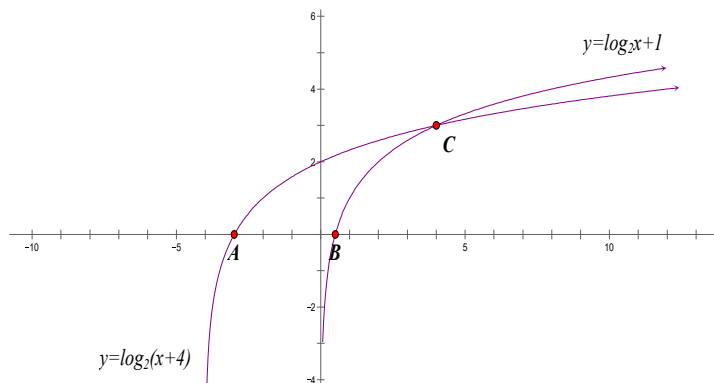


PHẦN 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ - BIẾN ĐỔI LOGARIT

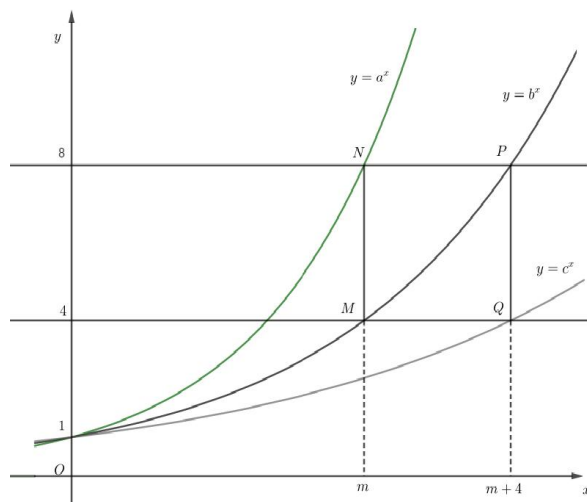
- Câu 1. (Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} a}$ bằng
A. $\sqrt{2014}$. **B.** $\sqrt{2016}$. **C.** $\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2020}$.
- Câu 2. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Một ngân hàng X , quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau n năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1 + 8\%)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn 850 triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng triệu)?
A. 675 triệu đồng. **B.** 676 triệu đồng. **C.** 677 triệu đồng. **D.** 674 triệu đồng.
- Câu 3. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Ông Tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông Tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?
A. 46,933 triệu. **B.** 34,480 triệu. **C.** 81,413 triệu. **D.** 107,946 triệu.
- Câu 4. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Gọi $x_0 < x_1 < \dots < x_{2019}$ là các nghiệm của phương trình $\ln x \cdot (\ln x - 1) \cdot (\ln x - 2) \dots (\ln x - 2019) = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = (x_0 - 1)(x_1 - 2)(x_2 - 3) \dots (x_{2019} - 2020)$.
A. $P = (e - 1)(e^2 - 2)(e^3 - 3) \dots (e^{2010} - 2010)$. **B.** $P = 0$.
C. $P = -2010!$. **D.** $P = 2010!$.
- Câu 5. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý. Số tiền còn lại anh gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất 0,25% một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau một năm số tiền cả gốc và lãi của anh là 416.780.000 đồng. Tính x .
A. 1,2. **B.** 0,8. **C.** 0,9. **D.** 1,5.
- Câu 6. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y = \log_2 x + 1$ và $y = \log_2(x + 4)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích tam giác ABC bằng

- A. 21. B. $\frac{7}{4}$. C. $\frac{21}{2}$. D. $\frac{21}{4}$.

Câu 7. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y = a^x, (C_2): y = b^x, (C_3): y = c^x$ và đường thẳng $y = 4; y = 8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4.



Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x + y$ bằng

- A. 34. B. 5. C. 43. D. 19.

Câu 8. (Chuyên Lào Cai - 2020) các số thực a, b, c thỏa mãn $(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 8$ và $2^a = 3^b = 6^c$. Khi đó $a+b+c$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. 8.

Câu 9. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Khi đó biểu thức $P = \frac{5 - 2^x - 2^{-x}}{8 + 4 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{-x}} = \frac{a}{b}$ với

$\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tích $a \cdot b$ có giá trị bằng

- A. 10. B. -8. C. 8. D. -10.

Câu 10. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_{2020}(mx - m + 2)$ xác định trên $[1; +\infty)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Câu 11. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.

- A. 31 tháng. B. 40 tháng. C. 35 tháng. D. 30 tháng.

Câu 12. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,7% / tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng gần nhất với số nào sau đây?

- A. 43.730.000 đồng. B. 43.720.000 đồng. C. 43.750.000 đồng. D. 43.740.000 đồng.

Câu 13. (Sở Ninh Bình) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 9^b = 6^c$. Khi đó $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. 2.

Câu 14. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$. Tổng

$f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021)$ bằng

A. $\frac{4035}{2021}$.

B. $\frac{2021}{2022}$.

C. 2021..

D. $\frac{2022}{2023}$.

Câu 15. (Sở Bình Phước - 2020) Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2020 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 40% lương. Anh ta dự định mua một căn hộ chung cư giá rẻ có giá trị tại thời điểm 1/1/2020 là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị căn hộ tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được căn hộ đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 11.487.000 đồng. B. 14.517.000 đồng. C. 55.033.000 đồng. D. 21.776.000 đồng.

Câu 16. (Bim Sơn - Thanh Hóa - 2020) Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7%/tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

A. 21.

B. 22.

C. 23.

D. 24.

Câu 17. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) COVID19 là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona (nCoV) bắt nguồn từ Trung Quốc (đầu tháng 12/2019) gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh (tính đến 7/4/2020 đã có 1 360 039 người nhiễm bệnh). Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên (1 người lây 4 người). Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh? (Biết rằng những người nhiễm bệnh không phát hiện bản thân bị bệnh và không phòng tránh cách li, do trong thời gian ủ bệnh vẫn lây bệnh sang người khác).

A. 77760 người.

B. 16384 người.

C. 62500 người.

D. 78125 người.

Câu 18. (Liên trường Nghệ An - 2020) Ông A có số tiền 100000000 đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép, có hai loại kì hạn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12%/năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1%/tháng. Ông A muốn gửi 10 năm. Theo anh chị, kết luận nào sau đây đúng (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 16186000 đồng sau 10 năm.

B. Cả hai loại kì hạn đều có cùng số tiền như nhau sau 10 năm.

C. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 19454000 đồng sau 10 năm.

D. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 15584000 đồng sau 10 năm.

Câu 19. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{it}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202.300 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người?

A. 2020.

B. 2021.

C. 2023.

D. 2022.

Câu 20. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ x trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = Ae^{rx}$ trong đó A là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, r là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì r không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tính đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai (kể từ ngày thứ 7 trở đi) tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây

nhiệm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?

- A. 242. B. 16. C. 90. D. 422.

Câu 21. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là 0,9% / tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

- A. 65 tháng. B. 66 tháng. C. 67 tháng. D. 68 tháng.

Câu 22. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là 95,5 triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là 1,14%. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

- A. 94,4 triệu người. B. 85,2 triệu người. C. 86,2 triệu người. D. 83,9 triệu người.

Câu 23. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

- A. 200. B. 190. C. 250. D. 150.

Câu 24. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Một người vay vốn ở ngân hàng với số tiền 50 triệu đồng, thời hạn 50 tháng với lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ trả đúng ngày quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền là bao nhiêu để đến cuối tháng thứ 50 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng (làm tròn đến trăm đồng)?

- A. 1.018.500 đồng. B. 1.320.800 đồng. C. 1.320.500 đồng. D. 1.771.300 đồng.

PHẦN 2. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

Câu 25. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Đường thẳng $x = m$ lần lượt cắt đồ thị hàm số $y = \log_5 x$ và đồ thị hàm số $y = \log_5 (x + 4)$ tại các điểm A, B . Biết rằng khi $AB = \frac{1}{2}$ thì $m = a + \sqrt{b}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tổng $a + b$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 5. D. 7.

Câu 26. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $[0; 2020]$ thỏa mãn bất phương trình sau

$$16^x + 25^x + 36^x \leq 20^x + 24^x + 30^x.$$

- A. 3. B. 2000. C. 1. D. 1000.

Câu 27. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Gọi x, y các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) \quad \text{và} \quad \frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}, \quad \text{với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính}$$

$$T = a^2 + b^2.$$

- A. $T = 26$. B. $T = 29$. C. $T = 20$. D. $T = 25$.

Câu 28. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a - 5b) - 1$. Đặt $T = \frac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $1 < T < 2$. B. $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$. C. $-2 < T < 0$. D. $0 < T < \frac{1}{2}$.

Câu 29. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho x, y là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $x \neq y$ và

$$\log_x \sqrt{xy} = \log_y x. \quad \text{Tích các giá trị nguyên nhỏ hơn 2021 của biểu thức } P = 4^{\frac{1}{x^2}} + 4^y \text{ là}$$

- A. 2021!. B. $\frac{2020!}{16}$. C. $\frac{2020!}{2}$. D. 2020!.

Câu 30. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho số thực x thỏa mãn $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$. Tính giá trị $P = (\log_2 x)^4$

- A. $P = 27$. B. $P = 81\sqrt{3}$. C. $P = 729$. D. $P = 243$.

Câu 31. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x} - 9)(3^x - \frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1} - 1} \leq 0$ chứa bao nhiêu số nguyên?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

PHẦN 3. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 32. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho phương trình $9^x - (2m+3).3^x + 81 = 0$ (m là tham số thực). Giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thuộc khoảng nào sau đây

- A. $(5; 10)$. B. $(0; 5)$. C. $(10; 15)$. D. $(15; +\infty)$.

Câu 33. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$ có nghiệm?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 34. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0$ chứa không quá 9 số nguyên?

- A. 1094. B. 3281. C. 1093. D. 3280.

Câu 35. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in [0; 2]$. C. $m \in [2; 4]$. D. $m \in (0; 4)$.

Câu 36. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2 + 1 = 3^m$ và $m = 3^x - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 6 B. 3. C. 1. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 37. (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_9 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 9]$.

- A. 1. B. 5. C. 3. D. 2.

Câu 38. (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm?

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 39. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10; 10]$ để phương trình

$$e^{x+a} - e^x = \ln(1+x+a) - \ln(1+x)$$
 có nghiệm duy nhất.

- A. 2. B. 10. C. 1. D. 20

Câu 40. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x+m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là

- A. 2020. B. 2021. C. 2019. D. 2022.

- Câu 41. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là
- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 1$.
- Câu 42. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho bất phương trình $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?
- A. 36. B. 34. C. 35. D. Vô số.
- Câu 43. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình $1 + \log_2(2 - x) - 2\log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 2})\right) \leq -\log_2(x + 1)$ có nghiệm. Chọn đáp án đúng trong các khẳng định sau
- A. $m_0 \in (9; 10)$. B. $m_0 \in (8; 9)$. C. $m_0 \in (-10; -9)$. D. $m_0 \in (-9; -8)$.
- Câu 44. (Chuyên Chu Văn An - 2020)** Tìm m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
- A. $m < 0$. B. $m > 1$. C. $-1 < m < 1$. D. $0 < m < 1$.
- Câu 45. (Chuyên Chu Văn An - 2020)** Gọi S là tập các giá trị m thỏa mãn hệ sau có nghiệm:
- $$\begin{cases} \sqrt[4]{x^2 - 1} + m(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}) + 2020m \leq 0 \\ mx^2 + 3m - \sqrt{x^4 - 1} \geq 0 \end{cases}$$
- Trong tập S có bao nhiêu phân tử là số nguyên?
- A. 4. B. 1. C. 0. D. 2.
- Câu 46. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu m nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?
- A. 28. B. 29. C. 30. D. 31.
- Câu 47. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 6^{x+1} + (m - 3) \cdot 4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. 35. B. 38. C. 34. D. 33.
- Câu 48. (Chuyên Quang Trung - 2020)** Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$.
- A. 30. B. 25. C. 33. D. 17.
- Câu 49. (Chuyên Sơn La - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x + 2m) + 2m$ có nghiệm?
- A. 2019. B. 2020. C. 2021. D. 4039.
- Câu 50. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m + 1) \log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng
- A. 16. B. 119. C. 120. D. 159.
- Câu 51. (Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m - 1) \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) - (m - 5) \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(3; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Không tồn tại m_0 . B. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. C. $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. D. $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

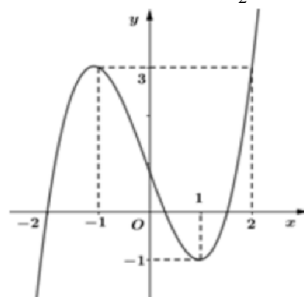
- Câu 52. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho phương trình $m \ln(x+1) - x - 2 = 0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $(3, 7; 3, 8)$. B. $(3, 6; 3, 7)$. C. $(3, 8; 3, 9)$. D. $(3, 5; 3, 6)$.
- Câu 53. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.
- A. Không tồn tại a . B. $a < -1$ hoặc $a = 4 - 2\sqrt{10}$.
C. $a < 1$. D. $a = 1$.
- Câu 54. (ĐHQG Hà Nội - 2020)** Gọi S là tập hợp các số nguyên m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m^2 - 500 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử
- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.
- Câu 55. (ĐHQG Hà Nội - 2020)** Tìm điều kiện của tham số a để phương trình sau có nghiệm: $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (a+2) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2a + 1 = 0$. Hãy chọn đáp án đúng nhất?
- A. $4 \leq a \leq \frac{64}{7}$. B. $2 \leq a \leq \frac{64}{9}$. C. $3 \leq a \leq \frac{50}{3}$. D. $1 \leq a \leq \frac{50}{3}$.
- Câu 56. (ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \leq 2020 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$$
 có nghiệm là:
- A. $m \geq -3$. B. $-2 \leq m \leq 1$. C. $-1 \leq m \leq 2$. D. $m \geq -2$.
- Câu 57. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho phương trình $16^{x^2} - 2 \cdot 4^{x^2+1} + 10 = m$ (m là tham số). Số giá trị nguyên của tham $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt là
- A. 7. B. 9. C. 8. D. 1.
- Câu 58. (Sở Hà Tĩnh - 2020)** Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2^x - 2x)\sqrt{(3)^{2^x} - m} = 0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để tập hợp S có hai phần tử?
- A. 2094. B. 2092. C. 2093. D. 2095.
- Câu 59. (Sở Ninh Bình)** Cho hai số thực bất kỳ $a > 1, b > 1$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$. Trong trường hợp biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 6x_1 - 6x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $a = b^{\sqrt[3]{3}}$. B. $a = b^{\sqrt[3]{6}}$. C. $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$. D. $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}$.
- Câu 60. (Sở Ninh Bình)** Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{2}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2; 4)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. C. $m_0 \in \left(4; \frac{16}{3}\right)$. D. $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.
- Câu 61. (Sở Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình $16^x - 6 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^x - m \cdot 2^{x+1} - m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Khi đó S có
- A. 4 tập con. B. Vô số tập con. C. 8 tập con. D. 16 tập con.

- Câu 62. (Sở Yên Bái - 2020)** Giải sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị biểu thức $|x_1 - x_2|$ là
A. 4. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 2.
- Câu 63. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.
A. $2 \leq m \leq 6$ **B.** $3 \leq m \leq 6$ **C.** $6 \leq m \leq 9$ **D.** $2 \leq m \leq 3$.
- Câu 64. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.
A. $m = \frac{9}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m = \frac{61}{2}$.
- Câu 65. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là
A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.
- Câu 66. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho phương trình $(me^x - 10x - m)[\log(mx) - 2\log(x+1)] = 0$. (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?
A. Vô số. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 5.
- Câu 67. (Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho phương trình $4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{2x-x^2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là
A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 68. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
A. $[3; 4]$. **B.** $[2; 4]$. **C.** $(2; 4)$. **D.** $(3; 4)$.
- Câu 69. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-2019; 2020)$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 4 + 9 \cdot 3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2} \\ 2x-1 = \sqrt{2y-2x+m} \end{cases} ?$$

A. 2017. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.
- Câu 70. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \tan x$ thuộc đoạn $[0; 50\pi]$
A. $\frac{2671\pi}{2}$. **B.** $\frac{1853\pi}{2}$. **C.** $\frac{2475\pi}{2}$. **D.** $\frac{2653\pi}{2}$.
- Câu 71. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho phương trình $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$ (với m là tham số thực). Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$ là
A. 3 **B.** 5 **C.** 4. **D.** 2.

- Câu 72. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $5x + y = 4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$ có nghiệm là
- A. 10. B. 5. C. 9. D. 2.
- Câu 73. (Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2 \left(m + \sqrt{m + 2^x} \right) = 2x$ có nghiệm là $m \geq -\frac{a}{b}$ với a, b là hai số nguyên dương và $b < 7$. Hỏi $a + b + b^2$ bằng bao nhiêu?
- A. 31. B. 32. C. 21. D. 23.
- Câu 74. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ trong đó x, y là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $\log_{x^2 + y^2 + 1} (2x + 2y + m) \geq 1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử?
- A. 1. B. 2020. C. 2021. D. 2019.
- Câu 75. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2^2(4x) - m \log_{\sqrt{2}} x - 2m - 4 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 8]$?
- A. 1. B. 2. C. 5. D. 3.
- Câu 76. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình (ẩn x): $3^{\log_2 x^2} - 2(m + 3) \cdot 3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 x_2 > 2$.
- A. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. B. $(0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$. D. $(-1; +\infty)$.
- Câu 77. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ sao cho phương trình $\log_2^3(f(x) + 1) - \log_{\sqrt{2}}^2(f(x) + 1) + (2m - 8) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{f(x) + 1} + 2m = 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$?



- A. 7. B. 5. C. 6. D. vô số.

PHẦN 4. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

- Câu 78. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-1; 1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2 + 1} (x^2 + y^2) = \log_2 (2x + 2y - 2)$ có nghiệm nguyên $(x; y)$ duy nhất?
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.
- Câu 79. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{11} (3x + 4y) = \log_4 (x^2 + y^2)$?
- A. 3 B. 2 C. 1 D. vô số.
- Câu 80. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Có bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{|x^2 - 2x - 3| - \log_3 5} = 5^{-(y+4)}$ và $4|y| - |y - 1| + (y + 3)^2 \leq 8$?

A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 81. (Chuyên Bến Tre - 2020) Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $4^{x-1} + 2^x \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $x_0 > 7$. B. $-2 < x_0 < 4$. C. $4 < x_0 < 7$. D. $-5 < x_0 < -2$.

Câu 82. (Chuyên Lào Cai - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 4000$ và $5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4$?

A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.

Câu 83. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn $(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)$?

A. 2017. B. 4034. C. 2. D. 2017.2020.

Câu 84. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho x là số thực dương và y là số thực thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right]$. Giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 2020$ bằng

A. 2022. B. 2020. C. 2021. D. 2019.

Câu 85. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho phương trình $\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ và $0 < x < 2020$; $y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 5. B. 6. C. 7. D. 4.

Câu 86. (Sở Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020. B. 9. C. 2019. D. 10.

Câu 87. (Sở Bắc Ninh - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1)3^y - x^3$, với $x < 2020$?

A. 13. B. 15. C. 6. D. 7.

Câu 88. (Sở Bình Phước - 2020) Biết a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a.10^{3z} + b.10^{2z}$, đồng thời x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ thuộc khoảng

A. $(1; 2)$. B. $(2; 3)$. C. $(3; 4)$. D. $(4; 5)$.

Câu 89. (Bím Sơn - Thanh Hóa - 2020) Biết rằng trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq 2 + \log_2(x + y - 1)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $3x + 4y - m = 0$. Khi đó hãy tính tổng tất cả các giá trị của m tìm được?

A. 20. B. 14. C. 46. D. 28.

Câu 90. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.

A. 2020 B. 9. C. 7. D. 8.

Câu 91. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a.10^{3z} + b.10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương

x, y, z thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. $-\frac{25}{2}$.

B. $-\frac{31}{2}$.

C. $\frac{31}{2}$.

D. $\frac{29}{2}$.

Câu 92. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu số hữu tỉ a thuộc đoạn $[-1;1]$ sao cho tồn tại số thực

$$b \text{ thỏa mãn } \log_2(1-a^2-b^2+2b) = \frac{2^a}{4^a+1} + \frac{4^a}{2^a+1} + \frac{1}{2^a+4^a} - \frac{1}{2}.$$

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Câu 93. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x+y > 0; -20 \leq x \leq 20$ và

$$\log_2(x+2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0?$$

A. 19.

B. 6

C. 10.

D. 41.

Câu 94. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x > 1, y > 1$ và $\log_3 x \log_3 6y + 2 \log_3 x \log_3 2y(3 - \log_3 2xy) = \frac{9}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = x + 2y$ gần với số nào nhất trong các số sau

A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Câu 95. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn $2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$

A. 1010.

B. 2020.

C. 3.

D. 4.

PHẦN 5. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT – GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Câu 96. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho $x; y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x \neq y$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 3y^2}{xy - y^2}$ bằng

A. $\frac{13}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. -2 .

D. 6.

Câu 97. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$. Khi $x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 98. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$

A. $T_{\min} = \frac{4}{3}$.

B. $T_{\min} = 4$.

C. $T_{\min} = 2$.

D. $T_{\min} = \frac{8}{3}$.

Câu 99. (Chuyên KHTN - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{5x+3y-2}{2x+y+1}.$$

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 100. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Xét các số thực dương a, b, c lớn hơn 1 (với $a > b$) thỏa mãn $4(\log_a c + \log_b c) = 25 \log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a + \log_a c + \log_c b$ bằng

- A. 5. B. 8. C. $\frac{17}{4}$. D. 3.

