c = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{y} + \frac{2}{x} = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x}$ là

(A) $\frac{32}{5}$. (B) $\frac{29}{5}$. (C) 6. (D) $\frac{31}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 = \frac{1}{y} + \frac{2}{x} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy}} \\ \frac{x+2y}{xy} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy \geq 8 \\ x+2y = xy \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } P \geq \frac{(x+2y)^2}{x+2y+2} = \frac{t^2}{t+2} \text{ với } t = x+2y \geq 8.$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2}{t+2} \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2+4t}{(t+2)^2} > 0, \forall t \geq 8 \Rightarrow \min_{t \geq 8} f(t) = f(8) = \frac{32}{5}.$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{32}{5}, \text{ đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x}{1+2y} = \frac{2y}{1+x} \\ x+2y = xy = 8 \end{cases}, \text{ chọn } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ta thấy thỏa đề bài.}$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{32}{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{2b+3a}{\sqrt{b^2-ab+5a^2}} + \frac{2c+3b}{\sqrt{c^2-bc+5b^2}}$ đạt giá trị lớn nhất tại a_0, b_0, c_0 . Tính $a_0 + b_0 + c_0$.

(A) $\frac{21}{4}$. (B) 3. (C) $\frac{489}{136}$. (D) $\frac{777}{184}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{2\frac{b}{a}+3}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} + 5}} + \frac{2\frac{c}{b}+3}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \frac{c}{b} + 5}}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(x) = \frac{(2x+3)^2}{x^2-x+5} \text{ trên } \mathcal{D} = (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{-16x^2+22x+69}{(x^2-x+5)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} (\text{loại}) \\ x = \frac{23}{8}. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{23}{8}$	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$\frac{9}{5}$	$\frac{140}{19}$	4

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } P = \sqrt{f\left(\frac{b}{a}\right)} + \sqrt{f\left(\frac{c}{b}\right)} \leq 2\sqrt{\frac{140}{19}}.$$

$$\text{Vậy } \max P = 2\sqrt{\frac{140}{19}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{23}{8} \\ abc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{8}{23}, b = 1, c = \frac{23}{8}.$$

$$\Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 = \frac{777}{184}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m + 3\cos x}} = \cos x$$

có nghiệm?

(A) 5.

(B) 6.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, ($t \in [-1; 1]$). Khi đó, phương trình đề bài trở thành $\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m + 3t}} = t$. (1)

Đặt $u = \sqrt[3]{m + 3t}$ thì phương trình (1) trở thành $\sqrt[3]{m + 3u} = t \Leftrightarrow t^3 = m + 3u$.

Lại có $u = \sqrt[3]{m + 3t} \Leftrightarrow u^3 = m + 3t$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} t^3 = m + 3u \\ u^3 = m + 3t \end{cases}$.

Suy ra $t^3 - u^3 = 3(u - t) \Leftrightarrow (t - u)(t^2 + tu + u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow t = u$ (do $t^2 + tu + u^2 + 3 > 0 \forall u, t$).

Khi đó ta có $t^3 = m + 3t \Leftrightarrow m = t^3 - 3t$. Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[-1; 1]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0 \forall t \in (-1; 1)$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Do đó $\min_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(1) = -2$; $\max_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(-1) = 2$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 95. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $0 < (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \leq 2$.

Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^x + 4^y + 4^z + \ln(x^4 + y^4 + z^4) - \frac{3}{4}(x + y + z)^4$ là $\frac{a}{b}$,

với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 2a + 3b$.

(A) $S = 13$.

(B) $S = 54$.

(C) $S = 71$.

(D) $S = 42$.

Lời giải.

