

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x \, dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)**A. Theo chương trình Chuẩn**

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và $A(-4; 8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C , N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD . Tìm tọa độ các điểm B và C , biết rằng $N(5; -4)$.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $A(1; 7; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ . Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$.

Câu 9.a (1,0 điểm). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy . Viết phương trình đường tròn (C) .

Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Chứng minh (P) tiếp xúc với (S) . Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (S) .

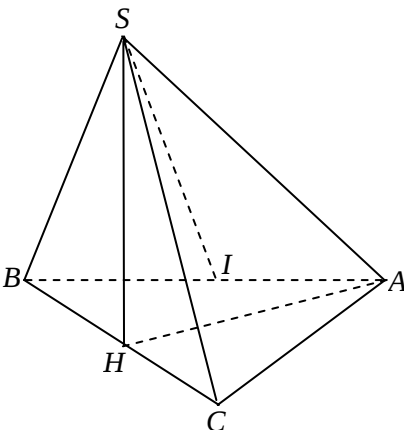
Câu 9.b (1,0 điểm). Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Viết dạng lượng giác của z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1 + i)z^5$.

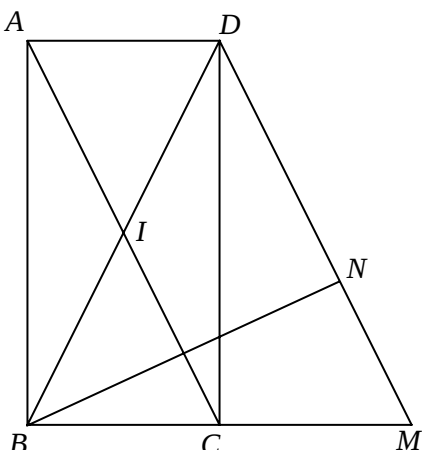
—————Hết—————

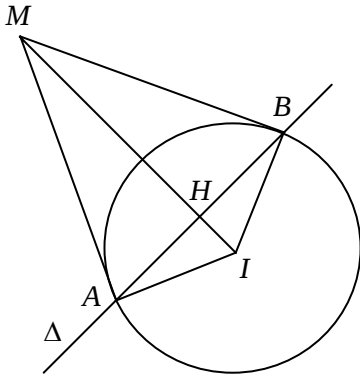
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

Câu	Đáp án	Điểm																								
1 (2,0 điểm)	a. (1,0 điểm)																									
	Khi $m = 0$ ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.	0,25																								
	Khoảng đồng biến: $(0; 2)$; các khoảng nghịch biến: $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. - Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -1$; đạt cực đại tại $x = 2, y_{CB} = 3$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.	0,25																								
	- Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		0		2		$+\infty$	y'		-	0	+	0	-		y	$+\infty$				3		$-\infty$	0,25
	x	$-\infty$		0		2		$+\infty$																		
y'		-	0	+	0	-																				
y	$+\infty$				3		$-\infty$																			
• Đồ thị: 	0,25																									
b. (1,0 điểm)																										
	Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m$. Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x > 0$	0,25																								
	$\Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x, \forall x > 0$. Xét $f(x) = x^2 - 2x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.	0,25																								
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0		1		$+\infty$	$f'(x)$		-	0	+		$f(x)$	0				$+\infty$	0,25						
x	0		1		$+\infty$																					
$f'(x)$		-	0	+																						
$f(x)$	0				$+\infty$																					
	Dựa vào bảng biến thiên ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $m \leq -1$.	0,25																								