Câu 101. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Xét các số thực a, b, x thỏa mãn $a > 1, b > 1, 0 < x \neq 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

- A. $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{e}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Câu 102. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4xy + 2x - y$ có dạng $m + n\sqrt{165}$ (với m, n là các số tự nhiên), tính $S = m + n$.

- A. 58. B. 54. C. 56. D. 60

Câu 103. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$

- A. 2. B. 1. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 104. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3x^4 y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 105. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = (ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\sqrt{2}x + y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $[10; 15)$. B. $[6; 10)$. C. $(1; 4)$. D. $[4; 6)$.

Câu 106. (Chuyên Lào Cai - 2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_\pi x + \log_\pi y \geq \log_\pi (x + y^2)$. Biểu thức $P = x + 8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

- A. $P_{\min} = 16$. B. $P_{\min} = \frac{33}{2}$. C. $P_{\min} = 11\sqrt{2}$. D. $P_{\min} = \frac{31}{2}$.

Câu 107. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 (x-1) + \log_2 (y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?

- A. $T = 9$. B. $T = \frac{7}{3}$. C. $T = \frac{5}{3}$. D. $T = 7$.

Câu 108. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1} (16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1} (4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. $\frac{27}{4}$. B. 6. C. $\frac{20}{3}$. D. 9.

Câu 109. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+2} (4a + 6b - 7) = 1$ và $27^c \cdot 81^d = 6c + 8d + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$.

A. $\frac{49}{25}$.

B. $\frac{64}{25}$.

C. $\frac{7}{5}$.

D. $\frac{8}{5}$.

Câu 110. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1010}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8080}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$
 bằng

A. 2020.

B. 16160.

C. 20200.

D. 13130.

Câu 111. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là

A. 16.

B. 18.

C. 12.

D. 20.

Câu 112. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Xét các số thực dương a, b thỏa mãn

$$\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + b$.

A. $P_{\min} = -1 + 2\sqrt{5}$.

B. $P_{\min} = 2 + \sqrt{5}$.

C. $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$.

D. $P_{\min} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Câu 113. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn

$$\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3.$$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a b - \log_b c$. Giá trị của biểu thức $S = 3m - M$ bằng

A. -16.

B. 4.

C. -6.

D. 6.

Câu 114. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$.

Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + xy$ là bao nhiêu?

A. $30 - 20\sqrt{2}$.

B. $33 - 22\sqrt{2}$.

C. $24 - 16\sqrt{2}$.

D. $36 - 24\sqrt{2}$.

Câu 115. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho các số thực $x, y \geq 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy \leq 4$. Biểu thức

$$P = \log_{4x} 8x - \log_{2y^2} \frac{y^2}{2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0, y = y_0$. Đặt $T = x_0^4 + y_0^4$ mệnh đề nào sau đây đúng

A. $T = 131$.

B. $T = 132$.

C. $T = 129$.

D. $T = 130$.

Câu 116. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 10$. Biết giá trị lớn nhất của

$$F = 5 \log a \cdot \log b + 2 \log b \cdot \log c + \log c \cdot \log a$$

bằng $\frac{m}{n}$ với m, n nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m + n$ bằng

A. 13.

B. 16.

C. 7.

D. 10.

Câu 117. (Sở Bình Phước - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y).$$

A. $2\sqrt{2} + 3$.

B. $2 + 3\sqrt{2}$.

C. $3 + \sqrt{3}$.

D. 9.

Câu 118. (Sở Yên Bái - 2020) Cho các số thực x, y thuộc đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy$. Tính $M.m$.

A. $-\frac{5}{2}$.

B. -5.

C. 5.

D. -3.

Câu 119. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2). \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất } P_{\min} \text{ của biểu thức } P = x + 3y.$$

- A. $P_{\min} = \frac{17}{2}$. B. $P_{\min} = 8$. C. $P_{\min} = 9$. D. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Câu 120. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1} (25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1} (10a + 3b + 1) = 2$. Giá trị biểu thức $a + 2b$ bằng?

- A. 6. B. $\frac{11}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 22.

Câu 121. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho các số thực dương $a; b; c$ khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2 \log_b \frac{c}{b} = \log_a \frac{c}{a^3 b}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = \log_a ab - \log_b bc. \text{ Tính giá trị biểu thức } S = 2m^2 + 9M^2.$$

- A. $S = 28$. B. $S = 25$. C. $S = 26$. D. $S = 27$.

Câu 122. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1} (16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1} (4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. 9. B. 6. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{20}{3}$.

Câu 123. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Xét các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$ thuộc tập nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 124. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$. Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right). \text{ Tổng } M + m \text{ bằng}$$

- A. $-4 - 3\sqrt{2}$. B. $-4 - 5\sqrt{2}$. C. $-4 - 2\sqrt{2}$. D. $-4 - 4\sqrt{2}$.

Câu 125. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho biểu thức $P = 3^{y-2x+3} (1 + 4^{2x-y-1}) - 2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q = \log_{y-3-2x} 3y$. Giá trị nhỏ nhất của y để tồn tại x đồng thời thỏa mãn $P \geq 1$ và $Q \geq 1$ là số y_0 . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $4y_0 + 1$ là số hữu tỷ. B. y_0 là số vô tỷ.
C. y_0 là số nguyên dương. D. $3y_0 + 1$ là số tự nhiên chẵn.

Câu 126. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hai số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}$.

- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{11}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.

Câu 127. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Với các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho

$$\log_2 \left(\frac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2} \right) = x(x-4) + y(y-8) + z(z-8) - 2,$$

gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2+y^2+z^2-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86}$ thứ tự là M và m . Khi đó $M+m$ bằng:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. 1. C. $-\frac{5}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 128. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\ln y \geq \ln(x^3+2) - \ln 3$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = e^{4y-x^3-x-2} - \frac{x^2+y^2}{2} + x(y+1) - y$.

- A. 1. B. 0. C. e . D. $\frac{1}{e}$.

Câu 129. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1 \neq 1$ thỏa mãn

$$\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \text{ và } u_{n+1} = 7u_n \text{ với mọi } n \geq 1. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } n \text{ để } u_n > 1111111 \text{ bằng:}$$

- A. 11. B. 8. C. 9. D. 10.

Câu 130. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \frac{8-8xy}{x+y}$.

Khi $P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 131. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho x, y là các số dương thỏa mãn

$$\log(x+2y) = \log(x) + \log(y). \text{ Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x} \text{ là:}$$

- A. $\frac{31}{5}$. B. 6. C. $\frac{29}{5}$. D. $\frac{32}{5}$.

----- HẾT -----

PHẦN 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ - BIẾN ĐỔI LOGARIT

Câu 1. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$.

Giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

A. $\sqrt{2014}$.

B. $\sqrt{2016}$.

C. $\sqrt{2018}$.

D. $\sqrt{2020}$.

Lời giải

Chọn B

Do $a > b > 1$ nên $\log_a b > 0$, $\log_b a > 0$ và $\log_b a > \log_a b$.

Ta có: $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$

$$\Leftrightarrow \log_b a + \log_a b = \sqrt{2020}$$

$$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b + 2 = 2020$$

$$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b = 2018 (*)$$

Khi đó, $P = \log_b ab - \log_a ab = \log_b a + \log_b b - \log_a a - \log_a b = \log_b a - \log_a b$

Suy ra: $P^2 = (\log_b a - \log_a b)^2 = \log_b^2 a + \log_a^2 b - 2 = 2018 - 2 = 2016 \Rightarrow P = \sqrt{2016}$

Câu 2. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Một ngân hàng X , quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau n năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1 + 8\%)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn 850 triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng triệu)?.

A. 675 triệu đồng.

B. 676 triệu đồng.

C. 677 triệu đồng.

D. 674 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P(n) = A(1 + 8\%)^n$.

Sau 3 năm số tiền khách hàng rút về lớn hơn 850 triệu đồng là:

$$850 < A(1 + 8\%)^3 \Leftrightarrow A > \frac{850}{(1 + 8\%)^3} \approx 674,8.$$

Vậy số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là 675 triệu đồng.

Câu 3. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Ông Tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông Tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 46,933 triệu.

B. 34,480 triệu.

C. 81,413 triệu.

D. 107,946 triệu.

Lời giải

Chọn C

Năm năm đầu ông Tuấn có số tiền cả gốc và lãi là $T_1 = 100 \cdot (1 + 0.08)^5 = 146,933$

Sau khi sửa nhà số tiền còn lại gửi vào ngân hàng trong 5 năm thì số tiền cả gốc và lãi là

$$T_2 = \frac{146,932}{2}(1+0.08)^5 = 107,946.$$

Số tiền lãi trong 10 năm là $L = (146,933 - 100) + (107,946 - 73,466) = 81,413$.

Câu 4. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Gọi $x_0 < x_1 < \dots < x_{2019}$ là các nghiệm của phương trình $\ln x \cdot (\ln x - 1) \cdot (\ln x - 2) \dots (\ln x - 2019) = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = (x_0 - 1)(x_1 - 2)(x_2 - 3) \dots (x_{2019} - 2020).$$

A. $P = (e-1)(e^2-2)(e^3-3) \dots (e^{2010}-2010)$. **B.** $P = 0$.

C. $P = -2010!$. **D.** $P = 2010!$.

Lời giải

Chọn E

Điều kiện: $x > 0$.

Xét phương trình $\ln x \cdot (\ln x - 1) \cdot (\ln x - 2) \dots (\ln x - 2019) = 0$ (*).

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 1 \\ \ln x = 2 \\ \dots \\ \ln x = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e \\ x = e^2 \\ \dots \\ x = e^{2019} \end{cases}, \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vì $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2019}$ nên $x_0 = 1; x_1 = e; x_2 = e^2; \dots; x_{2019} = e^{2019}$.

Ta có: $P = (x_0 - 1)(x_1 - 2)(x_2 - 3) \dots (x_{2019} - 2020) = (1-1)(e-2)(e^2-3) \dots (e^{2019}-2020) = 0$.

Vậy $P = 0$.

Câu 5. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý. Số tiền còn lại anh gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất $0,25\%$ một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau một năm số tiền cả gốc và lãi của anh là 416.780.000 đồng. Tính x .

A. 1,2.

B. 0,8.

C. 0,9.

D. 1,5.

Lời giải

Chọn A

+ Xét bài toán ông B gửi tiết kiệm số tiền A đồng với lãi suất r cho 1 kỳ hạn. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Hỏi sau n kỳ hạn số tiền cả gốc và lãi của ông B là bao nhiêu nếu trong thời gian gửi lãi suất không thay đổi?

- Sau 1 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_1 = A + A.r = A(1+r)$.

- Sau 2 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_2 = T_1 + T_1.r = T_1(1+r) = A(1+r)^2$.

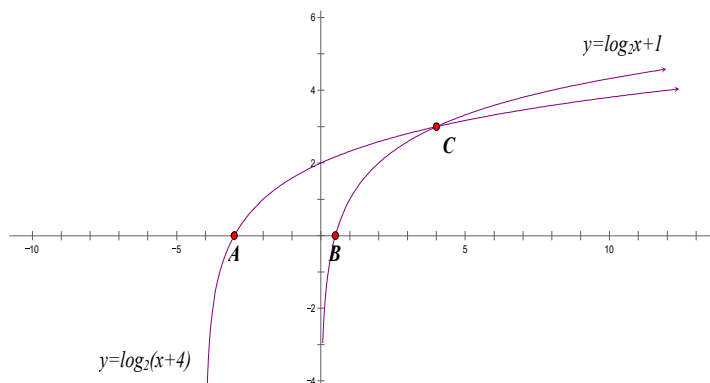
- Tổng quát ông B có số tiền cả gốc và lãi sau n kì hạn là $T_n = A(1+r)^n$ (1).

+ Áp dụng công thức (1) cho bài toán đề cho, gọi S là số tiền cả gốc và lãi anh Dũng có sau một năm gửi, ta có : $S = 250(1+x\%)^4 + 150(1+0,25\%)^{12}$ (triệu đồng).

$$S = 416,78 \text{ (triệu đồng)} \Leftrightarrow 250(1+x\%)^4 + 150(1+0,25\%)^{12} = 416,78 \Leftrightarrow x \approx 1,2.$$

Vậy $x \approx 1,2$.

Câu 6. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $y = \log_2 x + 1$ và $y = \log_2(x+4)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích tam giác ABC bằng

- A. 21. B. $\frac{7}{4}$. C. $\frac{21}{2}$. D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_2 x + 1$ với trục hoành:

$$\log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Do đó } B\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_2(x+4)$ với trục hoành:

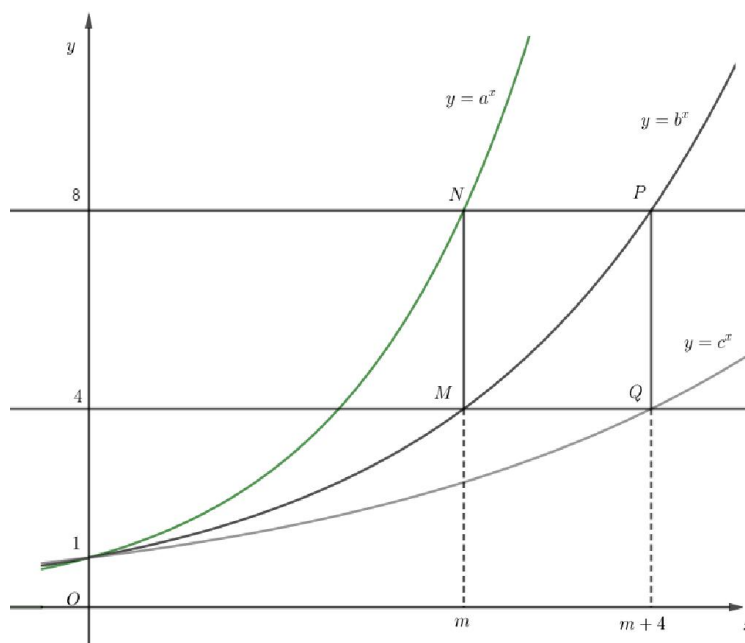
$$\log_2(x+4) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 1 \Leftrightarrow x = -3. \text{ Do đó } A(-3; 0).$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_2 x + 1$ và $y = \log_2(x+4)$:

$$\log_2(x+4) = \log_2 x + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+4) = \log_2(2x) \Leftrightarrow x+4 = 2x \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 3. \text{ Do đó } C(4; 3).$$

Vậy nên, diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, Ox) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} + 3 \right| \cdot |3| = \frac{21}{4}$.

Câu 7. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y = a^x, (C_2): y = b^x, (C_3): y = c^x$ và đường thẳng $y = 4; y = 8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4.



Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x + y$ bằng

A. 34.

B. 5.

C. 43.
Lời giải

D. 19.

Chọn C

Giả sử hoành độ điểm M là m , ta suy ra $M(m; 4); N(m; 8); P(m+4; 8); Q(m+4; 4)$.

$$\text{Từ giả thiết ta có } M, P \text{ thuộc đường cong } y = b^x \text{ nên } \begin{cases} b^m = 4 \\ b^{m+4} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^m = 4 \\ b^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ b = 2^{\frac{1}{4}} \end{cases}.$$

$$N, Q \text{ lần lượt thuộc đường cong } y = a^x; y = c^x \text{ nên } \begin{cases} a^8 = 8 \\ c^{12} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^8 = 2^3 \\ c^{12} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{3}{8}} \\ c = 2^{\frac{1}{6}} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } abc = 2^{\frac{3}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{19}{24}}. \text{ Vậy } x = 19; y = 24 \Rightarrow x + y = 43.$$

Câu 8. (Chuyên Lào Cai - 2020) các số thực a, b, c thỏa mãn $(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 8$ và $2^a = 3^b = 6^{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.
Lời giải

D. 8.

Chọn A

Ta có $a = -c \log_2 6$ và $b = -c \log_3 6$. Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$. Hay $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Hay $ab + bc + ca = 0$. Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2$ nên $(a+b+c)^2 - 4(a+b+c) + 4 = 0$. Vậy $a+b+c = 2$.

Câu 9. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Khi đó biểu thức $P = \frac{5 - 2^x - 2^{-x}}{8 + 4.2^x + 4.2^{-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tích ab có giá trị bằng

A. 10.

B. -8.

C. 8.
Lời giải

D. -10.

Chọn A

$$\text{Ta có } 4^x + 4^{-x} = 7 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2.2^x.2^{-x} + (2^{-x})^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 9 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 3.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{5 - 2^x - 2^{-x}}{8 + 4.2^x + 4.2^{-x}} = \frac{5 - (2^x + 2^{-x})}{8 + 4.(2^x + 2^{-x})} = \frac{5 - 3}{8 + 4.3} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Suy ra $a = 1, b = 10$.

Vậy $ab = 10$.

Câu 10. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_{2020}(mx - m + 2)$ xác định trên $[1; +\infty)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\text{Điều kiện: } mx - m + 2 > 0 \Leftrightarrow mx > m - 2 \quad (1)$$

• Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow (1)$ trở thành $0 > -1$ (luôn thỏa mãn).

• Trường hợp 2: $m > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x > \frac{m-2}{m} \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D = \left(\frac{m-2}{m}; +\infty \right)$.

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành $\frac{m-2}{m} < 1 \Leftrightarrow m-2 < m \Leftrightarrow -2 < 0$ (luôn thỏa mãn).

- Trường hợp 3: $m < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x < \frac{m-2}{m} \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{m-2}{m}\right)$. Do đó

không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm là $m \geq 0$.

Cách 2:

Điều kiện: $mx - m + 2 > 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m(x-1) > -2, \forall x \in [1; +\infty) \quad (1).$

- Với $x = 1$, ta được $0m > -2$, đúng với mọi m .

- Với $x > 1$, ta được $(1) \Leftrightarrow m > \frac{-2}{x-1}, \forall x \in (1; +\infty) \quad (2).$

Xét hàm số $g(x) = \frac{-2}{x-1}$ với $x > 1$, ta có: $g'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1$.

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	0

Từ bảng biến thiên, ta được $(2) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy, tất cả các giá trị cần tìm của m là $m \geq 0$.

- Câu 11. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.
- A.** 31 tháng. **B.** 40 tháng. **C.** 35 tháng. **D.** 30 tháng.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $a = 1 + r$ và M . Trong đó M là số tiền góp vào hàng tháng, r là lãi suất hàng tháng.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ nhất là: $T_1 = M + M.r = M.a$.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ hai là: $T_2 = M.a + M + (M.a + M)r = Ma^2 + Ma$

...

Tương tự tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ n là:

$$T_n = Ma^n + Ma^{n-1} + \dots + Ma = Ma(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) = Ma \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{M}{r}(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]$$

+ Sau tháng thứ n anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng và nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có:

$$\frac{3}{0,6\%} \left[(1 + 0,6\%)^n - 1 \right] (1 + 0,6\%) > 100 \Leftrightarrow n > 30,3$$

Vậy sau ít nhất 31 tháng thì anh A mới có được số tiền nhiều hơn 100 triệu.

- Câu 12. (Sở Hà Tĩnh - 2020)** Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,7% / tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng gần nhất với số nào sau đây?
- A.** 43.730.000 đồng. **B.** 43.720.000 đồng.
C. 43.750.000 đồng. **D.** 43.740.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là số tiền vay ban đầu.

Gọi A là số tiền mà hàng tháng người đó trả cho ngân hàng.

Sau tháng 1 dư nợ còn lại là: $M.1,007 - A$

Sau tháng 2 dư nợ còn lại là: $(M.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^2 - A.1,007 - A$

Sau tháng 3 dư nợ còn lại là:

$$(M.1,007^2 - A.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^3 - A.[(1,007)^2 + 1,007 + 1]$$

Sau tháng thứ n dư nợ còn lại là: $M.1,007^n - A.[(1,007)^{n-1} + 1,007^{n-2} + \dots + 1,007 + 1]$

Vì đúng 25 tháng thì trả hết nợ nên:

$$1.1,007^{25} - A.[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + \dots + 1,007 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1,007^{25} = A.[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + \dots + 1,007 + 1] \Leftrightarrow 1,007^{25} = A. \frac{1,007^{25} - 1}{0,007}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1,007^{25} \cdot 0,007}{1,007^{25} - 1} \approx 0,04374151341 \text{ tỉ đồng} \approx 43.741.513 \text{ đồng} \approx 43.740.000 \text{ đồng.}$$

Câu 13. (Sở Ninh Bình) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 9^b = 6^c$. Khi đó $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 4^a = 9^b = 6^c \Rightarrow \begin{cases} a = \log_4 t \\ b = \log_9 t \\ c = \log_6 t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \frac{c}{a} + \frac{c}{b} &= \frac{\log_6 t}{\log_4 t} + \frac{\log_6 t}{\log_9 t} = \log_6 t \cdot \log_4 4 + \log_6 t \cdot \log_9 9 = \log_6 t (\log_4 4 + \log_9 9) \\ &= \log_6 t \cdot \log_4 36 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2. \end{aligned}$$

Câu 14. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$. Tổng $f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021)$ bằng

A. $\frac{4035}{2021}$.

B. $\frac{2021}{2022}$.

C. 2021..

D. $\frac{2022}{2023}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

Vậy

$$\begin{aligned} f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021) &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \\ &= 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

Câu 15. (Sở Bình Phước - 2020) Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2020 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 40% lương. Anh ta dự định mua một căn hộ chung cư giá rẻ có giá trị tại thời điểm 1/1/2020 là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị căn hộ tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được căn hộ đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 11.487.000 đồng. B. 14.517.000 đồng. C. 55.033.000 đồng. D. 21.776.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $P = P_0(1+r)^n$.

