MỤC LỤC

1 TỔNG QUAN KIẾN THỨC TỔ HỢP - XÁC SUẤT **3**
1 Các quy tắc đếm . . . 3
A Bài tập mẫu . . . 3
Dạng 1.1. Bài toán sử dụng quy tắc nhân . . . 3
B Bài tập mẫu . . . 15
2 Chỉnh hợp . . . 21
A Bài tập mẫu . . . 21
3 Hoán vị . . . 30
A Bài tập mẫu . . . 31
4 Tổ hợp . . . 35
A Tóm tắt lí thuyết . . . 35
B Bài tập mẫu . . . 36
C Bài tập rèn luyện . . . 40

2 CÁC DẠNG TOÁN TỔ HỢP **45**
Dạng 0.1. Rút gọn một biểu thức chứa chỉnh hợp - hoán vị - tổ hợp . . . 45
Dạng 0.2. Giải phương trình liên quan đến chỉnh hợp - tổ hợp - hoán vị . . . 47
Dạng 0.3. Giải bất phương trình liên quan đến chỉnh hợp-hoán vị- tổ hợp . . . 52
Dạng 0.4. Giải hệ phương trình chỉnh hợp - hoán vị - tổ hợp . . . 56
Dạng 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp . . . 58
Dạng 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 2) . . . 61
Dạng 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 3) . . . 62
Dạng 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 4) . . . 65
Dạng 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 5 - dùng đạo hàm) . . . 69
Dạng 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 6 - dùng tích phân) . . . 72
Dạng 0.6. Tính tổng một biểu thức tổ hợp . . . 79
Dạng 0.7. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng (Loại không cho giả thiết) . . . 88
Dạng 0.8. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng . . . 97
Dạng 0.9. Chứng minh bất đẳng thức tổ hợp . . . 106

3 CÁC DẠNG TOÁN LÝ LUẬN **111**
Dạng 0.10. Đếm số dùng quy tắc nhân và quy tắc cộng . . . 111
Dạng 0.11. Bài toán đếm số - Dùng chỉnh hợp . . . 120
Dạng 0.12. Bài toán sắp xếp đồ vật . . . 134
Dạng 0.13. Bài toán sắp xếp người . . . 136
Dạng 0.14. Bài toán chọn vật, dùng tổ hợp . . . 141
Dạng 0.15. Bài toán chọn về người - Dùng tổ hợp . . . 148
Dạng 0.16. Bài toán chọn về người - Dùng tổ hợp . . . 148
Dạng 0.17. Bài toán phân chia tập hợp - dùng tổ hợp . . . 158
Dạng 0.18. Đếm số điểm, số đoạn thẳng, số góc, số đa giác, số miền . . . 160
1 Bộ đề số 1 . . . 164
2 Bộ đề số 2 . . . 169
3 Bộ đề số 3 . . . 174
4 Bộ đề số 4 . . . 180
5 Bộ đề số 5 . . . 187

4 Các bài toán xác suất thi học sinh giỏi **193**
Dạng 0.1. Bài toán chia hết . . . 193
Dạng 0.2. Số lần xuất hiện của chữ số . . . 197
Dạng 0.3. Liên quan đến vị trí . . . 199
Dạng 0.4. Các bài toán đếm số phương án, tính xác suất liên quan người, đồ vật . . . 204
Dạng 0.5. Các bài toán đếm số phương án. Tính xác suất liên quan đến đa giác . . . 208

Dạng 0.6. Các bài toán đếm, sắp xếp liên quan đến vị trí, xếp chỗ 211

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN KIẾN THỨC TỔ HỢP - XÁC SUẤT

BÀI 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM

Định nghĩa 1. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai công đoạn liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện công đoạn thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai thì có $m \cdot n$ cách hoàn thành công việc.

Định lí 1. Giả sử một công việc H được hoàn thành qua k công đoạn liên tiếp

— Công đoạn thứ nhất có n_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách đó

— Công đoạn thứ hai có n_2 cách thực hiện, ứng với mỗi cách đó

— Công đoạn thứ ba có n_3 cách thực hiện, ứng với mỗi cách đó

— ...

— Công đoạn thứ k có n_k cách thực hiện.

Khi đó để hoàn thành công việc H ta có $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ cách thực hiện.

A. BÀI TẬP MẪU

DẠNG 1.1. Bài toán sử dụng quy tắc nhân

Sử dụng quy tắc nhân để giải một số bài đếm.
Giả sử một công việc H được hoàn thành qua k công đoạn liên tiếp

— *Công đoạn thứ nhất có n_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách đó*

— *Công đoạn thứ hai có n_2 cách thực hiện, ứng với mỗi cách đó*

— *Công đoạn thứ ba có n_3 cách thực hiện, ứng với mỗi cách đó*

— ...

— *Công đoạn thứ k có n_k cách thực hiện.*

Khi đó để hoàn thành công việc H ta có $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ cách thực hiện.

Bài 1. Bạn Q có 4 áo dài và 3 quần trắng. Khi bạn đến trường bạn Q có bao nhiêu cách trang phục ?
ĐS: 12 cách

Lời giải.
Mỗi cách mặc áo dài sẽ có tương ứng ba cách mặc quần trắng. Suy ra bạn Q có 4 cách chọn áo dài và 3 cách chọn quần trắng. Áp dụng quy tắc nhân ta có $4 \cdot 3 = 12$ cách trang phục. □

Bài 2. Một trường phổ thông có 12 học sinh chuyên tin và 18 học sinh chuyên toán. Thành lập một đoàn gồm hai người dự hội nghị sao cho có một học sinh chuyên tin và một học sinh chuyên toán. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đoàn như trên. **ĐS:** 216 cách

Lời giải.
Để có một đoàn đi dự hội nghị phải có đồng thời một học sinh chuyên tin và một học sinh chuyên toán.
Mỗi cách chọn một học sinh chuyên tin trong số 12 học sinh chuyên tin sẽ có 18 cách chọn một học sinh chuyên toán trong 18 học sinh chuyên toán. Theo quy tắc nhân ta có $12 \cdot 18 = 216$ cách. □

Bài 3. Cho một tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau ?
ĐS: 60 số

Lời giải.
Gọi số tự nhiên có ba chữ số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3}$, trong đó:

— a_1 có 5 cách chọn.

— a_2 có 4 cách chọn.

— a_3 có 3 cách chọn.

Do đó số các số tự nhiên n cần tìm là $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ số. □

Bài 4. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số gồm năm chữ số đôi một khác nhau được tạo từ các chữ số trong tập hợp A ? **ĐS:** 600 số

Lời giải.
Gọi số có năm chữ số đôi một khác nhau cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó

— a_1 có 5 cách chọn (vì để số n có nghĩa thì $a_1 \neq 0$).

— a_2 có 5 cách chọn.

— a_3 có 4 cách chọn.

— a_4 có 3 cách chọn.

— a_5 có 2 cách chọn.

Do vậy theo quy tắc nhân có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ số n cần tìm. □

Bài 5. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm sáu chữ số đôi một khác nhau được tạo nên từ tập A.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5.

ĐS: 5040 số, 360 số

Lời giải.

a) Gọi số có sáu chữ số đôi một khác nhau cần tìm là: $n_1 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Với a_1 có 7 cách chọn; a_2 có 6 cách chọn; a_3 có 5 cách chọn; a_4 có 4 cách chọn; a_5 có 3 cách chọn; a_6 có 2 cách chọn.
Suy ra có $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$ số cần tìm.

b) Gọi số có năm chữ số đôi một khác nhau cần tìm là: $n_2 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.
Do n_2 chia hết cho 5 nên $a_5 = 5$. Như vậy trong tập A chỉ còn lại 6 phần tử (bỏ số 5 đi).
Với a_1 có 6 cách chọn; a_2 có 5 cách chọn; a_3 có 4 cách chọn; a_4 có 3 cách chọn.
Suy ra có $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$ số cần tìm.

□

Bài 6. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5 được tạo thành từ các chữ số trong tập A. **ĐS:** 4680 số

Lời giải.
Gọi số có sáu chữ số đôi một khác nhau cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Do số n chia hết cho 5 nên a_6 chỉ có thể là 0 hoặc 5.
Xét các trường hợp sau

— $a_6 = 0$, khi đó $n_1 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_50}$.
Trong tập A lúc này còn lại 7 phần tử.
Với a_1 có 7 cách chọn; a_2 có 6 cách chọn; a_3 có 5 cách chọn; a_4 có 4 cách chọn; a_5 có 3 cách chọn.
Suy ra có $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520$ số có dạng n_1.

— $a_6 = 5$, khi đó $n_2 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_55}$.
Trong tập A lúc này còn lại 7 phần tử.
Với a_1 có 6 cách chọn ($a_1 \neq 0$); a_2 có 6 cách chọn; a_3 có 5 cách chọn; a_4 có 4 cách chọn; a_5 có 3 cách chọn.
Suy ra có $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 2160$ số có dạng n_2.

Vậy số các số cần tìm là $2160 + 2520 = 4680$. □

Bài 7. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số có nghĩa đôi một khác nhau chia hết cho 5 và luôn có chữ số 0? **ĐS:** 3970 số

Lời giải.
Gọi số có sáu chữ số có nghĩa là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Do số n chia hết cho 5 nên $a_6 = 0$ hoặc $a_6 = 5$.
Xét các trường hợp.

— $a_6 = 0$ khi đó số cần tìm có dạng $n_1 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_50}$.
Có $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520$ số n_1.

— $a_6 = 5$ khi đó số cần tìm có dạng $n_2 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_55}$.
Trong đó n_2 luôn có mặt chữ số 0 nhưng $a_1 \neq 0$, suy ra có 6 cách chọn a_1.
Còn lại 4 vị trí, nên có 4 vị trí để xếp chữ số 0.
Còn lại 3 vị trí và còn lại 5 chữ số khi đó
Vị trí thứ nhất có 5 cách chọn; vị trí thứ hai có 4 cách chọn; vị trí thứ 3 có 3 cách chọn.
Vậy số các số n_2 là $6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$ số dạng n_2.
Vậy có $1440 + 2520 = 3970$ số n cần tìm.

□

Bài 8. Từ năm chữ số $0; 1; 3; 5; 7$ có thể lập được bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5? **ĐS:** 54 số

Lời giải.
Gọi số có 4 chữ số khác nhau cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

— Vì số cần tìm không chia hết cho 5 nên $a_4 \neq \{0; 5\} \Rightarrow$ Vị trí số a_4 có 3 cách chọn.

— Vị trí số a_1 có 3 cách chọn (do $a_1 \neq a_4$ và $a_1 \neq 0$).

— Vị trí số a_2 có 3 cách chọn (do $a_2 \neq a_4, a_1$).

— Vị trí số a_3 có 2 cách chọn (do $a_3 \neq a_4, a_1, a_2$).

Do đó có $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ (số cần tìm). □

Bài 9. Có bao nhiêu số tự nhiên trong đó các chữ số khác nhau, nhỏ hơn 10000 được tạo thành từ năm chữ số: 0, 1, 2, 3, 4 ? **ĐS:** 157 số

Lời giải.
Các số nhỏ hơn 10000 thì phải bắt đầu từ các chữ số 1, 2, 3, 4 và chỉ có bốn, ba, hai, một chữ số.

— Gọi số đó là $n_1 = \overline{a_1a_2a_3a_4}$. Với a_1 có 4 cách chọn; a_2 có 4 cách chọn; a_3 có 3 cách chọn; a_4 có 2 cách chọn.
Do đó, trường hợp này có $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ số n_1.

— Số có ba chữ số $n_2 = \overline{a_1a_2a_3}$. Với a_1 có 4 cách chọn; a_2 có 4 cách chọn; a_3 có 3 cách chọn.
Do đó, trường hợp này có $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ số n_2.

— Số có hai chữ số $n_3 = \overline{a_1a_2}$. Với a_1 có 4 cách chọn; a_2 có 4 cách chọn.
Do đó, trường hợp này có $4 \cdot 4 = 16$ số n_3.

— Số có một chữ số: 5 số.

Vậy tất cả có $96 + 48 + 16 + 5 = 157$ số cần tìm. □

Bài 10. Có 20 sinh viên Toán và 45 sinh viên Tin học.

1. Có bao nhiêu cách chọn hai sinh viên khác nhau về khoa ? **ĐS:** 900
2. Có bao nhiêu cách chọn một sinh viên hoặc là Toán hoặc là Tin học ? **ĐS:** 65

Lời giải.

1. Để chọn hai sinh viên khác nhau về khoa, ta thực hiện hai công đoạn sau:

   — Chọn một sinh viên Toán có 20 cách chọn.

   — Chọn một sinh viên Tin có 45 cách chọn.

   Vậy có $20 \times 45 = 900$ cách chọn.

2. Để chọn một sinh viên hoặc là Toán hoặc là Tin học, ta có hai trường hợp:

   — Chọn một sinh viên Toán có 20 cách chọn.

   — Chọn một sinh viên Tin có 45 cách chọn.

   Vậy có $20 + 45 = 65$ cách chọn.

□

Bài 11. Một tòa nhà cao ốc có 39 tầng, mỗi tầng có 42 phòng. Hỏi có bao nhiêu phòng tất cả trong tòa nhà này ? **ĐS:** 1638

Lời giải.

— Số tầng của tòa nhà là 39.

— Số phòng mỗi tầng 42.

Vậy có $39 \times 42 = 1638$ phòng. □

Bài 12. Một trung tâm Internet có 35 chiếc máy tính. Mỗi máy có 28 cổng kết nối. Hỏi có bao nhiêu cổng khác nhau tại trung tâm này ? **ĐS:** 980

Lời giải.

— Số máy tính của trung tâm là 35 máy.

— Số cổng kết nối của mỗi máy tính là 28 cổng kết nối.

Vậy có $35 \times 28 = 980$ cổng kết nối. □

Bài 13. Có bao nhiêu biển đăng ký xe ô tô nếu mỗi biển số chứa một dãy ba chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), tiếp sau là bốn chữ số ? **ĐS:** 175760000

Lời giải.
Giả sử mỗi biển số xe là $a_1a_2a_3b_1b_2b_3b_4$,trong đó a_i là các chữ cái và b_i là các số.

— a_1 có 26 cách chọn.

— a_2 có 26 cách chọn.

— a_3 có 26 cách chọn.

— b_1 có 10 cách chọn.

— b_2 có 10 cách chọn.

— b_3 có 10 cách chọn.

— b_4 có 10 cách chọn.

Vậy có $26^3 \times 10^4 = 175760000$ biển số. □

Bài 14. Một phiếu bài thi trắc nghiệm có 12 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 câu trả lời. Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu tất cả các câu hỏi đều có trả lời ? **ĐS:** 16777216

Lời giải.

— Số cách điền câu hỏi thứ 1 là 4.

— Số cách điền câu hỏi thứ 2 là 4.

— ...

— Số cách điền câu hỏi thứ 12 là 4.

Vậy có $4^{12} = 16777216$ cách trả lời trắc nghiệm. □

Bài 15. Một mẫu áo sơ mi đặc biệt được thiết kế có kiểu cho nam và có kiểu cho nữ, có 12 màu và 2 cỡ cho mỗi người. Có bao nhiêu loại khác nhau của mẫu áo này sẽ được sản xuất ? **ĐS:** 576

Lời giải.

— Ta có số mẫu áo sơ mi là $12 \times 2 = 24$.

— Số cách chọn kiểu cho nam là 24.

— Số cách chọn kiểu cho nữ là 24.

Vậy có $24 \times 24 = 576$ mẫu. □

Bài 16. Từ Quảng Trị đến Quảng Ngãi có 4 con đường và có 6 đường từ Quảng Ngãi đến TPHCM. Có bao nhiêu con đường khác nhau để đi từ Quảng Trị đến TPHCM qua Quảng Ngãi? **ĐS:** 24

Lời giải.

— Số cách chọn đường đi từ Quảng Trị đến Quảng Ngãi là 4.

— Số cách chọn đường đi từ Quảng Ngãi đến TPHCM là 6.

Vậy có $4 \times 6 = 24$ cách chọn. □

Bài 17. Có bao nhiêu biển số xe máy được tạo thành nếu mỗi biển số gồm hai chữ số và tiếp theo là bốn chữ cái hoặc hai chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), tiếp theo là bốn chữ số ? **ĐS:** 457652×10^6

Lời giải.
Trường hợp 1: Biển số xe là $a_1a_2b_1b_2b_3b_4a_3a_4a_5a_6$, trong đó a_i là các số và b_i là các chữ cái.

— Số cách chọn a_1 là 10.

— Số cách chọn a_2 là 10.

— Số cách chọn b_1 là 26.

— Số cách chọn b_2 là 26.

— Số cách chọn b_3 là 26.

— Số cách chọn b_4 là 26.

— Số cách chọn a_3 là 10.

— Số cách chọn a_4 là 10.

— Số cách chọn a_5 là 10.

— Số cách chọn a_6 là 10.

Suy ra có $10^2 \times 26^4 \times 10^4 = 456976 \times 10^6$ biển số.
Trường hợp 2: Biển số xe là $a_1a_2b_1b_2a_3a_4a_5a_6$, trong đó a_i là các số và b_i là các chữ cái.

— Số cách chọn a_1 là 10.

— Số cách chọn a_2 là 10.

— Số cách chọn b_1 là 26.

— Số cách chọn b_2 là 26.

— Số cách chọn a_3 là 10.

— Số cách chọn a_4 là 10.

— Số cách chọn a_5 là 10.

— Số cách chọn a_6 là 10.

Suy ra có $10^2 \times 26^2 \times 10^4 = 676 \times 10^6$ biển số.
Vậy có $456976 \times 10^6 + 676 \times 10^6 = 457652 \times 10^6$ biển số. □

Bài 18. Có bao nhiêu hàm số đơn ánh từ tập có năm phần tử đến tập có số phần tử bằng:

1. 4; **ĐS:** Không có
2. 5; **ĐS:** 120
3. 6; **ĐS:** 720
4. 7. **ĐS:** 2520

Lời giải.
Giả sử hàm số

$$\begin{aligned} f: \ X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

! Hàm số f được gọi là đơn ánh nếu $\forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

1. Với Y có 4 phần tử nhỏ hơn số phần tử tập hợp X nên không có hàm số đơn ánh $f : X \longrightarrow Y$.

2. Hàm số số đơn ánh $f : X \longrightarrow Y$ với Y có 5 phần tử. Ta có:

   — $f(x_1)$ có 5 cách chọn.
   — $f(x_2)$ có 4 cách chọn.
   — $f(x_3)$ có 3 cách chọn.
   — $f(x_4)$ có 2 cách chọn.
   — $f(x_5)$ có 1 cách chọn.

   Vậy có $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ hàm số.

3. Hàm số số đơn ánh $f : X \longrightarrow Y$ với Y có 6 phần tử. Ta có:

— $f(x_1)$ có 6 cách chọn.
— $f(x_2)$ có 5 cách chọn.
— $f(x_3)$ có 4 cách chọn.
— $f(x_4)$ có 3 cách chọn.
— $f(x_5)$ có 2 cách chọn.

Vậy có $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ hàm số.

4 Hàm số số đơn ánh $f : X \longrightarrow Y$ với Y có 7 phần tử. Ta có:

— $f(x_1)$ có 7 cách chọn.
— $f(x_2)$ có 6 cách chọn.
— $f(x_3)$ có 5 cách chọn.
— $f(x_4)$ có 4 cách chọn.
— $f(x_5)$ có 3 cách chọn.

Vậy có $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ hàm số.

□

Bài 19. Có bao nhiêu hàm số đơn ánh từ tập $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ trong đó n là một số nguyên dương, tới tập $\mathrm{B} = \{0, 1\}$? **ĐS:** $n(n-1)$

Lời giải.
Giả sử hàm số

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Hàm số số đơn ánh $f : A \longrightarrow B$. Do $\mathrm{B} = \{0, 1\}$ có 2 phần tử nên điều kiện $n \geq 2$.

— Số cách chọn $x_1 \in A$ sao cho $f(x_1) = 0 \in B$ là n cách.

— Số cách chọn $x_2 \in A$ sao cho $f(x_2) = 1 \in B$ là $n - 1$ cách.

Vậy có $n \times (n-1) = n(n-1)$ hàm số. □

Bài 20. Cho tập hợp A gồm các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1 Có bao nhiêu số tự nhiên gồm sáu chữ số đôi một khác nhau?

2 Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2?

3 Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số đôi một khác nhau và các số này chia hết cho 5?

ĐS: 136080; 275520; 114240

Lời giải.

1 Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1, 6}$.

- a_1 có 9 cách chọn.
- a_2 có 9 cách chọn.
- a_3 có 8 cách chọn.
- a_4 có 7 cách chọn.
- a_5 có 6 cách chọn.
- a_6 có 5 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136080$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

(2) Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,7}$.
Trường hợp 1. $a_7 = 0$, thì a_7 có 1 cách chọn.

- a_1 có 9 cách chọn.
- a_2 có 8 cách chọn.
- a_3 có 7 cách chọn.
- a_4 có 6 cách chọn.
- a_5 có 5 cách chọn.
- a_6 có 4 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$ số.
Trường hợp 2. $a_7 \neq 0$ thì $a_7 \in \{2; 4; 6; 8\}$ nên a_7 có 4 cách chọn.

- a_1 có 8 cách chọn.
- a_2 có 8 cách chọn.
- a_3 có 7 cách chọn.
- a_4 có 6 cách chọn.
- a_5 có 5 cách chọn.
- a_6 có 4 cách chọn.

Vậy có $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 215040$ số.
Do đó có tất cả $60\,480 + 215\,040 = 275520$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

(3) Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,7}$.
Trường hợp 1. $a_7 = 0$, thì a_7 có 1 cách chọn.

- a_1 có 9 cách chọn.
- a_2 có 8 cách chọn.
- a_3 có 7 cách chọn.
- a_4 có 6 cách chọn.
- a_5 có 5 cách chọn.
- a_6 có 4 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$ số.
Trường hợp 2. $a_7 = 5$ thì a_7 có 1 cách chọn.

- a_1 có 8 cách chọn.
- a_2 có 8 cách chọn.
- a_3 có 7 cách chọn.
- a_4 có 6 cách chọn.
- a_5 có 5 cách chọn.
- a_6 có 4 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 53760$ số.
Do đó có tất cả $60\,480 + 53\,760 = 114240$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 21. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

(1) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau, chia hết cho 5 và chữ số 2 luôn có mặt đúng một lần?

② Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3?

③ Tính tổng các số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau mà các số này không có chữ số 0.

ĐS: 174; 40; 3999960

Lời giải.

① Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,5}$.
Trường hợp 1. $a_5 = 0$.

- a_5 có 1 cách chọn.
- Chữ số 2 có 4 vị trí đặt là a_1 hoặc a_2 hoặc a_3 hoặc a_4.
- Ba chữ số còn lại có $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 4 \cdot 24 = 96$ số.
Trường hợp 2. $a_5 = 5$, $a_1 = 2$.

- a_1 có 1 cách chọn.
- a_5 có 1 cách chọn.
- a_2 có 4 cách chọn.
- a_3 có 3 cách chọn.
- a_4 có 2 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ số.
Trường hợp 3. $a_5 = 5$, $a_1 \neq 2$.