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ sau: $4^t \leq 3t + 1$, $\forall t \in [0; 1]$. Thật vậy, xét hàm số $f(t) = 4^t - 3t - 1$, $\forall t \in [0; 1]$. Ta có $f'(t) = 4^t \cdot \ln 4 - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_4 \left(\frac{3}{\ln 4} \right) \in (0; 1)$. Bảng biến thiên

t	0	$\log_4 \left(\frac{3}{\ln 4} \right)$	1
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	0	$f \left(\log_4 \left(\frac{3}{\ln 4} \right) \right)$	0

Suy ra $4^t \leq 3t + 1, \forall t \in [0; 1]$. Ta có

$$0 < (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 1.$$

Suy ra $x, y, z \in [0; 1]$. Dấu bằng xảy ra khi $(x; y; z) = (1; 0; 0)$ hoặc các hoán vị. Và

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Do $4^t \leq 3t + 1, \forall t \in [0; 1]$ nên $4^x + 4^y + 4^z \leq 3(x + y + z) + 3$ Mặt khác

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \ln(x^4 + y^4 + z^4) \leq \ln(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$$

. Do đó

$$P \leq 3(x + y + z) + 3 - \frac{3}{4}(x + y + z)^4 \leq \frac{21}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x; y; z) = (1, 0, 0)$ hoặc các hoán vị. Suy ra $P_{\max} = \frac{21}{4}$. Vậy $S = 2a + 3b = 54$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ là

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

(B) $\frac{2}{\pi}$.

(C) $\frac{3}{\pi}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x) = x \cos x - \sin x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ta có $g'(x) = -x \sin x < 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{2} < 0$.

Từ đó suy ra $f'(x) < 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Dẫn tới $\max_{x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{\pi}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 97. Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. Tính giá trị của $M + m$.

(A) $M + m = -6$.

(B) $M + m = -4$.

(C) $M + m = -\frac{1}{2}$.

(D) $M + m = 1 - 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P = 2(x^3 + y^3) - 3xy &= 2(x + y)(x^2 + y^2 - xy) - 3xy \\ &= 2(x + y)(2 - xy) - 3xy. \end{aligned}$$

Đặt $x + y = t$, khi đó

$$x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x + y)^2}{2} - 1 \Leftrightarrow xy = \frac{t^2}{2} - 1.$$

Do

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow t^2 \geq 4\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2.$$

Xét hàm số $f(t) = P = 2t\left(2 - \left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right) - 3\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên đoạn $[-2; 2]$. Ta

có $f'(t) = -3t^2 - 3t - 6$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 - 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-2; 2] \\ t = -2 \in [-2; 2] \end{cases}$. Khi đó

$$f(-2) = -7; f(1) = \frac{13}{2}; f(2) = 1.$$

Suy ra $M = \max_{t \in [-2; 2]} f(t) = \frac{13}{2}$ và $m = \min_{t \in [-2; 2]} f(t) = -7$.

$$\text{Vậy } M + m = \frac{13}{2} - 7 = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 98. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2x + y \leq 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{1}{xy} + \frac{3}{4x^2 + y^2}$ thuộc khoảng nào?

(A) $(10\sqrt{2}; 11\sqrt{3} - 3)$.

(B) $(10; 9\sqrt{2})$.

(C) $(8\sqrt{2}; 10\sqrt{2})$.

(D) $(7\sqrt{2}; 10)$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $1 \geq 2x + y \geq 2\sqrt{2xy} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{8}$.

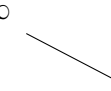
Từ $0 < 2x + y \leq 1$ suy ra $(2x + y)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 \leq 1 - 4xy$.

Khi đó $P \geq \frac{1}{xy} + \frac{3}{1 - 4xy} = \frac{1}{t} + \frac{3}{1 - 4t}$ với $t = xy$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{1 - 4t}$ với $0 < t \leq \frac{1}{8}$.

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{12}{(1 - 4t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \notin \left(0; \frac{1}{8}\right] \\ t = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \notin \left(0; \frac{1}{8}\right] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{8}$
$f'(t)$	—	
$f(t)$	$+\infty$  14	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(t) \geq 14, \forall t \in \left(0; \frac{1}{8}\right]$.

Do đó $P \geq 14$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 99. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$m(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} + 3) + 2\cos x - 5 = 0$$

có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là nửa khoảng $(a; b]$. Tính $5a + 7b$.

(A) $12 + 5\sqrt{2}$.

(B) $6 - 5\sqrt{2}$.

(C) $18 + 5\sqrt{2}$.

(D) $18 - 5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}$ ($t > 0$). Suy ra $t^2 = 2 + 2\cos x$ và $t \in [\sqrt{2}; 2]$ với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được $m = \frac{-t^2 + 7}{t + 3} = f(t)$.