Câu	Đáp án	Điểm	
2 (1,0 điểm)	Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x)$	0,25	
	$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos x - 1) = 0$.	0,25	
	• $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.	0,25	
	• $2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.	0,25	
	Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.		
3 (1,0 điểm)	$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y & (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$	0,25	
	Điều kiện: $x \geq 1$. Từ (2) ta được $4y = (x + y - 1)^2$, suy ra $y \geq 0$.		
	Đặt $u = \sqrt[4]{x-1}$, suy ra $u \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{u^4+2} + u = \sqrt{y^4+2} + y \quad (3)$.		
	Xét $f(t) = \sqrt{t^4+2} + t$, với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}} + 1 > 0, \forall t \geq 0$.	0,25	
	Do đó phương trình (3) tương đương với $y = u$, nghĩa là $x = y^4 + 1$.		
	Thay vào phương trình (2) ta được $y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0 \quad (4)$.	0,25	
	Hàm $g(y) = y^7 + 2y^4 + y - 4$ có $g'(y) = 7y^6 + 8y^3 + 1 > 0$ với mọi $y \geq 0$.		
	Mà $g(1) = 0$, nên (4) có hai nghiệm không âm là $y = 0$ và $y = 1$.		
	Với $y = 0$ ta được nghiệm $(x; y) = (1; 0)$; với $y = 1$ ta được nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.	0,25	
	Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ đã cho là $(1; 0)$ và $(2; 1)$.		
4 (1,0 điểm)	Đặt $u = \ln x, dv = \frac{x^2-1}{x^2} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = x + \frac{1}{x}$.	0,25	
	Ta có $I = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \Big _1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx$	0,25	
	$= \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \Big _1^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right) \Big _1^2$	0,25	
	$= \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$.	0,25	
5 (1,0 điểm)		Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC$. Mà (SBC) vuông góc với (ABC) theo giao tuyến BC , nên $SH \perp (ABC)$.	0,25
		Ta có $BC = a$, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AC = BC \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$;	
		$AB = BC \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	0,25
		Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{a^3}{16}$.	
		Tam giác ABC vuông tại A và H là trung điểm của BC nên $HA = HB$. Mà $SH \perp (ABC)$, suy ra $SA = SB = a$. Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $SI \perp AB$.	0,25
	Do đó $SI = \sqrt{SB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.		
	Suy ra $d(C, (SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{6V_{S.ABC}}{SI \cdot AB} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.	0,25	

Câu	Đáp án	Điểm
6 (1,0 điểm)	Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$. Ta được $x > 0, y > 0$. Điều kiện của bài toán trở thành $xy + x + y = 3$. Khi đó $P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2 + y^2}$. Với mọi $u > 0, v > 0$ ta có $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) \geq (u+v)^3 - \frac{3}{4}(u+v)^3 = \frac{(u+v)^3}{4}$. Do đó $\frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8\left(\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3}\right)^3 = 8\left(\frac{(x+y)^2 - 2xy + 3x + 3y}{xy + 3x + 3y + 9}\right)^3$.	0,25
	Thay $xy = 3 - x - y$ vào biểu thức trên ta được $\frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8\left(\frac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)}\right)^3 = (x+y-1)^3$. Do đó $P \geq (x+y-1)^3 - \sqrt{x^2 + y^2} = (x+y-1)^3 - \sqrt{(x+y)^2 - 2xy} = (x+y-1)^3 - \sqrt{(x+y)^2 + 2(x+y) - 6}$.	0,25
	Đặt $t = x + y$. Suy ra $t > 0$ và $P \geq (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6}$. Ta có $3 = x + y + xy \leq (x+y) + \frac{(x+y)^2}{4} = t + \frac{t^2}{4}$ nên $(t-2)(t+6) \geq 0$. Do đó $t \geq 2$. Xét $f(t) = (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6}$, với $t \geq 2$. Ta có $f'(t) = 3(t-1)^2 - \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t - 6}}$. Với mọi $t \geq 2$ ta có $3(t-1)^2 \geq 3$ và $\frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t - 6}} = \sqrt{1 + \frac{7}{(t+1)^2 - 7}} \leq \sqrt{1 + \frac{7}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, nên $f'(t) \geq 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0$. Suy ra $f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2}$. Do đó $P \geq 1 - \sqrt{2}$.	0,25
	Khi $a = b = c$ thì $P = 1 - \sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $1 - \sqrt{2}$.	0,25
7.a (1,0 điểm)	Do $C \in d$ nên $C(t; -2t - 5)$. Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, suy ra I là trung điểm của AC . Do đó $I\left(\frac{t-4}{2}; \frac{-2t+3}{2}\right)$.	0,25
	 Tam giác BDN vuông tại N nên $IN = IB$. Suy ra $IN = IA$. Do đó ta có phương trình $\left(5 - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(-4 - \frac{-2t+3}{2}\right)^2 = \left(-4 - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(8 - \frac{-2t+3}{2}\right)^2$ $\Leftrightarrow t = 1$. Suy ra $C(1; -7)$.	0,25
	Do M đối xứng với B qua C nên $CM = CB$. Mà $CB = AD$ và $CM \parallel AD$ nên tứ giác $ACMD$ là hình bình hành. Suy ra $AC \parallel DM$. Theo giả thiết, $BN \perp DM$, suy ra $BN \perp AC$ và $CB = CN$. Vậy B là điểm đối xứng của N qua AC . Đường thẳng AC có phương trình: $3x + y + 4 = 0$. Đường thẳng BN qua N và vuông góc với AC nên có phương trình $x - 3y - 17 = 0$. Do đó $B(3a+17; a)$. Trung điểm của BN thuộc AC nên $3\left(\frac{3a+17+5}{2}\right) + \frac{a-4}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -7$. Vậy $B(-4; -7)$.	0,25
8.a (1,0 điểm)	Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3; -2; 1)$.	0,25
	(P) qua A và nhận $\vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến, nên (P) có phương trình $-3(x-1) - 2(y-7) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - z - 14 = 0$.	0,25
	M thuộc Δ nên $M(6-3t; -1-2t; -2+t)$.	0,25
	$AM = 2\sqrt{30} \Leftrightarrow (6-3t-1)^2 + (-1-2t-7)^2 + (-2+t-3)^2 = 120 \Leftrightarrow 7t^2 - 4t - 3 = 0$ $\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\frac{3}{7}$. Suy ra $M(3; -3; -1)$ hoặc $M\left(\frac{51}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{17}{7}\right)$.	0,25