- a_5 có 1 cách chọn.
- a_1 có 3 cách chọn.
- Chữ số 2 có 3 vị trí đặt là a_2 hoặc a_3 hoặc a_4.
- Hai chữ số còn lại có $3 \cdot 2 = 6$ cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ số.
Do đó có tất cả $96 + 24 + 54 = 174$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② Gọi $\overline{a_1a_2a_3}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,3}$. Xét các tập con gồm 3 phần tử của tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Ta thấy chỉ có các tập sau thỏa mãn điều kiện tổng các chữ số chia hết cho 3 là

$$A_1 = \{0, 1, 2\}, A_2 = \{0, 1, 5\}, A_3 = \{0, 2, 4\}, A_4 = \{0, 4, 5\},$$
$$A_5 = \{1, 2, 3\}, A_6 = \{1, 3, 5\}, A_7 = \{2, 3, 4\}, A_8 = \{3, 4, 5\}.$$

Khi $a, b, c \in A_1, A_2, A_3, A_4$ mỗi trường hợp lập được 4 số thỏa mãn yêu cầu.
Khi $a, b, c \in A_5, A_6, A_7, A_8$ mỗi trường hợp lập được 6 số thỏa mãn yêu cầu.
Vậy có $4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 40$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

③ Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A \setminus \{0\}, i = \overline{1,5}$.

- a_1 có 5 cách chọn.
- a_2 có 4 cách chọn.
- a_3 có 3 cách chọn.
- a_4 có 2 cách chọn.
- a_5 có 1 cách chọn.

Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Gọi S là tổng của 120 số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau vừa tìm được.
Mỗi chữ số 1, 2, 3, 4, 5 xuất hiện ở hàng chục nghìn, hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị là 24 lần. Mà $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ nên

$$S = 24 \cdot \left(15 \cdot 10^4 + 15 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10 + 15\right) = 3999960.$$

□

Bài 22. Cho các số nguyên dương có ba chữ số khác nhau.

1. Có bao nhiêu số chia hết cho 7?
2. Có bao nhiêu số chia hết cho 3?
3. Có bao nhiêu số chia hết cho 4?
4. Có bao nhiêu số chia hết cho 3 và 4?
5. Có bao nhiêu số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4?

ĐS: 96, 228, 160, 57, 171

Lời giải.

1. Số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 7 là 105.
Số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số chia hết cho 7 là 994.
Số các số tự nhiên có 3 chữ số bất kỳ chia hết cho 7 là $\dfrac{994-105}{7}+1=128$ số.
Số tự nhiên có 3 chữ số giống nhau chia hết cho 7 là 777. Tức là chỉ có 1 số có 3 chữ số giống nhau chia hết cho 7.
Ta tính các số có 2 chữ số giống nhau chia hết cho 7. Đặt $A=\{0;1;2;\ldots;9\}$.
Trường hợp 1. Số cần tìm có dạng $\overline{aab}$, trong đó $a,b\in A\setminus\{7\}$, $a\neq 0$.
Vì $\overline{aab}$ chia hết cho 7 nên

$$[(3a+a)\cdot 3+b]\,\vdots\,7 \Leftrightarrow (7a+5a+b)\,\vdots\,7 \Leftrightarrow (5a+b)\,\vdots\,7.$$

Ta có các trường hợp sau:

- Với $a=1$ thì $b=2$ hoặc $b=9$.
- Với $a=2$ thì $b=4$.
- Với $a=3$ thì $b=6$.
- Với $a=4$ thì $b=1$ hoặc $b=8$.
- Với $a=5$ thì $b=3$.
- Với $a=6$ thì $b=5$.
- Với $a=8$ thì $b=2$ hoặc $b=9$.
- Với $a=9$ thì $b=4$.

Vậy có 11 số trong trường hợp này.
Trường hợp 2. Số cần tìm có dạng $\overline{abb}$, trong đó $a,b\in A\setminus\{7\}$, $a\neq 0$.
Vì $\overline{abb}$ chia hết cho 7 nên

$$[(3a+b)\cdot 3+b]\,\vdots\,7 \Leftrightarrow (7a+2a+4b)\,\vdots\,7 \Leftrightarrow 2(a+2b)\,\vdots\,7 \Leftrightarrow (a+2b)\,\vdots\,7.$$

Ta có các trường hợp sau:

- Với $a=1$ thì $b=3$.
- Với $a=2$ thì $b=6$.
- Với $a=3$ thì $b=2$ hoặc $b=9$.
- Với $a=4$ thì $b=5$.
- Với $a=5$ thì $b=1$ hoặc $b=8$.
- Với $a=6$ thì $b=4$.
- Với $a=8$ thì $b=3$.
- Với $a=9$ thì $b=6$.

Vậy có 10 số trong trường hợp này.
Trường hợp 3. Số cần tìm có dạng $\overline{aba}$, trong đó $a, b \in A \setminus \{7\}$, $a \neq 0$.
Vì $\overline{aba}$ chia hết cho 7 nên

$$[(3a+b)\cdot 3 + a] \vdots 7 \Leftrightarrow (7a+3a+3b) \vdots 7 \Leftrightarrow 3(a+b) \vdots 7 \Leftrightarrow (a+b) \vdots 7.$$

Ta có các trường hợp sau:

- Với $a = 1$ thì $b = 6$.
- Với $a = 2$ thì $b = 5$.
- Với $a = 3$ thì $b = 4$.
- Với $a = 4$ thì $b = 3$.
- Với $a = 5$ thì $b = 2$ hoặc $b = 9$.
- Với $a = 6$ thì $b = 1$ hoặc $b = 8$.
- Với $a = 8$ thì $b = 6$.
- Với $a = 9$ thì $b = 5$.

Vậy có 10 số trong trường hợp này.
Do đó, số các số nguyên dương có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 7 là

$$128 - (1 + 11 + 10 + 10) = 96.$$

(2) Số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 3 là 102.
Số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số chia hết cho 3 là 999.
Hai số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3 cách nhau là 3 đơn vị.
Vậy có $\dfrac{999-102}{3} + 1 = 300$ số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 3.
Bây giờ ta tính số các số tự nhiên (trong 300 số nói trên) có đúng 2 chữ số giống nhau.
- Có đúng 2 chữ số 0 là các số $\{300; 600; 900\}$.
- Có đúng 1 chữ số 0 (2 chữ số còn lại giống nhau) là các số $\{303; 330; 606; 660; 909; 990\}$.
- Không có chữ số 0 và có đúng hai chữ số giống nhau. Các số này lập được từ các bộ $\{1;4\}$, $\{1;7\}$, $\{4;7\}$, $\{2;5\}$, $\{2;8\}$, $\{5;8\}$, $\{3;6\}$, $\{3;9\}$, $\{6;9\}$. Mỗi bộ như vậy lập được 6 số chia hết cho 3 (chẳng hạn, với bộ $\{1;4\}$ thì ta có các số 114, 141. 411, 144, 414, 441) nên có $6 \cdot 9 = 54$ số.
Số các số tự nhiên có 3 chữ số giống nhau là 9.
Do đó có tất cả $300 - (3 + 6 + 54 + 9) = 228$ số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

(3) Các số tự nhiên chia hết cho 4 khi hai chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 4. Ta xét các trường hợp sau:

- $\overline{a20}$, $\overline{a40}$, $\overline{a60}$, $\overline{a80}$, $\overline{a04}$, $\overline{a08}$. Mỗi trường hợp nhỏ như vậy có thể lập được 8 số, do đó có
$$8 \cdot 6 = 48 \text{ số}.$$
- $\overline{a12}$, $\overline{a32}$, $\overline{a52}$, $\overline{a72}$, $\overline{a92}$, $\overline{a24}$, $\overline{a64}$, $\overline{a84}$, $\overline{a16}$, $\overline{a36}$, $\overline{a56}$, $\overline{a76}$, $\overline{a96}$, $\overline{a28}$, $\overline{a48}$, $\overline{a68}$. Mỗi trường hợp nhỏ như vậy có thể lập được 7 số, do đó có $7 \cdot 16 = 112$ số.

Vậy có tất cả $48 + 112 = 160$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

(4) Trong các số chia hết cho 4 ở trên có các số chia hết cho 3.

- Với $\overline{a20}$, $\overline{a40}$, $\overline{a60}$, $\overline{a80}$ thì số các số chia hết cho 3 tương ứng là 3, 3, 2, 3.
- $\overline{a12}$, $\overline{a32}$, $\overline{a52}$, $\overline{a72}$, $\overline{a92}$ thì số các số chia hết cho 3 tương ứng là 3, 3, 1, 3, 3.
- $\overline{a04}$, $\overline{a24}$, $\overline{a64}$, $\overline{a84}$ thì số các số chia hết cho 3 tương ứng là 3, 3, 3, 3.
- $\overline{a16}$, $\overline{a36}$, $\overline{a56}$, $\overline{a76}$, $\overline{a96}$ thì số các số chia hết cho 3 tương ứng là 3, 1, 3, 3, 1.
- $\overline{a08}$, $\overline{a28}$, $\overline{a48}$, $\overline{a68}$ thì số các số chia hết cho 3 tương ứng là 3, 1, 3, 3.

Vậy có tất cả $17 \cdot 3 + 2 + 4 = 57$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

(5) Số các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4 là

$$228 - 57 = 171.$$

□

Bài 23. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.

1. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số không chứa cùng một chữ số ba lần?
2. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 3?
3. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 5?
4. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số bắt đầu bằng chữ số lẻ và các chữ số đôi một khác nhau?
5. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số có đúng hai chữ số 7?

ĐS: 891; 300; 180; 360; 29

Lời giải.
Gọi $\overline{a_1a_2a_3}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,3}$.

1. Trước hết ta tính số các số tự nhiên có 3 chữ số bất kỳ.
   - a_1 có 9 cách chọn.
   - a_2 có 10 cách chọn.
   - a_3 có 10 cách chọn.

   Vậy có $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ số có 3 chữ số bất kỳ.
   Các số có 3 chữ số giống nhau là $\{111; 222; 333; \ldots; 999\}$.
   Do đó có $900 - 9 = 891$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
2. Số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 3 là 102.
   Số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số chia hết cho 3 là 999.
   Hai số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3 cách nhau là 3 đơn vị.
   Vậy có $\dfrac{999 - 102}{3} + 1 = 300$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
3. a_3 có 2 cách chọn.
   a_1 có 9 cách chọn.
   a_2 có 10 cách chọn.
   Vậy có $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
4. a_1 có 5 cách chọn.
   a_2 có 9 cách chọn.
   a_3 có 8 cách chọn.
   Vậy có $5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
5. **Trường hợp 1.** Số cần tìm có dạng $\overline{77c}$. Trường hợp này có 10 số như vậy.
   Trường hợp 2. Số cần tìm có dạng $\overline{7b7}$. Trường hợp này cũng có 10 số như vậy.
   Trường hợp 3. Số cần tìm có dạng $\overline{a77}$. Trường hợp này có 9 số như vậy.
   Vậy có $10 + 10 + 9 = 29$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 24. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \ldots; 9\}$.

1. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau và là số lẻ?
2. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số không chứa cùng một chữ số hai lần?
3. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số kết thúc bằng chữ số chẵn?
4. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau, bắt đầu bằng chữ số lẻ, kết thúc bằng chữ số chẵn?

ĐS: 1680; 3249; 2916; 840

Lời giải.
Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,4}$.

1. a_4 có 5 cách chọn.
   a_1 có 8 cách chọn.
   a_2 có 7 cách chọn.
   a_3 có 6 cách chọn.
   Vậy có $5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1680$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. **Trường hợp 1.** Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ số.
   Trường hợp 2. Số có số tự nhiên có 4 chữ số giống nhau là 9 số.
   Trường hợp 3. Ta tính số các số tự nhiên 3 chữ số giống nhau, đó là các trường hợp $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$, $\overline{baaa}$ (với $a \neq b$). Mỗi trường hợp nhỏ này đều có $9 \cdot 8 = 72$ số. Vậy có $3 \cdot 72 = 216$ số trong trường hợp này.
   Do đó có tất cả $3024 + 9 + 216 = 3249$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. a_4 có 4 cách chọn.
   a_1 có 9 cách chọn.
   a_2 có 9 cách chọn.
   a_3 có 9 cách chọn.
   Vậy có $4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 2916$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. a_1 có 5 cách chọn.
   a_4 có 4 cách chọn.
   a_2 có 7 cách chọn.
   a_3 có 6 cách chọn.
   Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 = 840$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

QUY TẮC CỘNG

Quy tắc.
Một công việc H có thể được thực hiện bởi một trong k phương án $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_k$ với mỗi phương án độc lập nhau, trong đó

- Phương án H_1 có n_1 cách thực hiện;
- Phương án H_2 có n_2 cách thực hiện;
- Phương án H_3 có n_3 cách thực hiện;
  ....
- Phương án H_k có n_k cách thực hiện.

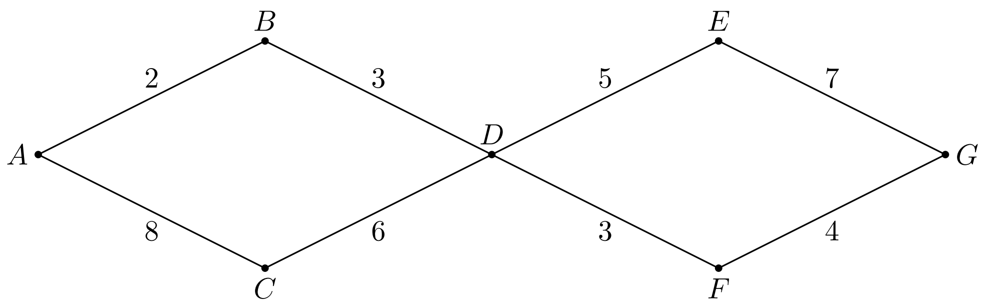
Khi đó để hoàn thành công việc H ta có $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$ cách thực hiện.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 25. Một học sinh thi cuối kỳ có thể chọn một trong ba loại đề: đề dễ có 48 câu hỏi, đề trung bình có 40 câu hỏi và đề khó có 32 câu hỏi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một câu hỏi từ các đề thi trên? **ĐS:** 120

Lời giải.
Số cách chọn 1 câu hỏi từ đề dễ là 48 cách.
Số cách chọn 1 câu hỏi từ đề trung bình là 40 cách.
Số cách chọn 1 câu hỏi từ đề khó là 32 cách.
Vậy số cách chọn 1 câu hỏi là $48 + 40 + 32 = 120$ cách. □

Bài 26. Một mạng đường giao thông nối các tỉnh A, B, C, D, E, F và G như hình vẽ, sau đó trong đó chữ số 2 viết trên cạnh AB có nghĩa là có 2 con đường nối A và $B, \ldots$ Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến G?



ĐS: 2538

Lời giải.
Theo như hình vẽ thì để đi từ A đến G ta có thể thực hiện theo một trong các trường hợp sau sau:

- **Trường hợp 1.** $A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow G$.
  Đi từ A đến B có 2 cách.
  Đi từ B đến D có 3 cách.
  Đi từ D đến E có 5 cách.
  Đi từ E đến G có 7 cách.
  Vậy đi từ A đến G có $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ cách.
- **Trường hợp 2.** $A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow F \longrightarrow G$.
  Số cách đi từ A đến G trong trường hợp này là $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 72$ cách.
- **Trường hợp 3.** $A \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow G$.
  Số cách đi từ A đến G trong trường hợp này là $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$ cách.
- **Trường hợp 4.** $A \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow F \longrightarrow G$.
  Số cách đi từ A đến G trong trường hợp này là $8 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 = 576$ cách.

Vậy số cách đi từ A đến G là $210 + 72 + 1680 + 576 = 2538$ cách. □

Bài 27. Cho tập hợp A gồm sáu chữ số tự nhiên 0, 1, 2, 3, 4, 5.

1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau và là số chẵn?
2. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5?

ĐS: 312, 216

Lời giải.
Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,5}$.

1. **Trường hợp 1.** $a_5 = 0$, thì a_5 có 1 cách chọn.
   a_1 có 5 cách chọn.
   a_2 có 4 cách chọn.
   a_3 có 3 cách chọn.
   a_4 có 2 cách chọn.
   Vậy có $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ số.
   Trường hợp 2. $a_5 \neq 0$, thì $a_5 \in \{2; 4\}$ nên a_5 có 2 cách chọn.
   a_1 có 4 cách chọn.
   a_2 có 4 cách chọn.
   a_3 có 3 cách chọn.
   a_4 có 2 cách chọn.

Vậy có $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 192$ số.
Do đó có tất cả $120 + 192 = 312$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. **Trường hợp 1.** $a_5 = 0$, thì a_5 có 1 cách chọn.
a_1 có 5 cách chọn.
a_2 có 4 cách chọn.
a_3 có 3 cách chọn.
a_4 có 2 cách chọn.
Vậy có $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ số.
Trường hợp 2. $a_5 = 5$, thì a_5 có 1 cách chọn.
a_1 có 4 cách chọn.
a_2 có 4 cách chọn.
a_3 có 3 cách chọn.
a_4 có 2 cách chọn.
Vậy có $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ số.
Do đó có tất cả $120 + 96 = 216$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 28. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số 1 luôn có mặt và là số lẻ?

2. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số bắt đầu là chữ số lẻ, chữ số kết thúc là chữ số chẵn?

ĐS: 204; 720

Lời giải.

1. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,4}$.
Vì n là số lẻ nên $a_4 \in \{1; 3; 5\}$.
Trường hợp 1. $a_4 = 1$, thì a_4 có 1 cách chọn.
a_1 có 5 cách chọn.
a_2 có 5 cách chọn.
a_3 có 4 cách chọn.
Vậy có $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ số.
Trường hợp 2. $a_1 = 1$, thì a_1 có 1 cách chọn.
a_4 có 2 cách chọn.
a_2 có 5 cách chọn.
a_3 có 4 cách chọn.
Vậy có $1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ số.
Trường hợp 3. $a_1 \neq 1$ và $a_4 \neq 1$.
a_4 có 2 cách chọn.
a_1 có 4 cách chọn.
Chữ số 1 có 2 vị trí đặt là a_2 hoặc a_3.
Chữ số còn lại (a_2 hoặc a_3) có 4 cách chọn.
Vậy có $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 64$ số.
Do đó có tất cả $100 + 40 + 64 = 204$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó $a_i \in A, i = \overline{1,5}$. Vì n có chữ số tận cùng là chữ số chẵn nên $a_5 \in \{0; 2; 4; 6\}$.
a_1 có 3 cách chọn.
a_5 có 4 cách chọn.
a_2 có 5 cách chọn.
a_3 có 4 cách chọn.
a_4 có 3 cách chọn.
Vậy có tất cả $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 720$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 29. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có bốn chữ số khác nhau, trong đó luôn có mặt chữ số 5? **ĐS:** 420

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abcd}$.
* Trước hết ta đi tìm số các số có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số trên.
Do $a \neq 0$ nên a có 6 cách chọn.
Ta có, b có 6 cách chọn.

c có 5 cách chọn.

d có 4 cách chọn.

Suy ra có $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ (số).
* Tiếp theo ta đi tìm số các số có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số trên, trong đó không có mặt chữ số 5. Tức là ta đi tìm số các số có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 6.
Do $a \neq 0$ nên a có 5 cách chọn.
Ta có, b có 5 cách chọn.

c có 4 cách chọn.

d có 3 cách chọn.

Suy ra có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ (số).
Vậy có $720 - 300 = 420$ số cần lập. □

Bài 30. Từ sáu chữ số 0, 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5? **ĐS:** 192

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abcd}$.

Do $n \not\vdots\, 5$ nên $d \neq 0$, $d \neq 5$. Suy ra d có 4 cách chọn.
Khi đó ta có, a có 4 cách chọn.

b có 4 cách chọn.

c có 3 cách chọn.

Vậy có $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 192$ số cần lập. □

Bài 31. Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau tạo thành từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 mà các số đó nhỏ hơn 345? **ĐS:** 50

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abc}$. Vì $n < 345$ nên $a \leq 3$.

TH1. $a = 3$. Khi đó $n = \overline{3bc}$.
Vì $n < 345$ nên $b \leq 4$.

+) $b = 4$. Khi đó $n = \overline{34c}$.
Vì $n < 345$ nên $c < 5$. Do đó c có 2 cách chọn.

+) $b < 4$. Khi đó b có 2 cách chọn và c có 4 cách chọn.

Suy ra có $2 + 2 \cdot 4 = 10$ số.

TH2. $a < 3$. Suy ra a có 2 cách chọn.
Khi đó ta có b có 5 cách chọn và c có 4 cách chọn.
Suy ra có $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ số.

Vậy có $10 + 40 = 50$ số cần lập. □

Bài 32. Từ các chữ số 0, 4, 5, 7, 8, 9 lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau lớn hơn 5000? **ĐS:** 240

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abcd}$.
Do $n > 5000$ nên $a \geq 5$. Suy ra a có 4 cách chọn.
Ta có b có 5 cách chọn.

c có 4 cách chọn.

d có 3 cách chọn.

Vậy có $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ số cần lập. □

Bài 33. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số có tám chữ số, trong đó chữ số 5 lặp lại đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần? **ĐS:** 5880

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$.
Trước tiên ta coi ba chữ số 5 khác nhau.
Do $a_1 \neq 0$ nên a_1 có 7 cách chọn.
Khi đó ta có a_2 có 7 cách chọn.

a_3 có 6 cách chọn.

a_4 có 5 cách chọn.

a_5 có 4 cách chọn.

a_6 có 3 cách chọn.

a_7 có 2 cách chọn.

a_8 có 1 cách chọn.

Vậy có $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 35280$ số.
Do có ba chữ số 5 nên mỗi số được tính $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lần nên có $\dfrac{35280}{6} = 5880$ số cần lập. □

Bài 34. Cho các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hãy tính tổng tất cả các số có năm chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số trên? **ĐS:** 3999960

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abcde}$.
Ta có a có 5 cách chọn.

b có 4 cách chọn.

c có 3 cách chọn.

d có 2 cách chọn.

e có 1 cách chọn.

Suy ra có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ số cần lập.
Mỗi chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có số lần xuất hiện ở các hàng chục nghìn, hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị là như nhau nên tổng các số trên là

$$S = \frac{120}{5} \cdot (1+2+3+4+5) \cdot \left(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1\right) = 3999960.$$

□

Bài 35. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau thỏa mãn

1. bắt đầu bằng 123.
2. không bắt đầu bằng 123.

ĐS: a) 6, b) 594

Lời giải.

1. Số cần lập có dạng $n = \overline{abcde}$.
Do n bắt đầu bằng 123 nên $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
Khi đó d có 3 cách chọn và e có 2 cách chọn.
Suy ra có $3 \cdot 2 = 6$ số cần lập.

2. Trước hết ta đi tìm số các số có năm chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abcde}$.
Ta có a có 5 cách chọn.
b có 5 cách chọn.
c có 4 cách chọn.
d có 3 cách chọn.
e có 2 cách chọn.
Suy ra có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ số.
Mà có 6 số có năm chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 bắt đầu bằng 123 nên có $600 - 6 = 594$ số cần lập.

□

Bài 36. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm năm chữ số khác nhau lớn hơn 70000? **ĐS:** 4368

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abcde}$.
Do $n > 70000$ nên $a \geq 7$.

TH1. $a \in \{7; 9\}$. Suy ra a có 2 cách chọn.
Do n lẻ nên $e \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Mà $e \neq a$ nên suy ra e có 4 cách chọn.
Khi đó b có 8 cách chọn.
c có 7 cách chọn.
d có 6 cách chọn.
Vậy có $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$ số.

TH2. $a = 8$. Suy ra a có 1 cách chọn.
Do n lẻ nên $e \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Suy ra e có 5 cách chọn.
Khi đó b có 8 cách chọn.
c có 7 cách chọn.
d có 6 cách chọn.
Suy ra có $1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1680$ số.

Vậy có $2688 + 1680 = 4368$ số cần lập. □

Bài 37. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có đúng năm chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước? **ĐS:** 86

Lời giải.
Số cần lập có dạng $n = \overline{abcde}$.
Theo giả thiết ta có $1 \leq a < b < c < d < e$ suy ra ta có $e \geq 5$.
Vì n là số lẻ nên $e \in \{5; 7; 9\}$.