Ta có $f'(t) = \frac{-t^2 - 6t - 7}{(t + 3)^2} < 0 \forall t \in [\sqrt{2}; 2]$. Suy ra

$$f(2) \leq f(t) \leq f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq m \leq \frac{15 - 5\sqrt{2}}{7}.$$

Theo cách đặt ta thấy với mỗi giá trị của $t \in [\sqrt{2}; 2]$ cho tương ứng hai giá trị của $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ngoại trừ trường hợp $t = 2$ ta chỉ thu được một giá trị của $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy $m \in \left[\frac{3}{5}; \frac{15 - 5\sqrt{2}}{7}\right]$. Suy ra $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{15 - 5\sqrt{2}}{7}$.

Do đó $5a + 7b = -5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Biết hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Tính $|a| + |b|$.

(A) 5.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta nhận thấy $a^2 + b^2 \neq 0$.

Ta có $y = \frac{ax+b}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 + y = ax + b \Leftrightarrow yx^2 - ax + (y - b) = 0$.

Nhận thấy phương trình (2) có nghiệm khi

$$\Delta = a^2 - 4y(y - b) \geq 0 \Leftrightarrow -4y^2 + 4by + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \leq y \leq \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} y_{\min} = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = -1 \\ y_{\max} = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a^2 = 16. \end{cases}$

Vậy $|a| + |b| = 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 101. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x} + 1}$ với m là tham số thực, $m > 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 4]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 4]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1) - (2\sqrt{x} + m) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} + 1}}{x + 1} \\ &= \frac{2(x + 1) - (2\sqrt{x} + m)\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1\sqrt{x}(x + 1)} \\ &= \frac{2 - 2m\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1\sqrt{x}(x + 1)}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow x = \frac{1}{m^2}.$$

Vì $m > 1$ nên $\frac{1}{m^2} < 1 < 4$.

x	0	$\frac{1}{m^2}$	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f\left(\frac{1}{m^2}\right)$	$f(4)$

Khi đó

$$\begin{aligned} \max_{[0;4]} f(x) &= f\left(\frac{1}{m^2}\right) < 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{m} + m}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} < 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{m} + m &< 3\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} \Leftrightarrow \frac{4}{m^2} + m^2 + 4 < 9\left(\frac{1}{m^2} + 1\right) \\ \Leftrightarrow m^4 - 5m^2 - 5 &< 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} < m^2 < \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Mà m là số nguyên dương lớn hơn 1 nên $m = 2$.

Vậy tập S chỉ có 1 phần tử.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 102. Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} - \sqrt[3]{2x^2 + 1} + x^2(x^2 - 1) > 1 - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x > 1$.

Ⓐ $m \geq \frac{1}{2}$.

Ⓑ $m > 1$.

Ⓒ $m > \frac{1}{2}$.

Ⓓ $m \geq 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} - \sqrt[3]{2x^2 + 1} + x^2(x^2 - 1) > 1 - m \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} + (x^4 + x^2 + m) \geq (2x^2 + 1) + \sqrt[3]{2x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow & f\left(\sqrt[3]{x^4 + x^2 + m}\right) \geq f\left(\sqrt[3]{2x^2 + 1}\right). \quad (*) \end{aligned}$$

Trong đó $f(t) = t^3 + t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} \geq \sqrt[3]{2x^2 + 1} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + m - 1 \geq 0. \quad (1)$

Xét hàm số $g(x) = x^4 - x^2 + m - 1, x \in (1; +\infty)$.

Ta có

$$g'(x) = 4x^3 - 2x, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

x	1	$+\infty$
y'	+	
y	$m-1$	∞

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1; +\infty)$ như hình bên.

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow (1)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \in [1; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓓ

□

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có đạo hàm trên từng khoảng xác định. Biết rằng hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-5	-3	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	6	7	6	$-\infty$
					-4

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m, (m \notin \{0; -12\})$ để bất phương trình sau có nghiệm?

$$f(|f(x)|) \leq f\left(\frac{24}{m}\right).$$

Ⓐ 17.