Ta được giá trị ngôi nhà sau 10 năm là: $P = 10^9(1+0,05)^5 = 10^9 \cdot (1,05)^5$.

Sau khi chi tiêu hàng tháng thì số tiền Người sinh viên còn lại của mỗi tháng là 60% lương. Trong hai năm 2020 - 2021, Người sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a$.

Trong hai năm 2022 - 2023, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)$.

Trong hai năm 2024 - 2025, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)^2$.

Trong hai năm 2026 - 2027, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)^3$.

Trong hai năm 2028 - 2029, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)^4$.

Tổng số tiền anh sinh viên có được sau 10 năm là:

$$24 \times 0,6a + 24 \times 0,6a(1+0,1) + 24 \times 0,6a(1+0,1)^2 + 24 \times 0,6a(1+0,1)^3 + 24 \times 0,6a(1+0,1)^4$$

$$= 24 \times 0,6a \left[1 + (1+0,1) + (1+0,1)^2 + (1+0,1)^3 + (1+0,1)^4 \right]$$

$$= 24 \times 0,6a \times \frac{1 - (1+0,1)^5}{1 - (1+0,1)} = 24 \times 0,6a \frac{0,61051}{0,1} = 87,91344 \times a$$

Số tiền trên bằng giá trị của ngôi nhà sau 10 năm:

$$10^9 \cdot (1,05)^5 = 87,91344 \times a \Leftrightarrow a \approx 14.517.000$$

- Câu 16. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7% / tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

A. 21.

B. 22.

C. 23.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tháng là n ($n \in \mathbb{N}^*$). Đặt $a = 5$, $q = 1,007$. Đến lần nộp tiền thứ n :

Khoản tiền a đầu tiên trở thành $a \cdot q^{n-1}$. Khoản tiền a thứ hai trở thành $a \cdot q^{n-2}$ Giả sử khoản tiền

cuối cùng vẫn là a thì tổng số tiền đã trả cả vốn lẫn lãi là $a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 5 \cdot \frac{1,007^n - 1}{0,007}$.

Số tiền 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7% / tháng, sau n tháng, sẽ trở thành $100 \cdot 1,007^n$.

Ta có phương trình $5 \cdot \frac{1,007^n - 1}{0,007} = 100 \cdot 1,007^n \Leftrightarrow n \approx 21,6$.

Theo đề bài, tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu đồng nên số tháng phải làm tròn là 22 tháng.

- Câu 17. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** COVID19 là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona (nCoV) bắt nguồn từ Trung Quốc (đầu tháng 12/2019) gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh (tính đến 7/4/2020 đã có 1 360 039 người nhiễm bệnh). Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên (1 người lây 4 người). Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh? (Biết rằng những người nhiễm bệnh không phát hiện bản thân bị bệnh và không phòng tránh cách li, do trong thời gian ủ bệnh vẫn lây bệnh sang người khác).

A. 77760 người.

B. 16384 người.

C. 62500 người.

D. 78125 người.

Lời giải

Chọn D

Sau 1 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $1 + 4 = 5$ người.

Sau 2 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1 + 4) + (1 + 4) \cdot 4 = (1 + 4)^2$ người.

Sau 3 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1 + 4)^2 + (1 + 4)^2 \cdot 4 = (1 + 4)^3$ người.

⇒ Sau 7 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^7 = 78125$ người.

Ngoài ra chúng ta có thể áp dụng công thức lãi kép để tính nhanh:

$$S_n = A(1+r)^n = 1 \cdot (1+4)^7 = 78125, \text{ với } A=1, r=4, n=7.$$

Câu 18. (Liên trường Nghệ An - 2020) Ông A có số tiền 100000000 đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép, có hai loại kì hạn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12%/năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1%/tháng. Ông A muốn gửi 10 năm. Theo anh chị, kết luận nào sau đây đúng (làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 16186000 đồng sau 10 năm.
- B. Cả hai loại kì hạn đều có cùng số tiền như nhau sau 10 năm.
- C. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 19454000 đồng sau 10 năm.
- D. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 15584000 đồng sau 10 năm.

Lời giải

Chọn C

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 12 tháng là:

$$T_1 = T_0 \cdot (1+r_1)^{n_1} = 10^8 \cdot 1,12^{10} \approx 310585000 \text{ (đồng)}.$$

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 1 tháng là

$$T_2 = T_0 \cdot (1+r_2)^{n_2} = 10^8 \cdot 1,01^{120} \approx 330039000 \text{ (đồng)}.$$

Như vậy, sau 10 năm, gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là:

$$T = T_2 - T_1 = 330039000 - 310585000 = 19454000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 19. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202.300 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người?

- A. 2020.
- B. 2021.
- C. 2023.
- D. 2022.

Lời giải

Chọn B

Lấy năm 2005 làm mốc, khi đó $A = 202.300$.

Giả sử sau n năm thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người, tức là ta có

$$255.000 = 202.300 \cdot e^{\frac{1,47n}{100}} \Leftrightarrow n = 100 \cdot \ln \frac{255000}{202300} \approx 15,75 \text{ năm}.$$

Vậy đến năm 2021 thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người.

Câu 20. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ x trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = Ae^{rx}$ trong đó A là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, r là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì r không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tính đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai (kể từ ngày thứ 7 trở đi) tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?

- A. 242.
- B. 16.
- C. 90.
- D. 422.

Lời giải

Chọn A

* Giai đoạn 1:

$$\text{Ta có: } 180 = 9 \cdot e^{r \cdot 6} \Rightarrow r = \frac{1}{6} \ln 20$$

* Giai đoạn 2:

Đến ngày thứ 6 số ca mắc bệnh của tỉnh là $f(x) = 180.e^{\frac{x}{10}} = 242$

- Câu 21. (Kim Thành - Hải Dương - 2020)** Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là 0,9% / tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

A. 65 tháng. B. 66 tháng. C. 67 tháng. D. 68 tháng.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là số tiền vay ngân hàng; r là lãi suất hàng tháng cho số tiền còn nợ; m là số tiền trả nợ hàng tháng; n là thời gian trả hết nợ.

$$\text{Để trả hết nợ thì } A(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow 500(1+0,9\%)^n - \frac{10}{0,9\%}[(1+0,9\%)^n - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+0,9\%)^n = \frac{20}{11}$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{(1+0,9\%)} \frac{20}{11} \approx 66,72$$

Vậy sau 67 tháng anh Việt trả hết nợ.

- Câu 22. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là 95,5 triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là 1,14%. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 94,4 triệu người. B. 85,2 triệu người. C. 86,2 triệu người. D. 83,9 triệu người.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S = Ae^{ni}$ trong đó: $S = 95,5$ triệu người, $n = 10$ năm, $i = 1,14\%$

Ta có số dân Việt Nam năm 2009 là: $A = \frac{S}{e^{ni}} = \frac{95,5}{e^{10.1,14\%}} \approx 85,2$ triệu người

- Câu 23. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

A. 200. B. 190. C. 250. D. 150.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $P = P_0(1+r)^n$.

Số tiền ông An có được sau 3 năm là: $P = x(1+0,07)^3$.

Tiền lãi ông An có được sau 3 năm là: $P - x = x(1+0,07)^3 - x = x((1+0,07)^3 - 1)$.

Số tiền lãi trên là 45 triệu đồng nên: $x((1+0,07)^3 - 1) = 45 \Leftrightarrow x \approx 199,96$

- Câu 24. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một người vay vốn ở ngân hàng với số tiền 50 triệu đồng, thời hạn 50 tháng với lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ trả đúng ngày quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền là bao nhiêu để đến cuối tháng thứ 50 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng (làm tròn đến trăm đồng) ?

- A. 1.018.500 đồng. B. 1.320.800 đồng. **C. 1.320.500 đồng.** D. 1.771.300 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi N là số tiền vay ban đầu, r là lãi suất theo tháng, A là số tiền phải trả hàng tháng, ta có:
+ Số dư nợ sau 1 tháng là: $N + Nr - A = N(1+r) - A$.

+ Số dư nợ sau 2 tháng là: $N(1+r) - A + [N(1+r) - A]r - A = N(1+r)^2 - \frac{A}{r}[(1+r)^2 - 1]$.

+ Số dư nợ sau 3 tháng là: $N(1+r)^3 - \frac{A}{r}[(1+r)^3 - 1]$.

...

+ Số dư nợ sau n tháng là: $N(1+r)^n - \frac{A}{r}[(1+r)^n - 1]$.

Giả sử sau n tháng thì dư nợ bằng 0, ta có $N(1+r)^n - \frac{A}{r}[(1+r)^n - 1] = 0 \Leftrightarrow A = \frac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$.

Áp dụng với $N = 50.000.000$ đồng, $r = 1,15\%$ và $n = 50$ tháng ta có: $A \approx 1.320.500$ đồng.

PHẦN 2. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

- Câu 25. (Chuyên Hưng Yên - 2020)** Đường thẳng $x = m$ lần lượt cắt đồ thị hàm số $y = \log_5 x$ và đồ thị hàm số $y = \log_5(x+4)$ tại các điểm A, B . Biết rằng khi $AB = \frac{1}{2}$ thì $m = a + \sqrt{b}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tổng $a + b$ bằng

- A. 6.** B. 8. C. 5. D. 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: A là giao điểm của đường thẳng $x = m$ và đồ thị hàm số $y = \log_5 x$.

Suy ra điểm A có tọa độ là $A(m; \log_5 m)$ với $m > 0$.

Ta có: B là giao điểm của đường thẳng $x = m$ và đồ thị hàm số $y = \log_5(x+4)$.

Suy ra điểm B có tọa độ là $B(m; \log_5(m+4))$.

Khi đó $\overline{AB} = (0; \log_5(m+4) - \log_5 m) = \left(0; \log_5 \left(\frac{m+4}{m}\right)\right)$; $AB = \sqrt{\left[\log_5 \left(\frac{m+4}{m}\right)\right]^2}$.

Theo bài ra ta có: $AB = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\log_5 \left(\frac{m+4}{m}\right)\right]^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \frac{m+4}{m} = \frac{1}{2} \\ \log_5 \frac{m+4}{m} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+4 = m\sqrt{5} \\ \sqrt{5}(m+4) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = -5 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Dựa vào đáp án ta chọn $m = 1 + \sqrt{5}$. Suy ra $a = 1; b = 5$.

Vậy $a + b = 6$.

- Câu 26. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $[0; 2020]$ thỏa mãn bất phương trình sau

$$16^x + 25^x + 36^x \leq 20^x + 24^x + 30^x.$$

- A. 3.** B. 2000. **C. 1.** D. 1000.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$16^x + 25^x + 36^x \leq 20^x + 24^x + 30^x \Leftrightarrow 4^{2x} + 5^{2x} + 6^{2x} \leq 4^x \cdot 5^x + 4^x \cdot 6^x + 5^x \cdot 6^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \left[(4^x)^2 + (5^x)^2 + (6^x)^2 \right] - (2 \cdot 4^x \cdot 5^x + 2 \cdot 4^x \cdot 6^x + 2 \cdot 5^x \cdot 6^x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (4^x - 5^x)^2 + (4^x - 6^x)^2 + (5^x - 6^x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 5^x = 0 \\ 4^x - 6^x = 0 \\ 5^x - 6^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{4}{6}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \in [0; 2020].$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của x trong đoạn $[0; 2020]$ thỏa mãn bất phương trình.

Câu 27. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Gọi x, y các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) \text{ và } \frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}, \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính } T = a^2 + b^2.$$

A. $T = 26.$

B. $T = 29.$

C. $T = 20.$

D. $T = 25.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$, ta có
$$\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 6^t = 4^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\frac{x}{y} = \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$

Mà $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = 1; b = 5.$

Vậy $T = a^2 + b^2 = 1^2 + 5^2 = 26.$

Câu 28. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn

$$\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a - 5b) - 1. \text{ Đặt } T = \frac{b}{a}. \text{ Khẳng định nào sau đây đúng?}$$

A. $1 < T < 2.$

B. $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}.$

C. $-2 < T < 0.$

D. $0 < T < \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Giả sử: $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a - 5b) - 1 = t \Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ 4a - 5b = 9^{t+1} \end{cases}$

Khi đó $4 \cdot 4^t - 5 \cdot 6^t = 9 \cdot 9^t \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^t - 5 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^t = 9 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = -1 \quad (VN) \end{cases} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow t = -2$$

$$\text{Vậy } T = \frac{b}{a} = \left(\frac{6}{4}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 29. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho x, y là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $x \neq y$ và $\log_x \sqrt{xy} = \log_y x$. Tích các giá trị nguyên nhỏ hơn 2021 của biểu thức $P = 4^{\frac{1}{x^2}} + 4^y$ là

- A. 2021!. **B. $\frac{2020!}{16}$.** C. $\frac{2020!}{2}$. D. 2020!.

Lời giải

Chọn B

Ta

có:

$$\log_x \sqrt{xy} = \log_y x \Leftrightarrow \log_x (xy) = 2 \log_y x \Leftrightarrow 1 + \log_x y = 2 \cdot \frac{1}{\log_x y}$$

$$\Leftrightarrow \log_x^2 y + \log_x y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 1 \\ \log_x y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \quad (\text{loại}) \\ y = \frac{1}{x^2} \quad (\text{nhận}) \end{cases}$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{x^2} \text{ thì } P = 2 \cdot 4^{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \log_4 \frac{P}{2} > 0 \quad (*).$$

Với $x > 0, x \neq 1$ thì: $P > 2$ và $P \neq 8$.

Suy ra tập hợp các số nguyên P thỏa mãn điều kiện (*) là $S = \{3; 4; 5; 6; 7; 9; \dots; 2020\}$.

$$\text{Tích các phần tử của } S \text{ là: } 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2020 = \frac{2020!}{16}.$$

Câu 30. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho số thực x thỏa mãn $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$. Tính giá trị

$$P = (\log_2 x)^4$$

- A. $P = 27$. B. $P = 81\sqrt{3}$. **C. $P = 729$.** D. $P = 243$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_8 x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x) \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{3}\log_2 x\right) = \log_2(\log_2 x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 x = \sqrt[3]{\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2 x = 3\sqrt[3]{\log_2 x} \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{\log_2 x} (t > 0) \Rightarrow t^3 = \log_2 x$$

$$(*) \Leftrightarrow t^3 = 3t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt[3]{\log_2 x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \log_2 x = 3\sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2^{3\sqrt{3}} \text{ (thỏa mãn đề bài).}$$

$$\text{Vây } P = (3\sqrt{3})^4 = 729.$$

Câu 31. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x} - 9)(3^x - \frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1} - 1} \leq 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

D. 5.

Lời giải

Chon B

Điều kiện $3^{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Ta có $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x > -1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x} - 9)(3^x - \frac{1}{27}) \leq 0$.

$$\text{Đặt } t = 3^x > 0, \text{ ta có } (t^2 - 9)(t - \frac{1}{27}) \leq 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 3)(t - \frac{1}{27}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ \frac{1}{27} \leq t \leq 3 \end{cases}. \text{ Kết hợp}$$

điều kiện $t = 3^x > 0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27} \leq t \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{27} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$. Kết hợp điều kiện

$x > -1$ ta được $-1 < x \leq 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

PHẦN 3. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 32. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho phương trình $9^x - (2m+3).3^x + 81 = 0$ (m là tham số thực). Giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thuộc khoảng nào sau đây

D. $(15; +\infty)$.

Lời giải

Chon C

$$9^x - (2m + 3).3^x + 81 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - (2m+3).3^x + 81 = 0. \text{ Đặt } t = 3^x (t > 0)$$

Phương trình trở thành: $t^2 - (2m + 3)t + 81 = 0$ (2)

$$\Delta = (2m+3)^2 - 4.81 = (2m+3)^2 - 324$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương:

Điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 324 > 0 \\ 2m+3 > 0 \\ 81 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2m+3 > 18 \\ 2m+3 < -18 \end{cases} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2m+3 > 18 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2m+3 < -18 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > \frac{15}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m < -\frac{21}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{15}{2}$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m + 3 \\ t_1.t_2 = 81 \end{cases}$

$$\forall t_1, t_2 = 81 \Leftrightarrow 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 3^4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$$

$$\text{Do đó: } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10 \Leftrightarrow 4^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 3$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 30$$

$$\text{Nên } 2m + 3 = 30 \Leftrightarrow m = \frac{27}{2} (TM)$$

Vậy chọn **C**.

Câu 33. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$ có nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2) = t \Rightarrow \begin{cases} 3^x + 2m = 3^t \\ 3^x - m^2 = 5^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m + m^2 = 3^t - 5^t \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 3^t - 5^t + 1 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 5^t + 1$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 - 5^t \cdot \ln 5.$$

$$\text{Khi đó } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3^t \cdot \ln 3 - 5^t \cdot \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t = \frac{\ln 5}{\ln 3} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5) = t_0.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5)$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	$f(\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5))$	$-\infty$

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \leq f(t_0) \Leftrightarrow -\sqrt{f(t_0)} - 1 \leq m \leq \sqrt{f(t_0)} - 1 \Rightarrow -2,068 \leq m \leq 0,068.$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 34. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A. 1094.

B. 3281.

C. 1093.

D. 3280.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 3^x, (t > 0) \text{ bất phương trình } (3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0 (1) \text{ trở thành } (9t - \sqrt{3})(t - 2m) < 0 (2).$$

$$\text{Nếu } 2m \leq \frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow m \leq \frac{\sqrt{3}}{18} < 1 \text{ thì không có số nguyên dương } m \text{ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

$$\text{Nếu } 2m > \frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{3}}{18} \text{ thì bất phương trình (2) } \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} < t < 2m.$$

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = \left(-\frac{3}{2}; \log_3(2m)\right)$.

Để S chứa không quá 9 số nguyên thì $\log_3(2m) \leq 8 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{3^8}{2}$

Vậy có 3280 số nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 35. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.

A. $m \in (0; 2)$.

B. $m \in [0; 2]$.

C. $m \in [2; 4]$.

D. $m \in (0; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x + 1}$. Với $x \in [1; 27]$ thì $t \in [1; 2]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = t^2 + t$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1; 2]$ nên hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Bảng biến thiên:

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	2	6

Để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$ thì phương trình (*) phải có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 2]$.

Từ bảng biến thiên, suy ra $2 \leq 2m + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Câu 36. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2 + 1 = 3^m$ và $m = 3^x - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .

A. 6

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = 3^m \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \log_3(2x^2 + 1) \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3(2x^2 + 1) = 3^x - 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 + 1) + 2x^2 + 1 = 3^x + x \Leftrightarrow 3^{\log_3(2x^2 + 1)} + \log_3(2x^2 + 1) = 3^x + x.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$ suy ra hàm $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $\log_3(2x^2 + 1) = x \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 3^x$.

Xét hàm số $g(x) = 2x^2 + 1 - 3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 4x - 3^x \ln 3 \Rightarrow g''(x) = 4 - 3^x \ln^2 3 \Rightarrow g'''(x) = -3^x \ln^3 3 < 0$. Suy ra hàm số $g''(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g(x) = 0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm.

Ta lại có $g(0) = g(1) = g(2) = 0$. Suy ra phương trình $2x^2 + 1 = 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Vậy $S = 3$.

Câu 37. (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 9]$.

A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_3^2 x - m \log_3 x^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - m \log_3 x + 2 - m = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \in [1; 9] \Rightarrow t \in [0; 2]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - mt + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 2}{t + 1}$ (1) (Do $t \neq -1, \forall t \in [0; 2]$).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 2}{t + 1}$ với $t \in [0; 2]$ ta có:

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 2}{(t + 1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + \sqrt{3} \in [0; 2] \\ t = -1 - \sqrt{3} \notin [0; 2] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$-1 + \sqrt{3}$	2
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	2	$-2 + 2\sqrt{3}$	2

Khi đó: phương trình đã cho có nghiệm $x \in [1; 9] \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $t \in [0; 2]$.

$$\Leftrightarrow -2 + 2\sqrt{3} \leq m \leq 2.$$

Mặt khác, do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 2$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38. (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x + 1)$ vô nghiệm?

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} mx > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > 0 \\ x > -1 \end{cases}.$$

Ta có $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x + 1) \Leftrightarrow \log_2(mx) = 2 \log_2(x + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_2(mx) = \log_2(x + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ mx = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ mx = (x + 1)^2 \end{cases} \quad (1).$$

Nhận xét với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Với } x \neq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow m = \frac{(x + 1)^2}{x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x}$ với $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$

$$\text{có } f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		0	-	-	0	+
$f(x)$						

The graph illustrates the function $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. It features a horizontal asymptote at $y = 0$ (the x-axis) and a vertical asymptote at $x = 0$. The function has a local maximum at $x = -1$ with a value of 0 and a local minimum at $x = 1$ with a value of 0 . The function approaches $-\infty$ as x approaches 0 from both sides and approaches 0 as x goes to positive or negative infinity.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq m < 4$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm.

Câu 39. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10; 10]$ để phương trình

$$e^{x+a} - e^x = \ln(1+x+a) - \ln(1+x) \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

A. 2.

B. 10.

C. 1.

D. 20

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+1+a > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Phương trình tương đương với } e^{x+a} - e^x - (\ln(1+x+a) - \ln(1+x)) = 0.$$

$$\text{Đặt } f(x) = e^{x+a} - e^x, g(x) = \ln(1+x+a) - \ln(1+x), Q(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{Phương trình đã cho viết lại thành } Q(x) = 0$$

+) Với $a = 0$ thì $Q(x) = 0$ (luôn đúng với mọi x thỏa mãn (*)).