TH1. $e = 5$.
Vì $a < b < c < d < e = 5$ nên $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.
Suy ra trường hợp này có 1 số thỏa mãn.

TH2. $e = 7$. Suy ra $1 \leq a < b < c < d \leq 6$.
Trước tiên, ta tìm số các số có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có dạng $n_1 = \overline{a_1b_1c_1d_1}$.

Ta có a_1 có 6 cách chọn.

b_1 có 5 cách chọn.

c_1 có 4 cách chọn.

d_1 có 3 cách chọn.

Suy ra có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ số.
Với mỗi bộ bốn chữ số khác nhau (trong đó các chữ số đều khác 0), ta lập được $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ số có bốn chữ khác nhau.
Vậy có $\dfrac{360}{24} = 15$ bộ có bốn chữ khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Với mỗi bộ bốn chữ số khác nhau bất kì, ta có một và chỉ một cách xếp sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.
Suy ra trường hợp này có 15 số.

TH3. $e = 9$. Suy ra $1 \le a < b < c < d \le 8$. Tương tự như TH2, ta có $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ số có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Suy ra trường hợp này có $\dfrac{1680}{24} = 70$ số.

Vậy có $1 + 15 + 70 = 86$ số cần lập. □

BÀI 2. CHỈNH HỢP

A. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau được lấy từ tập hợp A? **ĐS:** 2520

Lời giải.
Sô các số có năm chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập A là số chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử.
Suy ra số các số cần tìm là: $\mathrm{A}_7^5 = \dfrac{7!}{(7-5)!} = 2520$ số. □

Bài 2. Có tối đa bao nhiêu số điện thoại có bảy chữ số bắt đầu bằng chữ số 8 sao cho:

1. Các chữ số đôi một khác nhau.
2. Các chữ số tùy ý.

ĐS: a) 60480 b) 1.000.000

Lời giải.

1. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ là số cần tìm.
Trong các số tự nhiên: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta chọn các chữ số đôi một khác nhau nên:
Vì $a_1 = 8$ nên chọn 6 trong 9 chữ số còn lại là một chỉnh hợp chập 6 của 9 nên có $\mathrm{A}_9^6 = 60480$ số điện thoại.

2. Các chữ số tùy ý nên

a_2 có 10 cách chọn.
a_3 có 10 cách chọn.
a_4 có 10 cách chọn.
a_5 có 10 cách chọn.
a_6 có 10 cách chọn.
a_7 có 10 cách chọn.

Suy ra có $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1.000.000$ số điện thoại.

□

Bài 3. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau? **ĐS:** 4536

Lời giải.
Số các số có bốn chữ số đôi một khác nhau (tính cả số 0 đứng đầu) bằng số chỉnh hợp chập 4 của 10 là A_{10}^4 số.
Số các số có bốn chữ số khác nhau và có chữ số 0 đứng đầu là một chỉnh hợp chập 3 của 9 bằng A_9^3 số.
Số các số cần tìm là: $\mathrm{A}_{10}^4 - \mathrm{A}_9^3 = 5040 - 504 = 4536$ số. □

Bài 4. Cho các số 0, 1, 2 ,3, 4, 5. Hãy tìm tất cả các số

1. Có sáu chữ số đôi một khác nhau.
2. Có ba chữ số đôi một khác nhau.

ĐS: a) 600 b) 100

Lời giải.

1. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm.
Số các số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau được chọn trong sáu chữ số đã cho là số chỉnh hợp chập 6 của 6 bằng A_6^6.
Số các số có sáu chữ số khác nhau có chữ số 0 đứng đầu bằng số chỉnh hợp chập 5 của 5 là A_5^5.
Số các số cần tìm là $\mathrm{A}_6^6 - \mathrm{A}_5^5 = 720 - 120 = 600$ số.

2. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số cần tìm.
Chọn ba số trong sáu số là một chỉnh hợp chập 3 của 6 nên có A_6^3 số.
Số các số có ba chữ số khác nhau có chữ số 0 đứng đầu là một chỉnh hợp chập 2 của 5 bằng A_5^2.
Số các số cần tìm bằng $\mathrm{A}_6^3 - \mathrm{A}_5^2 = 120 - 20 = 100$ số.

□

Bài 5. Từ sáu chữ số 0, 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5? **ĐS:** 192

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm.
Vì n không chia hết cho 5 $\Rightarrow a_4$ phải khác 0 và khác 5.
Ta có 4 cách chọn a_4 (chọn 1, 2, 7, 9), có 4 cách chọn a_1 và có A_4^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.
Suy ra ta có $4 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 192$ số thoả mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 6. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được

1. bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau?
2. bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 5 chữ số khác nhau?

ĐS: a) 420 b) 900

Lời giải.

1. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập. Vì n chẵn suy ra a_4 phải là 0, 2, 4, 6.
Cách 1: a_4 có 4 cách chọn.
Có A_6^3 cách chọn $\overline{a_1a_2a_3}$ suy ra có $4 \cdot \mathrm{A}_6^3$ số chẵn có bốn chữ số khác nhau (tính cả trường hợp $a_1 = 0$).
Bây giờ ta phải tìm trong $4 \cdot \mathrm{A}_6^3$ số đó có bao nhiêu số bắt đầu bằng số 0.
Với $a_1 = 0$ thì a_4 có 3 cách chọn.
Có A_5^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.

Suy ra có $3 \cdot A_5^3$ số chẵn có bốn chữ số khác nhau bắt đầu bằng chữ số 0.
Vậy có thể lập được $4 \cdot A_6^3 - 3 \cdot A_5^2 = 480 - 60 = 420$ số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau.
Cách 2: Với $a_4 = 0$, a_4 có 1 cách chọn.
a_1 có 6 cách chọn.
Có A_5^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.
Suy ra có $1 \cdot 6 \cdot A_5^2$ số thoả mãn.
Với $a_4 \neq 0$, a_4 có 3 cách chọn.
a_1 có 5 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
Có A_5^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.
Vậy có thể lập được $1 \cdot 6 \cdot A_5^2 + 3 \cdot 5 \cdot A_5^2 = 120 + 300 = 420$ số thoả mãn yêu cầu.
Cách 3: Có A_7^4 số các số có 4 chữ số khác nhau (tính cả số 0 đứng đầu).
Có A_6^3 số các số có bốn chữ số khác nhau bắt đầu bằng chữ số 0.
Suy ra có $A_7^4 - A_6^3 = 720$ số các số có bốn chữ số khác nhau.
Bây giờ ta tìm trong 720 số trên có bao nhiêu số lẻ có bốn chữ số khác nhau.
Vì n lẻ suy ra a_4 phải là 1, 3 hoặc 5 nên a_4 có 3 cách chọn.
a_1 có 5 cách chọn vì (vì $a_1 \neq 0$).
Có A_5^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.
Suy ra có $3 \cdot 5 \cdot A_5^2 = 300$ số lẻ có bốn chữ số khác nhau.
Vậy có tất cả $720 - 300 = 420$ số chẵn có bốn chữ số khác nhau.

2. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần tìm
n lẻ nên a_5 phải là 1, 3 hoặc 5 nên a_5 có 3 cách chọn.
Có A_6^4 cách chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.
Suy ra có $3 \cdot A_6^4$ số lẻ có bốn chữ khác nhau(tính cả số 0 đứng đầu).
Bây giờ ta phải tìm trong $3 \cdot A_6^4$ có bao nhiêu số lẻ có năm chữ số khác nhau bắt đầu bằng số 0.
Ta có a_5 có 3 cách chọn.
Có A_5^3 cách chọn $\overline{a_2a_3a_4}$.
Suy ra có $3 \cdot A_6^4 - 3 \cdot A_5^3 = 1080 - 180 = 900$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 7. Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 mà các số đó nhỏ hơn số 345? **ĐS:** 50

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số cần tìm.
Cách 1:
$n < 345 \Rightarrow a_1$ chỉ có thể là 1, 2, 3.
+ Trường hợp 1: $a_1 = 1$ thì $n = \overline{1a_2a_3}$ nên có A_5^2 cách chọn $1\overline{a_2a_3}$.
+ Trường hợp 2: $a_1 = 2$ thì $n = \overline{2a_2a_3}$ nên có A_5^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.
+ Trường hợp 3: $a_1 = 3$ thì $n = \overline{3a_2a_3}$.
Với $a_2 = 1$ hoặc $a_2 = 2$ thì a_3 có 4 cách chọn suy ra có $2 \cdot 4 = 8$ số n.
Với $a_2 = 4$ thì $n = \overline{34a_3}$ suy ra a_3 có 2 cách chọn là 1 hoặc 2 nên có 2 số n.
Vậy có tất cả $A_5^2 + A_5^2 + 8 + 2 = 50$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.
Cách 2:
Có A_6^2 số các số có ba chữ số khác nhau.
Bây giờ ta phải tìm trong A_6^3 có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau lớn hơn hoặc bằng số 345.
+ Nếu $n = \overline{34a_3}$, thì a_3 có 2 cách chọn là 5 hoặc 6 nên có 2 số cần tìm không nhỏ hơn 345.
+ Nếu $n = \overline{35a_3}$ thì a_3 có 4 cách chọn nên có 4 số cần tìm lớn hơn 345.
+ Nếu $n = \overline{36a_3}$ thì a_3 có 4 cách chọn nên có 4 số cần tìm lớn hơn 345.
+ Nếu a_1 là 4, 5, 6 thì a_1 có 3 cách chọn và có A_5^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$ nên có $3 \cdot A_5^2$ số cần tìm lớn hơn 345.
Vậy có $A_6^3 - (2 + 4 + 4 + 3 \cdot A_5^2) = 120 - 70 = 50$ số có ba chữ số khác nhau và nhỏ hơn 345.

□

Bài 8. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau chia hết cho 5? **ĐS:** 952

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm. Vì n chia hết cho 5 nên a_4 chỉ có thể là 0 hoặc 5.
Cách 1:
a_4 có 2 cách chọn (chọn 0 hoặc 5).
Có A_9^3 cách chọn $\overline{a_1a_2a_3}$.
Suy ra có $2 \cdot \mathrm{A}_9^3$ số có bốn chữ số chia hết cho 5 (tính cả trường hợp có số 0 đứng đầu).
Bây giờ ta phải tìm trong $2 \cdot \mathrm{A}_9^3$ có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau chia hết cho 5 và có chữ số 0 đứng đầu, lúc này

a_4 có 1 cách chọn.
a_1 có 1 cách chọn.
Có A_8^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.

Vậy có tất cả $2 \cdot \mathrm{A}_9^3 - 1 \cdot 1 \cdot \mathrm{A}_8^2 = 952$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.
Cách 2:
Có A_{10}^4 số các số có bốn chữ số khác nhau.
Có A_9^3 số các số có bốn chữ số khác nhau bắt đầu bằng số 0.
Suy ra có $\mathrm{A}_{10}^4 - \mathrm{A}_9^3$ số có nghĩa có bốn chữ số khác nhau.
Bây giờ ta tìm số các số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

n không chia hết cho 5 nên a_4 phải khác 0 và khác 5 nên a_4 có 8 cách chọn.
a_1 có 8 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
Có A_8^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.

Suy ra có $8 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^2$ số các số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.
Vậy có tất cả $\mathrm{A}_{10}^4 - \mathrm{A}_9^3 - 8 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^2 = 952$ số thoả mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 9. Cho tám chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ tám chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số mỗi số có bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 10. **ĐS:** 1260

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.
n không chia hết cho 10 nên a_4 phải khác 0.
Cách 1:
a_4 có 7 cách chọn.
a_1 có 6 cách chọn.
Có A_6^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.
Suy ra có $6 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_6^2 = 1260$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.
Cách 2:
Có A_8^4 số có bốn chữ số khác nhau (tính cả số 0 đứng đầu).
Có A_7^3 số có bốn chữ số có chữ số 0 đứng đầu.
Có A_7^3 số bốn có chữ số và chia hết cho 10.
Vậy có tất cả $\mathrm{A}_8^4 - \mathrm{A}_7^3 - \mathrm{A}_7^3 = 1260$ số thoả mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 10. Hỏi từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể thành lập được bao nhiêu số gồm sáu chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt các chữ số 0 và 1? **ĐS:** 42000

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm
Cách 1:
+ Nếu $a_1 = 1$ thì $n = \overline{1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Có 5 vị trí cho chữ số 0.
Suy ra có $5 \cdot \mathrm{A}_8^4$ số n thoả mãn yêu cầu.
+ Nếu $a_2 = 1$ thì $n = \overline{a_11a_3a_4a_5a_6}$.
Có 4 vị trí cho chữ số 0 (vì $a_1 \neq 0$).
Có A_8^4 cách chọn bốn chữ số còn lại.
Suy ra có $4 \cdot \mathrm{A}_8^4$ số n thoả mãn.
+ Nếu một trong các chữ số a_3, a_4, a_5, a_6 bằng 1 thì cũng tương tự như $a_2 = 1$.
Vậy có tất cả $5 \cdot \mathrm{A}_8^4 + 4 \cdot \mathrm{A}_8^4 \cdot 5 = 8400 + 33600 = 42000$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.
Cách 2:

Trong n có A_6^2 vị trí cho hai chữ số 0 và 1 (tính cả trường hợp số 0 đứng đầu).
Có A_8^4 cách chọn 4 vị trí còn lại.
Suy ra có $A_6^2 \cdot A_8^4$ số có sáu chữ số khác nhau có chứa hai chữ số 0 và 1.
Bây giờ ta tìm trong $A_6^2 \cdot A_8^4$ có bao nhiêu số có chữ số 0 đứng đầu.
Lúc này, số 0 có 1 vị trí.
Có A_5^1 vị trí cho chữ số 1.
Có A_8^4 cách chọn 4 vị trí còn lại.
Có $1 \cdot A_5^1 \cdot A_8^4$ số có 6 chữ số khác nhau bắt đầu bằng chữ số 0 và chứa số 1.
Vậy có tất cả $A_6^2 \cdot A_8^4 - 1 \cdot A_5^1 \cdot A_8^4 = 50400 - 8400 = 4200$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.
Cách 3:
+ Có A_{10}^6 số các số có sáu chữ số khác nhau, trong đó có chứa A_9^5 số bắt đầu bằng chữ số 0.
+ Có A_8^6 số các số có sáu chữ số khác nhau không chứa chữ số 0 và 1.
+ Có A_8^5 số có sáu chữ số khác nhau luôn chứa 1 nhưng không chứa chữ số 0.
+ Có $5 \cdot A_8^6$ số có sáu chữ số luôn chứa 0 nhưng không chứa chữ số 1.
Do đó có tất cả $A_{10}^6 - A_9^5 - A_8^6 - 6 \cdot A_8^5 - 5 \cdot A_8^5 = 42000$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 11. Cho tập hợp $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

1. Hỏi có bao nhiêu tập hợp con của E có chữ số 9?
2. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lấy từ E mà chia hết cho 5?

ĐS: a) 512 b) 5712

Lời giải.

1. Tập $E_1 = E \setminus \{9\} = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 8\}$ có số tập con là 2^9.
Mỗi tập con đó thêm chữ số 9 trở thành một tập con của E có chứa số 9. Suy ra số tập con của E có chứa 9 chính bằng $2^9 = 512$.

2. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần tìm.
Vì n chia hết cho 5 nên a_5 chỉ có thể là 0 hoặc 5.
+ Trường hợp 1: với $a_5 = 0$, ta có A_9^4 số có cách chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ nên có $\cdot A_9^4$ số có năm chữ số khác nhau có chữ số 0 ở cuối cùng .
+ Trường hợp 2: với $a_5 = 5$, khi đó có 8 cách chọn a_1 và A_8^3 cách chọn $\overline{a_2a_3a_4}$.
Suy ra có $8 \cdot A_8^3$ số có năm chữ số khác nhau và có chữ số 5 ở cuối cùng.
Vậy có tất cả $A_9^4 + 8 \cdot A_8^3 = 5712$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 12. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau và không lớn hơn 789? **ĐS:** 171

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số cần tìm.
Vì n chẵn nên a_3 chỉ có thể là 2, 4, 6 hoặc 8.
Vì n không lớn hơn 789 nên a_1 chỉ có thể là 1, 2, 3, 4, 5, 6 hoặc 7.
Cách 1:
+ Nếu a_1 chẵn thì ta có 3 cách chọn a_1.
Có 3 cách chọn a_3.
Có 7 cách chọn a_2.
Suy ra có $3 \cdot 3 \cdot 7$ số thoả mãn.
+ Nếu a_1 lẻ thì ta có 4 cách chọn a_1.
Có 4 cách chọn a_3.
Có 7 cách chọn a_2.
Suy ra có $4 \cdot 4 \cdot 7$ số thoả mãn.
+ Nếu $a_1 = 7$. Khi đó $n = \overline{7a_2a_3}$ và $n > 789$ thì $a_2 = 9$ nên suy ra a_3 có 4 cách chọn.

Suy ra có 4 số lớn hơn 789 có 3 chữ số và bắt đầu bằng chữ số 7.
Vậy có tất cả $3 \cdot 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \cdot 7 - 4 = 171$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

+ Nếu a_1 chẵn suy ra có 3 cách chọn a_1.
Có 3 cách chọn a_3.
Và có A_7^1 cách chọn a_2.
Suy ra có $3 \cdot 3 \cdot A_7^1$ số.
+ Nếu a_1 lẻ và $a_1 \neq 7$ thì có 3 cách chọn a_1.
Có 4 cách chọn a_3.
Và có A_7^1 cách chọn a_2.
Suy ra có $3 \cdot 4 \cdot A_7^1$ số.
+ Khi $a_1 = 7$, $n = \overline{7a_2a_3}$.
Suy ra có 4 cách chọn a_3.
Có 6 cách chọn a_2 (vì $a_2 \neq 9$).
Suy ra có $4 \cdot 6 = 24$ số.
Vậy có tất cả $3 \cdot 3 \cdot A_7^1 + 3 \cdot 4 \cdot A_7^1 + 4 \cdot 6 = 171$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3:

Có $4 \cdot A_8^2$ số chẵn có ba chữ số khác nhau.
Bây giờ ta tìm số chẵn có ba chữ số khác nhau lớn hơn 789.
Vì $n > 789$ nên a_1 chỉ có thể là 7, 8 hoặc 9.
Vì n chẵn nên a_3 chỉ có thể là 2, 4, 6 hoặc 8.
+ Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 7$ thì $n = \overline{7a_2a_3}$ mà $n > 789$ suy ra a_3 có 4 cách chọn nên có 4 số thoả mãn.
+ Trường hợp 2: Nếu $a_1 = 8$, có 3 cách chọn a_3 và có A_7^1 cách chọn a_2 nên có $3 \cdot A_7^1$ số thoả mãn.
+ Trường hợp 3: Nếu $a_1 = 9$, có 4 cách chọn a_3 và có A_7^1 cách chọn a_2 nên có $4 \cdot A_7^1$ số thoả mãn.
Vậy có $4 + 3 \cdot A_7^1 + 4 \cdot A_7^1 = 53$ số chẵn lớn hơn 789.
Suy ra có tất cả $4 \cdot A_8^2 - 53 = 224 - 53 = 171$ số chẵn có ba chữ số khác nhau không lớn hơn 789.

Cách 4:

Có A_9^3 số có ba chữ số khác nhau.
Có $(4 + 3 \cdot A_7^3 + 4 \cdot A_7^1)$ số chẵn có ba chữ số khác nhau lớn hơn 789.
Có $5 \cdot A_8^2$ số lẻ có ba chữ số khác nhau.
Vậy có $A_9^3 - (4 + 3 \cdot A_7^1) - 5 \cdot A_8^2 = 171$ số chẵn có ba chữ số khác nhau không lớn hơn 789. □

Bài 13. Có tối đa bao nhiêu số điện thoại có bảy chữ số bắt đầu bằng số 8 sao cho

1. Các chữ số đôi một khác nhau. **ĐS:** 60480 số
2. Các chữ số tùy ý. **ĐS:** 10^6 số

Lời giải.

Gọi số điện thoại có bảy chữ số là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$.

1. Các chữ số đôi một khác nhau.
   - $a_1 = 8$ có 1 cách chọn.
   - Chọn sáu số từ chín số còn lại sắp vào 6 vị trí còn lại có $A_9^6 = 60480$ cách chọn.
     Theo quy tắc nhân ta có 60480 số.
2. Các chữ số tùy ý.
   - $a_1 = 8$ có 1 cách chọn.
   - Mỗi vị trí còn lại đều có 10 cách chọn.
     Theo quy tắc nhân ta có $10^6 = 1000000$ số.

□

Bài 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số khác nhau? **ĐS:** 1632960 số

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có tám chữ số khác nhau là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$.

— $a_1 \neq 0$ có 9 cách chọn.

— Chọn bảy số từ chín số còn lại sắp vào 7 vị trí còn lại có $\mathrm{A}_9^7 = 181440$.
Theo quy tắc nhân ta có $9 \cdot 181440 = 1632960$ số.

□

Bài 15. Từ các số 0, 4, 5, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau lớn hơn 5000? **ĐS:** 240 số

Lời giải.
Gọi số tự nhiên có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Do số tự nhiên này lớn hơn 5000 nên

— a_1 có 4 cách chọn từ tập $\{5, 7, 8, 9\}$.

— Ba chữ số còn lại tùy ý, nên ta cần chọn 3 số từ 5 chữ số còn lại sắp vào 3 vị trí còn lại có $\mathrm{A}_5^3 = 60$.
Theo quy tắc nhân ta có $4 \cdot 60 = 240$ số.

□

Bài 16. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Tìm các số có năm chữ số khác nhau thỏa mãn

1. Không bắt đầu bằng 123. **ĐS:** 594 số
2. Không tận cùng bằng 4. **ĐS:** 504 số

Lời giải.
Gọi số tự nhiên có năm chữ số khác nhau là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

1. Không bắt đầu bằng 123.

   — Số có năm chữ số khác nhau có $\mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_5^5 = 600$ số.

   — Số có năm chữ số khác nhau bắt đầu bằng 123 có $\mathrm{A}_3^2 = 6$ số.

   Khi đó số tự có năm chữ số khác nhau không bắt đầu bởi 123 có $600 - 6 = 594$ số.

2. Không tận cùng bằng 4.

   — Số có năm chữ số khác nhau có $\mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_5^5 = 600$ số.

   — Số có năm chữ số khác nhau có chữ số tận cùng là 4 có $\mathrm{A}_5^4 - \mathrm{A}_4^4 = 96$ số.

   Khi đó số tự nhiên có năm chữ số khác nhau không tận cùng bằng 4 có $600 - 96 = 504$ số.

□

Bài 17. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số đôi một khác nhau đồng thời số đó lớn hơn 300 và nhỏ hơn 600. **ĐS:** 90 số

Lời giải.
Gọi số tự nhiên có ba chữ số là $\overline{a_1a_2a_3}$. Do số tự nhiên này có ba chữ số khác nhau đôi một khác nhau và số đó lớn hơn 300 và nhỏ hơn 600.

— a_1 có 3 cách chọn từ tập $\{3, 4, 5\}$.

— Hai chữ số còn lại tùy ý, nên ta cần chọn hai số từ sáu số còn lại sắp vào 2 vị trí còn lại có $\mathrm{A}_6^2 = 30$ số.
Theo quy tắc nhân ta có $3 \cdot 30 = 90$ số.