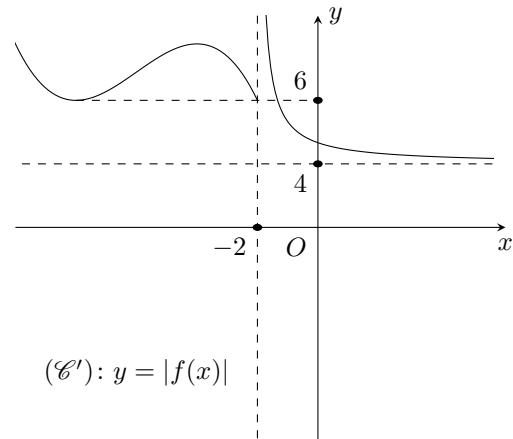
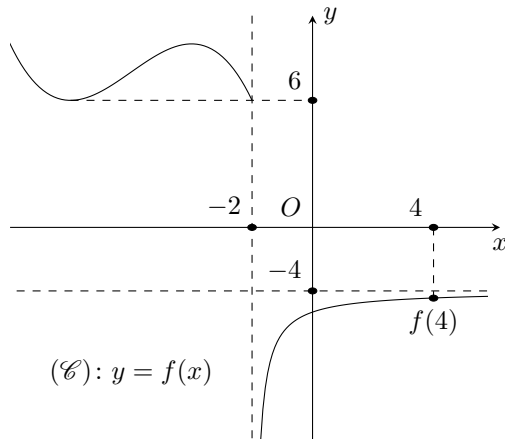
Ⓑ 16.

Ⓒ 15.

Ⓓ 14.

Lời giải.

Ta có đồ thị của hàm $(\mathcal{C}): y = f(x)$ và $(\mathcal{C}'): y = |f(x)|$ như sau



Ta thấy $|f(x)| > 4, \forall x \in \mathcal{D}$.

Vì $f(x)$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$, do vậy, khi $|f(x)| > 4$ thì ta có $\begin{cases} f(|f(x)|) > f(4) \\ f(|f(x)|) < -4. \end{cases}$

Trường hợp 1. Xét $\frac{24}{m} < -2$. Ta có $f\left(\frac{24}{m}\right) \geq 6$. Ta thấy $f\left(\frac{24}{m}\right) \geq 6 > -4 > f(|f(x)|), \forall x \in \mathcal{D}$.

Có $\frac{24}{m} < -2 \Leftrightarrow -12 < m < 0 \stackrel{m \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} m \in \{-11, -10, \dots, -1\}$. (1)

Trường hợp 2. Xét $\frac{24}{m} > -2$. Ta thấy

$$\begin{aligned} f(|f(x)|) &\leq f\left(\frac{24}{m}\right) \text{ có nghiệm} \\ \Leftrightarrow |f(x)| &\leq \frac{24}{m} \text{ có nghiệm} \\ \Leftrightarrow \frac{24}{m} &> 4 \\ \Leftrightarrow 0 &< m < 6 \\ \stackrel{m \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} m &\in \{1, 2, \dots, 5\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy có 16 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 104. Cho phương trình $\cos^6 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} + m\right) \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m} + \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m} - \cos^2 \frac{x}{2}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

- (A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos^6 \frac{x}{2} &= \left(\sin^2 \frac{x}{2} + m\right) \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m} + \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m} - \cos^2 \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} + \left(\cos^2 \frac{x}{2}\right)^3 &= \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m} + \left(\sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m}\right)^3 \\ \Leftrightarrow f\left(\cos^2 \frac{x}{2}\right) &= f\left(\sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m}\right) \end{aligned}$$

với $f(t) = t + t^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{x}{2} &= \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + m} \\ \Leftrightarrow m &= \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow m &= t^4 - (1 - t^2) \\ \Leftrightarrow m &= t^4 + t^2 - 1.\end{aligned}\quad (1)$$

với $t = \cos^2 \frac{x}{2}$. Suy ra để phương trình ban đầu có nghiệm thì phương trình (1) cũng có nghiệm hay

$$\min_{t \in [-1;1]} f(t) \leq m \leq \max_{t \in [-1;1]} f(t), \text{ với } f(t) = t^4 + t^2 - 1.$$

Ta có $f'(t) = 4t^3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

$f(-1) = 1, f(1) = 1, f(0) = -1$. Khi đó $\min_{t \in [-1;1]} f(t) = -1$ và $\max_{t \in [-1;1]} f(t) = 1$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $-1 \leq m \leq 1$, vì m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$. Do vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 105. Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi ngược dòng từ biển đến thượng nguồn con sông để đẻ trứng trên sỏi đá rồi chết. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 200 km. Vận tốc dòng nước là 8 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

(A) 15 km/h.