+) Với $a > 0$ có (*) tương đương với $x > -1$, $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến với $x > -1$

Khi đó, $Q(x)$ đồng biến với $x > -1$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(e^{x+a} - e^x - \ln \frac{1+x+a}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[e^{x+a} - e^x - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x (e^a - 1) - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = +\infty \end{cases} (2)$$

Kết hợp (1), (2) thì phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

+) Với $a < 0$ có (*) tương đương với $x > -1-a$, $g(x)$ đồng biến và $f(x)$ nghịch biến với $x > -1-a$.

Khi đó, $Q(x)$ nghịch biến với $x > -1-a$. (3)

Ta có:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} \left(e^{x+a} - e^x - \ln \frac{1+x+a}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} \left[e^{x+a} - e^x - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x (e^a - 1) - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = -\infty \end{cases} \quad (4)$$

Kết hợp (3), (4) suy ra $Q(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Do a là số nguyên trên đoạn $[-10; 10]$ nên kết hợp 3 trường hợp trên thấy có 20 giá trị của a thỏa mãn điều kiện của bài.

Câu 40. (**Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020**) Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là

A. 2020. B. 2021. C. 2019. D. 2022.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 2020x + m > 0 \\ 1010x > 0 \end{cases} \quad (*)$

Đặt $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x) = t$.

Suy ra $\begin{cases} 2020x + m = 6^t \\ 1010x = 4^t \end{cases} \quad (1).$

Từ đó $m = 6^t - 2 \cdot 4^t \quad (2).$

Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình (2) thì $x_0 = \frac{4^{t_0}}{2010}$ là nghiệm của hệ phương trình (1) đồng thời x_0 thỏa mãn điều kiện (*). Do đó x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Từ đó, điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có nghiệm là phương trình (2) có nghiệm.

Xét hàm số $f(t) = 6^t - 2 \cdot 4^t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 6^t \ln 6 - 2 \cdot 4^t \ln 4$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16) := \alpha$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	0	$-2,014$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -2$ (do $m \in \mathbb{Z}$).

Vậy tất cả các giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là các số nguyên thuộc tập hợp $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots, 2019\}$, có tất cả 2022 giá trị.

Câu 41. (**Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020**) Giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là

A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$ (*).

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Ta có $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow t_1 t_2 = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Kết luận $m = 4$.

Câu 42. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho bất phương trình $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?

A. 36.

B. 34.

C. 35.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m), \forall x \in (1; 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_7(7x^2 + 14x + 14) > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m), \forall x \in (1; 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 + m > 0, \forall x \in (1; 3) \\ 6x^2 + 8x + 9 > m, \forall x \in (1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -(x^2 + 6x + 5), \forall x \in (1; 3) \quad (1) \\ 6x^2 + 8x + 9 > m, \forall x \in (1; 3) \quad (2) \end{cases}$$

Xét $g(x) = -(x^2 + 6x + 5), x \in (1; 3)$, có $g(x) = -(x+3)^2 + 4 < -(1+3)^2 + 4 = -12, \forall x \in (1; 3)$

Do đó (1) $\Leftrightarrow m \geq -12$.

Xét $h(x) = 6x^2 + 8x + 9, x \in (1; 3)$, có $h(x) > 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 9 = 23, \forall x \in (1; 3)$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow m \leq 23$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-12; 23]$ nên ta được tập các giá trị của m là $\{-12; -11; -10; \dots; 23\}$.

Vậy có tổng cộng 36 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 43. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình

$$1 + \log_2(2-x) - 2\log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})\right) \leq -\log_2(x+1) \text{ có nghiệm. Chọn đáp án đúng}$$

trong các khẳng định sau

A. $m_0 \in (9; 10)$.

B. $m_0 \in (8; 9)$.

C. $m_0 \in (-10; -9)$.

D. $m_0 \in (-9; -8)$.

Lời giải

Chọn C

$$+ \text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} -1 < x < 2 \\ m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ m > \frac{x}{2} - 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}) \end{cases} \quad (*)$$

+ Với điều kiện trên bất phương trình:

$$1 + \log_2(2-x) - 2\log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})\right) \leq -\log_2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2[2(2-x)(x+1)] \leq \log_2\left[m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(2x+2)} \leq m - \frac{x}{2} + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x}{2} + \sqrt{(2-x)(2x+2)} - 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}) \quad (1).$$

+ Ta thấy các nghiệm của (1) trong khoảng $(-1; 2)$ luôn thỏa mãn (*).

+ Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}$, ($t > 0$) với $x \in (-1; 2)$.

Xét $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}$ với $x \in (-1; 2)$.

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{2x+2}} = \frac{2\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}}{2\sqrt{(2-x)(2x+2)}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = \sqrt{2x+2} \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	-1		1		2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{3}$		3		$\sqrt{6}$

Suy ra khi $x \in (-1; 2)$ thì $t \in (\sqrt{3}; 3]$.

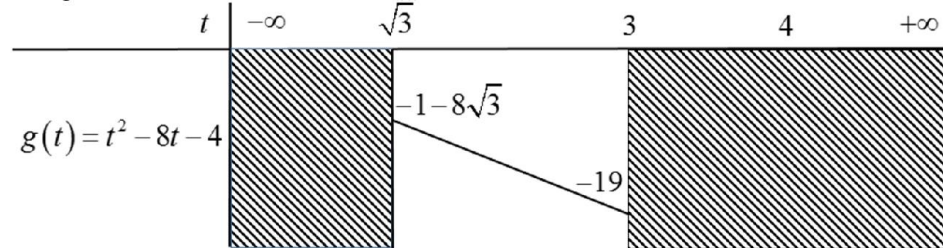
+ Ta có $t^2 = 4 + x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \sqrt{(2-x)(2x+2)} = \frac{t^2 - 4}{2}$.

+ (1) trở thành $m \geq \frac{t^2 - 4}{2} - 4t \Leftrightarrow 2m \geq t^2 - 8t - 4$ (2).

+ (1) có nghiệm $x \in (-1; 2) \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in (\sqrt{3}; 3]$.

+ Xét hàm số $y = g(t) = t^2 - 8t - 4$ trên $(\sqrt{3}; 3]$.

Bảng biến thiên:



+ Do đó bất phương trình (2) có nghiệm $t \in (\sqrt{3}; 3]$ khi và chỉ khi $2m \geq -19 \Leftrightarrow m \geq -\frac{19}{2}$.

Suy ra $m_0 = -\frac{19}{2} \in (-10; -9)$.

Câu 44. (**Chuyên Chu Văn An - 2020**) Tìm m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m < 0$.

B. $m > 1$.

C. $-1 < m < 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^x$, điều kiện: $t > 0$.

Phương trình trở thành: $t^2 - 2t + m = 0$ (*)

Phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn: $t_1 < 1 < t_2$.

Phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ t_1 t_2 = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Phương trình có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi $(t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow m - 2 + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp các điều kiện thì ta được $0 < m < 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Gọi S là tập các giá trị m thỏa mãn hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x^2-1} + m(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}) + 2020m \leq 0 \\ mx^2 + 3m - \sqrt{x^4-1} \geq 0 \end{cases}$$

Trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên?

A. 4.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

+) Điều kiện $x \geq 1$.

+) Bất phương trình $mx^2 + 3m - \sqrt{x^4-1} \geq 0 \Leftrightarrow m(x^2 + 3) \geq \sqrt{x^4-1}$. Vì $\sqrt{x^4-1} \geq 0, \forall x \geq 1$ nên bất phương trình có nghiệm khi $m \geq 0$.

+) TH1: $m = 0$, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x^2-1} \leq 0 \\ \sqrt{x^4-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

+) TH2: $m > 0$, bất phương trình $\sqrt[4]{x^2-1} + m(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}) + 2020m \leq 0$ có vẻ trái luôn dương lên vô nghiệm.

Vậy có một giá trị $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán nên S có 1 phần tử.

Câu 46. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu m nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

A. 28.

B. 29.

C. 30.

D. 31.

Lời giải

Chọn B

$$3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x \cdot 3^m - 3^x + 3^m < 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot 3^x(3^x - 3^m) - (3^x - 3^m) < 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3^m)(9 \cdot 3^x - 1) < 0$$

$$\text{Ta có } 3^x - 3^m = 0 \Leftrightarrow x = m.$$

$$9 \cdot 3^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	m	$+\infty$	
VT	$+$	0	$-$	0	$+$

Ta có tập nghiệm $S = (-2; m)$.

Tập hợp các nghiệm nguyên là $\{-1; 0; 1; \dots; m-1\}$.

Để có không quá 30 nghiệm nguyên thì $m-1 \leq 28 \Leftrightarrow m \leq 29$.

Câu 47. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 6^{x+1} + (m-3) \cdot 4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 35.

B. 38.

C. 34.

D. 33.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình tương đương } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + (m-3) = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $t > 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 12t + (m-3) = 0$, $t > 0$ (*)

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 39 - m > 0 \\ m - 3 > 0 \\ 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 39 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 39.$$

Vậy có 35 giá trị nguyên dương của tham số m .

Câu 48. (Chuyên Quang Trung - 2020) Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$.

A. 30.

B. 25.

C. 33.

D. 17.

Lời giải

Chọn A

$$a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$5 \log^2 x + b \log x + a = 0 \quad (2)$$

Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 là:

$$b^2 - 20a > 0 \Leftrightarrow b^2 > 20a.$$

Nhận xét: $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$

$$\text{Do đó: } x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow \ln(x_1 x_2) > \ln(x_3 x_4) \Leftrightarrow \ln(x_1 x_2) > \frac{\log(x_3 x_4)}{\log e}$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_1 + \ln x_2) \log e > \log x_3 + \log x_4$$

$$\text{Mà } \ln x_1 + \ln x_2 = -\frac{b}{a}; \log x_3 + \log x_4 = -\frac{b}{5} \text{ và } a, b \text{ nguyên dương}$$

$$\text{Nên } -\frac{b}{a} \log e > -\frac{b}{5} \Leftrightarrow a > 5 \log e$$

Vì a là số nguyên dương và $5 \log e \approx 2,17$ nên $a \geq 3$

$$\Rightarrow 20a \geq 60 \Rightarrow b^2 > 60 \Rightarrow b > \sqrt{60} \quad (b > 0)$$

Vì b là số nguyên dương và $\sqrt{60} \approx 7,75$ nên $b \geq 8$

Do đó: $S = 2a + 3b \geq 30 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của S là 30 khi $a = 3; b = 8$.

Câu 49. (Chuyên Sơn La - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x+2m) + 2m$ có nghiệm?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4039.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } e^x = \ln(x+2m) + 2m \Leftrightarrow e^x + x = \ln(x+2m) + x + 2m \Leftrightarrow e^x + x = e^{\ln(x+2m)} + \ln(x+2m) \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ với $t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(x) = f(\ln(x+2m)) \Leftrightarrow x = \ln(x+2m) \Leftrightarrow x+2m = e^x \Leftrightarrow 2m = e^x - x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = e^x - x \Rightarrow g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$		
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$

Từ bảng biên thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020; 2020)$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x+2m) + 2m$ có nghiệm.

Câu 50. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng

A. 16.

B. 119.

C. 120.

D. 159.

Lời giải

Chọn D

$$\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = m \\ \log_2 x = 4m+1 \end{cases}$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $m \neq 4m+1 \Leftrightarrow m \neq \frac{-1}{3}$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 2^m > 0, x_2 = 2^{4m+1} = 2 \cdot (2^m)^4 > 0$

$$\text{Vì } x_1 + x_2 = 165 \Leftrightarrow 2^m + 2 \cdot (2^m)^4 = 165 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2 \cdot t^4 + t \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 1 > 0 \forall t > 0$

Mà $2^m = 3$ là nghiệm của $(*)$ nên là nghiệm duy nhất. Suy ra $x_1 = 3, x_2 = 2 \cdot 3^4 = 162$

Suy ra $|x_1 - x_2| = 159$.

Câu 51. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3) - (m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + m-1 = 0$ có nghiệm thuộc $(3; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Không tồn tại m_0 .

B. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$.

C. $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$.

D. $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \log_{\frac{1}{3}}(x-3).$$

Vì $x \in (3; 6) \Rightarrow t > -1$.

$$\text{Phương trình trở thành: } (m-1)t^2 - (m-5)t + m-1 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow mt^2 - mt + m = t^2 - 5t + 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$

$$f'(t) = \frac{(2t-5)(t^2-t+1) - (2t-1)(t^2-5t+1)}{(t^2-t+1)^2} = \frac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Bảng biến thiên:

t	-1		1		$+\infty$
$f'(t)$	0	-	0	+	
$f(t)$	$\frac{7}{3}$				$+\infty$

Để phương trình đã cho có nghiệm $x \in (3; 6)$ thì phương trình (*) có nghiệm $t > -1$.

$$\Leftrightarrow m \geq -3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m_0 = -3 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

Câu 52. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho phương trình $m \ln(x+1) - x - 2 = 0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3, 7; 3, 8)$.

B. $(3, 6; 3, 7)$.

C. $(3, 8; 3, 9)$.

D. $(3, 5; 3, 6)$.

Lời giải

Chọn A

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$ phương trình: $m \ln(x+1) - x - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$

Đặt $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}, x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$

Với yêu cầu của đề bài ta xét $f(x)$ trên 2 khoảng $(0; 2)$ và $(4; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) - (x+2) \frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$

Đặt $g(x) = \ln(x+1) - (x+2) \frac{1}{x+1}, x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} g(x) < g(2) = \ln 3 - \frac{4}{3} < 0, \forall x \in (0; 2) \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (0; 2) \\ g(x) > g(5) = \ln 5 - \frac{6}{5} > 0, \forall x \in (4; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (4; +\infty) \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		-		+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4}{\ln 3}$	$\frac{6}{\ln 5}$	-3

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình đề bài có 2 nghiệm phân biệt thỏa $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$

$$\Leftrightarrow m > \frac{6}{\ln 5} (\approx 3,728)$$

Câu 53. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

- A. Không tồn tại a . B. $a < -1$ hoặc $a = 4 - 2\sqrt{10}$.
C. $a < 1$. D. $a = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Khi đó phương trình } \log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3 x + a\sqrt{3\log_3 x} + a + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 2(3\log_3 x) + 3a\sqrt{3\log_3 x} + 3a + 3 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{3\log_3 x} = t, t \geq 0 \text{ thì (1) trở thành: } 2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0.$$

Do đó, yêu cầu bài toán trở thành: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc nửa khoảng $[0; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } 2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow 3a = \frac{-2t^2 - 3}{t + 1}, t \geq 0.$$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{-2t^2 - 3}{t + 1}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Ta có:

$$+) f'(t) = \frac{-2t^2 - 4t + 3}{(t + 1)^2}. f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \\ t = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$$

$$+) \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty.$$

+) Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	-3	$4 - 2\sqrt{10}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất khi

$$\begin{cases} 3a < -3 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{cases}.$$

Đáp số: $a < -1$ hoặc $a = -4 + 2\sqrt{10}$.

có 2 nghiệm dương phân biệt hay
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m^2 + 500 > 0 \\ 3m^2 - 500 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5\sqrt{10} < m < 5\sqrt{10} \\ m < \frac{-10\sqrt{15}}{3} \vee m > \frac{10\sqrt{15}}{3} \\ m > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{15}}{3} < m < 5\sqrt{10}.$$

Câu 55. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Tìm điều kiện của tham số a để phương trình sau có nghiệm:
 $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (a+2) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2a+1 = 0$. Hãy chọn đáp án đúng nhất?

A. $4 \leq a \leq \frac{64}{7}$. **B.** $2 \leq a \leq \frac{64}{9}$. **C.** $3 \leq a \leq \frac{50}{3}$. **D.** $1 \leq a \leq \frac{50}{3}$.

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ vì $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 3 \leq t \leq 9$. Khi đó bài toán trở thành tìm điều kiện của tham số a để phương trình $t^2 - (a+2)t + 2a+1 = 0 (*)$ có nghiệm trên đoạn $[3; 9]$.

Vì $t = 2$ không phải nghiệm của phương trình nên $(*) \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} = a$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{t - 2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \notin [3; 9] \\ t = 3 \in [3; 9] \end{cases}$$

Ta có $f(3)=4; f(9)=\frac{64}{7} \Rightarrow 4 \leq a \leq \frac{64}{7}$ thì phương trình bài ra có nghiệm.

Câu 56. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Điều kiện của m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \leq 2020 \\ x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 \end{cases}$$

A. $m \geq -3$. **B.** $-2 \leq m \leq 1$. **C.** $-1 \leq m \leq 2$. **D.** $m \geq -2$.

$$7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \leq 2020 \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1010 \cdot (2x + \sqrt{x+1}) \leq 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1010 \cdot (2 + \sqrt{x+1}) \quad (*)$$
$$(*) \Leftrightarrow f(2x + \sqrt{x+1}) \leq f(2 + \sqrt{x+1})$$

Trang 26 Fanpage **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

$$x \in [-1; 1]: x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}.$$

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow \exists x \in [-1; 1]: m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad (**)$$

x	-1	$2 - \sqrt{3}$	1
$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}$	+	0	-
$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$	-2	$2 - 2\sqrt{3}$	-2

Từ bảng biến thiên ta có, $(**) \Leftrightarrow m \geq -2$.

Câu 57. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho phương trình $16^{x^2} - 2 \cdot 4^{x^2+1} + 10 = m$ (m là tham số). Số giá trị nguyên của tham $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt là

A. 7.

B. 9.

C. 8.
Lời giải

D. 1.

Chọn C

Đặt $t = 4^{x^2}$, $t \geq 1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t + 10 = m$ (1)

Nghiệm $t = 1$ cho một nghiệm $x = 0$.

Mỗi nghiệm $t > 1$ cho hai nghiệm x đối nhau.

Do vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng một nghiệm $t > 1$, nghiệm còn lại (nếu có) phải nhỏ hơn 1.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t + 10$.

Bảng biến thiên

t	1	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	3	-6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 1 khi $\begin{cases} m > 3 \\ m = -6 \end{cases}$.

Suy ra số giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ là 8.

Câu 58. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2^x - 2x)\sqrt{(3)^{2^x} - m} = 0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để tập hợp S có hai phần tử?

A. 2094.

B. 2092.

C. 2093.
Lời giải.

D. 2095.

Chọn A

Gọi D là tập xác định của phương trình đã cho.

Nếu $m \leq 1$ thì $3^{2^x} - m > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $D = \mathbb{R}$.

Nếu $m > 1$ thì $D = [\log_2(\log_3 m); +\infty)$.

$$(2^x - 2x)\sqrt{(3)^{2^x} - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2x = 0 & (1) \\ (3)^{2^x} - m = 0 & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x - 2x$ có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2}$ do đó phương trình

$f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác $f(1) = 0$; $f(2) = 0$ nên $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Lại có với $m > 1$, $(2) \Leftrightarrow x = \log_2(\log_3 m)$.

Nếu $m \leq 1$ thì $S = \{1, 2\}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Nếu $m > 1$ thì S có hai phần tử khi và chỉ khi $1 \leq \log_2(\log_3 m) < 2 \Leftrightarrow 9 \leq m < 81$.

Vậy S có hai phần tử khi và chỉ khi $\begin{cases} m \leq 1 \\ 9 \leq m < 81 \end{cases} (*)$. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ thỏa mãn $(*)$ là $1 + 2020 + 1 + 81 - 9 = 2094$.

Câu 59. (Sở Ninh Bình) Cho hai số thực bất kỳ $a > 1$, $b > 1$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình

$a^x b^{x^2-1} = 1$. Trong trường hợp biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 6x_1 - 6x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $a = b^{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $a = b^{\sqrt[3]{6}}$. **C.** $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$. **D.** $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^x b^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^x b^{x^2}}{b} = 1 \Leftrightarrow a^x b^{x^2} = b \Leftrightarrow \ln(a^x b^{x^2}) = \ln b$

$\Leftrightarrow \ln a^x + \ln b^{x^2} = \ln b \Leftrightarrow x^2 \ln b + x \ln a - \ln b = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} \ln b \neq 0 \forall b > 1 \\ \Delta = \ln^2 a + 4 \ln^2 b \geq 0 \forall a > 1, b > 1 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{\ln a}{\ln b} = -\log_b a \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{\ln b}{\ln b} = -1 \end{cases}$.

Khi đó ta có $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 6x_1 - 6x_2 = \left(\frac{-1}{-\log_b a}\right)^2 + 6 \log_b a = \frac{1}{\log_b^2 a} + 6 \log_b a$.

Do $a > 1, b > 1 \Rightarrow \log_b a > \log_b 1 = 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$S = \frac{1}{\log_b^2 a} + 6 \log_b a = \frac{1}{\log_b^2 a} + 3 \log_b a + 3 \log_b a \geq 3 \sqrt{\frac{1}{\log_b^2 a} \cdot 3 \log_b a \cdot 3 \log_b a} = 3\sqrt[3]{9}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\log_b^2 a} = 3 \log_b a \Leftrightarrow \log_b^3 a = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_b a = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$.

Vậy khẳng định đúng là $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$.

Câu 60. (Sở Ninh Bình) Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m-1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(4; \frac{16}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 2$.

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, với $x \in (2;4) \Rightarrow t \in (-1; +\infty)$.