□

Bài 18. Hỏi từ mười chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm sáu chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt các chữ số 0 và 1. **ĐS:** 42000 số

Lời giải.
Giả sử mỗi một chữ số trong số tự nhiên có 6 chữ số là 1 vị trí.
Chọn 1 vị trí cho số 0 ta có 5 cách chọn (vì số 0 không thể đứng đầu).
Chọn 1 vị trí trong 5 vị trí còn lại cho chữ số 1 ta có 5 cách chọn.
Chọn ngẫu nhiên 4 chữ số và sắp xếp vào 4 vị trí còn lại ta có A_8^4.
Theo quy tắc nhân, ta có $5 \times 5 \times \mathrm{A}_8^4 = 42000$. □

Bài 19. Hãy tìm tất cả những số tự nhiên lẻ gồm năm chữ số khác nhau lớn hơn 70000. **ĐS:** 4368 số

Lời giải.
Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Trường hợp 1. Chọn $a_1 \in \{7, 9\}$.

- Chọn số a_1 có 2 cách chọn.
- Chọn số $a_5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{a_1\}$ có 4 cách chọn.
- Chọn 3 chữ số còn lại từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{a_1, a_5\}$ có A_8^3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có $2 \times 4 \times \mathrm{A}_9^4 = 2688$ số.

Trường hợp 2. Chọn $a_1 = 8$.

- Chọn chữ số a_1 ta có 1 cách chọn.
- Chọn chữ số $a_5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ có 5 cách chọn.
- Chọn 3 chữ số còn lại khác a_1, a_5 ta có A_8^3 cách chọn

Theo quy tắc nhân, ta có $1 \times 5 \times \mathrm{A}_8^3 = 1680$ cách chọn.

Theo quy tắc cộng, ta có $2688 + 1680 = 4368$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu. □

Bài 20. Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hãy lập các số có bốn chữ số khác nhau đôi một sao cho

1. Luôn có mặt chữ số 6 và chữ số hàng trăm là 4. **ĐS:** 52 số
2. Một trong hai số đầu tiên là 3 và nó là số chia hết cho 5. **ĐS:** 76 số

Lời giải.
Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

1. Ta xét 2 trường hợp sau

   Trường hợp 1. $a_1 = 6$.
   Chọn $a_1 = 6$ có 1 cách chọn, chọn chữ số $a_2 = 4$ ta có 1 cách chọn. Chọn 2 chữ số còn lại từ $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ ta có A_5^2.
   Do đó, ta có $1 \times 1 \times \mathrm{A}_5^2 = 20$.

   Trường hợp 2. $a_1 \neq 6$. Chọn số $a_1 \in \{1, 2, 3, 5\}$ có 4 cách chọn, chọn chữ số $a_2 = 4$ ta có 1 cách chọn. Chọn $6 \in \{a_3, a_4\}$ có 2 cách chọn. Chọn 1 chữ số còn lại từ $\{0, 1, 2, 3, 5\} \setminus \{a_1\}$ có 4 cách chọn.
   Do đó: $4 \times 1 \times 2 \times 4 = 32$ cách chọn. Vậy có $20 + 32 = 52$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu.

2. Ta xét 3 trường hợp sau

   Trường hợp 1. $a_1 = 3$ có 1 cách chọn.
   $a_4 \in \{0, 5\}$ có 2 cách chọn.
   Với chữ số a_2, a_3 ta có A_5^2 cách chọn.
   Theo qui tắc nhân ta có $1 \cdot 2 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 40$ số.

Trường hợp 2. $a_2 = 3$ có 1 cách chọn.
$a_4 = 0$ có 1 cách chọn.
Với chữ số a_1, a_3 ta có A_5^2 cách chọn.
Theo qui tắc nhân ta có $1 \cdot 1 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 20$ số.

Trường hợp 3. $a_2 = 3$ có 1 cách chọn.
$a_4 = 5$ có 1 cách chọn, $a_1 \neq 0$ có 4 cách chọn và a_3 có 4 cách chọn.
Theo qui tắc nhân ta có $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$ số.

Theo qui tắc cộng ta có $40 + 20 + 16 = 76$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu.

□

Bài 21. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm năm chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên phải khác 0. **ĐS:** 1260 số

Lời giải.
Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

1. Trường hợp 1: $a_5 = 0$.
Chọn số a_5 có 1 cách chọn.
Chọn số $a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ có 6 cách chọn.
Chọn 3 chữ số a_2, a_3, a_4 từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{a_1, a_5\}$ có A_5^3.
Do đó có $1 \times 6\mathrm{A}_5^3 = 360$ cách.

2. Trường hợp 2: $a_5 \in \{2, 4, 6\}$.
Chọn số a_5 có 3 cách chọn.
Chọn số $a_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{0, a_5\}$ có 5 cách chọn.
Chọn 3 chữ số a_2, a_3, a_4 từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{a_1, a_5\}$ có A_5^3.
Do đó có $3 \times 5 \times \mathrm{A}_5^3 = 900$ cách. Vậy có $360 + 900 = 1260$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu.

□

Bài 22. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau sao cho

1. Nó là số tự nhiên chẵn và chữ số đầu tiên là chữ số lẻ? **ĐS:** 4200 số
2. Trong đó có đúng ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn (chữ số đầu tiên khác 0)? **ĐS:** 64800 số

Lời giải.

1. Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Chọn số $a_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ có 5 cách chọn.
Chọn số $a_6 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ có 5 cách chọn.
Chọn các chữ số a_2, a_3, a_4, a_5 từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{a_1, a_6\}$ có $\mathrm{A}_8^4 = 1680$ số.
Do đó có $5 \times 5 \times 1680 = 42000$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Chọn 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn từ tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và sắp xếp lại thành một số có 6 chữ số (chữ số a_1 có thể là 0) ta có $\mathrm{C}_5^3 \times \mathrm{C}_5^3 \times 6! = 72000$ số.
Ta xét trường hợp $a_1 = 0$ khi đó ta chỉ chọn 3 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn từ tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và sắp xếp lại thành một số có 5 chữ số (do $a_1 = 0$) ta có
$$\mathrm{C}_5^3 \times \mathrm{C}_4^2 \times 5! = 7200 \text{ số.}$$
Vậy có $72000 - 7200 = 64800$ số tự nhiên thỏa yêu cầu.

□

Bài 23. Cho các chữ số: 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9.

1. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số mà trong mỗi số các chữ số khác nhau? **ĐS:** 180

2. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5? **ĐS:** 420

Lời giải.

1. Gọi $\overline{n} = \overline{abc}$ là số cần tìm.
a có 6 cách chọn do $a \neq 0$.
b có 6 cách chọn.
c có 5 cách chọn.
Vậy có $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ số $\overline{n}$ cần tìm.

2. Gọi $\overline{n} = \overline{abcd}$ là số cần tìm.

TH 1. Chọn $a = 5$ có 1 cách chọn.
b có 6 cách chọn.
c có 5 cách chọn.
d có 4 cách chọn.
Trong trường hợp này có $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ số $\overline{n}$ cần tìm.

TH 2. Chọn $b = 5$ có 1 cách chọn.
$a \neq 5$ và $a \neq 0$ có 5 cách chọn.
c có 5 cách chọn.
d có 4 cách chọn.
Trong trường hợp này có $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ số $\overline{n}$ cần tìm.

Tương tự mỗi trường hợp $c = 5$, $d = 5$ đều có 100 số $\overline{n}$ cần tìm.

Vậy có tất cả $120 + 100 + 100 + 100 = 420$ số $\overline{n}$ cần tìm. □

Bài 24. Cho 5 chữ số: 0, 1, 2, 3, 4. Từ 5 chữ số đó, có thể lập được bao nhiêu chữ số chẵn có 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó, mỗi chữ số trên có mặt một lần? **ĐS:** 60

Lời giải.
Gọi $\overline{n} = \overline{abcde}$ là số cần tìm.

TH 1. Chọn $e = 0$ có 1 cách chọn.
a có 4 cách chọn.
b có 3 cách chọn.
c có 2 cách chọn.
d có 1 cách chọn.
Trong trường hợp này có $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ số $\overline{n}$ cần tìm.

TH 2. Chọn $e = 2$ hoặc $e = 4$ có 2 cách chọn.
$a \neq 0$ và $a \neq e$ có 3 cách chọn.
b có 3 cách chọn.
c có 2 cách chọn.
d có 1 cách chọn.
Trong trường hợp này có $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$ số $\overline{n}$ cần tìm.

Vậy có tất cả $24 + 36 = 60$ số $\overline{n}$ cần tìm. □

BÀI 3. HOÁN VỊ

Định nghĩa 1. Cho trước một tập hợp có n phần tử. Khi sắp xếp các phần tử của chúng cạnh nhau ta có được một dãy n phần tử của tập hợp đã cho và gọi nó là một hoán vị của n phần tử đã cho.
Khi đó: Số các hoán vị khác nhau của một tập hợp n phần tử là $\mathrm{P}_n = n!$.

A. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính số các số có năm chữ số được viết bởi đúng năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5. **ĐS:** 120

Lời giải.
Số các số có năm chữ số được viết bởi đúng năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 chính là số hoán vị khác nhau của 5 phần tử và bằng $\mathrm{P}_5 = 5! = 120$. □

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{2, 4, 6\}$. Số các điểm trong không gian $(Oxyz)$ có tọa độ khác nhau thuộc tập A là bao nhiêu? **ĐS:** 6

Lời giải.
Số các điểm trong không gian $(Oxyz)$ có tọa độ khác nhau là số hoán vị của 3 phần tử trong tập A và bằng $\mathrm{P}_3 = 3! = 6$. □

Bài 3. Tính số các số có năm chữ số được viết bởi đúng năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 trong đó ba chữ số đầu là ba chữ số lẻ và hai chữ số cuối là hai chữ số chẵn. **ĐS:** 12

Lời giải.
Số cách sắp xếp ba chữ số lẻ 1, 3, 5 là $3! = 6$.
Số các số chẵn được viết bởi đúng hai chữ số chẵn 2, 4 là $2! = 2$.
Do đó số các số cần tìm thỏa mãn đề bài là $3! \cdot 2! = 12$. □

Bài 4. Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Có thể lập được bao nhiêu số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần? **ĐS:** 5880

Lời giải.
Gọi $\overline{n} = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$.
Trong $\overline{n}$ chữ số 5 có mặt ba lần nên ta ghi thêm: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5.

Cách 1. a_1 có 7 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$)
a_2 có 7 cách chọn.
a_3 có 6 cách chọn.
a_4 có 5 cách chọn.
a_5 có 4 cách chọn.
a_6 có 3 cách chọn.
a_7 có 2 cách chọn.
a_8 có 1 cách chọn.
$\Rightarrow$ có $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 = 5880$ số.
Để ý rằng trong $\overline{n}$ số 5 có mặt đúng ba lần nên mỗi khi ta hoán vị 3 chữ số này thì số $\overline{n}$ vẫn không đổi.
Vậy số các số cần tìm là $\dfrac{35820}{3!} = 5880$ số $\overline{n}$.

Cách 2. Chọn tám số vào tám vị trí là một hoán vị của 8 phần tử có 8!.
Có 7! số các số bắt đầu bằng chữ số 0.
Có 3! lần hoán vị 3 chữ số 5 mà $\overline{n}$ vẫn không đổi.
Vậy số các số cần tìm là $\dfrac{8! - 7!}{3!} = 5880$ số.

□

Bài 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong tất cả các chữ số đã thiết lập được có bao nhiêu chữ số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 480

Lời giải.
Có $6! = 720$ số có sáu chữ số khác nhau.
Bây giờ ta tìm số các số có hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.

Hai số 1 và 6 đứng cạnh nhau ta xem như một khối thống nhất.
Khối thống nhất này cùng với bốn chữ số còn lại ta có $5! = 120$ số.
Mỗi lần ta hoán vị hai chữ số 1 và 6 ta sẽ có $2!$ số mới.
Nên ta có $5! \cdot 2! = 240$ số có 6 chữ số khác nhau có hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.
Vậy có $720 - 240 = 480$ số cần tìm. □

Bài 6. Người ta viết các số có 6 chữ số bằng các số 1, 2, 3, 4, 5 như sau: Trong mỗi số được viết có một chữ số xuất hiện hai lần còn các chữ số khác xuất hiện một lần. Hỏi có bao nhiêu số như vậy? **ĐS:** 1800

Lời giải.
Vì có một chữ số xuất hiện hai lần nên số các số được lập là một hoán vị có lặp lại của 6 phần tử nên bằng $\dfrac{6!}{2!} = 360$ số.
Vì có năm chữ số nên có tất cả là $360 \cdot 5 = 1800$ số.

□

Bài 7. Người ta xếp ngẫu nhiên 5 lá phiếu thứ tự từ 1 đến 5 cạnh nhau.

1. Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu số chẵn luôn ở cạnh nhau? **ĐS:** 48
2. Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu phân thành hai nhóm chẵn lẻ riêng biệt? **ĐS:** 24

Lời giải.

1. Trong 5 phiếu thứ tự từ 1 đến 5 có hai phiếu mang số chẵn và ba phiếu mang số lẻ.
Hai phiếu số chẵn luôn ở cạnh nhau ta xem như một khối thống nhất.
Khối thống nhất này cùng với ba phiếu lẻ còn lại ta sẽ có $4!$ cách sắp xếp.
Mỗi lần ta hoán vị 2 phiếu số chẵn ta sẽ có $2!$ cách sắp xếp mới.
Vậy có $4! \cdot 2! = 48$ cách sắp xếp.
2. Có $2!$ cách sắp xếp các phiếu số chẵn.
Có $3!$ cách sắp xếp các phiếu số lẻ.
Có $2!$ cách sắp xếp mỗi khi ta hoán vị 2 nhóm chẵn, lẻ.
Vậy có $2! \cdot 3! \cdot 2! = 24$ cách sắp xếp.

□

Bài 8. Trong một phòng học có hai bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn sắp xếp chổ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chổ ngồi nếu:

1. Các học sinh ngồi tùy ý. **ĐS:** 3628800
2. Các học sinh nam ngồi một bàn và các học sinh nữ ngồi một bàn. **ĐS:** 28800

Lời giải.

1. Có 10 học sinh xếp tùy ý vào 10 ghế ta có $10! = 3628800$ cách xếp.
2. Các học sinh nam ngồi riêng một bàn ta có $5!$ cách xếp. Các học sinh nữ ngồi riêng một bàn ta có $5!$ cách xếp.
Mỗi lần ta đổi chỗ 2 nhóm học sinh nam, nữ ta có $2!$ cách xếp mới.
Vậy có tất cả $5! \cdot 5! \cdot 2! = 28800$ cách xếp.

□

Bài 9. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn sắp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp trong mỗi trường hợp sau:

1. Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau? **ĐS:** 1036800
2. Bất cứ hai học sinh nào ngồi đối diện với nhau thì khác trường nhau? **ĐS:** 33177600

Lời giải.

1. Bất cứ hai học sinh nào ngồi canh nhau hoặc đối diện với nhau thì khác trường với nhau. Điều này chứng tỏ 6 học sinh trường A được chia ra mỗi dãy ghế có 3 bạn và 6 học sinh trường B cũng được chia ra mỗi dãy ghế có 3 bạn.
Giả thiết trên cũng cho ta biết rằng nếu đầu ghế thứ nhất là học sinh trường A thì cạnh A là học sinh trường B và đối diện A là học sinh trường B.
Ngược lại nếu đầu ghế thứ nhất là học sinh trường B thì cạnh B là học sinh trường A và đối diện với B là học sinh trường A.
Ta có 6! cách xếp 6 học sinh trường A vào 6 chổ ngồi, có 6! cách xếp 6 học sinh trường B vào 6 chỗ ngồi và có 2! cách xếp 2 nhóm học sinh trường A và trường B.
Vậy có $6! \cdot 6! \cdot 2! = 1036800$ cách xếp.

2. Giả sử học sinh thứ nhất của trường A ngồi trước, có 12 cách chọn chổ ngồi. Sau đó, chọn 1 học sinh của trường B ngồi đối diện với học sinh trường A đã ngồi ta có 6 cách chọn 1 học sinh trường B.
Học sinh thứ hai của trường A còn 10 chỗ để chọn nên có 10 cách chọn cho học sinh thứ hai của trường A. Có 5 cách chọn cho học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh của trường A.
Tiếp tục lý luận như trên đến học sinh cuối cùng.
Như vậy ta có $12 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 33177600$ cách xếp.

□

Bài 10. Từ năm chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ lập được bao nhiêu số thỏa mãn:

1. Có năm chữ số đôi một khác nhau. **ĐS:** 120
2. Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng chữ số 3. **ĐS:** 24
3. Có năm chữ số đôi một khác nhau và không bắt đầu bằng chữ số 1. **ĐS:** 96
4. Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng 21. **ĐS:** 6

Lời giải.

1. Mỗi số cần lập ứng với một hoán vị của 5 phần tử $1, 2, 3, 4, 5$. Nên số các số cần lập là $5! = 120$ số.

2. Gọi số cần lập là: $x = \overline{abcde}$. Vì $a = 3$ nên a có 1 cách chọn. Ứng với $a = 3$, mỗi cách chọn b, c, d, e là một hoán vị của 4 chữ số còn lại nên có 4! cách chọn b, c, d, e. Vậy có thể lập được $1 \cdot 4! = 24$ số thỏa mãn.

3. Gọi số cần lập là: $x = \overline{abcde}$. Vì $a \neq 1$ nên a có 4 cách chọn. Ứng với mỗi giá trị của a, mỗi cách chọn b, c, d, e là một hoán vị của 4 chữ số còn lại nên có 4! cách chọn b, c, d, e. Vậy có thể lập được $4 \cdot 4! = 96$ số thỏa mãn.

4. Gọi số cần lập là: $x = \overline{abcde}$. Vì $\overline{ab} = 21$ nên $\overline{ab}$ có 1 cách chọn. Ứng với $\overline{ab} = 21$, mỗi cách chọn c, d, e là một hoán vị của 3 chữ số còn lại nên có 3! cách chọn c, d, e. Vậy có thể lập được $1 \cdot 3! = 6$ số thỏa mãn.

□

Bài 11. Từ các chữ số của tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, có thể lập được bao nhiêu số thỏa mãn:

1. Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng chữ số lẻ. **ĐS:** 48
2. Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng chữ số 6. **ĐS:** 24
3. Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng 346. **ĐS:** 2
4. Có năm chữ số đôi một khác nhau và tính tổng các số đó. **ĐS:** Có 120 số và tổng là 4266624

Lời giải.

1. Gọi số cần lập là: $x = \overline{abcde}$. Vì a lẻ nên a có 2 cách chọn. Ứng với mỗi giá trị của a, mỗi cách chọn b, c, d, e là một hoán vị của 4 chữ số còn lại nên có 4! cách chọn b, c, d, e. Vậy có thể lập được $2 \cdot 4! = 48$ số thỏa mãn.

② Gọi số cần lập là: $x = \overline{abcde}$. Vì $a = 6$ nên a có 1 cách chọn. Ứng với $a = 6$, mỗi cách chọn b, c, d, e là một hoán vị của 4 chữ số còn lại nên có 4! cách chọn b, c, d, e. Vậy có thể lập được $1 \cdot 4! = 24$ số thỏa mãn.

③ Gọi số cần lập là: $x = \overline{abcde}$. Vì $\overline{abc} = 346$ nên $\overline{abc}$ có 1 cách chọn. Ứng với $\overline{abc} = 346$, mỗi cách chọn d, e là một hoán vị của 2 chữ số còn lại nên có 2! cách chọn d, e. Vậy có thể lập được $1 \cdot 2! = 2$ số thỏa mãn.

④ Mỗi số cần lập ứng với một hoán vị của 5 phần tử $1, 2, 3, 4, 6$. Nên số các số cần lập là $5! = 120$ số.
Mỗi chữ số sẽ xuất hiện ở mỗi hàng đúng 4! lần nên tổng các số có năm chữ số đôi một khác nhau là $(1 + 2 + 3 + 4 + 6) \cdot 4! \cdot 11111 = 4266624$.

□

Bài 12. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn A, B, C, D, E vào một ghế dài sao cho:

① Bạn C ngồi chính giữa. **ĐS:** 24

② Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế. **ĐS:** 12

Lời giải.

① Có 1 cách chọn vị trí cho bạn C. Mỗi cách xếp 4 bạn còn lại là một hoán vị của 4 bạn A, B, D, E, nên có $1 \cdot 4! = 24$ cách xếp thỏa mãn.

② Mỗi cách xếp 2 bạn A, E là một hoán vị của 2 bạn A, E. Mỗi cách xếp 3 bạn B, C, D vào ba chỗ ở giữa là một hoán vị của 3 bạn B, C, D, nên có $2! \cdot 3! = 12$ cách xếp thỏa mãn.

□

Bài 13. Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có hai cuốn sách môn Toán, 4 cuốn sách môn Văn, 6 cuốn sách môn Anh. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các cuốn sách trên lên một kệ dài nếu mọi cuốn sách cùng môn được xếp kề nhau? **ĐS:** 207360

Lời giải.
Có 3! cách xếp cho ba nhóm các cuốn sách.
Có 2! cách xếp các cuốn sách Toán.
Có 4! cách xếp các cuốn sách Văn.
Có 6! cách xếp các cuốn sách Anh.
Vậy có tất cả $3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 6! = 207360$ cách xếp thỏa mãn. □

Bài 14. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm 4 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 4 học sinh trường A và 4 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp trong mỗi trường hợp sau:

① Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau cũng khác trường với nhau. **ĐS:** 1152

② Bất cứ hai học sinh nào ngồi đối diện với nhau thì khác trường với nhau. **ĐS:** 9216

Lời giải.

① Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện với nhau thì khác trường với nhau. Điều này chứng tỏ 4 học sinh trường A được chia ra mỗi dãy ghế có 2 bạn và 4 học sinh trường B cũng được chia ra mỗi dãy ghế có 2 bạn.
Giả thiết trên cũng cho ta biết rằng nếu đầu ghế thứ nhất là học sinh trường A thì cạnh học sinh này là học sinh trường B và đối diện là học sinh trường B.
Ngược lại nếu đầu ghế thứ nhất là học sinh trường B thì cạnh học sinh này là học sinh trường A và đối diện là học sinh trường A.
Ta có 4! cách xếp 4 học sinh trường A vào 4 chỗ ngồi, 4! cách xếp 4 học sinh trường B vào 4 chỗ ngồi và có 2! cách xếp 2 nhóm học sinh trường A và trường B.
Vậy có tất cả $4! \cdot 4! \cdot 2! = 1152$ cách xếp.

(2) Giả sử học sinh thứ nhất của trường A ngồi trước, có 8 cách chọn chỗ ngồi. Sau đó, chọn 1 học sinh của trường B ngồi đối diện với học sinh trường A đã ngồi ta có 4 cách chọn 1 học sinh trường B.
Học sinh thứ hai của trường A còn 6 chỗ để chọn nên có 6 cách chọn chỗ cho học sinh thứ hai của trường A. Có 3 cách chọn cho học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh của trường A vừa ngồi.
Tiếp tục lý luận như trên đến học sinh cuối cùng.
Vậy ta có $8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 9216$ cách xếp.

□

Bài 15. Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là $2, 3, 4, 5$. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu:

(1) Năm chữ số 1 được xếp kề nhau. **ĐS:** 120

(2) Các chữ số được xếp tùy ý. **ĐS:** 3024

Lời giải.

(1) Vì 5 chữ số 1 được xếp kề nhau nên ta coi 5 chữ số 1 là một chữ số đặc biệt. Có $5!$ cách sắp xếp vị trí cho bốn chữ số $2, 3, 4, 5$ và chữ số đặc biệt gồm 5 chữ số 1. Vậy có $5! = 120$ số thỏa mãn.