(B) 6 km/h.

(C) 12 km/h.

(D) 9 km/h.

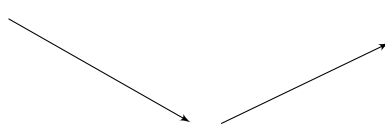
Lời giải.

Ta có thời gian để một con cá hồi đi hết quãng đường 200km là $t = \frac{200}{v-8}$.

Khi đó $E(v) = 200c \frac{v^3}{v-8}$. Xét hàm $f(v) = \frac{v^3}{v-8}, v > 8$. Ta có

$$f'(v) = \frac{3v^2(v-8) - v^3}{(v-8)^2} = 0 \Leftrightarrow 2v^3 - 24v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 12 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên như sau

v	8		12		$+\infty$
$f'(v)$			−	0	+
$f(v)$					

Để năng lượng tiêu hao là ít nhất thì hàm $f(v)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $v = 12$ hay vận tốc là 12km/h.

Chọn đáp án (C) □

Câu 106. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$ là

- (A) $\max P = 4$. (B) $\max P = 8$. (C) $\max P = 16$. (D) $\max P = 12$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{P}{4} = \frac{(x - y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}. \quad (1)$$

Với $y = 0$ thì $\frac{P}{4} = 1$ hay $P = 4$.

Với $y \neq 0$ ta chia tử và mẫu của (1) cho y^2 , và đặt $t = \frac{x}{y}$. Khi đó ta có

$$\frac{P}{4} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 2t + 3}, t \in \mathbb{R}$$

hay $(4 - P)t^2 - 2(4 + P)t + 4 - 3P = 0$ có nghiệm $t \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\Delta' = (4 + P)^2 - (4 - P)(4 - 3P) \geq 0 \Leftrightarrow -2P^2 + 32 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq P \leq 4$.

Vậy $\max P = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 107. Cho biểu thức $P = 3x\sqrt{a - y^2} - 3y\sqrt{a - x^2} + 4xy + 4\sqrt{a^2 - ax^2 - ay^2 + x^2y^2}$ trong đó a là số thực dương cho trước. Biết rằng giá trị lớn nhất của P bằng 2018. Khi đó, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a \in (500; 525]$. (B) $a = \sqrt{2018}$. (C) $a \in (400; 500]$. (D) $a \in (340; 400]$.

Lời giải.

$$P = 3x\sqrt{a - y^2} - 3y\sqrt{a - x^2} + 4xy + 4\sqrt{(a - x^2)(a - y^2)}.$$

Ta có

$$\left| x\sqrt{a - y^2} - y\sqrt{a - x^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + a - x^2} \cdot \sqrt{a - y^2 + y^2} = a,$$

và

$$4\sqrt{(a - x^2)(a - y^2)} \leq 2(a - x^2 + a - y^2) = 2(2a - (x^2 + y^2)) \leq 4a - 4xy.$$

$$\text{Suy ra } P \leq 5a = 2018 \Rightarrow a = \frac{2018}{5} = 403,6 \in (400; 500].$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 108. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2018]$ để phương trình $(m - 1)\sqrt{x^3 + 4x} - (x^2 + 2x) = mx + 4$ có nghiệm là

- (A) 2012. (B) 2010. (C) 2016. (D) 2014.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \geq 0$.

Ta có

$$(m - 1)\sqrt{x^3 + 4x} - (x^2 + 2x) = mx + 4 \Leftrightarrow (m - 1)\sqrt{x(x^2 + 4)} - (x^2 + 4) - (m + 2)x = 0.$$

Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{x^2 + 4}$ ($a \geq 0, b \geq 2, b > a$). Phương trình trở thành

$$b^2 - (m - 1)ab + (m + 2)a^2 = 0. \quad (*)$$

- Với $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (vô lí).

- Với $a \neq 0$, ta có $(*) \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - (m-1) \cdot \frac{b}{a} + m + 2 = 0$.