Câu	Đáp án	Điểm	
9.a (1,0 điểm)	Số phần tử của S là A_7^3	0,25	
	$= 210$.	0,25	
	Số cách chọn một số chẵn từ S là $3.6.5 = 90$ (cách).	0,25	
	Xác suất cần tính bằng $\frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.	0,25	
7.b (1,0 điểm)		Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (C) , H là giao điểm của AB và IM . Khi đó $M(0;t)$, với $t \geq 0$; H là trung điểm của AB . Suy ra $AH = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$.	0,25
		$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2}$, suy ra $AM = 2\sqrt{10}$.	0,25
		Do đó $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}$.	
		Mà $MH = d(M, \Delta) = \frac{ t }{\sqrt{2}}$, nên $t = 8$. Do đó $M(0; 8)$.	0,25
		Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình $x + y - 8 = 0$. Do đó tọa độ điểm H thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4; 4).$	
		Ta có $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2} = \frac{1}{4}HM$, nên $\overline{IH} = \frac{1}{4}\overline{HM}$. Do đó $I(5; 3)$. Vậy đường tròn (C) có phương trình $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10$.	0,25
8.b (1,0 điểm)	(S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.	0,25	
	$d(I, (P)) = \frac{ 2.1 + 3(-2) + 1.1 - 11 }{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = R$. Do đó (P) tiếp xúc với (S) .	0,25	
	Gọi M là tiếp điểm của (P) và (S) . Suy ra M thuộc đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Do đó $M(1 + 2t; -2 + 3t; 1 + t)$.	0,25	
	Do M thuộc (P) nên $2(1 + 2t) + 3(-2 + 3t) + (1 + t) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $M(3; 1; 2)$.	0,25	
9.b (1,0 điểm)	$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	0,25	
	$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.	0,25	
	Suy ra $z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 16(1 - \sqrt{3}i)$.	0,25	
	Do đó $w = 16(\sqrt{3} + 1) + 16(1 - \sqrt{3})i$. Vậy w có phần thực là $16(\sqrt{3} + 1)$ và phần ảo là $16(1 - \sqrt{3})$.	0,25	

----- Hết -----