(2) Mỗi số được lập là một hoán vị lặp của 9 phần tử (mỗi hoán vị lặp $5!$ lần) nên số các số thỏa mãn là $\dfrac{9!}{5!} = 3024$ số.

□

Bài 16. Một tổ học sinh có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp thành một hàng dọc.

(1) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau? **ĐS:** 3628800

(2) Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có học sinh nào cùng giới tính đứng gần nhau? **ĐS:** 28800

Lời giải.

(1) Mỗi cách xếp hàng là một hoán vị của 10 bạn học sinh nên số cách xếp thỏa mãn là $10! = 3628800$ cách.

(2) Vì không có hai học sinh nào cùng giới tính đứng gần nhau nên các học sinh sẽ đứng nam nữ xen kẽ (các bạn nam đứng ở vị trí chẵn, các bạn nữ đứng ở vị trí lẻ và ngược lại).
Có $5!$ cách xếp 5 bạn nam vào 5 vị trí, có $5!$ cách xếp 5 bạn nữ vào 5 vị trí và có 2 cách chọn giới tính cho bạn đứng đầu hàng. Vậy có $5! \cdot 5! \cdot 2 = 28800$ cách xếp thỏa mãn.

□

Bài 17. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$, trong đó các chữ số 1 và 6 đều có mặt hai lần, còn các chữ số khác có mặt một lần? **ĐS:** 10080

Lời giải.
Mỗi số được lập là một hoán vị lặp của 8 phần tử (mỗi hoán vị lặp $2! \cdot 2!$ lần, do có 2 chữ số 1 và 2 chữ số 6) nên số các số thỏa mãn là $\dfrac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$ số. □

BÀI 4. TỔ HỢP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Cho tập hợp A có n phần tử và một số tự nhiên $k \leq n$. Một dãy có độ dài k được lấy ra từ n phần tử đôi một khác nhau của tập hợp A gọi là tổ hợp chập k của n phần tử. Kí hiệu : C_n^k.
Công thức: $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tính chất 1.

- $\mathrm{C}_n^0 = \mathrm{C}_n^n = 1$
- $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$
- $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k$
- $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n}{k}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$
- $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n-k+1}{k}\mathrm{C}_n^{k-1}$
- $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Khối 12 của một trường phổ thông trung học có 8 lớp thi đấu bóng đá giao hữu. Hỏi có bao nhiêu trận thi đấu diễn ra nếu mỗi đội đều thi đấu với các đội còn lại? **ĐS:** 28

Lời giải.
Mỗi trận đấu là một tập con gồm 2 phần tử của tập hợp gồm 8 phần tử. Do đó, số trận đấu diễn ra là số tổ hợp chập 2 của 8 phần tử, tức là $\mathrm{C}_8^2 = 28$. □

Bài 2. Lớp 12A có 40 học sinh trong đó có 18 nam và 22 nữ. Chọn ra một đội gồm 7 người tình nguyện tham dự mùa hè xanh trong đó phải có 4 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy? **ĐS:** $\mathrm{C}_{18}^4 \cdot \mathrm{C}_{22}^3 = 4712400$

Lời giải.
+ Chọn 4 nam trong 18 nam là số tổ hợp chập 4 của 18 phần tử : C_{18}^4.
+ Chọn 3 nữ trong 22 nữ là số tổ hợp chập 3 của 22 phần tử : C_{22}^3.
Số cách chọn thỏa mãn đề bài là $\mathrm{C}_{18}^4 \cdot \mathrm{C}_{22}^3 = 4712400$. □

Bài 3. Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 3 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 người để làm ban đại diện sao cho

1. Không phân biệt nam nữ? **ĐS:** 56
2. Có đúng ba nam? **ĐS:** 30

Lời giải.

1. Vì 5 người được chọn không phân biệt nam nữ nên số cách chọn chính là tổ hợp chập 5 của 8 phần tử, tức là $\mathrm{C}_8^5 = 56$ cách.
2. + Chọn 3 nam trong 5 nam là số tổ hợp chập 3 của 5 phần tử : C_5^3.
   + Chọn 2 nữ trong 3 nữ là số tổ hợp chập 2 của 3 phần tử : C_3^2.
   Số cách chọn thỏa mãn đề bài là $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_3^2 = 30$.

□

Bài 4. Có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ.

1. Có bao nhiêu cách chọn một tổ hợp gồm có 5 người. **ĐS:** 252
2. Trong đó có nhiều nhất ba người là nữ. **ĐS:** 246

Lời giải.

1. Vì 5 người được chọn không phân biệt nam nữ nên số cách chọn chính là tổ hợp chập 5 của 10 phần tử, tức là $\mathrm{C}_{10}^5 = 252$ cách.

2 **Cách 1:**

Nam	Nữ	Số cách
2	3	$C_6^2 \cdot C_4^3 = 60$
3	2	$C_6^3 \cdot C_4^2 = 120$
4	1	$C_6^4 \cdot C_4^1 = 60$
5	0	$C_6^5 \cdot C_4^0 = 6$

Tổng số cách: $60 + 120 + 60 + 6 = 246$ cách.
Cách 2:
Có C_{10}^5 cách chọn 5 người trong 10 người. Trong đó có $C_4^4 \cdot C_6^1$ cách chọn 5 người có 4 nữ và 1 nam.
Vậy có $C_{10}^5 - C_4^4 \cdot C_6^1 = 246$ cách.

□

Bài 5. Từ 12 học sinh ưu tú của một trường trung học, người ta muốn chọn ra một đoàn đại biểu gồm 5 người (gồm trưởng đoàn, thư kí và 3 thành viên) đi dự trại hè quốc tế. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đoàn đại biểu nói trên? **ĐS:** 15840

Lời giải.
Có C_{12}^1 cách chọn 1 trưởng đoàn.
Có C_{11}^1 cách chọn 1 thư kí.
Có C_{10}^3 cách chọn 3 thành viên.
Có $C_{12}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^3 = 15840$ cách chọn đoàn đại biểu. □

Bài 6. Một hộp đựng 12 bóng đèn trong đó có 4 bóng đèn bị hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng đèn (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà lấy phải một bóng bị hỏng? **ĐS:** 112

Lời giải.
Có C_4^1 cách lấy một bóng đèn bị hỏng.
Có C_8^2 cách lấy một bóng đèn không bị hỏng.
Vậy có $C_4^1 \cdot C_8^2 = 112$ cách lấy 3 bóng đèn mà có một bóng bị hỏng. □

Bài 7. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra bốn viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả ba màu? **ĐS:** 645

Lời giải.
Ta đếm số cách chọn 4 viên bi có đủ cả ba màu.

Đỏ	Trắng	Vàng	Số cách
1	1	2	$C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 = 300$
1	2	1	$C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 = 240$
2	1	1	$C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 = 180$

Số cách chọn để trong 4 viên bi lấy ra không có đủ cả ba màu là $C_{15}^4 - (300 + 240 + 180) = 645$. □

Bài 8. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó 3 tem thư và dán 3 tem thư đó vào 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán đúng một con tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy? **ĐS:** 1200

Lời giải.
Có C_5^3 cách chọn 3 tem thư.
Có C_6^3 cách chọn 3 bì thư.
Có 3! cách chọn dán 3 tem thư vào 3 bì thư.
Vậy có $C_5^3 \cdot C_6^3 \cdot 3! = 1200$ cách. □

Bài 9. Một người muốn chọn 6 bông hoa từ 3 bó hoa để cắm vào một bình hoa. Bó thứ nhất có 10 bông hồng, bó thứ hai có 6 bông thược dược và bó thứ ba có 4 bông cúc.

1. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn. **ĐS:** 38760
2. Nếu người đó muốn chọn đúng 2 bông hồng, 2 bông thược dược và 2 bông cúc thì người đó có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 4050

Lời giải.

1. Chọn 6 bông bất kì trong 20 bông là tổ hợp chập 6 của 20 phần tử, tức là có $\mathrm{C}_{20}^{6} = 38760$ cách chọn.
2. Muốn chọn đúng 2 bông hồng, 2 bông thược dược và 2 bông cúc thì người đó có $\mathrm{C}_{10}^{2} \cdot \mathrm{C}_{6}^{2} \cdot \mathrm{C}_{4}^{2} = 4050$ cách.

□

Bài 10. Một lớp có 20 học ainh trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử hai người đi dự đại hội sinh viên của trường sao cho trong 3 người có ít nhất một cán bộ lớp? **ĐS:** 324

Lời giải.
Cách 1:
Có $\mathrm{C}_{2}^{1} \cdot \mathrm{C}_{18}^{2}$ cách cử ba người có 1 cán bộ lớp.
Có $\mathrm{C}_{2}^{2} \cdot \mathrm{C}_{18}^{1}$ cách cử ba người có 2 cán bộ lớp.
Vậy có $\mathrm{C}_{2}^{1} \cdot \mathrm{C}_{18}^{2} + \mathrm{C}_{2}^{2} \cdot \mathrm{C}_{18}^{2} = 324$ cách.
Cách 2:
Có C_{20}^{3} cách cử ba người bất kì.
Có C_{18}^{3} cách cử ba người mà không có cán bộ lớp.
Vậy có $\mathrm{C}_{20}^{3} - \mathrm{C}_{18}^{3} = 324$ cách cử ba người mà có ít nhất một cán bộ lớp. □

Bài 11. Từ 10 nam và 5 nữ người ta chọn ra một ban đại diện gồm 5 người trong đó có ít nhất là 2 nam và 2 nữ. Có bao nhiêu cách chọn nếu

1. Mọi người đều vui vẻ tham gia.
2. Cậu Thành và cô Nguyệt từ chối tham gia.

ĐS: 1650 và 648

Lời giải.

1. • Cách 1:
   Có $\mathrm{C}_{10}^{2} \cdot \mathrm{C}_{5}^{3}$ cách chọn có 2 nam và 3 nữ.
   Có $\mathrm{C}_{10}^{3} \cdot \mathrm{C}_{5}^{2}$ cách chọn có 3 nam và 2 nữ.
   Vậy có $\mathrm{C}_{10}^{2} \cdot \mathrm{C}_{5}^{3} + \mathrm{C}_{10}^{3} \cdot \mathrm{C}_{5}^{2} = 1650$ cách chọn 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ.

   • Cách 2:
   Có C_{15}^{5} cách chọn 5 người trong số 15 người, trong đó:
   - Có $\mathrm{C}_{10}^{1} \cdot \mathrm{C}_{5}^{4}$ cách chọn 5 người có 1 nam và 4 nữ.
   - Có $\mathrm{C}_{10}^{4} \cdot \mathrm{C}_{5}^{1}$ cách chọn 5 người có 4 nam và 1 nữ.
   - Có C_{10}^{5} cách chọn chỉ có 5 nam.
   - Có C_{5}^{5} cách chọn chỉ có 5 nữ.
   Vậy có $\mathrm{C}_{15}^{5} - \left(\mathrm{C}_{10}^{1} \cdot \mathrm{C}_{5}^{4} + \mathrm{C}_{10}^{4} \cdot \mathrm{C}_{5}^{1} + \mathrm{C}_{10}^{5} + \mathrm{C}_{5}^{5}\right) = 1650$ cách chọn 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ.

2. • Cách 1:
   Có $\mathrm{C}_{9}^{2} \cdot \mathrm{C}_{4}^{3}$ cách chọn có 2 nam và 3 nữ trong đó cậu Thành và cô Nguyệt không tham gia.
   Có $\mathrm{C}_{9}^{3} \cdot \mathrm{C}_{4}^{2}$ cách chọn có 3 nam và 2 nữ trong đó cậu Thành và cô Nguyệt không tham gia.
   Vậy có $\mathrm{C}_{9}^{2} \cdot \mathrm{C}_{4}^{3} + \mathrm{C}_{9}^{3} \cdot \mathrm{C}_{4}^{2} = 648$ cách chọn 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ trong đó cậu Thành và cô Nguyệt không tham gia.

- Cách 2:
Có C_{13}^5 cách chọn 5 người trong số 13 người (vì cậu Thành và cô Nguyệt không tham gia), trong đó:
- Có $\mathrm{C}_9^1 \cdot \mathrm{C}_4^4$ cách chọn 5 người có 1 nam và 4 nữ.
- Có $\mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_4^1$ cách chọn 5 người có 4 nam và 1 nữ.
- Có C_9^5 cách chọn chỉ có 5 nam.
Vậy có $\mathrm{C}_{13}^5 - \left(\mathrm{C}_9^1 \cdot \mathrm{C}_4^4 + \mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_9^5\right) = 648$ cách chọn 5 người có ít nhất 2 nam và 2 nữ trong đó cậu Thành và cô Nguyệt không tham gia.

□

Bài 12. Một lớp có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn ra để lập một tốp ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau

1. Nếu phải có ít nhất là 2 nữ.
2. Nếu chọn tuỳ ý.

ĐS: 5413695 và 8145060

Lời giải.

1.
- Cách 1:
Có $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{30}^4$ cách chọn tốp ca có 2 nữ và 4 nam.
Có $\mathrm{C}_{15}^3 \cdot \mathrm{C}_{30}^3$ cách chọn tốp ca có 3 nữ và 3 nam.
Có $\mathrm{C}_{15}^4 \cdot \mathrm{C}_{30}^2$ cách chọn tốp ca có 4 nữ và 2 nam.
Có $\mathrm{C}_{15}^5 \cdot \mathrm{C}_{30}^1$ cách chọn tốp ca có 5 nữ và 1 nam.
Có $\mathrm{C}_{15}^6 \cdot \mathrm{C}_{30}^0$ cách chọn tốp ca có 6 nữ và 0 nam.
Vậy có $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{30}^4 + \mathrm{C}_{15}^3 \cdot \mathrm{C}_{30}^3 + \mathrm{C}_{15}^4 \cdot \mathrm{C}_{30}^2 + \mathrm{C}_{15}^5 \cdot \mathrm{C}_{30}^1 + \mathrm{C}_{15}^6 \cdot \mathrm{C}_{30}^0 = 5413695$ cách chọn.
- Cách 2:
Có C_{45}^6 cách chọn 1 tốp ca tuỳ ý.
Có $\mathrm{C}_{15}^1 \cdot \mathrm{C}_{30}^5$ cách chọn 1 tốp ca có 1 nữ và 5 nam.
Có $\mathrm{C}_{15}^0 \cdot \mathrm{C}_{30}^6$ cách chọn 1 tốp ca có 0 nữ và 6 nam.
Vậy có $\mathrm{C}_{45}^6 - \left(\mathrm{C}_{15}^1 \cdot \mathrm{C}_{30}^5 + \mathrm{C}_{15}^0 \cdot \mathrm{C}_{30}^6\right) = 5413695$ cách chọn.

2. Nếu chọn tuỳ ý, ta có $\mathrm{C}_{45}^6 = 8145060$ cách chọn.

□

Bài 13. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi 2 ván với mỗi vận động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và cho biết số ván các vận động viên nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với 2 vận động viên nữ là 66. Hỏi có bao nhiêu vận động viên tham gia giải và số ván tất cả các vận động viên đã chơi? **ĐS:** 13 và 156

Lời giải.
Gọi n là số vận động viên nam tham gia giải $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2)$.
Số ván các vận động viên nam chơi với nhau là $2 \cdot \mathrm{C}_n^2$.
Số ván các vận động viên nam chơi với 2 vận động viên nữ là $4n$.
Theo giả thiết

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \mathrm{C}_n^2 - 4n = 66 \\
\Leftrightarrow\ & 2 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-1)!} - 4n = 66 \\
\Leftrightarrow\ & (n-1)n - 4n = 66 \\
\Leftrightarrow\ & n^2 - 5n - 66 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} n = 11 & \text{(nhận)} \\ n = -69 & \text{(loại)} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & n = 11.
\end{aligned}$$

Số vận động viên tham gia giải là $11 + 2 = 13$ vận động viên.
Số ván các vận động viên nam chơi với nhau là $2 \cdot \mathrm{C}_{11}^2 = 110$ ván.
Số ván các vận động viên nam chơi với 2 vận động viên nữ là $4 \cdot 11 = 44$ ván.
Số ván hai vận động viên nữ chơi với nhau là 2 ván.
Vậy có tất cả $110 + 44 + 2 = 156$ ván. □

Bài 14. Cho A là một tập hợp có 20 phần tử.

1. Có bao nhiêu tập hợp con của A.
2. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là chẵn.

ĐS: 2^{20} và 524287

Lời giải.

1. Số tập con của A có 0 phần tử (tập rỗng) là C_{20}^0.
Số tập con của A có 1 phần tử là C_{20}^1.
Số tập con của A có 2 phần tử là C_{20}^2.
$\vdots$
Số tập con của A có 20 phần tử là C_{20}^{20}.
Vậy tổng số tập hợp con của A là $\mathrm{C}_{20}^0 + \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{20}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = (1+1)^{20}$ tập con.

2. Số tập con khác rỗng của A có số phần tử chẵn là $T = \mathrm{C}_{20}^2 + \mathrm{C}_{20}^4 + \mathrm{C}_{20}^6 + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20}$.
Ta có $\begin{cases} \mathrm{C}_{20}^0 + \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{20}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = (1+1)^{20} & (1) \\ \mathrm{C}_{20}^0 - \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{20}^2 - \mathrm{C}_{20}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = (1-1)^{20}. & (2) \end{cases}$
Lấy (1) cộng với (2) vế theo vế ta được

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \mathrm{C}_{20}^2 + 2 \cdot \mathrm{C}_{20}^2 + 2 \cdot \mathrm{C}_{20}^4 + 2 \cdot \mathrm{C}_{20}^6 + \cdots + 2 \cdot \mathrm{C}_{20}^{20} = 2^{20} \\ \Rightarrow\ & T = 2^{19} - 1 \\ \Leftrightarrow\ & T = 524287. \end{aligned}$$

□

Bài 15. Cho đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ ($n \geq 2, n$ nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ nhiều gấp hai mươi lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Tìm n. **ĐS:** 8

Lời giải.
Có C_{2n}^3 tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm.
Đa giác đều $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ nội tiếp đường tròn tâm (O) có n đường chéo qua tâm. Cứ hai đường chéo bất kỳ qua tâm sẽ tạo thành một hình chữ nhật, số hình chữ nhật là C_n^2.
Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_{2n}^3 = 20 \cdot \mathrm{C}_n^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - 9n + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} n = 1 & \text{(loại)} \\ n = 8 & \text{(nhận)} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & n = 8. \end{aligned}$$

□

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 16. Trong một buổi khiêu vũ có 22 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 người ra khiêu vũ? **ĐS:** 40

Lời giải.
Có $C_{40}^2 = 780$ cách chọn 2 người từ 40 người ban đầu ra khiêu vũ. □

Bài 17. Có bao nhiêu cách rút ra ba quân bài từ bộ bài 52 con? **ĐS:** 22100

Lời giải.
Có $C_{52}^3 = 22100$ cách rút 3 quân bài từ bộ bài 52 con. □

Bài 18. Trong một uỷ ban có 10 người, cần chọn ba người làm chủ tịch, phó chủ tịch và thư ký. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 720

Lời giải.
Số cách chọn 3 người từ 10 người vào 3 chức vụ khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 10.
Vậy có $A_{10}^3 = 720$ cách. □

Bài 19. Trước phiên toà các vị thẩm phán bắt tay nhau từng đôi một. Có bao nhiêu cách bắt tay nếu có tất cả 8 vị? **ĐS:** 28

Lời giải.
Mỗi cái bắt tay là của hai vị thẩm phán.
Do vậy, số cách bắt tay là $C_8^2 = 28$ cách. □

Bài 20. Có 12 công nhân xây dựng. Người đội trưởng bố trí ba người làm ở A, bốn người làm ở B và năm người làm ở C. Có bao nhiêu cách bố trí? **ĐS:** 27720

Lời giải.
Có C_{12}^3 cách chọn 3 người làm ở A.
Có C_9^4 cách chọn 4 người làm ở B.
Có C_5^5 cách chọn 5 người làm ở C.
Vậy có $C_{12}^3 \cdot C_9^4 \cdot C_5^5 = 27720$ cách bố trí. □

Bài 21. Một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam bằng số ủy viên nữ? **ĐS:** 54600.

Lời giải.
Để chọn 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam bằng số ủy viên nữ ta chọn 3 ủy viên là nam và 3 ủy viên là nữ.
Số cách chọn là $C_{10}^3 \cdot C_{15}^3 = 54600$. □

Bài 22. Một lớp có 45 học sinh trong đó có 20 nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một ban cán sự gồm 4 học sinh nếu có ít nhất 1 học sinh nam? **ĐS:** 136345.

Lời giải.
Lớp học có $45 - 20 = 25$ học sinh nữ.
Số cách chọn ban cán sự gồm 4 học sinh là C_{45}^4.
Số cách chọn ban cán sự gồm 4 học sinh đều là học sinh nữ là C_{25}^4.
Vậy nên số cách chọn ra một ban cán sự gồm 4 học sinh nếu có ít nhất 1 học sinh nam là

$$C_{45}^4 - C_{25}^4 = 136345.$$

□

Bài 23. Từ 9 nam và 6 nữ có bao nhiêu cách thành lập một nhóm gồm 5 người có ít nhất 2 nam và 2 nữ? **ĐS:** 1980.

Lời giải.
Có hai trường hợp lập một nhóm gồm 5 người có ít nhất 2 nam và 2 nữ là

— Nhóm có 3 nam và 2 nữ, có $C_9^3 \cdot C_6^2 = 1260$.

— Nhóm có 2 nam và 3 nữ, có $C_9^2 \cdot C_6^3 = 720$.

Vậy nên có $1260 + 720 = 1980$ cách lập một nhóm gồm 5 người có ít nhất 2 nam và 2 nữ. □

Bài 24. Một tổ có 10 nam và 5 nữ. Cần lập một ban đại diện gồm 4 người. Có bao nhiêu cách lập để có nhiều nhất là 2 nữ? **ĐS:** 1260.

Lời giải.
Có các trường hợp lập lập một ban đại diện gồm 4 người, trong đó có nhiều nhất là 2 nữ là

— Ban đại diện có 2 nam và 2 nữ, có $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 450$.

— Ban đại diện có 3 nam và 1 nữ, có $C_{10}^3 \cdot C_5^1 = 600$.

— Ban đại diện có 4 nam, có $C_{10}^4 = 210$.

Vậy nên có $450 + 600 + 210 = 1260$ cách lập một ban đại diện gồm 4 người, trong đó có nhiều nhất là 2 nữ. □

Bài 25. Có 3 loại cây và 4 hố trồng cây. Hỏi có mấy cách trồng cây nếu mỗi hố trồng một cây và mỗi loại cây phải có ít nhất một loại cây được trồng? **ĐS:** 24.

Lời giải.

— Chọn 3 hố để trồng 3 cây, có $C_4^3 = 4$ cách chọn.

— Ứng với mỗi cách chọn hố trồng cây đó, có $3! = 6$ cách trồng 3 cây.

Vậy có $4 \cdot 6 = 24$ cách trồng cây thỏa mãn đề bài. □

Bài 26. Trên mặt phẳng có 10 điểm, trong đó có 4 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có bất cứ ba điểm nào nữa thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh là các điểm đã cho? **ĐS:** 116.

Lời giải.
3 đỉnh không thẳng hàng từ cho ta một tam giác. Do đó từ 10 điểm đã cho, số tam giác được tạo thành là

$$C_{10}^3 - C_4^3 = 116.$$

Vậy có 116 tam giác có ba đỉnh là các điểm đã cho. □

Bài 27. Từ 10 nam và 5 nữ người ta chọn ra một ban đại diện gồm 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ. Có bao nhiêu cách chọn nếu cậu A và cậu B từ chối tham gia? **ĐS:** 840.