Phương trình đã cho trở thành: $(m-1)t^2 - (m-5)t + m-1 = 0$

$$t^2 - 5t + 1 = mt^2 - mt + m \Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 = m(t^2 - t + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} = m \quad (1), \quad (t^2 - t + 1 \neq 0, \forall t)$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t > -1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}, (t > -1)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1) = -3 \\ x=-1 \Rightarrow f(-1) = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(t)$:

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$		0	-	0	+
$f(t)$		$\frac{7}{3}$		-3	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t > -1$ khi và chỉ khi $-3 \leq m < \frac{7}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tham số thực m để phương trình đã cho có nghiệm là $m_0 = -3 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

Câu 61. (Sở Bắc Ninh - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình $16^x - 6.8^x + 8.4^x - m.2^{x+1} - m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Khi đó S có

- A.** 4 tập con. **B.** Vô số tập con. **C.** 8 tập con. **D.** 16 tập con.

Lời giải

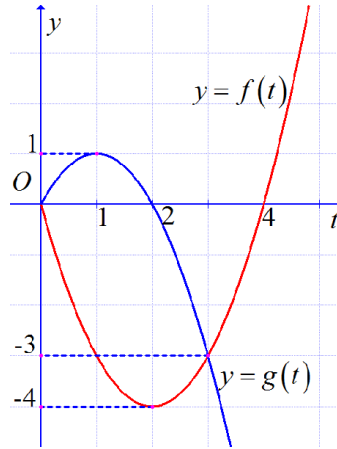
Chọn D

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^4 - 6t^3 + 8t^2 - 2mt - m^2 = 0(*)$, $t > 0$.

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có đúng hai nghiệm dương phân biệt.

$$(*) \Leftrightarrow (t^4 - 6t^3 + 9t^2) - (t^2 + 2mt + m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = t^2 - 4t & (1) \\ m = -t^2 + 2t & (2) \end{cases}$$

Xét hai hàm số $f(t) = t^2 - 4t$; $g(t) = -t^2 + 2t$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có đồ thị như sau



Dựa vào đồ thị hai hàm số này ta suy ra phương trình (*) có đúng hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $m \in \{0; 1; -3; -4\}$ hay S có 4 phần tử.

Vậy S có $2^4 = 16$ tập con.

Câu 62. (Sở Yên Bái - 2020) Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị biểu thức $|x_1 - x_2|$ là

A. 4.

B. 3.

C. 8.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_2^2 x - m \log_2 x - 2 \log_2 x + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - m)(\log_2 x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = m \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^m \\ x = 4 \end{cases}$$

Theo giả thiết $x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow 2^m + 4 = 6 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 2$.

Câu 63. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

A. $2 \leq m \leq 6$

B. $3 \leq m \leq 6$

C. $6 \leq m \leq 9$

D. $2 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_2 x$. Khi $x \in [1; 8]$ thì $t \in [0; 3]$. Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $t^2 - 2t + 3 = m$ có nghiệm $t \in [0; 3]$. Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ với $t \in [0; 3]$, ta có:

$$f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1; \min_{t \in [0; 3]} f(t) = f(1) = 2; \max_{t \in [0; 3]} f(t) = f(3) = 6.$$

Đồ thị hàm số $y = f(t) = t^2 - 2t + 3$ và đường thẳng $y = m$ sẽ cắt nhau tại điểm có hoành độ $t \in [0; 3]$ nếu như $\min_{t \in [0; 3]} f(t) \leq m \leq \max_{t \in [0; 3]} f(t) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6$.

Câu 64. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.

A. $m = \frac{9}{2}$.

B. $m = 3$.

C. Không tồn tại.

D. $m = \frac{61}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_3 x$.Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0 (*)$.Ứng với mỗi nghiệm t của phương trình $(*)$ có một nghiệm x .Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4(2m - 7) > 0 \Leftrightarrow 9 - 8m + 28 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{37}{8}.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm phương trình $(*)$.Theo định lý Viét ta có: $t_1 + t_2 = 3 \Rightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3 (x_1 x_2) = 3 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 27$.Theo đề bài $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72 \Leftrightarrow x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 72 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$.

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 x_2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow t_1 t_2 = 2.$$

Theo định lý Viét ta có $t_1 t_2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2m - 7 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$ (thỏa mãn).Kết luận: $m = \frac{9}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 65. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6 (2020x + m) = \log_4 (1010x)$ có nghiệm là

A. 2022.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta đặt $\log_6 (2020x + m) = \log_4 (1010x) = t$. Khi đó $2020x + m = 6^t$ và $1010x = 4^t$. Ta suy ra $2 \cdot 4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = 6^t - 2 \cdot 4^t$ Đặt $f(t) = -2 \cdot 4^t + 6^t$

$$f'(t) = 6^t \ln 6 - 2 \cdot 4^t \ln 4$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2 \ln 4}{\ln 6} = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} (\log_6 16).$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)$	$+\infty$

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}} (\log_6 16)\right) \approx -2,01$.

Hơn nữa, $\begin{cases} m < 2020 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} -2 \leq m \leq 2019 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy ta có 2022 giá trị m thỏa mãn.

Câu 66. (Hệ Lục 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho phương trình $(me^x - 10x - m)[\log(mx) - 2\log(x+1)] = 0$. (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số.

B. 10.

C. 11.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$(me^x - 10x - m)[\log(mx) - 2\log(x+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx > 0 & (1) \\ x+1 > 0 & (2) \quad (*) \\ me^x - 10x - m = 0 & (3) \\ mx = (x+1)^2 & (4) \end{cases}$$

*) $m = 0$ thì pt vô nghiệm.

$$*) m > 0 \text{ thì hệ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m = \frac{10x}{e^x - 1} \\ m = \frac{(x+1)^2}{x} \end{cases} \quad . \text{ (Vì } e^x - 1 > e^0 - 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0)$$

$$+ \text{ Xét } f(x) = \frac{10x}{e^x - 1} \text{ và } g(x) = \frac{(x+1)^2}{x} = x + \frac{1}{x} + 2.$$

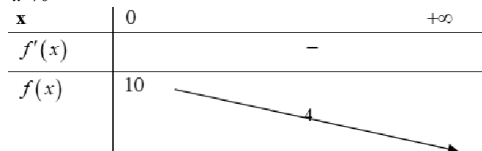
$$+ f'(x) = \frac{10(e^x - 1) - e^x \cdot 10x}{(e^x - 1)^2} = \frac{10e^x(1-x) - 10}{(e^x - 1)^2}.$$

$$\text{Xét } u(x) = 10e^x(1-x) - 10 \Rightarrow u'(x) = -10e^x + 10e^x(1-x) = -10xe^x < 0 \forall x \in (0; +\infty)$$

Suy ra: Hàm số $u(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow u(x) < u(0) = 0$.

$\Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 10, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



$$+ g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

Suy ra phương trình có ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 4 < m < 10$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{5; 6; 7; 8; 9\}$

$$*) m < 0 \text{ thì hệ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ m = f(x) \\ m = g(x) \end{cases}.$$

Tương tự ta có $f'(x) > 0 \forall x \in (-1; 0)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-10}{e^{-1}-1} = \frac{-10e}{1-e} = \frac{10e}{e-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 10$

x	-1	0
$f'(x)$		+
$f(x)$	10	$\frac{10e}{e-1}$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

x	-1	0
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$-\infty$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm thực phân biệt, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy có 5 giá trị m .

Câu 67. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho phương trình $4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{2x-x^2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } 4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{2x-x^2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] - 2^{1-(x-1)^2} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{1-2|x-m|}}{\log_2(2|x-m| + 2)} = \frac{2^{1-(x-1)^2}}{\log_2[(x-1)^2 + 2]}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2^{1-t}}{\log_2(t+2)}$ có $f'(t) = \frac{-2^{1-t} \cdot \ln(t+2) - \frac{2^{1-t}}{(t+2)\ln 2}}{[\log_2(t+2)]^2} < 0, \forall t > -2$.

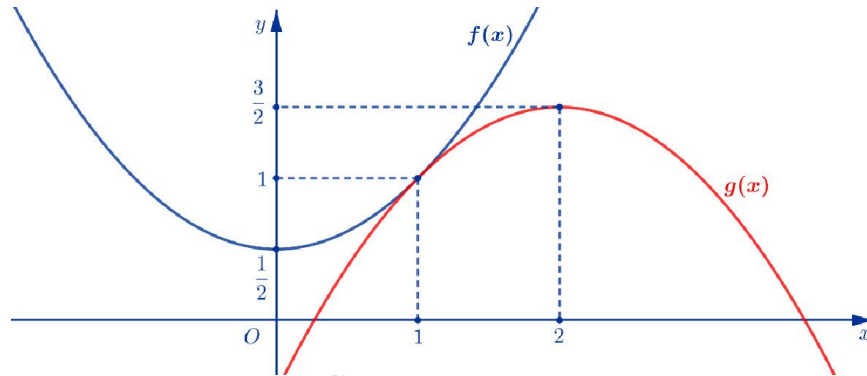
Phương trình đã cho $\Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1 + 2m)(x^2 + 1 - 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 = 0 \\ x^2 + 1 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 = m & (1) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = m & (2) \end{cases}$$

Khi đó ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) và (2) có tổng cộng 3 nghiệm thực phân biệt.

Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ và $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ (tham khảo hình vẽ).



Đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Dựa vào đồ thị ta có $m = \frac{1}{2}, m = 1, m = \frac{3}{2}$ thì phương trình đã cho có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy tổng các giá trị thực của m thỏa ycbt là $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$.

Câu 68. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$.

B. $[2;4]$.

C. $(2;4)$.

D. $(3;4)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } 6^x + (3-m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{1 + 2^x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{1 + 2^x}$ liên tục trên $(0;1)$.

Ta có $f'(x) = \frac{12^x \ln 3 + 6^x \ln 6 + 3 \cdot 2^x \ln 2}{(1 + 2^x)^2} > 0, \forall x \in (0;1)$. Suy ra hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{1 + 2^x}$ đồng biến

trên $(0;1)$.

Do đó phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

$f(0) < m < f(1)$, tức là $2 < m < 4$.

Câu 69. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-2019; 2020)$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 4 + 9 \cdot 3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2} \\ 2x-1 = \sqrt{2y-2x+m} \end{cases} ?$$

A. 2017.

B. 2021.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $4 + 9 \cdot 3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2}$.

Đặt $t = x^2 - 2y$, phương trình trở thành: $4 + 9 \cdot 3^t = (4 + 9^t) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow 4 \cdot 7^t + 9 \cdot 3^t \cdot 7^t = 4 \cdot 49 + 49 \cdot 3^{2t}$
 $\Leftrightarrow 4(7^t - 7^2) = 3^t(3^t \cdot 7^2 - 7^t \cdot 3^2) \quad (*)$.

Giả sử $3^t \cdot 7^2 - 7^t \cdot 3^2 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^t < \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Leftrightarrow t > 2$.

Nếu $t > 2 \Rightarrow \begin{cases} VT(*) > 0 \\ VP(*) < 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Nếu $t < 2 \Rightarrow \begin{cases} VT(*) < 0 \\ VP(*) > 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Nếu $t = 2 \Rightarrow VT(*) = VP(*) \Rightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $t = 2 \Rightarrow x^2 - 2y = 2 \Rightarrow 2y = x^2 - 2$

Ta được: $2x - 1 = \sqrt{x^2 - 2x - 2 + m} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x + 3 = m \quad (1) \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$, với $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow f'(x) = 6x - 2 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$, suy ra hàm số

$f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} \Rightarrow (1)$ có nghiệm $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi

$m \geq \frac{11}{4} \Rightarrow m \in \left[\frac{11}{4}; 2020\right)$. Vì m nguyên nên $m \in \{3; 4; 5; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2017 giá trị của m .

Câu 70. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \tan x$ thuộc đoạn $[0; 50\pi]$

A. $\frac{2671\pi}{2}$.

B. $\frac{1853\pi}{2}$.

C. $\frac{2475\pi}{2}$.

D. $\frac{2653\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Nhận thấy $e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \tan x > 0$.

Ta có: $e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \tan x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}}{e^{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}}{\sin x} = \frac{e^{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}}{\cos x} \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{t}, t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ có:

$$f'(t) = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\sqrt{2}t-2)}{2t^2} < 0, \forall t \in (-1;0) \cup (0;1)$$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Bảng biến thiên:

t	-1	0	1
$f'(t)$	-		-
$f(t)$	$f(-1)$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $f(1)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $f(-1) = -e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < 0$, $f(1) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} > 0$.

Do đó từ (*) ta có: $f(\sin x) = f(\cos x) \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Theo giả thiết $x \in [0; 50\pi] \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 50\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{199}{4}$ (**)

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên từ (**) suy ra $k \in \{0; 1; \dots; 49\}$, có 50 giá trị k thỏa mãn.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên đoạn $[0; 50\pi]$ là:

$$S = \sum_{k=0}^{49} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) = \frac{2475\pi}{2}.$$

Câu 71. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho phương trình $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$ (với m là tham số thực). Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$ là

A. 3

B. 5

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2(x) - (m+1)\log_3 x + 3m - 6 = 0, (1)$

Đặt $t = \log_3 x$, khi $x \in [1; 81]$ thì $t \in [0; 4]$.

Khi đó ta có phương trình $t^2 - (m+1)t + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = m - 2 \end{cases}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81] \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân

biệt $t \in [0; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 3 \\ 0 \leq m - 2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases}$.

Suy ra có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$.

Chọn đáp án **C.**

Câu 72. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $5x + y = 4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$ có nghiệm là

A. 10.

B. 5.

C. 9.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 2y + m) + x^2 + 2y + m = \log_3 3(x + y) + 3(x + y) \quad (1)$$

Vì $x, y > 0$ nên $x + y > 0$. Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow x^2 + 2y + m = 3x + 3y \Leftrightarrow x^2 - 3x - y + m = 0 \quad (*)$$

Kết hợp với điều kiện $5x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 5x$. Vì $x, y > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{4}{5}$.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - 2x + 4, \forall x \in \left(0; \frac{4}{5}\right).$$

Hàm số $y = -x^2 - 2x + 4$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{4}{5}\right)$ (do $-1 < 0$) nên $\frac{44}{25} < -x^2 - 2x + 4 < 4$.

Do vậy $m \in \{2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa ycbt là 5.

Câu 73. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2 (m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm là $m \geq -\frac{a}{b}$ với a, b là hai số nguyên dương và $b < 7$. Hỏi

$a + b + b^2$ bằng bao nhiêu?

A. 31.

B. 32.

C. 21.

D. 23.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2 (m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2^x \geq 0 \\ m + \sqrt{m + 2^x} = 2^{2x} \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow (m + 2^x) + \sqrt{m + 2^x} = (2^x)^2 + 2^x.$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ ($t \geq 0$). Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ với mọi $t \geq 0$, suy ra hàm số luôn đồng biến với mọi $t \geq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{m + 2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{m + 2^x} = 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 = 2^x + m \quad (**).$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình (**) trở thành $t^2 - t = m$ (***)

Xét hàm $g(t) = t^2 - t$ ($t > 0$), ta có $g'(t) = 2t - 1 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'		0	+
g		$-\frac{1}{4}$	

Vậy để (***) có nghiệm $t > 0$ thì $m \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b + b^2 = 21$.

Câu 74. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ trong đó x, y là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \geq 1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử?

A. 1.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2019.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+2y+m \geq x^2+y^2+1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq m+1 \text{ Để bất phương trình có 5 phần tử thì } \sqrt{m+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow m < 1$$

Vậy có 2021 số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử.

Câu 75. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2^2(4x) - m \log_{\sqrt{2}} x - 2m - 4 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 8]$?

A. 1.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x > 0$

$$\log_2^2(4x) - m \log_{\sqrt{2}} x - 2m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 - 2m \log_2 x - 2m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 4 \log_2 x = 2m(\log_2 x + 1) \quad (1)$$

$$\log_2 x = t; x \in [1; 8] \Rightarrow t \in [0; 3]$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 4t}{t+1} = 2m$$

$$f(t) = \frac{t^2 + 4t}{t+1}; t \in [0; 3]$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [0; 3]$$

$$\Rightarrow f(0) \leq 2m \leq f(3)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{21}{8}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0, 1, 2\}$$

Câu 76. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình (ẩn x): $3^{\log_2 x^2} - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 x_2 > 2$.

A. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$.

D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\text{Ta có: } 3^{\log_2 x^2} - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (3^{\log_2 x})^2 - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$$

$$\text{Đặt: } t = 3^{\log_2 x} \quad (t > 0)$$

$$\Rightarrow \log_2 x = \log_3 t$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{\log_3 t}$$

$$\text{Khi đó: } t^2 - 2(m+3)t + m^2 + 3 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $t_1; t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (m^2+3) > 0 \\ 2(m+3) > 0 \\ m^2+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+3) \\ t_1 \cdot t_2 = m^2 + 3 \end{cases}$

Ta có: $x_1 \cdot x_2 > 2$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_3 t_1} \cdot 2^{\log_3 t_2} > 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_3(t_1 \cdot t_2)} > 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_3(m^2+3)} > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(m^2+3) > 1$$

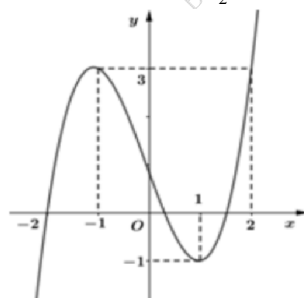
$$\Leftrightarrow m^2+3 > 3$$

$$\Leftrightarrow m^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 0$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 77. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ sao cho phương trình $\log_2^3(f(x)+1) - \log_{\sqrt{2}}^2(f(x)+1) + (2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1} + 2m = 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$?



A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A

Với $x \in (-1; 1) \Rightarrow -1 < f(x) < 3 \Leftrightarrow 0 < f(x)+1 < 4$.

Đặt $t = \log_2(f(x)+1) \Rightarrow t \in (-\infty; 2), \forall x \in (-1; 1)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^3 - 4t^2 - (m-4)t + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2 - 2t - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin (-\infty; 2) \\ t^2 - 2t - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - 2t = m \quad (*)$$

Để phương trình đã cho có $x \in (-1; 1) \Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm $t \in (-\infty; 2)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ trên $(-\infty; 2)$ có $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in (-\infty; 2)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^2 - 2t$

t	$-\infty$	1	2	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$			0

-1

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có nghiệm $t \in (-\infty; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq -1$.

Mà $\begin{cases} m \in [-5; 5] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

PHẦN 4. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

Câu 78. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-1; 1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2)$ có nghiệm nguyên $(x; y)$ duy nhất?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ x + y - 1 > 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Vì x, y có vai trò như nhau nên nếu phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là một nghiệm của phương trình.

*) **Điều kiện cần:** Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_0 = y_0$.

Thay vào phương trình ta được $\log_{m^2+1}(2x_0^2) = \log_2(4x_0 - 2)$

Vì $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x_0 - 2 > 1$. Lại có $2x_0^2 \geq 4x_0 - 2 \Rightarrow \log_2(4x_0 - 2) = \log_{m^2+1}(2x_0^2) \geq \log_{m^2+1}(4x_0 - 2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_{4x_0-2} 2} \geq \frac{1}{\log_{4x_0-2}(m^2+1)} \Rightarrow \log_{4x_0-2}(m^2+1) \geq \log_{4x_0-2} 2$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow m^2 \geq 1 \text{ mà } m \in [-1; 1] \Rightarrow m = \pm 1.$$

*) **Điều kiện đủ:** Với $m = \pm 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2y - 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

Vậy có hai giá trị m cần tìm là $m = \pm 1$.

Câu 79. (Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020) Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{11}(3x + 4y) = \log_4(x^2 + y^2)$?

A. 3

B. 2

C. 1

D. vô số.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \log_{11}(3x + 4y) = \log_4(x^2 + y^2) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 11^t \\ x^2 + y^2 = 4^t \end{cases} (*).$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta: 3x + 4y = 11^t$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4^t$ có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(O, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{11^t}{5} \leq 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{11}{2}\right)^t \leq 5 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{11}{2}} 5.$$

Do $x^2 + y^2 = 4^t$ nên $|y| \leq 2^t \leq 2^{\frac{\log_{11} 5}{2}} \approx 1.9239767$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1; 0; 1\}$.

Thử lại:

- Với $y = -1$, hệ (*) trở thành $\begin{cases} 3x - 4 = 11^t \\ x^2 + 1 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{11^t + 4}{3}\right)^2 + 1 = 4^t \Leftrightarrow 121^t + 8.11^t + 25 = 9.4^t \quad (**)$

Nếu $t < 0$ thì $4^t < 1 \Rightarrow 4^t < \left(\frac{11^t + 4}{3}\right)^2 + 1$.

Nếu $t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 121^t \geq 4^t \\ 8.11^t \geq 8.4^t \end{cases} \Rightarrow 121^t - 4^t + 8(11^t - 4^t) + 25 > 0$.

Vậy (**) vô nghiệm.

- Với $y = 0$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases} 3x = 11^t \\ x^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \frac{121^t}{9} = 4^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{11}{2}} 3 \Rightarrow x = \frac{11^{\frac{\log_{11} 3}{2}}}{3}$.

- Với $y = 1$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases} 3x + 4 = 11^t \\ x^2 + 1 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{11^t - 4}{3}\right)^2 + 1 = 4^t \Leftrightarrow 121^t - 8.11^t + 25 = 9.4^t$.

Xét hàm số $f(t) = 121^t - 8.11^t + 25 - 9.4^t$, liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ có $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$ nên phương trình

$f(t) = 0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Khi đó hiển nhiên sẽ tồn tại x thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y = 0, y = 1$.