Đặt $t = \frac{b}{a}$. Vì $t^2 = x + \frac{4}{x} \geq 4 \Rightarrow t \geq 2$. Ta có

$$t^2 - (m-1)t + m + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = (t-1)m \Leftrightarrow \frac{t^2 + t + 2}{t-1} = m \text{ (vì } t \geq 2).$$

Xét $f(t) = \frac{t^2 + t + 2}{t-1}$ trên miền $[2; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}. \text{ Ta có bảng biến thiên}$$

t	2	3	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	8	7	$+\infty$

Để phương trình có nghiệm thì $m \geq 7$. Vì $m \in [0; 2018]$ nên $m \in [7; 2018] \Rightarrow$ có 2012 giá trị nguyên của m trong đoạn $[0; 2018]$ để phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 109. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 3]$ và có bảng biến thiên như hình dưới.

x	1	2	3
y'	+	0	-
y	-5	-1	-2

Hỏi phương trình $f(x-1) = -\frac{5}{x^2 - 6x + 12}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[2; 4]$?

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$, suy ra $f(t) = -\frac{5}{(t+1)^2 - 6(t+1) + 12} = -\frac{5}{t^2 - 4t + 7}$.

Với $x \in [2; 4]$ thì $t \in [1; 3]$, xét $g(t) = t^2 - 4t + 7$ với $t \in [1; 3]$.

Ta có $g'(t) = 2t - 4$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	1	2	3
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	4	3	4

Từ bảng biến thiên suy ra $g(t) \in [3; 4]$ hay $f(t) \in \left[-\frac{5}{3}; -\frac{5}{4}\right], \forall t \in [1; 3]$.

Từ bảng biến thiên của $f(x) \Rightarrow f(t) = -\frac{5}{t^2 - 4t + 7}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 110. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số k để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (k-1)x^2 - (k-3)x + 8k^2$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?

(A) 3.

(B) 1.

(C) 0-không.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(k-1)x - (k-3)$.

Để hàm số đồng biến trên $(0; 3)$ thì

$$y' \geq 0 \quad \forall x \in (0; 3) \quad (1)$$

($y' = 0$ tại hữu hạn điểm thuộc $(0; 3)$).

Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 - 2(k-1)x - (k-3) \geq 0 \quad \forall x \in (0; 3) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1} \geq k \quad \forall x \in (0; 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Xét $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$ trên $(0; 3)$.

Ta có $g'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}$ và trên khoảng $(0; 3)$, $g'(x) = 0$ khi $x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0	1	3
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	3	2	$\frac{18}{7}$

Từ (2) suy ra $k \leq 2$ vì k nguyên dương nên $k \in \{1; 2\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 111. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

(A) $P_{\min} = -63$.

(B) $P_{\min} = -91$.

(C) $P_{\min} = -83$.

(D) $P_{\min} = -18$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, y \geq -3$, từ đó ta có $x + y \geq 0$ và

$$(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9.$$

Trường hợp $x + y = 0$, từ giả thiết suy ra $x = -y = 3$ suy ra $P = -63$.

Trường hợp $x + y > 0$, từ giả thiết suy ra

$$(x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{(x-3)(y+3)} \geq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 4 \text{ (do } x + y > 0 \text{)}.$$

Đánh giá P ta được

$$P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x + y)^2 + 7xy \geq 4(x + y)^2 - 21(x + y) - 63.$$

Do hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{21}{8}; +\infty\right)$ suy ra $P = f(x + y) \geq f(4) = -83$.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $P_{\min} = -83$ khi $x = 7, y = -3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 112. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Giả sử đồ thị của hàm số có 2 điểm cực trị là A, B và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 18c + 12$.

(A) -2.

(B) -24.

(C) -36.

(D) -12.

Lời giải.

$$\bullet f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

Đồ thị hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2 - 3b > 0.$$

$$\bullet \text{ Ta có } f(x) = f'(x) \left(\frac{x}{3} + \frac{a}{9} \right) + \frac{2(3b - a^2)}{9}x + c - \frac{ab}{9}.$$

$$\text{Suy ra đường thẳng } AB: y = \frac{2(3b - a^2)}{9}x + c - \frac{ab}{9}.$$

Do AB đi qua gốc tọa độ nên $ab = 9c$.

$$\bullet P = abc + 2ab + 18c + 12 = 9c^2 + 36c + 12 \geq 9(c + 2)^2 - 24 \geq -24.$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $c = -2; a = 3; b = -6$.