Lời giải.
Nếu cậu A và cậu B từ chối tham gia ban đại diện thì ban đại diện chọn trong 8 nam còn lại và 5 nữ. Các trường hợp chọn ra một ban đại diện gồm 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ là

— Ban đại diện có 3 nam và 2 nữ, có $C_8^3 \cdot C_5^2 = 560$ cách chọn.

— Ban đại diện có 2 nam và 3 nữ, có $C_8^2 \cdot C_5^3 = 280$ cách chọn.

Vậy nên có $560 + 280 = 840$ cách lập một ban đại diện gồm 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ. □

Bài 28. Có bao nhiêu cách chia 3 thầy giáo dạy Toán và dạy 6 lớp 12, mỗi thầy dạy đúng 2 lớp? **ĐS:** 90.

Lời giải.
Số cách chia 3 thầy giáo dạy Toán và dạy 6 lớp 12, mỗi thầy dạy đúng 2 lớp là $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$ cách. □

Bài 29. Ba bạn A, B, C cùng đến nhà bạn D mượn sách. Bạn D có 9 quyển sách khác nhau, trong đó có 8 quyển sách học và một cuốn tiểu thuyết. Bạn B mượn 2 quyển, C muốn mượn 3 quyển. Bạn A mượn 2 quyển trong đó có một cuốn tiểu thuyết. Hỏi bạn D có bao nhiêu cách cho mượn sách? **ĐS:** 1680.

Lời giải.
Để cho các bạn A, B, C mượn sách, bạn D thực hiện các bước sau

— Cho bạn A mượn 2 quyển trong đó có một cuốn tiểu thuyết nên có $\mathrm{C}_8^1 \cdot 1 = 8$ cách.

— Cho bạn B mượn 2 quyển sách, có $\mathrm{C}_7^2 = 21$ cách.

— Cho bạn C mượn 3 quyển sách, có $\mathrm{C}_5^3 = 10$ cách.

Vậy D có $8 \cdot 21 \cdot 10 = 1680$ cách cho mượn sách □

Bài 30. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất ta lấy 10 điểm. Trên đường thẳng thứ hai ta lấy 20 điểm. Có bao nhiêu tam giác tạo bởi các điểm đã cho? **ĐS:** 2800.

Lời giải.

— Có C_{30}^3 cách chọn 3 điểm bất kì từ 30 điểm đã cho.

— Có $\mathrm{C}_{10}^3 + \mathrm{C}_{20}^3$ cách chọn 3 thẳng hàng.

Vậy có $\mathrm{C}_{30}^3 - \left(\mathrm{C}_{10}^3 + \mathrm{C}_{20}^3\right) = 2800$ tam giác tạo bởi các điểm đã cho. □

DẠNG 0.1. Rút gọn một biểu thức chứa chỉnh hợp - hoán vị - tổ hợp

Phương pháp

— *Sử dụng công thức về chỉnh hợp - hoán vị - tổ hợp.*

— *Sử dụng các tính chất của tổ hợp.*

— *Khai triển và rút gọn.*

Bài 31. Rút gọn $A=\dfrac{n+1}{\left(n^2-1\right)n}\mathrm{C}_n^2$. **ĐS:** $A=\frac{1}{2}$

Lời giải.

Ta có

$$A=\frac{n+1}{\left(n^2-1\right)n}\cdot\frac{n!}{(n-2)!2!}=\frac{(n-2)!(n+1)(n-1)n}{(n-2)!2!(n-1)(n+1)n}=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

□

Bài 32. Rút gọn $A=\dfrac{2-\mathrm{C}_{11}^4+\dfrac{11}{4}\mathrm{C}_{10}^3}{2\mathrm{C}_{13}^7+\mathrm{C}_{12}^7-\mathrm{C}_{12}^5+\mathrm{C}_{14}^7}$. **ĐS:** $A=\frac{1}{3432}$

Lời giải.

Áp dụng tính chất $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n}{k}\cdot\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ suy ra $\mathrm{C}_{11}^4=\dfrac{11}{4}\mathrm{C}_{10}^3$, $\mathrm{C}_{14}^7=\dfrac{14}{7}\mathrm{C}_{13}^6=2\mathrm{C}_{13}^6$.

Mà $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}\Rightarrow\mathrm{C}_{12}^7=\mathrm{C}_{12}^{12-7}=\mathrm{C}_{12}^5$.

Vậy $A=\dfrac{2-\dfrac{11}{4}\mathrm{C}_{10}^3+\dfrac{11}{4}\mathrm{C}_{10}^3}{2\mathrm{C}_{13}^7+\mathrm{C}_{12}^7-\mathrm{C}_{12}^7+2\mathrm{C}_{13}^6}=\dfrac{2}{2\left(\mathrm{C}_{13}^6+\mathrm{C}_{13}^7\right)}=\dfrac{1}{\mathrm{C}_{14}^7}=\dfrac{1}{3432}$. □

Bài 33. Rút gọn $A=\dfrac{\mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^1}{\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2}+\dfrac{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}(n-1)^2n^2}{4\left(\mathrm{C}_n^2\cdot n!\right)^2}$. **ĐS:** $A=\frac{3n^2+4n-11}{3(n-1)}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=\frac{\dfrac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\dfrac{n!}{1!(n-1)!}}{\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2}+\frac{n!(n+1)!(n-1)^2n^2}{4\cdot\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2\cdot(n!)^2}\\&=\frac{(n-2)(n-1)n^2}{3\cdot\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2}+\frac{(n+1)(n-1)^2n^2}{4\cdot\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2}\\&=\frac{(n-2)(n-1)n^2}{3\cdot n!\cdot n!}\cdot 2!\cdot 2!\cdot(n-2)!(n-2)!+\frac{(n+1)(n-1)^2n^2\cdot 2!\cdot 2!\cdot(n-2)!(n-2)!}{4\cdot n!\cdot n!}\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{(n-2)(n-1)n^2}{(n-1)^2n^2}+\frac{(n+1)(n-1)^2n^2}{(n-1)^2n^2}\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{n-2}{n-1}+n+1=\frac{4(n-2)+3\left(n^2-1\right)}{3(n-1)}=\frac{3n^2+4n-11}{3(n-1)}.\end{aligned}$$

□

Bài 34. Rút gọn $A=\mathrm{C}_n^k+3\mathrm{C}_n^{k-1}+3\mathrm{C}_n^{k-2}+\mathrm{C}_n^{k-3}$ với $3\leq k\leq n$. **ĐS:** $A=\mathrm{C}_{n+3}^k$

Lời giải.
Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \mathrm{C}_{n+1}^k$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}\right) + 2\left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^{k-2}\right) + \left(\mathrm{C}_n^{k-2} + \mathrm{C}_n^{k-3}\right) \\ &= \mathrm{C}_{n+1}^k + 2\mathrm{C}_{n+1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-2} \\ &= \left(\mathrm{C}_{n+1}^k + \mathrm{C}_{n+1}^{k-1}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-2}\right) \\ &= \mathrm{C}_{n+2}^k + \mathrm{C}_{n+2}^{k-1} = \mathrm{C}_{n+3}^k. \end{aligned}$$

□

Bài 35. Rút gọn $A = \mathrm{C}_n^k + 5\mathrm{C}_n^{k-1} + 10\mathrm{C}_n^{k-2} + 10\mathrm{C}_n^{k-3} + 5\mathrm{C}_n^{k-4} + \mathrm{C}_n^{k-5}$. **ĐS:** $A = \mathrm{C}_{n+5}^k$

Lời giải.
Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \mathrm{C}_{n+1}^k$ và tách ghép ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}\right) + 4\left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^{k-2}\right) + 6\left(\mathrm{C}_n^{k-2} + \mathrm{C}_n^{k-3}\right) + 4\left(\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4}\right) + \left(\mathrm{C}_n^{k-4} + \mathrm{C}_n^{k-5}\right) \\ &= \mathrm{C}_{n+1}^k + 4\mathrm{C}_{n+1}^{k-1} + 6\mathrm{C}_{n+1}^{k-2} + 4\mathrm{C}_{n+1}^{k-3} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-4} \\ &= \left(\mathrm{C}_{n+1}^k + \mathrm{C}_{n+1}^{k-1}\right) + 3\left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-2}\right) + 3\left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-2} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-3}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-3} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-4}\right) \\ &= \mathrm{C}_{n+2}^k + 3\mathrm{C}_{n+2}^{k-1} + 3\mathrm{C}_{n+2}^{k-2} + \mathrm{C}_{n+2}^{k-3} \\ &= \left(\mathrm{C}_{n+2}^k + \mathrm{C}_{n+2}^{k-1}\right) + 2\left(\mathrm{C}_{n+2}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+2}^{k-2}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+2}^{k-2} + \mathrm{C}_{n+2}^{k-3}\right) \\ &= \mathrm{C}_{n+3}^k + 2\mathrm{C}_{n+3}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+3}^{k-2} \\ &= \left(\mathrm{C}_{n+3}^k + \mathrm{C}_{n+3}^{k-1}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+3}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+3}^{k-2}\right) \\ &= \mathrm{C}_{n+4}^k + \mathrm{C}_{n+4}^{k-1} = \mathrm{C}_{n+5}^k. \end{aligned}$$

□

Bài 36. Rút gọn $A = \mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot \dfrac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_n^1} + 3 \cdot \dfrac{\mathrm{C}_n^3}{\mathrm{C}_n^2} + \cdots + n \cdot \dfrac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_n^{n-1}}$. **ĐS:** $A = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Lời giải.
Ta có

$$\mathrm{C}_n^1 = n.$$

$$2 \cdot \frac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_n^1} = 2 \cdot \frac{\dfrac{n!}{2!(n-2)!}}{\dfrac{n!}{(n-1)!}} = 2 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = n - 1.$$

$$3 \cdot \frac{\mathrm{C}_n^3}{\mathrm{C}_n^2} = 3 \cdot \frac{\dfrac{n!}{3!(n-3)!}}{\dfrac{n!}{2!(n-2)!}} = n - 2.$$

$$\ldots$$

$$k \cdot \frac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_n^{k-1}} = k \cdot \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = n - k + 1.$$

$$\ldots$$

$$n \cdot \frac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_n^{n-1}} = n \cdot \frac{1}{\dfrac{n!}{(n-1)!1!}} = 1.$$

Cộng n đẳng thức trên theo vế ta được

$$\begin{aligned} A &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k+1) + \cdots + 1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

□

DẠNG 0.2. Giải phương trình liên quan đến chỉnh hợp - tổ hợp - hoán vị

Phương pháp

— *Dùng các công thức*

1. $\mathrm{P}_n = n!$.
2. $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ *(với* $0 \leq k \leq n$*).*
3. $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ *(với* $0 \leq k \leq n$*).*

— *Rút gọn, đưa phương trình đã cho về phương trình đại số.*

— *Giải phương trình này, tìm nghiệm.*

— *Chọn nghiệm thích hợp với điều kiện* $0 \leq k \leq n$*.*

Bài 37. Giải phương trình $\mathrm{C}_{2n}^3 = 20\mathrm{C}_n^2$. **ĐS:** $n = 8$

Lời giải.
Điều kiện $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{2n}^3 = 20\mathrm{C}_n^2 &\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{(2n-2)(2n-1)}{6} = 5(n-1) \\ &\Leftrightarrow 4n^2 - 6n + 2 = 30n - 30 \quad (\text{vì } n \geq 2) \\ &\Leftrightarrow 4n^2 - 36n + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 8 & (\text{nhận}) \\ n = 1 & (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 8. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $n = 8$. □

Bài 38. Giải phương trình $\dfrac{\mathrm{A}_n^4}{\mathrm{A}_{n+1}^3 - \mathrm{C}_n^{n-4}} = \dfrac{24}{23}$. **ĐS:** $n = 5$

Lời giải.
Điều kiện $n \geq 4$, $n \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{A}_n^4}{\mathrm{A}_{n+1}^3 - \mathrm{C}_n^{n-4}} = \frac{24}{23} &\Leftrightarrow \frac{\dfrac{n!}{(n-4)!}}{\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} - \dfrac{n!}{(n-4)!4!}} = \frac{24}{23} \\ &\Leftrightarrow \frac{n!}{\dfrac{(n+1)!}{(n-3)(n-2)} - \dfrac{n!}{4!}} = \frac{24}{23} \\ &\Leftrightarrow \frac{4!(n-3)(n-2)n!}{4!(n+1)! - n!(n-3)(n-2)} = \frac{24}{23} \\ &\Leftrightarrow 24n^2 - 144n + 120 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 5 & (\text{nhận}) \\ n = 1 & (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $n = 5$. □

Bài 39. Giải phương trình $\dfrac{\mathrm{P}_{x+1}}{\mathrm{A}_x^5\mathrm{P}_{x-5}} = 720$. **ĐS:** $x = 7$

Lời giải.
Điều kiện $x \geq 5$, $x \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}_{x+1}}{\mathrm{A}_x^5\mathrm{P}_{x-5}} = 720 &\Leftrightarrow \frac{(x+3)!}{\dfrac{x!}{(x-5)!}\cdot(x-5)!} = 720\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) = 720\\ &\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x - 714 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-7)\left(x^2+13x+102\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-7=0\\ x^2+13x+102=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7\,(\text{thỏa mãn điều kiện}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 7$. □

Bài 40. Giải phương trình $72\mathrm{A}_x^1 - \mathrm{A}_{x+1}^3 = 72$. **ĐS:** $x = 8$

Lời giải.
Điều kiện $x \geq 2$, $x \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}72\mathrm{A}_x^1 - \mathrm{A}_{x+1}^3 = 72 &\Leftrightarrow 72\cdot\frac{x!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = 72\\ &\Leftrightarrow 72x - x(x-1)(x+1) = 72\\ &\Leftrightarrow x^3 - 73x + 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (\text{loại})\\ x=8 & (\text{nhận})\\ x=-9 & (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 8.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 8$. □

Bài 41. Tìm các số x nguyên dương thỏa mãn phương trình $\mathrm{C}_x^1 + 6\mathrm{C}_x^2 + 6\mathrm{C}_x^3 = 9x^2 - 14x$. **ĐS:** $x = 7$

Lời giải.
Điều kiện $x \geq 3$, $x \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_x^1 + 6\mathrm{C}_x^2 + 6\mathrm{C}_x^3 = 9x^2 - 14x &\Leftrightarrow x + 6\cdot\frac{x!}{2!(x-2)!} + 6\cdot\frac{x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x\\ &\Leftrightarrow x + 3(x-1)x + (x-2)(x-1)x = 9x^2 - 14x\\ &\Leftrightarrow x\left(x^2 - 9x + 14\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & (\text{loại})\\ x=7 & (\text{nhận})\\ x=2 & (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7.\end{aligned}$$

□

Bài 42. Giải phương trình $\mathrm{P}_x\mathrm{A}_x^2 + 72 = 6\left(\mathrm{A}_x^2 + 2\mathrm{P}_x\right)$, trong đó P_x là số hoán vị của x phần tử, A_x^2 là số chỉnh hợp chập 2 của x phần tử ($x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 2$). **ĐS:** $x = 3$ hoặc $x = 4$

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{P}_x\mathrm{A}_x^2 + 72 = 6\left(\mathrm{A}_x^2 + 2\mathrm{P}_x\right) \Leftrightarrow x!\cdot\frac{x!}{(x-2)!} + 72 = 6\left(\frac{x!}{(x-2)!} + 2x!\right)$$
$$\Leftrightarrow x!(x-1)x + 72 = 6(x-1)x + 12x!$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x!-6\right) = 12\left(x!-6\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x!-6\right)\left(x^2-x-12\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & \text{(nhận)} \\ x=4 & \text{(nhận)} \\ x=-3 & \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=3$, $x=4$. □

Bài 43. Giải phương trình $\dfrac{5}{\mathrm{C}_5^x} - \dfrac{2}{\mathrm{C}_6^x} = \dfrac{14}{\mathrm{C}_7^x}$ (1). **ĐS:** $x=3$

Lời giải.
Điều kiện $0 \le x \le 5, x \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{5}{\dfrac{5!}{x!(5-x)!}} - \frac{2}{\dfrac{6!}{x!(6-x)!}} = \frac{14}{\dfrac{7!}{x!(7-x)!}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{24} - \frac{6-x}{360} = \frac{(6-x)(7-x)}{360} \\
&\Leftrightarrow \quad 15 - 6 + x = 42 - 13x + x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \text{ (loại)} \\ x=3 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

□

Bài 44. Hãy tìm số n nguyên dương thỏa mãn đẳng thức $\mathrm{C}_{n-1}^4 - \mathrm{C}_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}\mathrm{A}_{n-2}^2 = 0$. **ĐS:** $n=11$

Lời giải.
Điều kiện $n \in \mathbb{Z}^+, n \ge 5$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5}{4}\cdot\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{n-1}{24} - \frac{n-1}{6(n-4)} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{n-4} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad &(n-1)(n-4) - 4(n-1) - 5.6 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad &n^2 - 9n - 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=11 \text{ (nhận)} \\ n=-2 \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

□

Bài 45. Tìm m, $n \in \mathbb{Z}^+$ biết $\mathrm{C}_{n+1}^{m+1} : \mathrm{C}_{n+1}^{m} : \mathrm{C}_{n+1}^{m-1} = 5:5:3$. **ĐS:** $m=3$, $n=6$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}}{\mathrm{C}_{n+1}^{m}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}}{\dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}} = \dfrac{n+1-m}{m+1}$

và $\dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^{m}}{\mathrm{C}_{n+1}^{m-1}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}{\dfrac{(n+1)!}{(m-1)!(n+2-m)!}} = \dfrac{n-m+2}{m}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \dfrac{n+1-m}{m+1} = 1 \\ \dfrac{n-m+2}{m} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m \\ 3n - 8m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6. \end{cases}$ □

Bài 46. Giải phương trình $\mathrm{A}_x^3 + \mathrm{C}_x^{x-2} = 14x\,(1)$. **ĐS:** $x = 5$

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{Z}, x \geq 3$. Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{(x-2)!2!} = 14x \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-1)(x-2) + \frac{x(x-1)}{2} = 14x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 3x + 2 + \frac{x-1}{2} = 14 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^2 - 5x - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5}{2} \text{ (loại)} \\ x = 5 \text{ (nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

□

Bài 47. Giải phương trình $\mathrm{C}_{x+8}^{x+3} = 5\mathrm{A}_{x+6}^3\,(1)$. **ĐS:** $x = 17$

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{Z}, x \geq -3$. Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{(x+8)!}{(x+3)!5!} = 5 \cdot \frac{(x+6)!}{(x+3)!} \\ \Leftrightarrow \quad & (x+8)(x+7) = 5 \cdot 5! \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 15x + 56 = 600 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 15x - 544 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 17 \text{ (nhận)} \\ x = -32 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

□

Bài 48. Giải phương trình $35\mathrm{C}_{2x}^{x-1} = 132\mathrm{C}_{2x-2}^{x}\,(1)$. **ĐS:** $x = 6$

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{Z}, x \geq 2$. Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad \Leftrightarrow \quad & 35 \cdot \frac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!} = 132 \cdot \frac{(2x-2)!}{x!(x-2)!} \\ \Leftrightarrow \quad & 35 \cdot \frac{2x \cdot (2x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = 132 \\ \Leftrightarrow \quad & 70x(2x-1) = 132(x-1)(x+1) \\ \Leftrightarrow \quad & 140x^2 - 70x = 132x^2 - 132 \\ \Leftrightarrow \quad & 8x^2 - 70x + 132 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ (nhận)} \\ x = \dfrac{11}{4} \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

□

Bài 49. Giải phương trình $\dfrac{1}{\mathrm{C}_4^x} - \dfrac{1}{\mathrm{C}_5^x} = \dfrac{1}{\mathrm{C}_6^x}\,(1)$. **ĐS:** $x = 2$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4$. Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x!(4-x)!}{4!} - \frac{x!(5-x)!}{5!} = \frac{x!(6-x)!}{6!} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{(5-x)}{5} = \frac{(6-x)(5-x)}{5.6} \\
&\Leftrightarrow \quad 30 - 6\cdot(5-x) = \left(30 - 11x + x^2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 30 - 30 + 6x - 30 + 11x - x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 17x + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (nhận)} \\ x = 15 \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

□

Bài 50. Giải phương trình $x^2\mathrm{C}_{x-1}^{x-4} + x\mathrm{C}_{x-1}^{x-4} = 4(x+1)\mathrm{C}_x^2$ (1). **ĐS:** $x = 6$

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{Z}, x \geq 4$. Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \frac{(x-1)!}{(x-4)!3!} + x \cdot \frac{(x-1)!}{(x-4)!3!} = 4(x+1)\cdot\frac{x!}{2!(x-2)!} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4(x+1)}{(x-2)(x-3)} \\
&\Leftrightarrow \quad x(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 5x + 6) = 12(x+1) \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ (nhận)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

□

Bài 51. Giải phương trình $3\mathrm{C}_{2x}^{x-1} = 2\mathrm{C}_{2x+1}^{x-1}$ (1). **ĐS:** $x = 4$

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{Z}, x \geq 1$. Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad 3\cdot\frac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!} = 2\cdot\frac{(2x+1)!}{(x-1)!(x+2)!} \\
&\Leftrightarrow \quad 3 = 2\cdot\frac{(2x+1)}{x+2} \\
&\Leftrightarrow \quad 3x + 6 = 4x + 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 4.
\end{aligned}$$

□

Bài 52. Giải phương trình $\mathrm{A}_x^3 + \mathrm{C}_x^2 = 14\mathrm{C}_x^{x-1}$. **ĐS:** $x = 5$

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{Z}, x \geq 3$. Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 14\cdot\frac{x!}{(x-1)!} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{14}{(x-1)(x-2)} \\
&\Leftrightarrow \quad 2(x-1)(x-2) + (x-1) = 14.2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (nhận)} \\ x = -\dfrac{5}{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

□

DẠNG 0.3. Giải bất phương trình liên quan đến chỉnh hợp-hoán vị- tổ hợp

Phương pháp:

1. *Dùng công thức* $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$*;* $\mathrm{P}_n = n!$*;* $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
2. *Đưa bất phương trình đã cho về bất phương trình đa thức, phân thức hữu tỉ.*
3. *Giải tìm nghiệm, đem giao với điều kiện* $0 \le k \le n$*; suy ra nghiệm của bài toán.*

Bài 53. Giải bất phương trình $\dfrac{\mathrm{A}_{x+4}^4}{(x+2)!} \le \dfrac{42}{\mathrm{P}_x}$ (với $x \in \mathbb{Z}^+$). (1) **ĐS:** $S = \{1;2;3\}$

Lời giải.

Ta có $\mathrm{A}_{x+4}^4 = \dfrac{(x+4)!}{x!} = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ và $\mathrm{P}_x = x!$.

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+2)!} \le \frac{42}{x!} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+2)(x+1)\cdot x!} \le \frac{42}{x!} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+3)(x+4) - 42 \le 0 \,(\text{do } x \in \mathbb{Z}^+) \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 7x - 30 \le 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -10 \le x \le 3.
\end{aligned}$$

Do $x \in \mathbb{Z}^+$ nên nghiệm của (1) là $x \in \{1;2;3\}$. □

Bài 54. Giải bất phương trình $2\mathrm{C}_{x+1}^2 + 3\mathrm{A}_x^2 < 30$. (1) **ĐS:** $x = 2$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \ge 2 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2,\ x \in \mathbb{Z}^+$.