Câu 80. (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020) Có bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{|x^2 - 2x - 3| - \log_3 5} = 5^{-(y+4)}$ và $4|y| - |y - 1| + (y + 3)^2 \leq 8$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{|x^2 - 2x - 3| - \log_3 5} = 5^{-(y+4)} \Leftrightarrow 5^{-(y+3)} = 3^{|x^2 - 2x - 3|} \quad (*)$

Vì $3^{|x^2 - 2x - 3|} \geq 3^0 \Rightarrow 5^{-(y+3)} \geq 1 \Rightarrow y + 3 \leq 0 \Rightarrow y \leq -3$.

Với $y \leq -3$ ta có: $4|y| - |y - 1| + (y + 3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow -4y + (y - 1) + (y + 3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0$

$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0$. Kết hợp với $y \leq -3$ suy ra $y = -3$.

Thế $y = -3$ vào (*) ta được: $3^{|x^2 - 2x - 3|} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Vậy các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn là $(-1; -3); (3; -3)$.

Câu 81. (Chuyên Bến Tre - 2020) Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $4^{x-1} + 2^x \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x_0 > 7$.

B. $-2 < x_0 < 4$.

C. $4 < x_0 < 7$.

D. $-5 < x_0 < -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 4^{x-1} + 2^x \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 &= 2^x + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1) \\ \Leftrightarrow 4^x - 4 \cdot 2^x + 4 \cdot (2^x - 2) \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1) + 4 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 2)^2 + 4(2^x - 2) \sin(2^{x-1} + y - 1) + 4[\sin^2(2^{x-1} + y - 1) + \cos^2(2^{x-1} + y - 1)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 2)^2 + 2 \cdot (2^x - 2) \cdot 2 \sin(2^{x-1} + y - 1) + [2 \sin^2(2^{x-1} + y - 1)]^2 + 4 \cos^2(2^{x-1} + y - 1) &= 0. \\ \Leftrightarrow [(2^x - 2) + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)]^2 + 4 \cos^2(2^{x-1} + y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2 + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1) = 0 \\ \cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0 \Rightarrow \sin^2(2^{x-1} + y - 1) = \pm 1.$$

$$\square \sin^2(2^{x-1} + y - 1) = 1 \Rightarrow 2^x = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\square \sin^2(2^{x-1} + y - 1) = -1 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = x_0 = 2 \in (-2; 4).$$

Câu 82. (Chuyên Lào Cai - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 4000$ và

$$5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4?$$

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \log_5(x+1) = t \Rightarrow x = 5^t - 1.$$

Phương trình trở thành:

$$5(5^{2y} + 2y) = 5^t - 1 + 5t - 4 \Leftrightarrow 5^{2y} + 2y = 5^{t-1} + (t-1).$$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\text{Vậy để } f(2y) = f(t-1) \Leftrightarrow 2y = t-1 \Leftrightarrow 2y+1 = t = \log_5(x+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2y+1 \leq \log_5 4001 \Rightarrow 0 \leq 2y+1 \leq 5 \Rightarrow y = \{0; 1; 2\}$$

Với mỗi nghiệm y ta tìm được một nghiệm x tương ứng.

Câu 83. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và

$$1 \leq x, y \leq 2020 \text{ thỏa mãn } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

A. 2017.

B. 4034.

C. 2.

D. 2017.2020.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết kết hợp ĐKXĐ của bất phương trình ta có: $1 \leq y \leq 2020; 4 \leq x \leq 2020; x, y \in \mathbb{Z}, (1).$

$$\text{Ta có: } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) + (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0 \quad (*)$$

$$\text{Xét } f(x) = \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) = \log_2 \left(2 + \frac{7}{x-3} \right) > 0, \forall x \in [4; 2020] \quad (2).$$

+ Với $y = 1$ thay vào $(*)$ ta được:

$$3(x+4) \log_3 \left(\frac{2}{3} \right) - (x-3) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x \in [4; 2020] \text{ do (1) và (2)).}$$

Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.

+ Với $y = 2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x \in [4; 2020]$.

Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.

+ Với $3 \leq y \leq 2020 \Rightarrow y - 2 > 0$.

$$\text{Xét } g(y) = \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) = \log_3 \left(\frac{y+y}{y+2} \right) > \log_3 \left(\frac{y+2}{y+2} \right) = 0, \forall y \geq 3 \quad (3).$$

Suy ra (*) vô nghiệm (Do (2) và (3)).

Vậy có 4034 bộ $(x; y)$.

Câu 84. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho x là số thực dương và y là số thực thỏa mãn

$$2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right]. \text{ Giá trị của biểu thức } P = x^2 + y^2 - xy + 2020 \text{ bằng}$$

A. 2022.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2019.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2, \forall x > 0 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} \geq 4.$$

Đặt $\sqrt{y+1} = t, t \geq 0$ thu được

$$14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 - (t^2-3)t = -t^3 + 3t + 14 = 16 - (t-1)^2(t+2) \leq 16, \forall t \geq 0.$$

$$\text{Dẫn đến } \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right] \leq \log_2 16 = 4.$$

Như vậy hai vế bằng nhau khi dấu đẳng thức xảy ra tức là

$$\begin{cases} t = 1 \\ x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1; y = 0 \Rightarrow P = x^2 + y^2 - xy + 2020 = 2021. \\ x > 0 \end{cases}$$

Câu 85. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho phương trình $\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ và $0 < x < 2020$; $y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow \log_3 3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 \quad (1).$$

Đặt $\log_3(x^2 - 2x + 2) = z \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^z$ thì (1) trở thành:

$$\Leftrightarrow 3^z + z = 3^{y^2} + y^2 \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow f(z) = f(y^2) \Leftrightarrow z = y^2.$$

$$\text{Thay trở lại cách đặt ta có: } \log_3(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^{y^2}.$$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 2x + 2, x \in (0; 2020) \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	2020
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	2	1	4076362

Suy ra:

$$\Leftrightarrow 1 \leq g(x) < 4076362 \Leftrightarrow 1 \leq 3^{y^2} < 4076362 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 < \log_3 4076362.$$

$$\text{Do } y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq y < \sqrt{\log_3 4076362} \approx 3,7 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 3^4 \\ g(x) = 3^9 \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta thấy mỗi phương trình trên có một nghiệm $0 < x < 2020$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 86. (Sở Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020.

B. 9.

C. 2019.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(x + 2^{y-1}) = t$. Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^t$, $x = 2^t - 2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y - t = 2(2^t - 2^{y-1}) - y \Leftrightarrow 2.2^y + y = 2.2^t + t$.

Xét hàm số $g(x) = 2.2^x + x$ có $g'(x) = 2.2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x$ nên hàm số $y = g(x)$ luôn đồng biến.

Khi đó $2.2^y + y = 2.2^t + t \Leftrightarrow y = t$ hay $y = \log_2(x + 2^{y-1})$.

Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 2^{y-1} = 2^{y-1}$.

Mà $2 \leq x \leq 2021$ nên $2 \leq 2^{y-1} \leq 2021 \Leftrightarrow 1 \leq y-1 \leq \log_2 2021$ hay $2 \leq y \leq (\log_2 2021) + 1$.

Lại có y là số nguyên nên $y \in \{2, 3, \dots, 11\}$ tức 10 giá trị thỏa mãn.

Xét biểu thức $x = 2^{y-1}$, mỗi giá trị nguyên của y cho tương ứng 1 giá trị nguyên của x nên có 10 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 87. (Sở Bắc Ninh - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1)3^y - x^3$, với $x < 2020$?

A. 13.

B. 15.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1)3^y - x^3 \Leftrightarrow 3^y(3^x - x - 1) = x^2(3^x - x - 1) \Leftrightarrow (3^x - x - 1)(3^y - x^2) = 0$$

Ta thấy $3^x - x - 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow (3^x - x - 1)(3^y - x^2) = 0 \Leftrightarrow 3^y = x^2 \Leftrightarrow y = 2 \log_3 x \Rightarrow x = 3^k$.

Vì $x < 2020 \Rightarrow 3^k < 2020 \Rightarrow 3^k \leq 3^6 \Rightarrow k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 88. (Sở Bình Phước - 2020) Biết a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a.10^{3z} + b.10^{2z}$, đồng thời x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z+1$. Giá trị của $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ thuộc khoảng

A. (1; 2).

B. (2; 3).

C. (3; 4).

D. (4; 5).

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10^{z+1} = 10.10^z \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 10(x+y)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } x^3 + y^3 &= a.10^{3z} + b.10^{2z} \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = a.(10^z)^3 + b.(10^z)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = a.(x+y)^3 + b.(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 = a.(x+y)^2 + b.(x+y) \\ &\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 = a.(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{b}{10}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = \left(a + \frac{b}{10}\right)(x^2 + y^2) + 2a.xy \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta được } \begin{cases} a + \frac{b}{10} = 1 \\ 2a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 15 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4 + \frac{1}{225} = 4,008 \in (4; 5).$$

Câu 89. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Biết rằng trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq 2 + \log_2(x+y-1)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $3x + 4y - m = 0$. Khi đó hãy tính tổng tất cả các giá trị của m tìm được?

A. 20.

B. 14.

C. 46.

D. 28.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_2(x^2 + y^2 + 2) &\leq 2 + \log_2(x+y-1) \Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq \log_2 4 + \log_2(x+y-1) \\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq \log_2 4(x+y-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \leq 4(x+y-1) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2 \end{aligned}$$

Khi đó tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn đề bài nằm trong hình tròn tâm $I(2; 2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ và nằm trên đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - m = 0$.

Để tồn tại duy nhất một cặp $(x; y)$ thì đường tròn (C) phải tiếp xúc với đường thẳng Δ .

$$\text{Điều kiện tiếp xúc: } d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3.2 + 4.2 - m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |14 - m| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 14 - m = 5\sqrt{2} \\ 14 - m = -5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 14 - 5\sqrt{2} \\ m = 14 + 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của m là 28.

Câu 90. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.

A. 2020

B. 9.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta

có:

$$3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3 \Leftrightarrow 3^x + 3(x-2) = 9y + 3\log_3 y \Leftrightarrow 3^x + 3(x-2) = 3^{2+\log_3 y} + 3\log_3 y (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = 3^t + 3(t-2)$.

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(2 + \log_3 y) \Leftrightarrow x = 2 + \log_3 y \Leftrightarrow y = 3^{x-2}$.

Do $0 < y < 2020$ và x, y nguyên nên: $1 \leq 3^{x-2} < 2020 \Leftrightarrow 2 \leq x < 2 + \log_3 2020 \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Ứng với mỗi giá trị x có một giá trị của y nên có 7 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 91. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương

x, y, z thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $-\frac{25}{2}$. B. $-\frac{31}{2}$. C. $\frac{31}{2}$. D. $\frac{29}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10^{z+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ (x+y)^2 - 2xy = 10 \cdot 10^z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ 10^{2z} - 2xy = 10 \cdot 10^z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ xy = \frac{10^{2z} - 10 \cdot 10^z}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 10^{3z} - 3 \cdot \left(\frac{10^{2z} - 10 \cdot 10^z}{2} \right) \cdot 10^z \\ &= \frac{1}{2} (2 \cdot 10^{3z} - 3 \cdot 10^{3z} + 30 \cdot 10^{2z}) = \frac{1}{2} (-10^{3z} + 30 \cdot 10^{2z}) = -\frac{1}{2} \cdot 10^{3z} + 15 \cdot 10^{2z}. \end{aligned}$$

Lại có $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 15 \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{29}{2}.$$

Câu 92. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu số hữu tỉ a thuộc đoạn $[-1; 1]$ sao cho tồn tại số thực b thỏa mãn

$$\log_2(1 - a^2 - b^2 + 2b) = \frac{2^a}{4^a + 1} + \frac{4^a}{2^a + 1} + \frac{1}{2^a + 4^a} - \frac{1}{2}.$$

A. 0. B. 3. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \frac{2^x}{4^x + 1} + \frac{8^x + 1}{2^x(1 + 2^x)} - \frac{1}{2} = \frac{2^x}{4^x + 1} + \frac{4^x - 2^x + 1}{2^x} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2^x}{4^x + 1} + \frac{4^x + 1}{2^x} - \frac{3}{2} = \frac{2^x}{4^x + 1} + \frac{4^x + 1}{4 \cdot 2^x} + \frac{3}{4} \left(2^x + \frac{1}{2^x} \right) - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si: } \frac{2^x}{4^x + 1} + \frac{4^x + 1}{4 \cdot 2^x} \geq 1 \quad (1).$$

Lại có $\frac{3}{4}\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\left(2^x + \frac{1}{2^x} - 2\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2 \geq 0 \quad (2).$

Từ (1); (2) suy ra $\frac{2^x}{4^x + 1} + \frac{4^x}{2^x + 1} + \frac{1}{2^x + 4^x} - \frac{1}{2} \geq 1$

$$\Rightarrow \log_2(1 - a^2 - b^2 + 2b) \geq 1 \Leftrightarrow 1 - a^2 - b^2 + 2b \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$a = 0 \in [-1; 1]$ nên chọn phương án **C**.

Câu 93. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -20 \leq x \leq 20$ và

$$\log_2(x + 2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0?$$

A. 19.

B. 6

C. 10.
Lời giải

D. 41.

Chọn C

+ Điều kiện: $x + 2y > 0$

+ Ta có: $x + y > 0$ nên

$$\log_2(x + 2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x + y)(x + 2y)}{x + y} + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 2y^2 + 3xy) - \log_2(x + y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 2y^2 + 3xy) + x^2 + 2y^2 + 3xy = \log_2(x + y) + x + y \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$, ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow f(x^2 + 2y^2 + 3xy) = f(x + y) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3xy = x + y$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - 2y \text{ vì } x + y > 0 \text{ nên } x + y = 1 - y > 0$$

$$+ \text{ Do } -20 \leq x \leq 20 \text{ suy ra } -\frac{19}{2} \leq y < 1$$

+ Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa mãn YCBT.

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn YCBT.

Câu 94. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x > 1, y > 1$ và $\log_3 x \log_3 6y + 2 \log_3 x \log_3 2y(3 - \log_3 2xy) = \frac{9}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = x + 2y$ gần với số nào nhất trong các số sau

A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a = \log_3 x, b = \log_3 2y$. Do $x > 1, y > 1$ nên $a > 0, b > \log_3 2$.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } a(b + 1) + 2ab(3 - a - b) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2a^2b + a(2b^2 - 7b - 1) + \frac{9}{2} = 0 \quad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn a , b là tham số. Để phương trình (1) có nghiệm $a > 0$

$$\text{thì: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{2b^2 - 7b - 1}{2b} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2b^2 - 7b - 1)^2 - 36b \geq 0 \\ 2b^2 - 7b - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^4 - 28b^3 + 45b^2 - 22b + 1 \geq 0 \\ 2b^2 - 7b - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2(4b^2 - 20b + 1) \geq 0 \\ 2b^2 - 7b - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 4b^2 - 20b + 1 \geq 0 \\ 2b^2 - 7b - 1 < 0 \end{cases}$$

Với $b = 1 \Rightarrow 2a^2 - 6a + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$. Khi đó $P = x + 2y = 3^{\frac{3}{2}} + 3 \approx 8,1$.

Với $\begin{cases} 4b^2 - 20b + 1 \geq 0 \\ 2b^2 - 7b - 1 < 0 \end{cases}$: hệ vô nghiệm do $b > \log_3 2$.

Vậy giá trị biểu thức $P = x + 2y$ gần nhất với 8.

Câu 95. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn

$$2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$$

A. 1010.

B. 2020.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_3(2x - 1) = t \Rightarrow 2x = 3^t + 1$, ta được $3(3^t + 1) - 2y = 3(1 + 3^{2y}) - t \Leftrightarrow 3 \cdot 3^t + t = 3 \cdot 3^{2y} + 2y$ (*).

Xét hàm số $f(u) = 3 \cdot 3^u + u \Rightarrow f'(u) = 3 \cdot 3^u \ln 3 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow t = 2y$, vậy nên $2x = 3^{2y} + 1 \Leftrightarrow 9^y = 2x - 1$.

Vì $x \leq 2020 \Rightarrow 9^y \leq 4039 \Leftrightarrow y \leq \log_9 4039$. Vì y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3\}$. Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của y thì tìm được 1 giá trị nguyên của x . Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

PHẦN 5. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT – GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Câu 96. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho $x; y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x \neq y$ và

$$\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x. \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^2 + 3y^2}{xy - y^2} \text{ bằng}$$

A. $\frac{13}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. -2.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x \Leftrightarrow (4^x + 1)^y < (4^y + 1)^x$$

$$\Leftrightarrow y \ln(4^x + 1) < x \ln(4^y + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln(4^x + 1)}{x} < \frac{\ln(4^y + 1)}{y} \text{ (vì } x, y > 0 \text{)}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln(4^t + 1)}{t}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{\frac{4^t \ln 4}{4^t + 1} \cdot t - \ln(4^t + 1)}{t^2} = \frac{4^t \ln 4 - (4^t + 1) \ln(4^t + 1)}{(4^t + 1)t^2} < 0, \forall t > 0$$

$\Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lại có $f(x) < f(y) \Rightarrow x > y$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó $t \in (1; +\infty) \Rightarrow P = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$.

Cách 1: Xét $P = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$ với $t \in (1; +\infty)$, ta có $P' = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t - 1)^2}$; $P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	1	3	$-\infty$	
P'		-	0	+
P			6	

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t = 3$ hay $x = 3y$.

Cách 2: Ta có $P = \frac{t^2 + 3}{t - 1} = t - 1 + \frac{4}{t - 1} + 2 \geq 2\sqrt{4} + 2 = 6$ (AM - GM).

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t = 3$ hay $x = 3y$.

Câu 97. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$. Khi $x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$

$$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 - 4xy + 8 + 1 + \log_2(x + y) - \log_2(xy) = \frac{1}{2}(xy)^2 - 4xy + 8$$

$$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 + \log_2(x + y) = 2\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \log_2\left(\frac{xy}{2}\right) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + \log_2 t$, với $t \in (0; +\infty)$

$f'(t) = 4t + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ

$$(1) \Rightarrow f(x + y) = f\left(\frac{xy}{2}\right) \Leftrightarrow 2(x + y) = xy.$$

Ta có: $2(x + y) = xy \Leftrightarrow x(y - 2) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{y - 2}; y > 2$.

$$P = x + 4y = \frac{2y}{y - 2} + 4y = 10 + 4(y - 2) + \frac{4}{y - 2} \geq 10 + 2\sqrt{4(y - 2) \cdot \frac{4}{y - 2}} = 18$$

$$\Rightarrow P_{\min} = 18 \text{ khi } 4(y - 2) = \frac{4}{y - 2} \Leftrightarrow y - 2 = 1 \Leftrightarrow y = 3.$$

$$y = 3 \Rightarrow x = \frac{2y}{y - 2} = 6 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2.$$

Câu 98. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$

A. $T_{\min} = \frac{4}{3}$.

B. $T_{\min} = 4$.

C. $T_{\min} = 2$.

D. $T_{\min} = \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$.

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được

$$x^2 + ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -ax - b - \frac{c}{x} \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(-ax - b - \frac{c}{x}\right)^2.$$

Ta có $\left(-ax - b - \frac{c}{x}\right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$. (theo BĐT Cauchy - Schwarz)

$$\text{Khi đó } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)}. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ (theo BĐT Cô Si).

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t+1}, t \in [2; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [2; +\infty)$.

Do đó $\min_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Dấu " $=$ " $\Leftrightarrow a = -b = c = \frac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm thì $T \geq \min_{[2; +\infty)} f(t)$.

$\Rightarrow x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$ có nghiệm $x = -1 \Rightarrow t = 2$ thỏa mãn.

Vậy $T_{\min} = \frac{4}{3}$.

Câu 99. (Chuyên KHTN - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$\log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{5x+3y-2}{2x+y+1}$.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

• Ta có: $\log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1)$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y - 3$

$\Leftrightarrow \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = \frac{2^{2x^2+2y^2}}{2^{3x+3y+3}} \Leftrightarrow (3x+3y+4) \cdot 2^{3x+3y+3} = (x^2+y^2) \cdot 2^{2x^2+2y^2}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (3x+3y+4) \cdot 2^{3x+3y+3} = 2 \cdot (x^2+y^2) \cdot 2^{2x^2+2y^2}$

$\Leftrightarrow (3x+3y+4) \cdot 2^{3x+3y+4} = (2x^2+2y^2) \cdot 2^{2x^2+2y^2} \quad (1)$

- Đặt $f(t) = t \cdot 2^t (t > 0)$.

Ta xét: $f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Lúc đó; (1) có dạng: $f(3x+3y+4) = f(2x^2+2y^2)$

$$\Leftrightarrow 3x+3y+4 = 2x^2+2y^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-3(x+y)-4 = -x^2+2xy-y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4 = -(x-y)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x+y \leq 4 \Rightarrow x+y-4 \leq 0.$$

- Khi đó: $P = \frac{5x+3y-2}{2x+y+1} = 2 + \frac{x+y-4}{2x+y+1} \leq 2+0 = 2$.

- Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y+4=2x^2+2y^2 \Leftrightarrow x=y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$.

Câu 100. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Xét các số thực dương a, b, c lớn hơn 1 (với $a > b$) thỏa mãn $4(\log_a c + \log_b c) = 25 \log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a + \log_a c + \log_c b$ bằng

A. 5.

B. 8.

C. $\frac{17}{4}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_c a = x, \log_c b = y$.

Vì $a, b, c > 1$ và $a > b$ nên suy ra $\log_c a > \log_c b$ hay $x > y > 0$.