Vậy min $P = -24$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 113.

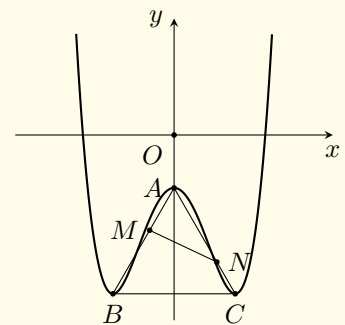
Cho đồ thị hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 - 3x^2 - 1$ có ba điểm cực trị A, B, C như hình vẽ. Biết M, N lần lượt thuộc AB, AC sao cho đoạn thẳng MN chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{9}{2}x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $A(0; -1)$, $B\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -3\right)$ và $C\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -3\right)$. Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác,

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \widehat{MAN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{AM \cdot AN \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM \cdot AN = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Trong tam giác AMN ta có $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos 60^\circ} \geq \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AM = AN = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Vậy $\min MN = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 114. Cho hàm số f thỏa mãn $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x$, $\forall x \in (0; \pi)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x)$ trên $\mathbb{R}$ là

- (A) $\frac{19}{500}$. (B) $\frac{1}{25}$. (C) $\frac{6}{125}$. (D) $\frac{1}{20}$.

Lời giải.

Đặt $u = \cot x$. Khi $x \in (0; \pi)$ thì $u \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x$, $\forall x \in (0; \pi) \Rightarrow f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1} + \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} = \frac{u^2 + 2u - 1}{u^2 + 1}$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Đặt $P = f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x)$ và $t = \sin^2 x$ thì $t \in [0; 1]$.

Khi đó $P = f(t)f(1-t) = \frac{(t^2 + 2t - 1)}{t^2 + 1} \cdot \frac{(1-t)^2 + 2(1-t) - 1}{(1-t)^2 + 1} = \frac{[t(1-t)]^2 + 8t(1-t) + 2}{(t^2 + 1)((1-t)^2 + 1)}$.

Áp dụng BDT Bunhiacopski ta có $(t^2 + 1)((1-t)^2 + 1) \geq (t(1-t) + 1)^2$.

Suy ra $P \leq \frac{[t(1-t)]^2 + 8t(1-t) + 2}{(t(1-t) + 1)^2}$.

Đặt $z = t(1-t)$, khi đó $z = t(1-t) \leq \left(\frac{t+1-t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ và $P \leq \frac{z^2 + 8z - 2}{(z+1)^2}$.

Xét hàm số $h(z) = \frac{z^2 + 8z - 2}{(z+1)^2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Ta có $h'(z) = \frac{12 - 6z}{(z+1)^3} > 0$, $\forall z \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ nên $P = h(z) \leq h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{25}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z = \frac{1}{4}$ hay $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 115. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{1+x} = \sqrt{m+x-x^2}$ có bốn nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = \frac{47}{4}$. (B) $S = \frac{43}{4}$. (C) $S = \frac{3}{4}$. (D) $S = 11$.

Lời giải.

Với điều kiện $-1 \leq x \leq 2$, phương trình đã cho tương đương với:

$$3 + 2\sqrt{2+x-x^2} = m + x - x^2 \Leftrightarrow (2+x-x^2) - 2\sqrt{2+x-x^2} = 5-m.$$

Đặt $t = \sqrt{2+x-x^2}$, ta có

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
$t'(x)$	$+$	0	$-$
$t(x)$	0	$\frac{3}{2}$	0

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t = 5 - m \Leftrightarrow f(t) = 5 - m$ (*) với $f(t) = t^2 - 2t$.
 Từ bảng biến thiên của t ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3}{2}\right)$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0	1	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	0	-1	$-\frac{3}{4}$

Từ bảng biến thiên của $f(t)$ ta thấy (*) có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$-1 < 5 - m < -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{23}{4} < m < 6.$$

Vậy $a = \frac{23}{4}$; $b = 6 \Rightarrow S = \frac{47}{4}$.

Chọn đáp án (A)

□