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cdot\frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3\frac{x!}{(x-2)!} < 30 \Leftrightarrow x(x+1) + 3(x-1)x < 30 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x^2 - 2x - 30 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 3.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 2$, $x \in \mathbb{Z}^+$ ta có $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. □

Bài 55. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{2}\mathrm{A}_{2x}^2 - \mathrm{A}_x^2 \le \dfrac{6}{x}\mathrm{C}_x^3 + 10$. $(*)$ **ĐS:** $S = \{3;4\}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x \ge 2 \\ x \ge 2 \\ x \ge 3 \\ x \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3, x \in \mathbb{Z}^+$.

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}\frac{x!}{3!(x-3)!} + 10 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(2x-1)2x - (x-1)x \le (x-2)(x-1) + 10 \\
&\Leftrightarrow \quad 3x - 12 \le 0 \Leftrightarrow x \le 4.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 3$, $x \in \mathbb{Z}^+$ ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là $x = 3$ hoặc $x = 4$. □

Bài 56. Giải bất phương trình $\mathrm{C}_{x-1}^4 - \mathrm{C}_{x-1}^2 - \frac{5}{4}\mathrm{A}_{x-2}^2 < 0.$ (1) **ĐS:** $S = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Lời giải.
Điều kiện: $x \in Z^+, x \geq 5$.

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)!}{4!(x-5)!} - \frac{(x-1)!}{3!(x-4)!} - \frac{5}{4} \cdot \frac{(x-2)!}{(x-4)!} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{24} - \frac{x-1}{6(x-4)} - \frac{5}{4(x-4)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x-4) - 4(x-1) - 6.5}{24(x-4)} < 0 \,(\text{do } x \geq 5 \Rightarrow x-4 > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 9x - 22}{x-4} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 9x - 22 < 0 \,(\text{vì } x - 4 > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad -2 < x < 11.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện của đề bài, ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. □

Bài 57. Giải bất phương trình $72\mathrm{A}_x^1 - \mathrm{A}_{x-1}^3 \leq 72.$ (1) **ĐS:** $S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Lời giải.
Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 \geq 3 \\ x \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad 72 \cdot \frac{x!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{x(x-2)!} \leq 72 \\
&\Leftrightarrow \quad 72x - (x-1)(x+1)x - 72 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 - 73x + 72 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)\left(x^2 + x - 72\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \leq -9 \\ 1 \leq x \leq 8 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Giao với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. □

Bài 58. Giải bất phương trình $\frac{\mathrm{A}_{n+1}^{n-2}}{\mathrm{C}_{n-1}^2} \geq 2\mathrm{P}_n$, với $n \in \mathbb{Z}^+$. (1) **ĐS:** $S = \{1; 2\}$

Lời giải.
Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 1 \\ n \in Z^+ \end{cases}.$ $(*)$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{A}_{n+1}^{n-2} \geq 2\mathrm{P}_n \cdot \mathrm{C}_{n-1}^2 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{3!} \geq 2 \cdot n! \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} \\
&\Leftrightarrow \quad n \geq 6(n-2)(n-1) \Leftrightarrow 5n^2 - 18n + 12 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{9 - \sqrt{21}}{5} \leq n \leq \frac{9 + \sqrt{21}}{5}.
\end{aligned}$$

Giao với $(*)$ ta được $n \in \{1; 2\}$ là nghiệm của bất phương trình (1). □

Bài 59. Có bao nhiêu số hạng dương của dãy số (x_n) cho bởi: $x_n = \frac{195}{4\mathrm{P}_n} - \frac{\mathrm{A}_{n+1}^3}{\mathrm{P}_{n+1}}$, với $n \in \mathbb{Z}^+$. **ĐS:** x_1, x_2, x_3, x_4

Lời giải.

$$\begin{aligned}
x_n > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{195}{4\mathrm{P}_n} - \frac{\mathrm{A}_{n+1}^3}{\mathrm{P}_{n+1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{195}{4n!} - \frac{n!}{(n+1)!} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{195}{4.n!} - \frac{(n+2)(n+3)}{n!} > 0 \Leftrightarrow 195 - 4(n+2)(n+3) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4n^2 + 20n - 171 < 0.
\end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4.$
Vậy tất cả có 4 số hạng dương x_1, x_2, x_3, x_4. □

Bài 60. Tìm tất cả các số âm trong dãy số x_1, x_2, x_3, x_4, $\ldots$, x_n với

$$x_n = \frac{\mathrm{A}_{n+4}^4}{\mathrm{P}_{n+2}} - \frac{143}{4\mathrm{P}_n} < 0,\ (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Trong đó A_{n+4}^4 là chỉnh hợp chập 4 của $n+4$ phần tử còn P_n, P_{n+2} là hoán vị của tập hợp gồm n và $n+2$ phần tử tương ứng. **ĐS:** x_1, x_2

Lời giải.

$$\begin{aligned}
x_n < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{A}_{n+4}^4}{\mathrm{P}_{n+2}} - \frac{143}{4\mathrm{P}_n} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\dfrac{(n+4)!}{n!}}{(n+2)!} - \frac{143}{4n!} < 0 \Rightarrow (n+3)(n+4) - \frac{143}{4} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4n^2 + 28n - 95 < 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n = 1,\ n = 2.$
Vậy các số hạng âm của dãy là x_1, x_2. □

Bài 61. Giải bất phương trình $\mathrm{C}_{13}^x \geq \mathrm{C}_{13}^{11-x}$. (1) **ĐS:** $S = \{6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

Lời giải.
Điều kiện: $\begin{cases} 1 \leq x \leq 11 \\ x \in \mathrm{Z}^+ \end{cases}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{13!}{x!(13-x)!} \geq \frac{13!}{(11-x)!(x+2)!} \Leftrightarrow (x+2)(x+1) \geq (13-x)(12-x) \\
&\Leftrightarrow \quad 2x \geq 11 \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{2}.
\end{aligned}$$

Giao với $(*)$ ta được $x \in \{6; 7; 8; 9; 10; 11\}$ là nghiệm của bất phương trình (1). □

Bài 62. Giải bất phương trình $\mathrm{C}_{x+1}^3 \geq 100 + \mathrm{C}_{x+1}^{x-1}$. (2) **ĐS:** $x \geq 10$, $x \in \mathbb{Z}$

Lời giải.
Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 3 \\ x \in \mathrm{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \mathrm{Z}^+ \end{cases}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} \geq 100 + \frac{(x+1)!}{(x-1)!2!} \Leftrightarrow \frac{(x+1)!\left[(x-1)-3\right]}{3!(x-1)!} \geq 100 \\
&\Leftrightarrow \quad x(x+1)(x-4) \geq 600.
\end{aligned}$$

Ta thấy vì $x \in \mathbb{Z}$ nên khi $x = 9$ thì $x(x+1)(x-4) = 450 < 600$.
Khi $x \geq 10$ thì $x(x+1)(x-4) \geq 660 > 600$ nên $x \geq 10$ thỏa mãn bất phương trình.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $\begin{cases} x \geq 10 \\ x \in \mathrm{Z} \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình (2). □

Bài 63. Giải bất phương trình $\dfrac{\mathrm{A}_{x+4}^{4}}{(x+2)!} \leq \dfrac{143}{4\mathrm{P}_x}$. (3) **ĐS:** $x \in \{0;1;2\}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \mathrm{Z}^{+} \end{cases}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
(3) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4\cdot x!(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}{(x+2)!} \leq 143 \Leftrightarrow 4(x+4)(x+3) \leq 143 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x^2+28x-95 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Giao với $(*)$ ta được $x \in \{0;1;2\}$ là nghiệm của bất phương trình (3). □

Bài 64. Giải bất phương trình $12\mathrm{C}_x^1 + \mathrm{C}_{x+1}^{x-1} \geq 162$. (4) **ĐS:** $x \geq 9,\ x \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \in \mathrm{Z} \end{cases}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
(4) \quad &\Leftrightarrow \quad 12x + \frac{x(x+1)}{2!} \leq 162 \Leftrightarrow x^2+25x-324 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-25+\sqrt{1921}}{2} \\ x \leq \dfrac{-25-\sqrt{1921}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 9\,(\text{do } x \in \mathbb{Z}^{+}).
\end{aligned}$$

Giao với $(*)$ ta được $\begin{cases} x \geq 9 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình (4). □

Bài 65. Giải bất phương trình $3\mathrm{C}_{x+1}^2 + \mathrm{P}_5 \leq 4\mathrm{A}_x^2$. (5) **ĐS:** $x \geq 9,\ x \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \mathrm{Z} \end{cases}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
(5) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3x(x+1)}{2} + 120 \leq 4x(x-1) \Leftrightarrow 5x^2-11x-240 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{11+\sqrt{4921}}{10} \\ x \leq \dfrac{11-\sqrt{4921}}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 9\,(\text{do } x \in \mathbb{Z}^{+}).
\end{aligned}$$

Giao với $(*)$ ta được $\begin{cases} x \geq 9 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình (5). □

Bài 66. Giải bất phương trình $\dfrac{\mathrm{A}_x^4}{\mathrm{A}_{x+1}^3 - \mathrm{C}_x^{x-4}} \geq \dfrac{24}{23}$. (6) **ĐS:** $5 \leq x \leq 24,\ x \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \in \mathrm{Z}. \end{cases}$ $(*)$

$$(6) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}_x^4}{\mathrm{A}_{x+1}^3 - \mathrm{C}_x^4} \geq \frac{24}{23} \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x-1)}{x^2 - 29x - 18} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq x < \dfrac{29+\sqrt{913}}{2} \\ \dfrac{29-\sqrt{913}}{2} < x \leq 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq x < 25 \\ 0 < x \leq 1 \end{array}\right. \text{ (do } x \in \mathbb{Z}^+\text{)}.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $\begin{cases} 5 \leq x \leq 24 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình (6). □

Bài 67. Giải bất phương trình $\dfrac{\mathrm{P}_{n+2}}{\mathrm{P}_3} \geq \dfrac{210}{\mathrm{A}_{n-1}^{n-4}}$. (7) **ĐS:** $n \geq 5,\ n \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 4 \\ n \in \mathrm{Z}. \end{cases}$ $(*)$

$$(7) \Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{3!} \geq \frac{210}{\dfrac{(n-1)!}{3!}} \Leftrightarrow \frac{(n+2)!(n-1)!}{36} \geq 210 \Leftrightarrow (n+2)!(n-1)! \geq 7560.$$

Ta thấy vì $n \in \mathbb{Z}$ nên khi $n = 4$ thì $(n+2)!(n-1)! = 4320 < 7560$.
Khi $n \geq 5$ thì $(n+2)!(n-1)! \geq 120960 > 7560$ nên $n \geq 5$ thỏa mãn bất phương trình.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $\begin{cases} n \geq 5 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình (7). □

DẠNG 0.4. Giải hệ phương trình chỉnh hợp - hoán vị - tổ hợp

— *Dùng các công thức của chỉnh hợp - hoán vị - tổ hợp đưa về hệ đại số.*

— *Giải và tìm nghiệm thích hợp.*

Bài 68. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\mathrm{A}_x^y + 5\mathrm{C}_x^y = 90 \\ 5\mathrm{A}_x^y - 2\mathrm{C}_x^y = 80. \end{cases}$
(trong đó C_n^k và A_n^k lần lượt là tổ hợp và chỉnh hợp chập k của n phần tử). **ĐS:** $x = 5,\ y = 2$

Lời giải.

Điều kiện $0 < y \leq x;\ x,\ y \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $a = \mathrm{A}_x^y$, $b = \mathrm{C}_x^y$. Khi đó ta có $\begin{cases} 2a + 5b = 90 \\ 5a - 2b = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 10. \end{cases}$

Ta có $a = \dfrac{x!}{(x-y)!}$ và $b = \dfrac{x!}{y!(x-y)!}$, suy ra

$$a = \frac{x!}{y!(x-y)!} \cdot y! = b \cdot y! \Leftrightarrow 20 = 10 \cdot y! \Leftrightarrow y! = 2 \Leftrightarrow y = 2.$$

Do đó

$$\mathrm{A}_x^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 20 \Leftrightarrow (x-1)x = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (nhận)} \\ x = -4 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy $x = 5$, $y = 2$ là nghiệm của hệ phương trình. □

Bài 69. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}}{\mathrm{C}_{n+1}^{m}} = 1 \\ \dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^{m}}{\mathrm{C}_{n+1}^{m-1}} = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$ **ĐS:** $m = 3$, $n = 6$

Lời giải.
Điều kiện $m,\ n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$.
Ta có

$$\frac{\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}}{\mathrm{C}_{n+1}^{m}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}}{\dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}} = \frac{n+1-m}{m+1};$$

$$\frac{\mathrm{C}_{n+1}^{m}}{\mathrm{C}_{n+1}^{m-1}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}{\dfrac{(n+1)!}{(m-1)!(n+2-m)!}} = \frac{n+2-m}{m}.$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{n+1-m}{m+1} = 1 \\ \dfrac{n+2-m}{m} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m \\ 3n - 8m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6 \end{cases}$ (thỏa mãn).
Vậy $m = 3$, $n = 6$ là các giá trị cần tìm. □

Bài 70. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\mathrm{C}_x^{x-1}\right)^2 + 2\left(\mathrm{C}_y^{y-1}\right)^2 = 3\mathrm{A}_x^{x-1} \cdot \mathrm{C}_y^{y-1} \\ \left(\mathrm{C}_x^{x-1}\right)^3 = \mathrm{A}_y^{y-1} + 1. \end{cases}$ **ĐS:** $(x; y) = (1; 1)$

Lời giải.
Điều kiện $x,\ y \in \mathbb{N}^*$.
Ta có

$$\mathrm{C}_x^{x-1} = \frac{x!}{(x-1)!} = x, \quad \mathrm{C}_y^{y-1} = \frac{y!}{(y-1)!} = y, \quad \mathrm{A}_x^{x-1} = \frac{x!}{(x-1)!} = x, \quad \mathrm{A}_y^{y-1} = \frac{y!}{(y-1)!} = y.$$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3xy \\ 2x^3 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy = 0 \\ 2x^3 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 2y \end{array}\right. \\ 2x^3 = y + 1. \end{cases}$$

— Với $x = y$ ta có $2y^3 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = y = 1$.

— Với $x = 2y$ ta có $16y^3 - y - 1 = 0$. (*)
Xét hàm $f(y) = 16y^3 - y - 1$ trên miền $[1; +\infty)$ ta có $f'(y) = 48y^2 - 1 > 0$ với $y \geq 1$
$\Rightarrow f(y)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.
Do đó $\min\limits_{[1;+\infty)} f(y) = f(1) = 14 > 0$, suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 1)$. □

Bài 71. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \mathrm{C}_x^{x-1} - \mathrm{A}_y^{y-1} = \dfrac{1}{\mathrm{C}_x^{x-1}} - \dfrac{1}{\mathrm{A}_y^{y-1}} \\ x^3 = \dfrac{4}{(x-1)^2} \cdot \left(\mathrm{C}_x^{x-2}\right)^2 + \dfrac{6\mathrm{C}_y^{y-3}}{(y-2)(y-1)} + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ **ĐS:** Hệ vô nghiệm

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ x,\ y \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Ta có

$$\mathrm{C}_x^{x-1} = \frac{x!}{(x-1)!} = x, \qquad \mathrm{A}_y^{y-1} = \frac{y!}{(y-1)!} = y,$$
$$\mathrm{C}_x^{x-2} = \frac{x!}{2!(x-2)!} = \frac{x(x-1)}{2}, \qquad \mathrm{C}_y^{y-3} = \frac{y!}{3!(y-3)!} = \frac{y(y-1)(y-2)}{6}.$$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \\ x^3 = \dfrac{4(x-1)^2x^2}{4(x-1)^2} + 6 \cdot \dfrac{y(y-1)(y-2)}{6(y-1)(y-2)} + \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ x^3 = x^2 + y + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Xét hàm $f(t) = t - \frac{1}{t}$ với $t > 1$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$ với mọi $t > 1$, do đó $f(t)$ tăng trên miền $(1; +\infty)$.
Suy ra $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình còn lại ta được

$$x^3 = x^2 + x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4}x = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1} \text{ (loại).}$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm. □

DẠNG 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp

Cách 1:

- *Dùng công thức* $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ *và các tính chất của tổ hợp.*
- *Khai triển và rút gọn.*

Bài 72. Cho các số nguyên dương $k \leq n$. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_n^k = \frac{n}{k} \cdot \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

Lời giải.
Ta có $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ và $\dfrac{n}{k} \cdot \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = \dfrac{n}{k} \cdot \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 73. Cho các số tự nhiên $m,\ n\ (n \geq 1)$. Chứng minh rằng $n\mathrm{C}_{m+n}^m = (m+1)\mathrm{C}_{m+n}^{m+1}$.

Lời giải.
Ta có

$$(m+1)\mathrm{C}_{m+n}^{m+1} = (m+1) \cdot \frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!} = \frac{(m+n)! \cdot n}{m!(n-1)! \cdot n} = n \cdot \frac{(m+n)!}{m!n!} = n\mathrm{C}_{m+n}^m.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 74. Cho các số tự nhiên $n,\ r,\ k$ thỏa mãn $k \leq r \leq n$. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_n^r \cdot \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^k \cdot \mathrm{C}_{n-k}^{r-k}$.

Lời giải.
Ta có

$$\mathrm{C}_n^k \cdot \mathrm{C}_{n-k}^{r-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-r)!(r-k)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{k!(r-k)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{r!}{k!(r-k)!} = \mathrm{C}_n^r \cdot \mathrm{C}_n^k.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 75. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_{2n}^{n}+\mathrm{C}_{2n}^{n-1}=\frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{2n}^{n}+\mathrm{C}_{2n}^{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!n!}+\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{(2n)!(n+1)^2+(2n)!n(n+1)}{(n+1)!(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!(2n+2)(n+1)+(2n)!(2n+2)n}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}.\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 76. Cho các số nguyên dương $p\leq n$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^1+2\cdot\frac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_n^1}+3\cdot\frac{\mathrm{C}_n^3}{\mathrm{C}_n^2}+\cdots+p\cdot\frac{\mathrm{C}_n^p}{\mathrm{C}_n^{p-1}}+\cdots+n\cdot\frac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_n^{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^1 &= n;\\ 2\cdot\frac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_n^1} &= 2\cdot\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{n}=\frac{n!}{(n-2)!n}=n-1;\\ 3\cdot\frac{\mathrm{C}_n^3}{\mathrm{C}_n^2} &= 3\cdot\frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}=\frac{(n-2)!}{(n-3)!}=n-2;\\ &\dots\\ p\cdot\frac{\mathrm{C}_n^p}{\mathrm{C}_n^{p-1}} &= p\cdot\frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}}=p\cdot\frac{(p-1)!(n-p+1)!}{p!(n-p)!}=p\cdot\frac{n-p+1}{p}=n-p+1;\\ &\dots\\ n\cdot\frac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_n^{n-1}} &= n\cdot\frac{1}{\frac{n!}{1!(n-1)!}}=1.\end{aligned}$$

Do đó $\mathrm{C}_n^1+2\cdot\frac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_n^1}+3\cdot\frac{\mathrm{C}_n^3}{\mathrm{C}_n^2}+\cdots+p\cdot\frac{\mathrm{C}_n^p}{\mathrm{C}_n^{p-1}}+\cdots+n\cdot\frac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_n^{n-1}}=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-p+1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$.
Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 77. Cho các số nguyên dương $m,\ n\ (m<n)$. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_n^{m+1}+\mathrm{C}_n^{m-1}+2\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_{n+2}^{m+1}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^{m+1}+\mathrm{C}_n^{m-1}+2\mathrm{C}_n^m &= \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}+\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+2\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\\ &= \frac{n!(n-m)(n-m+1)+n!m(m+1)+2n!(m+1)(n-m+1)}{(m+1)!(n-m+1)!}\\ &= \frac{n!\left[(n-m+1)(n+m+2)+m(m+1)\right]}{(m+1)!(n-m+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)(n+2)}{(m+1)!(n-m+1)!}=\frac{(n+2)!}{(m+1)!(n-m+1)!}=\mathrm{C}_{n+2}^{m+1}.\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 78. Cho các số k, n là số nguyên thỏa mãn $0 \le k < n$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1} n\mathrm{C}_n^n = n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \mathrm{C}_{n-1}^k.$$

Lời giải.

Ta có $k\mathrm{C}_n^k = k \cdot \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{(n-1)!n}{(k-1)!(n-k)!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$. Do đó

$$VT = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\mathrm{C}_n^k = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\mathrm{C}_{n-1}^k = VP.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 79. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{\mathrm{C}_n^0}{\mathrm{C}_{n+2}^1} + \frac{\mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{n+3}^2} + \frac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_{n+4}^3} + \cdots + \frac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_{n+k+2}^{k+1}} + \cdots + \frac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_{n+k+2}^{k+1}} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n+1)!}{(n+k+2)!} = \frac{n!(n+1)!(k+1)}{(n-k)!(n+k+2)!} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{n!(n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!} - \frac{n!(n+1)!}{(n-k-1)!(n+k+2)!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!}} - \frac{\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{(n-k-1)!(n+k+2)!}}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{C}_{2n+1}^{n-k} - \mathrm{C}_{2n+1}^{n-k-1}}{\mathrm{C}_{2n+1}^n}.
\end{aligned}$$

Với $k = 0$, ta có $\dfrac{\mathrm{C}_n^0}{\mathrm{C}_{n+2}^1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\mathrm{C}_{2n+1}^n - \mathrm{C}_{2n+1}^{n-1}}{\mathrm{C}_{2n+1}^n}$.

Với $k = 1$, ta có $\dfrac{\mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{n+3}^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\mathrm{C}_{2n+1}^{n-1} - \mathrm{C}_{2n+1}^{n-2}}{\mathrm{C}_{2n+1}^n}$.

...

Với $k = n-1$, ta có $\dfrac{\mathrm{C}_n^{n-1}}{\mathrm{C}_{2n+1}^n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\mathrm{C}_{2n+1}^1 - \mathrm{C}_{2n+1}^0}{\mathrm{C}_{2n+1}^n}$.

Với $k = n$, ta có $\dfrac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_{2n+2}^n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\mathrm{C}_{2n+1}^0}{\mathrm{C}_{2n+1}^n}$.

Do đó $\dfrac{\mathrm{C}_n^0}{\mathrm{C}_{n+2}^1} + \dfrac{\mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{n+3}^2} + \dfrac{\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_{n+4}^3} + \cdots + \dfrac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_{n+k+2}^{k+1}} + \cdots + \dfrac{\mathrm{C}_n^n}{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 80. Cho các số nguyên dương $r \le n$. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_n^r = \mathrm{C}_{n-1}^{r-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{r-1} + \cdots + \mathrm{C}_{r-1}^{r-1}$.

Lời giải.

Ta có tính chất $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r \Rightarrow C_{n-1}^{r-1} = C_n^r - C_{n-1}^r$. Do đó

$$\begin{aligned}
&C_{n-1}^{r-1} = C_n^r - C_{n-1}^r\\
&C_{n-2}^{r-1} = C_{n-1}^r - C_{n-2}^r\\
&C_{n-3}^{r-1} = C_{n-2}^r - C_{n-3}^r\\
&\dots\\
&C_r^{r-1} = C_{r+1}^r - C_r^r.
\end{aligned}$$

Do đó $C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r - C_r^r + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r$. Suy ra điều phải chứng minh. □

DẠNG 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 2)

— *Dùng tính chất $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ với $1 \le k \le n$; $k, n \in \mathbb{N}$.*

— *Tách - ghép hệ số để sử dụng được tính chất trên.*

Bài 81. Cho k và n là hai số nguyên sao cho $3 \le k \le n$. Chứng minh rằng

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

Lời giải.