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } 4\left(\frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b}\right) = 25 \cdot \frac{1}{\log_c ab} \Leftrightarrow \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{25}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 4y \text{ (vì } x > y \text{)}.$$

$$\text{Ta có: } \log_b a + \log_a c + \log_c b = \frac{\log_c a}{\log_c b} + \frac{1}{\log_c a} + \log_c b = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{1}{4y} + y \geq 4 + 2\sqrt{\frac{1}{4y}} \cdot y = 5.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y = \frac{1}{2}$ và $x = 2$, tức là $a = c^2; c = b^2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng 5.

Cách khác

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } 4(\log_a b \cdot \log_b c + \log_b c) = 25 \cdot \log_{ab} b \cdot \log_b c$$

$$\Leftrightarrow 4 \log_b c (\log_a b + 1) = 25 \frac{\log_b c}{\log_b ab} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b c = 0 \\ 4(\log_a b + 1) = \frac{25}{\log_b a + 1} \end{cases}$$

$$\text{Do } a, b, c > 1 \text{ nên } \log_b c > 0; \text{ suy ra } 4(1 + \log_a b)(1 + \log_b a) = 25 \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó: } \log_b a + \log_a c + \log_c b \geq 4 + 2\sqrt{\log_a c \cdot \log_c b} = 4 + 2\sqrt{\log_a b} = 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 5 đạt được khi và chỉ khi $a = b^4, a = c^2, c = b^2$.

Câu 101. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Xét các số thực a, b, x thỏa mãn $a > 1, b > 1, 0 < x \neq 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

A. $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{e}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^2)} \Leftrightarrow \ln(a^{\log_b x}) = \ln(b^{\log_a (x^2)}) \Leftrightarrow \log_b x \cdot \ln a = 2 \cdot \log_a x \cdot \ln b$

$\Leftrightarrow \log_b a \cdot \ln a = 2 \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \ln a = 2 \ln b \Leftrightarrow \ln^2 a = 2 \ln^2 b \Rightarrow \ln a = \sqrt{2} \ln b$ (vì $a > 1, b > 1$).

Thay $\ln a = \sqrt{2} \ln b$ vào biểu thức P ta được

$P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) = 3 \ln^2 b - (\sqrt{2} + 1) \ln b = 3t^2 - (\sqrt{2} + 1)t$ (với $t = \ln b > 0$).

Đặt $f(t) = 3t^2 - (\sqrt{2} + 1)t$. Ta có $f'(t) = 6t - (\sqrt{2} + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2} + 1}{6} \in (0; +\infty)$.

BBT:

		$\frac{\sqrt{2} + 1}{6}$	
t	0		$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	0		$+\infty$
		$-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$	

Dựa vào BBT, suy ra $\min_{(0; +\infty)} f(t) = -\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Câu 102. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4xy + 2x - y$ có dạng $m + n\sqrt{165}$ (với m, n là các số tự nhiên), tính $S = m + n$.

A. 58.

B. 54.

C. 56.

D. 60

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có: $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x} = a^6 b^6 \\ b^{3y} = a^6 b^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \log_a (a^6 b^6) \\ 3y = \log_b (a^6 b^6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 + 6 \log_a b \\ 3y = 6 + 6 \log_b a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(1 + \log_a b) \\ y = 2(1 + \log_b a) \end{cases}$

Vì $a, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$.

Do đó:

$P = 4xy + 2x - y = 24(1 + \log_a b)(1 + \log_b a) + 6 + 6 \log_a b - 2 - 2 \log_b a$
 $= 52 + 30 \log_a b + 22 \log_b a \geq 52 + 2\sqrt{30 \log_a b \cdot 22 \log_b a} = 52 + 4\sqrt{165}$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $m + n\sqrt{165}$ khi $30 \log_a b = 22 \log_b a \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{\frac{11}{15}} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{\frac{11}{15}}}$

Ta có: $\begin{cases} m=52 \\ n=4 \end{cases} \Rightarrow m+n=56.$

Câu 103. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và

$$\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } P \text{ với } P = 2x + y$$

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + xy + x + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+y) + x + y = \log_3 (1-xy) + 1 - xy$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$$

Hàm số $f(t)$ đồng biến với $t > 0$

$$\text{Có } f(x+y) = f(1-xy) \Leftrightarrow x+y = 1-xy \Leftrightarrow x(y+1) = 1-y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y+1}$$

$$\text{Ta có } P = 2x + y = \frac{2-2y}{y+1} + y = -3 + \frac{4}{y+1} + y + 1 \geq -3 + 2\sqrt{\frac{4}{y+1}}(y+1) = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Câu 104. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{3x^4 y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}.$$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1 \Leftrightarrow \log_3 (x+4y) + (x+4y) = \log_3 3(x+y) + 3(x+y)(1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0. \text{ Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

Từ (1) suy ra $f(x+4y) = f(3(x+y))$ và $(x+4y) > 0; 3(x+y) > 0$.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow x+4y = 3(x+y) \Leftrightarrow y = 2x$.

$$P = \frac{3x^4 y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2} = \frac{6x^5 + 12x^2}{9x^3} = \frac{1}{9} \left(6x^2 + \frac{12}{x} \right) = \frac{1}{9} \left(6x^2 + \frac{6}{x} + \frac{6}{x} \right) \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. Vậy $P_{\min} = 2$.

Câu 105. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = (ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\sqrt{2}x + y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10; 15)$.

B. $[6; 10)$.

C. $(1; 4)$.

D. $[4; 6)$.

Lời giải

Chọn E

$$\text{Ta có: } a^{x^2} = (ab)^2 \Rightarrow x^2 = \log_a (ab)^2 = 2(1 + \log_a b) \Rightarrow x = \sqrt{2 + 2\log_a b}$$

$$b^{y^2} = (ab)^2 \Rightarrow y^2 = \log_b (ab)^2 = 2(1 + \log_b a) \Rightarrow y = \sqrt{2 + 2\log_b a}$$

$$P = 2\sqrt{2x + y} = 4\sqrt{1 + \log_a b} + \sqrt{2 + 2\log_b a}.$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b \ (t > 0) \text{ ta được: } P = 4\sqrt{1+t} + \sqrt{2+\frac{2}{t}}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 4\sqrt{1+t} + \sqrt{2+\frac{2}{t}}, \text{ với } t \in (0; +\infty).$$

$$f'(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t^2 \sqrt{2+\frac{2}{t}}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t^2 \sqrt{2+\frac{2}{t}}} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 \sqrt{2+\frac{2}{t}} = \sqrt{1+t}$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 \left(2 + \frac{2}{t}\right) = 1+t \Leftrightarrow 8t^4 + 8t^3 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$.

t	0	$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$		-	+
$f(t)$			

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{(0;+\infty)} P = \min_{(0;+\infty)} f(t) = 3\sqrt{6} \in [6; 10)$ khi $\begin{cases} \log_a b = \frac{1}{2} \\ x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}$

Câu 106. (Chuyên Lào Cai - 2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_x x + \log_x y \geq \log_x (x + y^2)$.

Biểu thức $P = x + 8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

A. $P_{\min} = 16.$

B. $P_{\min} = \frac{33}{2}.$

C. $P_{\min} = 11\sqrt{2}.$

D. $P_{\min} = \frac{31}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ đề bài } xy \geq x + y^2$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) \geq y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{y^2}{y-1} \\ y > 1 \end{cases} \text{ (Vì } x, y > 0).$$

$$\text{Ta có: } P = x + 8y \geq \frac{y^2}{y-1} + 8y = 9y + 1 + \frac{1}{y-1}.$$

$$\text{Xét hàm số: } f(y) = 9y + 1 + \frac{1}{y-1}; y > 1.$$

$$\text{Đạo hàm: } f'(y) = 9 - \frac{1}{(y-1)^2}.$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3}(l) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của $f(y)$ là $f\left(\frac{4}{3}\right) = 16$.

Vậy $P_{\min} = 16$ khi $x = \frac{16}{3}$.

Câu 107. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?

A. $T = 9$.

B. $T = \frac{7}{3}$.

C. $T = \frac{5}{3}$.

D. $T = 7$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 2 \Leftrightarrow y-1 = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x-1} + 1$$

$$\text{Suy ra: } P = 2x + 3y = 2x + \frac{6}{x-1} + 3 = 2(x-1) + \frac{6}{x-1} + 5$$

Cách 1: Dùng bất đẳng thức

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: } 2(x-1) + \frac{6}{x-1} \geq 2\sqrt{2(x-1) \cdot \frac{6}{x-1}}$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + \frac{6}{x-1} \geq 4\sqrt{3} \Rightarrow P \geq 4\sqrt{3} + 5$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 2(x-1) = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \text{ (N)} \\ x = 1 - \sqrt{3} \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}.$$

$$\text{Do đó: } 3x - 2y = 3(1 + \sqrt{3}) - 2\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a = 1; b = \frac{5}{3} \Rightarrow T = ab = \frac{5}{3}.$$

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

$$\text{Ta có: } P = 2x + \frac{6}{x-1} + 3 \Rightarrow P' = 2 - \frac{6}{(x-1)^2}$$

$$P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \text{ (N)} \\ x = 1 - \sqrt{3} \text{ (L)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
P'	-	0	+
P	$+\infty$	$4\sqrt{3} + 5$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P_{\min} = 4\sqrt{3} + 5 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

Do đó: $3x - 2y = 3(1 + \sqrt{3}) - 2\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a = 1; b = \frac{5}{3} \Rightarrow T = ab = \frac{5}{3}$.

Câu 108. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn

$\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. $\frac{27}{4}$. B. 6. C. $\frac{20}{3}$. D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a > 0, b > 0$

$$\text{Nên } \begin{cases} 4a + 5b + 1 > 1 \\ 8ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) > 0 \end{cases}$$

$$P = \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq 2\sqrt{\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) \cdot \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 2\sqrt{\log_{8ab+1}(16a^2 + b^2 + 1)}$$

ặt khác:

$$16a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{16a^2b^2} + 1 = 8ab + 1 \Leftrightarrow P \geq 2\sqrt{\log_{8ab+1}(8ab + 1)} = 2$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} 16a^2 = b^2 \\ 8ab + 1 = 4a + 5b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = b \\ 2b^2 + 1 = 6b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } a + 2b = \frac{27}{4}.$$

Câu 109. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn

$\log_{a^2+b^2+2}(4a+6b-7) = 1$ và $27^c \cdot 81^d = 6c + 8d + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a-c)^2 + (b-d)^2.$$

- A. $\frac{49}{25}$. B. $\frac{64}{25}$. C. $\frac{7}{5}$. D. $\frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_{a^2+b^2+2}(4a+6b-7) = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2 = 4a + 6b - 7 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 4 \quad (1).$$

$$\text{Lại có } 27^c \cdot 81^d = 6c + 8d + 1 \Leftrightarrow 3^{3c+4d} = 2(3c+4d) + 1 \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 2t - 1$ trên $\mathbb{R}$.

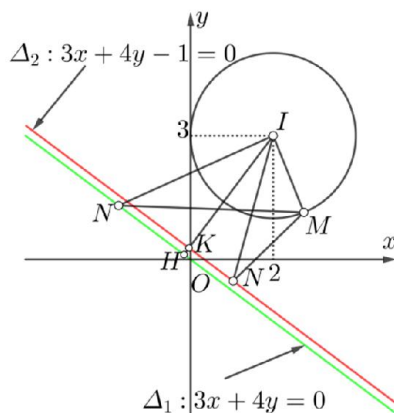
Khi đó $f(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t) = 3^t \ln 3 - 2$.

Vì phương trình $f'(t) = 0$ có đúng một nghiệm $\left(t_0 = \log_3 \left(\frac{2}{\ln 3}\right)\right)$ nên phương trình $f(t) = 0$ có tối đa 2 nghiệm. Mặt khác, $f(0) = f(1) = 0$ nên $S = \{0; 1\}$ là tập nghiệm của phương trình $f(t) = 0$.

Do đó, (2) tương đương với $3c + 4d = 0$ hoặc $3c + 4d = 1$ (3).

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , gọi điểm M có tọa độ (a, b) và điểm N có tọa độ (c, d) . Khi đó, từ (1) suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$, bán kính $r = 2$ và từ (3) suy ra N thuộc đường thẳng $\Delta_1: 3x + 4y = 0$ hoặc $\Delta_2: 3x + 4y - 1 = 0$.

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a - c)^2 + (b - d)^2 = MN^2$.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên các đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Nếu N di chuyển trên đường thẳng Δ_1 thì $MN \geq IN - IM \geq IH - r$ nên $MN \geq \frac{8}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N \equiv H$ và M là giao điểm của đoạn thẳng IH với đường tròn.

Nếu N di chuyển trên đường thẳng Δ_2 thì $MN \geq IN - IM \geq IK - r$ nên $MN \geq \frac{7}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N \equiv K$ và M là giao điểm của đoạn thẳng IK với đường tròn.

Từ hai trường hợp trên, ta có giá trị nhỏ nhất của MN bằng $\frac{7}{5}$. Từ đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

P bằng $\frac{49}{25}$.

Câu 110. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1010}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8080}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$

A. 2020.

B. 16160.

C. 20200.

D. 13130.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1010}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8080}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}} = \frac{4040}{2 \log_{bc} a} + \frac{1010}{\frac{1}{2} \log_{ac} b} + \frac{8080}{3 \cdot \frac{1}{3} \log_{ab} c} \\ &= 2020 \log_a bc + 2020 \log_b ac + 8080 \log_c ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2020(\log_a b + \log_a c) + 2020(\log_b a + \log_b c) + 8080(\log_c a + \log_c b) \\
 &= 2020 \log_a b + 2020 \log_b a + 2020 \log_a c + 8080 \log_c a + 2020 \log_b c + 8080 \log_c b \\
 &\text{Vì } a, b, c > 1 \text{ nên các số } \log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b > 0 \\
 &\text{Khi đó ta có} \\
 &2020 \log_a b + 2020 \log_b a \geq 2\sqrt{2020^2 \log_a b \log_b a} = 4040 \\
 &2020 \log_a c + 8080 \log_c a \geq 2\sqrt{4040^2 \log_a c \log_c a} = 8080 \\
 &2020 \log_b c + 8080 \log_c b \geq 2\sqrt{4040^2 \log_b c \log_c b} = 8080 \\
 &\text{Suy ra } P \geq 4040 + 8080 + 8080 = 20200
 \end{aligned}$$

- Câu 111. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là
- A.** 16. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0, 0 < y < 6$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Ta có } \log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + 6x - xy \\
 &\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + \log_2 x + 6x - xy \\
 &\Leftrightarrow \log_2(x^2) + x^2 = \log_2[x(6-y)] + x(6-y) \quad (*)
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow f(x^2) = f(x(6-y)) \Leftrightarrow x^2 = x(6-y) \Leftrightarrow x = 6-y \Leftrightarrow y = 6-x. \\
 &\Rightarrow T = x^3 + 3(6-x) = x^3 - 3x + 18 = g(x).
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 18$ trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 3x^2 - 3; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; +\infty) \\ x = 1 \in (0; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	18	16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $T = g(x) \geq g(1) = 16$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 - x = 5 \end{cases}$.

- Câu 112. (Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + b$.

- A.** $P_{\min} = -1 + 2\sqrt{5}$. **B.** $P_{\min} = 2 + \sqrt{5}$. **C.** $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$. **D.** $P_{\min} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $1 - ab > 0 \Leftrightarrow ab < 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_2 \frac{1-ab}{a+b} &= 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2(1-ab) - \log_2(a+b) = (a+b) - 2(1-ab) - 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(1-ab) + 1 + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + (a+b) \\ &\Leftrightarrow \log_2 2(1-ab) + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + (a+b). \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow f(2(1-ab)) = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow 2-a = b(2a+1) \Leftrightarrow b = \frac{2-a}{2a+1}.$$

$$\text{Do } a, b > 0 \Rightarrow \frac{2-a}{2a+1} > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2.$$

$$\text{Khi đó } P = a + b = a + \frac{2-a}{2a+1} = \frac{2a^2 + 2}{2a+1}$$

$$\text{Xét hàm } g(a) = \frac{2a^2 + 2}{2a+1} \Rightarrow g'(a) = \frac{4a^2 + 4a - 4}{(2a+1)^2} \Rightarrow g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Bảng biến thiên

a	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	2
$g'(a)$	0	-	0
$g(a)$	2		2
		$-1+\sqrt{5}$	

$$\text{Vậy } P_{\min} = -1 + \sqrt{5}.$$

- Câu 113. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a b - \log_b c$. Giá trị của biểu thức $S = 3m - M$ bằng
- A.** -16. **B.** 4. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi đẳng thức đề bài ta được

$$\begin{aligned} \log_a^2 b + \log_b^2 c &= \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3 \Leftrightarrow \log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a c - \log_a b - 2 \log_b c - 1 \\ &\Leftrightarrow \log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a b \cdot \log_b c - \log_a b - 2 \log_b c - 1 \end{aligned}$$

Đặt $u = \log_a b; v = \log_b c$ ta có phương trình

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= uv - u - 2v - 1 \\ &\Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 + u^2 + 2u + 1 + v^2 + 4v + 4 = 3 \\ &\Leftrightarrow (u-v)^2 + (u+1)^2 + (v+2)^2 = 3 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x-y)^2$ dấu bằng xảy ra khi $x = -y$, áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$(u+1)^2 + (v+2)^2 \geq \frac{1}{2}(u+1-v-2)^2 \Leftrightarrow (u+1)^2 + (v+2)^2 \geq \frac{1}{2}(u-v-1)^2 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $3 - (u - v)^2 \geq \frac{1}{2}(u - v - 1)^2$ hay

$$3 - P^2 \geq \frac{1}{2}(P - 1)^2 \Leftrightarrow 3P^2 - 2P - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3}$$

Vậy $m = -1, M = \frac{5}{3}$ suy ra $S = m - 3M = -6$.

Câu 114. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$. Hỏi

giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + xy$ là bao nhiêu?

A. $30 - 20\sqrt{2}$.

B. $33 - 22\sqrt{2}$.

C. $24 - 16\sqrt{2}$.

D. $36 - 24\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \frac{2-x}{2+x} > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x+2} < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ y > 0 \end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$$\log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2-x) - \log_2 (x+2) - \log_2 y = 2(x-2) + y(x+2) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2-x) + 1 - (2x-4) = \log_2 [(x+2)y] + y(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4-2x) + (4-2x) = \log_2 [y(x+2)] + y(x+2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t (t > 0)$:

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \forall t > 0$$

Suy ra: $f(t)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\text{Mà } f(4-2x) = f[y(x+2)] \text{ nên } 4-2x = y(x+2) \Leftrightarrow y = \frac{4-2x}{x+2}$$

$$\text{Vì } P = x^2 + y^2 + xy \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$$

Thay vào P ta có:

$$P \geq \frac{3}{4} \left(x + \frac{4-2x}{x+2} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{x^2+4}{x+2} \right)^2$$

Xét hàm số $y = \frac{x^2+4}{x+2}$ trên khoảng $(-2; 2)$:

$$y' = \frac{2x(x+2) - (x^2+4)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-4}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ x = -2 - 2\sqrt{2} (l) \end{cases}$$

(Vì $x \in (-2; 2)$)

Lập bảng biến thiên:

x	-2	$-2+2\sqrt{2}$	2	
y'		-	0	+
y		$+\infty$	$-4+4\sqrt{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y_{\min} = -4 + 4\sqrt{2}$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{3}{4}(-4 + 4\sqrt{2})^2 = 36 - 24\sqrt{2}$$

Câu 115. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho các số thực $x, y \geq 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy \leq 4$. Biểu thức

$P = \log_{4x} 8x - \log_{2y^2} \frac{y^2}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0, y = y_0$. Đặt $T = x_0^4 + y_0^4$ mệnh đề nào sau

đây đúng

A. $T = 131$.

B. $T = 132$.

C. $T = 129$.

D. $T = 130$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = \log_{4x} 8x - \log_{2y^2} \frac{y^2}{2} = \frac{\log_2 8x}{\log_2 4x} - \frac{\log_2 \frac{y^2}{2}}{\log_2 2y^2} = \frac{3 + \log_2 x}{2 + \log_2 x} - \frac{2 \log_2 y - 1}{2 \log_2 y + 1}.$$

$$\text{Đặt } \log_2 x = a, \log_2 y = b \ (a, b \geq 0), \text{ ta được } P = \frac{3+a}{2+a} - \frac{2b-1}{2b+1} = \frac{1}{2+a} + \frac{2}{2b+1}.$$

$$\text{Vì } xy \leq 4 \text{ suy ra } \log_2 x + \log_2 y \leq 2 \Leftrightarrow a + b \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2 - b$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{2+a} + \frac{2}{2b+1} \geq \frac{1}{4-b} + \frac{2}{2b+1}.$$

Xét hàm $f(b) = \frac{1}{4-b} + \frac{2}{2b+1}$ trên $[0; 2]$, ta có:

$$f'(b) = \frac{1}{(4-b)^2} - \frac{4}{(2b+1)^2}$$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow (2b+1)^2 - 4(4-b)^2 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Ta có: } f(0) = \frac{9}{4}, f(2) = \frac{9}{10}, f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Suy ra trên đoạn } [0; 2] \text{ ta có: } \min P = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{4} \\ \log_2 y = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{4}} \\ y = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2^{\frac{1}{4}} \\ y_0 = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = x_0^4 + y_0^4 = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4 + \left(2^{\frac{7}{4}}\right)^4 = 130.$$

Câu 116. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 10$. Biết giá trị lớn nhất của

biểu thức $F = 5 \log a \cdot \log b + 2 \log b \cdot \log c + \log c \cdot \log a$ bằng $\frac{m}{n}$ với m, n nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối

giản. Tổng $m + n$ bằng

A. 13.

B. 16.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} \log a = x \\ \log b = y \\ \log c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10^x \\ b = 10^y \\ c = 10^z \end{cases}, \text{ mà } abc = 10 \Leftrightarrow 10^x \cdot 10^y \cdot 10^z = 10 \Leftrightarrow x + y + z = 1 (*)$$

Ta có $F = 5 \log a \cdot \log b + 2 \log b \cdot \log c + \log c \cdot \log a = 5xy + 2yz + zx$.Từ (*) $\Rightarrow y = 1 - x - z$, thay vào biểu thức F , ta được:

$$\begin{aligned} F &= 5x(1-x-z) + 2(1-x-z)z + xz = -2z^2 - 5x^2 - 6xz + 2z + 5x \\ &= -2z^2 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2} - 6xz + 2z + 3x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 + \frac{5}{2} \\ &= -2\left(z^2 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4} + 3xz - z - \frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + \frac{5}{2} \\ &= -2\left(z + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max F = \frac{5}{2} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = 2 \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m = 5, n = 2 \Rightarrow m + n = 5 + 2 = 7$.

Câu 117. (Sở Bình Phước - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 2y$ bằng

A. $2\sqrt{2} + 3$.**B.** $2 + 3\sqrt{2}$.**C.** $3 + \sqrt{3}$.**D.** 9.**Lời giải****Chọn A**Với $x > 0; y > 0$. Ta có:

$$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2xy \geq x^2 + 2y \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 2y(x-1) \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq \frac{x^2}{2y} > 0$$

$$\Rightarrow x > 1.$$

Đặt $m = x + 2y$ ta có:

$$(2) \Leftrightarrow x(m-x) \geq x^2 - x + m$$

$$\Leftrightarrow m(x-1) \geq 2x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{2x^2 - x}{x-1}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$ với $x > 1$.Ta tìm thấy $\min_{(1; +\infty)} g(x) = 3 + 2\sqrt{2}$ khi $x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{4+3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy GTNN của $x+2y$ là $3+2\sqrt{2}$.

Câu 118. (Sở Yên Bái - 2020) Cho các số thực x, y thuộc đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy$. Tính $M.m$.

A. $-\frac{5}{2}$.

B. -5 .

C. 5 .

D. -3 .

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022} \Leftrightarrow 2020^{1-x-y} (y^2 - 2y + 2022) = x^2 + 2021$$

$$\Leftrightarrow 2020^{1-y} [(1-y)^2 + 2021] = 2020^x (x^2 + 2021).$$

Ta có

$$f(t) = 2020^t (t^2 + 2021) \text{ với } t \in [0;1] \text{ có } f(t) = 2020^t \cdot \ln 2020 \cdot (t^2 + 2021) + 2 \cdot 2020^t t > 0.$$

Do vậy $f(t) = 2020^t (t^2 + 2021)$ đồng biến trên khoảng $t \in [0;1]$.

$$\text{Suy ra } f(1-y) = f(x) \Leftrightarrow x = 1-y \Leftrightarrow y = 1-x.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} 2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy &= 2x^3 + 6(1-x)^3 + 3x^2 - 9x(1-x) = 2x^3 + 6 - 18x + 18x^2 - 6x^3 + 3x^2 - 9x + 9x^2 \\ &= -4x^3 + 30x^2 - 27x + 6. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 27x + 6 \text{ với } x \in (0;1).$$

$$\text{Mà } f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 27x + 6 \text{ nên } f'(x) = -12x^2 + 60x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{9}{2} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác } f(0) = 6, f(1) = 5, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \text{ Do vậy } M = 6 \text{ và } m = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy nên } M.m = -3.$$

Câu 119. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $P_{\min} = \frac{17}{2}$.

B. $P_{\min} = 8$.

C. $P_{\min} = 9$.

D. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (xy) \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow xy \geq x + y^2$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x \geq y^2.$$

$$\text{Do } y > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow (y-1)x \geq y^2 > 0. \text{ Mà } x > 0 \text{ nên } y-1 > 0, \text{ hay } y > 1.$$

Khi đó ta có $x \geq \frac{y^2}{y-1}$. Suy ra $P = x + 3y \geq \frac{y^2}{y-1} + 3y$

Xét hàm số $f(y) = \frac{y^2}{y-1} + 3y$ trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(y) = \frac{y^2 - 2y}{(y-1)^2} + 3 = \frac{4y^2 - 8y + 3}{(y-1)^2}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \notin (1; +\infty) \\ y = \frac{3}{2} \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

y	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$		- 0 +	
$f(y)$		$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(y) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$. Vậy $P \geq f(y) \geq 9$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{y^2}{y-1} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Câu 120. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2. \text{ Giá trị biểu thức } a + 2b \text{ bằng?}$$

- A. 6. B. $\frac{11}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 22.

Lời giải

Chọn B

Với $a > 0, b > 0$ ta có $25a^2 + b^2 + 1 \geq 10ab + 1$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = 5a$.

Suy ra $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) \geq \log_{10a+3b+1}(10ab + 1)$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = 5a$.

Mặt khác, ta lại có với $a > 0, b > 0$ thì $\log_{10a+3b+1}(10ab + 1) > 0, \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) > 0$.

Do đó:

$$\begin{aligned} \log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) &\geq \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \\ &\geq 2\sqrt{\log_{10a+3b+1}(10ab + 1) \cdot \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)} = 2 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = 5a \\ \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) = \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ 10a + 3b + 1 = 10ab + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{11}{2}$$

Câu 121. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho các số thực dương $a; b; c$ khác 1 thỏa mãn

$$\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2\log_b \frac{c}{b} = \log_a \frac{c}{a^3 b}. \text{ Gọi } M, m \text{ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của}$$

$$P = \log_a ab - \log_b bc. \text{ Tính giá trị biểu thức } S = 2m^2 + 9M^2.$$

A. $S = 28$.

B. $S = 25$.

C. $S = 26$.

D. $S = 27$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } x = \log_a b; y = \log_b c, (x; y > 0) \Rightarrow \log_a c = xy \Rightarrow P = \log_a ab - \log_b bc = x - y \Rightarrow x = P + y$$

$$\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2 \log_b \frac{c}{b} = \log_a \frac{c}{a^3 b} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 2 = xy - 3 - x$$

$$\text{Khi đó ta có } (P + y)^2 + y^2 + 2y - 2 = (P + y)y - 3 - (P + y)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + (P + 3)y + P^2 + P + 1 = 0$$

$$\text{Phương trình có nghiệm khi } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3P^2 + 2P + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3} \Rightarrow m = -1; M = \frac{5}{3} \Rightarrow S = 27$$

$$\text{Nên giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{4} \\ \log_2 y = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{4}} \\ y = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2^{\frac{1}{4}} \\ y_0 = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow T = x_0^4 + y_0^4 = 130$$

Câu 122. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2. \text{ Giá trị của } a + 2b \text{ bằng}$$

A. 9.

B. 6.

C. $\frac{27}{4}$.

D. $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức Côsi với $a > 0, b > 0$ ta có:

$$16a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{16a^2 b^2} + 1 = 8ab + 1 \Rightarrow 16a^2 + b^2 + 1 \geq 8ab + 1 (*)$$

Do $4a + 5b + 1 > 1$ nên từ (*) có:

$$\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)$$

$$\Rightarrow \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \frac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab + 1)}$$

$$\text{Mặt khác } 4a + 5b + 1 > 1 \text{ và } 8ab + 1 > 1 \text{ nên: } \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \frac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab + 1)} \geq 2.$$

$$\text{Suy ra } \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} 16a^2 = b^2 \\ 4a + 5b + 1 = 8ab + 1 \\ a, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ 2b^2 - 6b = 0 \\ a, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a + 2b = \frac{27}{4}.$$

Câu 123. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Xét các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} a^x = \sqrt{\frac{a}{b}} \\ b^y = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a \sqrt{\frac{a}{b}} \\ y = \log_b \sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - \log_a b) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_a b} - 1\right) \end{cases}$$

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a > 1, b > 1$, nên $t > 0$.

Khi đó: $P = \frac{1}{2}(1-t) - \left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{t}\right) \leq \frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t}{2} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \ (t > 0)$. $P_{\max} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \approx 0,086 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 124. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$. Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-4-3\sqrt{2}$.

B. $-4-5\sqrt{2}$.

C. $-4-2\sqrt{2}$.

D. $-4-4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 1$.

Đặt $t = \frac{5x-y+2}{x+y+4} \Rightarrow t(x+y+4) = 5x-y+2 \Leftrightarrow (t-5)x + (t+1)y + 4t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t-5)\left(x - \frac{y}{2}\right) + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}y}{2} = 2 - 4t$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có

$(2-4t)^2 = \left[(t-5)\left(x - \frac{y}{2}\right) + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}y}{2}\right]^2 \leq \left[(t-5)^2 + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2\right] \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right]$

$\Rightarrow (2-4t)^2 \leq \left[(t-5)^2 + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2\right] \cdot 1 \Leftrightarrow 12t^2 - 24t \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $f'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$.

Khi đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$.

Ta có $f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -5 + 4\sqrt{2}$.

Do đó $M = f(0) = -1$, $m = f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}$.

Vậy $M+m = -4 - 4\sqrt{2}$.

Câu 125. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho biểu thức $P = 3^{y-2x+3}(1+4^{2x-y-1}) - 2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q = \log_{y-3-2x} 3y$. Giá trị nhỏ nhất của y để tồn tại x đồng thời thỏa mãn $P \geq 1$ và $Q \geq 1$ là số y_0 . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $4y_0 + 1$ là số hữu tỷ. **B.** y_0 là số vô tỷ.

C. y_0 là số nguyên dương.

D. $3y_0 + 1$ là số tự nhiên chẵn.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} y - 2x + 3 > 0 \\ y > 0 \end{cases}.$$

$$P = 3^{y-2x+1} \cdot (1 + 4^{2x-y-1}) - 2^{2x-y-1} = 3^{y-2x+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4^{2x-y-1}}\right) - \frac{1}{2^{y-2x+1}}.$$

$$\text{Đặt } t = y - 2x + 1 \text{ ta có } P = 3^t \left(1 + \frac{1}{4^t}\right) - \frac{1}{2^t}.$$

$$\text{Cho } P \geq 1 \Leftrightarrow 3^t \left(1 + \frac{1}{4^t}\right) - \frac{1}{2^t} \geq 1 \Leftrightarrow 12^t + 3^t \geq 4^t + 2^t (1).$$

* Với $t = 0$ thỏa mãn (1).

$$\text{* Với } t > 0 \text{ ta có } \begin{cases} 12^t > 4^t \\ 3^t > 2^t \end{cases} \Rightarrow 12^t + 3^t > 4^t + 2^t \Rightarrow (1) \text{ thỏa mãn.}$$

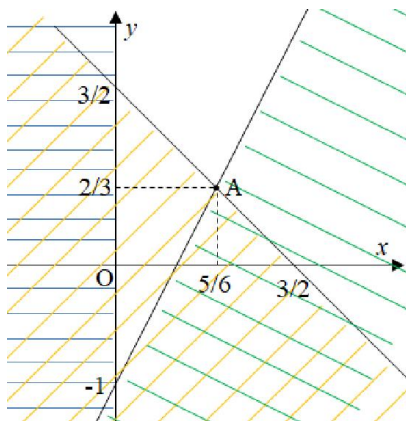
$$\text{* Với } t < 0 \text{ ta có } \begin{cases} 12^t < 4^t \\ 3^t < 2^t \end{cases} \Rightarrow 12^t + 3^t < 4^t + 2^t \Rightarrow (1) \text{ không thỏa mãn.}$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow t \geq 0$ hay $y - 2x + 1 \geq 0$ (a).

Vì $y - 2x + 1 > 0 \Rightarrow y - 2x + 3 > 2 > 1$ nên $Q = \log_{y-2x+1} 3y \geq 1 \Leftrightarrow 3y \geq y - 2x + 3 \Leftrightarrow 2x + 2y \geq 3$ (b).

$$\text{Từ (a), (b) và điều kiện ta có } \begin{cases} y - 2x + 1 \geq 0 \\ 2x + 2y \geq 3 \\ y > 0 \end{cases}$$

Cặp số $(x; y)$ thỏa mãn hệ được biểu diễn ở miền không bị gạch ở hình bên. Điểm A thuộc miền không bị gạch và có $y_{\min} = \frac{2}{3}$.



Vậy $y_0 = \frac{2}{3}$. Do đó $4y_0 + 1 = \frac{11}{3} \in \mathbb{Q}$.

Câu 126. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hai số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}.$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{a^2+4b^2}{4} = \frac{a^2+(2b)^2}{4} \geq \frac{4ab}{4} = ab \Rightarrow \log_a \left(\frac{a^2+4b^2}{4} \right) \geq \log_a ab$.

Do $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 = 0$.

Ta có

$$S = \log_a \left(\frac{a^2+4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4} \log_b ab \geq \log_a ab + \frac{1}{4} \log_b ab$$

$$= 1 + \log_a b + \frac{1}{4} (\log_b a + 1) = \log_a b + \frac{1}{4 \log_a b} + \frac{5}{4}.$$

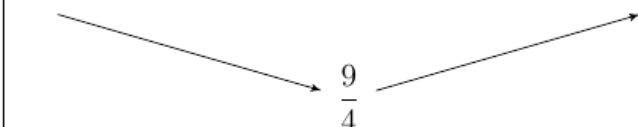
Đặt $t = \log_a b$, ta có $S \geq t + \frac{1}{4t} + \frac{5}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{4t} + \frac{5}{4}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{4t^2} = \frac{4t^2 - 1}{4t^2}$.

Khi đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 1}{4t^2} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Suy ra $\min_{t \in (0; +\infty)} f(t) = \frac{9}{4}$ khi $t = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{9}{4}$ khi $t = \log_a b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{a}$.

Câu 127. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Với các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho

$\log_2 \left(\frac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2} \right) = x(x-4) + y(y-8) + z(z-8) - 2$, gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $T = \frac{x^2+y^2+z^2-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86}$ thứ tự là M và m . Khi đó $M+m$ bằng:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. 1. C. $-\frac{5}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $\log_2 \left(\frac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2} \right) = x(x-4) + y(y-8) + z(z-8) - 2$

$$\Leftrightarrow \log_2 4(x+2y+2z) - \log_2 (x^2+y^2+z^2) = x^2+y^2+z^2 - 4(x+2y+2z)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4(x+2y+2z) + 4(x+2y+2z) = \log_2 (x^2+y^2+z^2) + x^2+y^2+z^2 \quad (1).$$

+) Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t, \forall t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + t > 0, \forall t > 0$.

+) Ta có (1) $\Leftrightarrow f(4(x+2y+2z)) = f(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 4x+8y+8z$
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 36$.

+) Thay vào biểu thức T , ta được $T = \frac{(4x+8y+8z)-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86} = \frac{y-3z+8}{6x+5y-86}$

$$\Rightarrow T(6x+5y-86) = y-3z+8 \Leftrightarrow 6Tx + (5T-1)y + 3z = 8+86T.$$

$$\Leftrightarrow 6T(x-2) + (5T-1)(y-4) + 3(z-4) = 8+86T-12T-4(5T-1)-12$$

$$\Leftrightarrow 6T(x-2) + (5T-1)(y-4) + 3(z-4) = 54T$$

+) Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$|6T(x-2) + (5T-1)(y-4) + 3(z-4)| \leq \sqrt{(6T)^2 + (5T-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{36}$$

$$\Leftrightarrow (54T)^2 \leq 36((6T)^2 + (5T-1)^2 + 3^2) \Leftrightarrow 720T^2 + 360T - 360 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq T \leq \frac{1}{2}.$$

Suy ra $M+m = -\frac{1}{2}$.

Câu 128. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\ln y \geq \ln(x^3+2) - \ln 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = e^{4y-x^3-x-2} - \frac{x^2+y^2}{2} + x(y+1) - y$.

A. 1.

B. 0.

C. e.

D. $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Do $\ln y \geq \ln(x^3+2) - \ln 3 \Leftrightarrow x^3+2 \leq 3y \Leftrightarrow 4y-x^3-x-2 \geq y-x$

$$\Rightarrow H \geq e^{y-x} - (y-x) - \frac{(y-x)^2}{2}.$$

Đặt $t = y-x \Rightarrow t \geq \frac{x^3+2}{3} - x = \frac{x^3-3x+2}{3} = g(x)$ với $x \geq \sqrt[3]{-2}$.

$$g'(x) = \frac{3x^2-3}{3}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1) = 0, \text{ suy ra } t \geq 0.$$

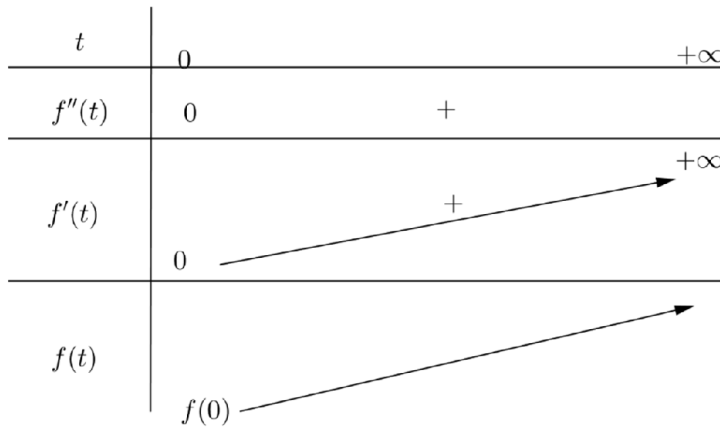
Xét hàm số $f(t) = e^t - t - \frac{t^2}{2}$ với $t \geq 0$.

$$f'(t) = e^t - 1 - t$$

$$f''(t) = e^t - 1.$$

$$f'''(t) = 0 \Leftrightarrow e = 0.$$

Ta có bảng biến thiên như sau



Suy ra $H \geq f(0)$.

Vậy $\min H = 1$.

Câu 129. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1 \neq 1$ thỏa mãn $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng:

A. 11.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_{n+1} = 7u_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow (u_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu là u_1 , công bội $q = 7$.

$$\begin{aligned} \log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) &= [\log_2 5 + \log_2 u_1]^2 + [\log_2 7 + \log_2 u_1]^2 \\ &= \log_2^2 5 + 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 u_1 + \log_2^2 7 + 2 \cdot \log_2 7 \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 u_1 \\ &= 2 \log_2^2 u_1 + 2 \cdot (\log_2 5 + \log_2 7) \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ &= 2 \log_2^2 u_1 + 2 \cdot \log_2 35 \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 5 + \log_2^2 7 = \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ &\Leftrightarrow 2 \log_2^2 u_1 + 2 \cdot \log_2 35 \cdot \log_2 u_1 = 0 \Leftrightarrow 2 \log_2 u_1 \cdot (\log_2 u_1 + \log_2 35) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_1 = 0 \\ \log_2 u_1 + \log_2 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \text{ (loại)} \\ \log_2 u_1 = -\log_2 35 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{35} \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

$$\text{Số hạng tổng quát của dãy số là } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1} = \frac{1}{5} \cdot 7^{n-2} = \frac{1}{5} \cdot 7^{n-2}.$$

$$u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 7^{n-2} > 1111111 \Leftrightarrow 7^{n-2} > 5555555 \Leftrightarrow n-2 > \log_7 5555555$$

$$\Leftrightarrow n > \log_7 5555555 + 2. \text{ Vì } n \in \mathbb{N}^* \text{ nên giá trị nhỏ nhất của } n \text{ bằng } 10.$$

Câu 130. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \frac{8-8xy}{x+y}$. Khi

$P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2^{2xy+x+y} = \frac{8-8xy}{x+y} \Leftrightarrow 2xy + x + y = \log_2(8-8xy) - \log_2(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(1-xy) + 2(1-xy) = \log_2(x+y) + (x+y)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Do đó từ (*) ta có } 2(1-xy) = x+y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{2y+1}$$

Suy ra $P = 2xy^2 + xy = -y^2 + 2y \Rightarrow P_{\min} = 1$ khi $y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Do đó $3x + 2y = 3$

Câu 131. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho x, y là các số dương thỏa mãn

$\log(x + 2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1 + 2y} + \frac{4y^2}{1 + x}$ là:

A. $\frac{31}{5}$.

B. 6.

C. $\frac{29}{5}$.

D. $\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log(x + 2y) = \log(x) + \log(y) \Leftrightarrow \log(x + 2y) = \log(xy) \Leftrightarrow x + 2y = xy$

Mặt khác: $xy = x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} \Leftrightarrow (xy)^2 - 8(xy) \geq 0 \Rightarrow xy \geq 8$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Swaz ta có: $P = \frac{x^2}{1 + 2y} + \frac{4y^2}{1 + x} \geq \frac{(x + 2y)^2}{2 + x + 2y} = \frac{(xy)^2}{xy + 2}$

Đặt $xy = t$ suy ra $P \geq \frac{(xy)^2}{xy + 2} = \frac{t^2}{t + 2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t + 2}$, với $t \in [8; +\infty)$.

$f'(t) = \frac{t^2 + 4t}{(t + 2)^2} > 0, \forall t \geq 8$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(8; +\infty)$.

$$\Rightarrow f(t) \geq f(8) = \frac{32}{5} \Rightarrow P \geq f(t) \geq \frac{32}{5}.$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{32}{5} \text{ khi } \begin{cases} x = 2y \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

----- HẾT -----