Từ tính chất $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ với $1 \le k \le n$; $k, n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT} &= C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\\
&= \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + 2\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + \left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right)\\
&= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\\
&= \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + \left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right)\\
&= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1}\\
&= C_{n+3}^k = \mathrm{VP} \quad (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

□

Bài 82. Cho k và n là hai số tự nhiên sao cho $k + 3 \le n$. Chứng minh đẳng thức

$$2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$$

Lời giải.

Từ tính chất $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ với $1 \le k \le n$; $k, n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT} &= 2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\\
&= 2\left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 3\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + \left(C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\right)\\
&= 2C_{n+1}^{k+1} + 3C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}\\
&= 2\left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + \left(C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}\right)\\
&= 2C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3}\\
&= C_{n+2}^{k+2} + \left(C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3}\right)\\
&= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3} = \mathrm{VP} \quad (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

□

Bài 83. Cho k và n là hai số nguyên sao cho $4 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^k + 4\mathrm{C}_n^{k-1} + 6\mathrm{C}_n^{k-2} + 4\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4} = \mathrm{C}_{n+3}^k$$

Lời giải.
Từ tính chất $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \mathrm{C}_{n+1}^k$ với $1 \leq k \leq n$; $k, n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT} &= \mathrm{C}_n^k + 4\mathrm{C}_n^{k-1} + 6\mathrm{C}_n^{k-2} + 4\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4} \\
&= \left(\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}\right) + 3\left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^{k-2}\right) + 3\left(\mathrm{C}_n^{k-2} + \mathrm{C}_n^{k-3}\right) + \left(\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4}\right) \\
&= \mathrm{C}_{n+1}^k + 3\mathrm{C}_{n+1}^{k-1} + 3\mathrm{C}_{n+1}^{k-2} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-3} \\
&= \left(\mathrm{C}_{n+1}^k + \mathrm{C}_{n+1}^{k-1}\right) + 2\left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-2}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-2} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-3}\right) \\
&= \mathrm{C}_{n+2}^k + 2\mathrm{C}_{n+2}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+2}^{k-2} \\
&= \left(\mathrm{C}_{n+2}^k + \mathrm{C}_{n+2}^{k-1}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+2}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+2}^{k-2}\right) \\
&= \mathrm{C}_{n+3}^k + \mathrm{C}_{n+3}^{k-1} = \mathrm{C}_{n+4}^k = \mathrm{VP} \quad (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

□

Bài 84. Cho k, n và r là ba số tự nhiên. Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=0}^{r} \mathrm{C}_{n+k}^k = \mathrm{C}_{n+r+1}^r$

Lời giải.
Từ tính chất $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \mathrm{C}_{n+1}^k$ với $1 \leq k \leq n$; $k, n \in \mathbb{N}$ suy ra

$$\mathrm{C}_{n+k+1}^k = \mathrm{C}_{n+k}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+k}^k \text{ hay } \mathrm{C}_{n+k}^k = \mathrm{C}_{n+k+1}^k - \mathrm{C}_{n+k}^{k-1}.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n^0 &= \mathrm{C}_{n+1}^0 \\
\mathrm{C}_{n+1}^1 &= \mathrm{C}_{n+2}^1 - \mathrm{C}_{n+1}^0 \\
\mathrm{C}_{n+2}^2 &= \mathrm{C}_{n+3}^2 - \mathrm{C}_{n+2}^1 \\
\mathrm{C}_{n+3}^3 &= \mathrm{C}_{n+4}^3 - \mathrm{C}_{n+3}^2 \\
\ldots &= \ldots \\
\mathrm{C}_{n+r}^r &= \mathrm{C}_{n+r+1}^r - \mathrm{C}_{n+r}^{r-1}.
\end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên theo từng vế, ta được $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_{n+1}^1 + \mathrm{C}_{n+2}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{n+r}^r = \mathrm{C}_{n+r+1}^r$.
Hay $\sum\limits_{k=0}^{r} \mathrm{C}_{n+k}^k = \mathrm{C}_{n+r+1}^r$ (đpcm). □

DẠNG 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 3)

— *Dùng khai triển nhị thức Newton theo hai cách khác nhau.*

— *Sau đó đồng nhất hệ số hai vế, suy ra điều phải chứng minh.*

Nhị thức Newton

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k, \\
(a-b)^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k.
\end{aligned}$$

Bài 85. Cho $4 \leq k \leq n$; $k, n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^k + 4\mathrm{C}_n^{k-1} + 6\mathrm{C}_n^{k-2} + 4\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4} = \mathrm{C}_{n+4}^k.$$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}(1+x)^4 &= \mathrm{C}_4^0 + \mathrm{C}_4^1 x + \mathrm{C}_4^2 x^2 + \mathrm{C}_4^3 x^3 + \mathrm{C}_4^4 x^4\\ &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4;\\ (1+x)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^k x^k + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n.\end{aligned}$$

$\Rightarrow (1+x)^4(1+x)^n = \left(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4\right)\left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^k x^k + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n\right)$. (1)
Mặt khác

$$\begin{aligned}(1+x)^4(1+x)^n &= (1+x)^{n+4}\\ &= \mathrm{C}_{n+4}^0 + \mathrm{C}_{n+4}^1 x + \mathrm{C}_{n+4}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{n+4}^k x^k + \cdots + \mathrm{C}_{n+4}^{n+4} x^{n+4}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của hạng tử chứa x^k trong vế phải của (1) và (2) ta được

$$\mathrm{C}_n^k + 4\mathrm{C}_n^{k-1} + 6\mathrm{C}_n^{k-2} + 4\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4} = \mathrm{C}_{n+4}^k \text{ (đpcm)}.$$

□

Bài 86. Cho k, n, m và p là bốn số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_m^p + \mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_m^{p-1} + \mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_m^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^p\mathrm{C}_m^k = \mathrm{C}_{m+n}^p.$$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n;\\ (1+x)^m &= \mathrm{C}_m^0 + \mathrm{C}_m^1 x + \mathrm{C}_m^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_m^m x^m.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử chứa x^p trong khai triển của tích $(1+x)^n(1+x)^m$ là $\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_m^p + \mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_m^{p-1} + \mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_m^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^p\mathrm{C}_m^0$.
Mặt khác

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x)^m &= (1+x)^{n+m}\\ &= \mathrm{C}_{n+m}^0 + \mathrm{C}_{n+m}^1 x + \mathrm{C}_{n+m}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{n+m}^p x^p + \cdots + \mathrm{C}_{n+m}^{n+m} x^{n+m}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử chứa x^p trong khai triển của $(1+x)^{n+m}$ là C_{n+m}^p.
Mà hệ số của hạng tử chứa x^n trong tích $(1+x)^n(1+x)^n$ cũng chính là hệ số của hạng tử chứa x^n trong khai triển của $(1+x)^{2n}$ nên

$$\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_m^p + \mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_m^{p-1} + \mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_m^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^p\mathrm{C}_m^k = \mathrm{C}_{m+n}^p \text{ (đpcm)}.$$

□

Bài 87. Cho n và r là hai số tự nhiên sao cho $r \leq n$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^r + \mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_n^{r+1} + \mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{r+2} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-r}\mathrm{C}_n^n = \frac{(2n)!}{(n-r)!\cdot(n+r)!}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\frac{1}{x}+\mathrm{C}_n^2\frac{1}{x^2}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\frac{1}{x^n}\right)\left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\cdots+\mathrm{C}_n^rx^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n\right)\\
=\ &\left(1+\frac{1}{x}\right)^n(1+x)^n=\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}\\
=\ &\frac{1}{x^n}\left(\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1x+\mathrm{C}_{2n}^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right).
\end{aligned}$$

Đồng nhất hóa hệ số của hạng tử chứa x^r ở hai vế ta được

$$\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^r+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_n^{r+1}+\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{r+2}+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-r}\mathrm{C}_n^n=\mathrm{C}_{2n}^{n+r}=\frac{(2n)!}{(n-r)!\cdot(n+r)!}\ \text{(đpcm)}.$$

□

Bài 88. Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng $\left(\mathrm{C}_n^0\right)^2+\left(\mathrm{C}_n^1\right)^2+\cdots+\left(\mathrm{C}_n^n\right)^2=\mathrm{C}_{2n}^n$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= (1+x)^n(1+x)^n\\
&= \left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n\right)\left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n\right)\\
&= \left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n\right)\left(\mathrm{C}_n^0x^n+\mathrm{C}_n^1x^{n-1}+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\right).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử chứa x^n trong khai triển của tích $(1+x)^n(1+x)^n$ là $\left(\mathrm{C}_n^0\right)^2+\left(\mathrm{C}_n^1\right)^2+\cdots+\left(\mathrm{C}_n^n\right)^2$.
Mặt khác $(1+x)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1x+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^nx^n+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}$.
$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử chứa x^n trong khai triển của $(1+x)^{2n}$ là C_{2n}^n.
Mà hệ số của hạng tử chứa x^n trong tích $(1+x)^n(1+x)^n$ cũng chính là hệ số của hạng tử chứa x^n trong khai triển của $(1+x)^{2n}$ nên

$$\left(\mathrm{C}_n^0\right)^2+\left(\mathrm{C}_n^1\right)^2+\cdots+\left(\mathrm{C}_n^n\right)^2=\mathrm{C}_{2n}^n\ \text{(đpcm)}.$$

□

Bài 89. Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng $\left(\mathrm{C}_{2n+1}^n\right)^2-\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2n+1}^2\right)^2-\cdots-\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)^2=0$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n+1} &= \mathrm{C}_{2n+1}^0+\mathrm{C}_{2n+1}^1x+\mathrm{C}_{2n+1}^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1};\\
(x-1)^{2n+1} &= \mathrm{C}_{2n+1}^0x^{2n+1}-\mathrm{C}_{2n+1}^1x^{2n}+\mathrm{C}_{2n+1}^2x^{2n-1}-\cdots-\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử chứa x^{2n+1} trong khai triển của tích $(1+x)^{2n+1}(x-1)^{2n+1}$ là

$$\left(\mathrm{C}_{2n+1}^n\right)^2-\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2n+1}^2\right)^2-\cdots-\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)^2.$$

Mặt khác $(1+x)^{2n+1}(x-1)^{2n+1}=(x^2-1)^{2n+1}$ có tất cả các hạng tử đều chứa lũy thừa bậc chẵn của biến x nên hệ số của hạng tử chứa x^{2n+1} là 0.
Do đó $\left(\mathrm{C}_{2n+1}^n\right)^2-\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2n+1}^2\right)^2-\cdots-\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)^2=0$ (đpcm). □

Bài 90. Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng $\left(\mathrm{C}_{2n}^0\right)^2-\left(\mathrm{C}_{2n}^1\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2n}^2\right)^2-\cdots+\left(\mathrm{C}_{2n}^{2n}\right)^2=(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^n$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1x+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^nx^n+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n};\\
(1-x)^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^0-\mathrm{C}_{2n}^1x+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_{2n}^nx^n\pm\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử chứa x^{2n} trong khai triển của tích $(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}$ là

$$\left(C_{2n}^0\right)^2 - \left(C_{2n}^1\right)^2 + \cdots + (-1)^n \left(C_{2n}^n\right)^2 \pm \cdots + \left(C_{2n}^{2n}\right)^2. \qquad (1)$$

Mặt khác $(1+x)^{2n}(1-x)^{2n} = (1-x^2)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x^2 + \cdots + (-1)^n C_{2n}^n (x^2)^n + \cdots + C_{2n}^{2n}(-x^2)^{2n}$.
$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử chứa x^{2n} trong khai triển của $(1-x^2)^{2n}$ là $(-1)^n C_{2n}^n$. $\qquad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(C_{2n}^0\right)^2 - \left(C_{2n}^1\right)^2 + \cdots + (-1)^n \left(C_{2n}^n\right)^2 \pm \cdots + \left(C_{2n}^{2n}\right)^2 = (-1)^n C_{2n}^n \text{ (đpcm).}$$

□

DẠNG 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 4)

— *Khai triển nhị thức Newton:* $(a \pm bx)^n$, $(a \pm bx)^{2n}$.

— *Sau đó chọn a, b, c thích hợp.*

Bài 91. Chứng minh rằng: $9^0 C_n^0 + \cdots + 9^1 C_n^1 + \cdots + 9^n C_n^n = 10^n$

Lời giải.
Ta có: $(1+x)^2 = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$.
Cho $x = 9$ ta được: $(1+9)^2 = C_n^0 + C_n^1 9 + \cdots + C_n^n 9^n$
hay: $9^0 C_n^0 + 9^1 C_n^1 + \cdots + 9^n C_n^n = 10^n$ (đpcm). □

Bài 92. Chứng minh rằng: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

Lời giải.
Ta có: $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n$.
Cho $x = 1$ ta được $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n$
hay $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$ (đpcm). □

Bài 93. Chứng minh: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot k C_n^k = n \cdot 3^{n-1}$

Lời giải.
Ta có $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k$.

Đạo hàm hai vế, ta có: $n \cdot (1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^{k-1}$.

Cho $x = 2$, ta có: $n \cdot 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} \cdot k C_n^k = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot k C_n^k$ (đpcm). □

Bài 94. Chứng minh rằng:

$$3^n \left[C_n^0 + \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{3^2} C_n^2 + \cdots + \frac{1}{3^k} C_n^k + \cdots + \frac{1}{3^n} C_n^n\right] = 4^n$$

Lời giải.
Cách 1.
Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$.

Cho $x = \dfrac{1}{3}$ ta được:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n$$
$$\Rightarrow \quad 3^n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = 3^n\left(\mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n\right)$$

hay $3^n\left(\mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3^k}\mathrm{C}_n^k + \cdots + \frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n\right) = 4^n$ (đpcm).

Cách 2. Nhân 3^n vào vế trái và rút gọn vế trái.
Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^n$.
Cho $x = 3$ ta có (đpcm). □

Bài 95. Chứng tỏ rằng:

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{2k} + \cdots = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^{2k+1} + \cdots$$

Lời giải.
Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^k x^k + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.
Cho $x = -1$ ta được:

$$0 = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^{2k} - \mathrm{C}_n^{2k+1} + \cdots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{2k} + \cdots = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^{2k+1} + \cdots \quad \text{(đpcm)}.$$

□

Bài 96. Chứng minh rằng:

$$1 - 10\mathrm{C}_{2n}^1 + 10^2\mathrm{C}_{2n}^2 - 10^3\mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - 10^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = (81)^n$$

Lời giải.
Ta có:

$$(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \mathrm{C}_{2n}^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

Cho $x = -10$ ta được:

$$(1-10)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 - 10\mathrm{C}_{2n}^1 + 10^2\mathrm{C}_{2n}^2 - 10^3\mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - 10^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + 10^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n}$$
$$(-9)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 - 10\mathrm{C}_{2n}^1 + 10^2\mathrm{C}_{2n}^2 - 10^3\mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - 10^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + 10^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n}$$

hay $1 - 10\mathrm{C}_{2n}^1 + 10^2\mathrm{C}_{2n}^2 - 10^3\mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - 10^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = (81)^n$ (đpcm). □

Bài 97. Chứng minh rằng:

$$(-1)^n\mathrm{C}_n^0 + (-1)^{n-1}2\mathrm{C}_n^1 + \cdots + (-1)^{n-k}2^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n = 1$$

Lời giải.
Ta có $(1-x)^n = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (-1)^k\mathrm{C}_n^k x^k + \cdots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n x^n$.
Cho $x = 2$ ta được:

$$(1-2)^n = \mathrm{C}_n^0 - 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 - 2^3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^k 2^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + (-1)^n 2^n\mathrm{C}_n^n$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n = \mathrm{C}_n^0 - 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 - 2^3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^k 2^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + (-1)^n 2^n\mathrm{C}_n^n$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n(-1)^n = (-1)^n\mathrm{C}_n^0 + (-1)^{-1}(-1)^n 2\mathrm{C}_n^1 + (-1)^{-2}(-1)^n 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + (-1)^{-k}(-1)^n 2^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + (-1)^n(-1)^n 2^n\mathrm{C}_n^n$$
$$\Leftrightarrow 1 = (-1)^n\mathrm{C}_n^0 + (-1)^{n-1}2\mathrm{C}_n^1 + (-1)^{n-2}2^2\mathrm{C}_n^2 + (-1)^{n-3}2^3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + +(-1)^{n-k}2^k\mathrm{C}_n^k + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n \quad \text{(đpcm)}.$$

□

Bài 98. Chứng minh: $C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + 6^3C_n^3 + \cdots + 6^nC_n^n = 7^n$

Lời giải.
Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^kx^k + \cdots + C_n^nx^n$.
Cho $x = 6$ ta được:

$$(1+6)^n = C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + 6^3C_n^3 + \cdots + 6^kC_n^k + \cdots + 6^nC_n^n$$
$$\Leftrightarrow \quad C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + 6^3C_n^3 + \cdots + 6^nC_n^n = 7^n \quad \text{(đpcm)}.$$

□

Bài 99. Chứng minh: $3^{17}C_{17}^0 + 4^1 \cdot 3^{16}C_{17}^1 + 4^2 \cdot 3^{15}C_{17}^2 + \cdots + 4^{17}C_{17}^{17} = 7^{17}$

Lời giải.
Ta có $(a+b)^{17} = C_{17}^0a^{17} + C_{17}^1a^{16}b + C_{17}^2a^{15}b^2 + \cdots + C_{17}^{17}b^{17}$.
Cho $a = 3$, $b = 4$ ta có $3^{17}C_{17}^0 + 4^1 \cdot 3^{16}C_{17}^1 + 4^2 \cdot 3^{15}C_{17}^2 + \cdots + 4^{17}C_{17}^{17} = 7^{17}$ (đpcm). □

Bài 100. Chứng minh rằng: $4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \cdots + (-1)^nC_n^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n$

Lời giải.
Ta có: $(x-1)^n = C_n^0x^n - C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \cdots + (-1)^nC_n^n$.
Cho $x = 4$ ta được $3^n = 4^nC_n^0 - 4^{n-2}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \cdots + (-1)^nC_n^n$ (1)
Mặt khác: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^vx^n$.
Cho $x = 2$ ta có $3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n$ (2)
Từ (1) và (2)ta có:

$$4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \cdots + (-1)^nC_n^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n.$$

□

Bài 101. Chứng minh rằng: $2C_n^0 + \dfrac{2^2C_n^1}{2} + \dfrac{2^3C_n^2}{3} + \dfrac{2^4C_n^3}{4} + \cdots + \dfrac{2^{n+1}C_n^n}{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{n+1} - 1$

Lời giải.
Khai triển: $(1x)^{n+1} = C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1x + C_{n+1}^2x^2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}$.
Ta có: $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}C_n^k$.
Vậy $(1+x)^{n+1} = (n+1)\left(C_n^0 + C_n^0x + \dfrac{1}{2}C_n^1x^2 + \dfrac{1}{3}C_n^2x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n+1}C_n^0x^{n+1}\right)$.
$\Leftrightarrow \dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + C_n^0x + \dfrac{1}{2}C_n^1x^2 + \dfrac{1}{3}C_n^2x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n+1}C_n^nx^{n-1}$.
Cho $x = 2$ ta được:

$$\frac{3^{n+1}}{n+1} = 1 + 2C_n^0 + \frac{2^2C_n^1}{2} + \frac{2^3C_n^2}{3} + \frac{2^4C_n^3}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1} - 1 \qquad \text{(đpcm)}.$$

□

Bài 102. Tính $S = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$ trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử

Lời giải.
Áp dụng tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta được:

$$S = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11} = C_{11}^5 + C_{11}^4 + C_{11}^3 + C_{11}^2 + C_{11}^1 + C_{11}^0$$
$$\Rightarrow \quad 2S = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5 + C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11} = (1+1)^11 = 2^{11}$$
$$\Rightarrow \quad S = \frac{2^{11}}{2} = 2^{10} = 1024.$$

□

Bài 103. Với n là số nguyên dương, chứng minh các hệ thức sau:

1. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
2. $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n}$.

Lời giải.

1. Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n$.
Cho $x = 1$ ta được:
$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$
hay $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

2. Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$.
Cho $x = -1$ ta được:
$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n}.$$
hay $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n}$ (đpcm).

□

Bài 104. Kí hiệu C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử. Chứng minh đẳng thức:
$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$$

(Đại học Hàng Hải, 2000)

Lời giải.
Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$.
Cho $x = 3$ ta được:
$$4^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 3 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^3 3^3 + C_{2n}^4 3^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}. \qquad (1)$$
Ta lại có:
$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^4 x^4 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$
Thay $x = 3$ ta được:
$$2^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 \cdot 3 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 - C_{2n}^3 \cdot 3^3 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 - \cdots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n}. \qquad (2)$$
Lấy(1) cộng (2) vế theo vế ta sẽ được
$$\begin{aligned}
& 4^{2n} + 2^{2n} = 2C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdot + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2^{4n} + 2^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdot + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} \\
\Leftrightarrow\ & 2^{4n-1} + 2^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n}
\end{aligned}$$
hay $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$ (đpcm). □

Bài 105. Chứng minh rằng:
$$C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^4 C_{2001}^4 + \cdots + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = 2^{2000}\left(2^{2001}-1\right)$$

(Đại học Vinh, khối D, M, T, 2001)

Lời giải.
Ta có:
$$(1+x)^{2001} = C_{2001}^0 + C_{2001}^1 x + C_{2001}^2 x^2 + C_{2001}^3 x^3 + \cdots + C_{2001}^{2001} x^{2001}.$$

Cho $x = 3$ ta được: $4^{2001} = \mathrm{C}_{2001}^{1} + 3\mathrm{C}_{2001}^{1} + 3^2\mathrm{C}_{2001}^{2} + 3^3\mathrm{C}_{2001}^{3} + 3^4\mathrm{C}_{2001}^{4} + \cdots + 3^{2001}\mathrm{C}_{2001}^{2001}$. (1)
Mặt khác:
$$(1-x)^{2001} = \mathrm{C}_{2001}^{0} - \mathrm{C}_{2001}^{1}x + \mathrm{C}_{2001}^{2}x^2 - \mathrm{C}_{2001}^{3}x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2001}^{2001}x^{2001}.$$
Thay $x = 3$ ta được: $(-2)^{2001} = \mathrm{C}_{2001}^{0} - 3\mathrm{C}_{2001}^{1} + 3^2\mathrm{C}_{2001}^{2} - 3^3\mathrm{C}_{2001}^{3} + \cdots - 3^{2001}\mathrm{C}_{2001}^{2001}$. (2)
Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta có:
$$4^{2001} - 2^{2001} = 2\mathrm{C}_{2001}^{0} + 2\cdot 3^2\mathrm{C}_{2001}^{2} + 2\cdot 3^4\mathrm{C}_{2001}^{4} + \cdots + 2\cdot 3^{2000}\mathrm{C}_{2001}^{2000}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2^{2\cdot 2001} - 2^{2001}}{2} = \mathrm{C}_{2001}^{0} + 3^2\mathrm{C}_{2001}^{2} + 3^4\mathrm{C}_{2001}^{4} + \cdots + 3^{2000}\mathrm{C}_{2001}^{2000}$$
$$\Leftrightarrow 2^{4001} - 2^{2000} = \mathrm{C}_{2001}^{0} + 3^2\mathrm{C}_{2001}^{2} + 3^4\mathrm{C}_{2001}^{4} + \cdots + 3^{2000}\mathrm{C}_{2001}^{2000}.$$
hay $\mathrm{C}_{2001}^{0} + 3^2\mathrm{C}_{2001}^{2} + 3^4\mathrm{C}_{2001}^{4} + \cdots + 3^{2000}\mathrm{C}_{2001}^{2000} = 2^{2000}\left(2^{2001} - 1\right)$ (đpcm). □

DẠNG 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 5 - dùng đạo hàm)

— ***Phương pháp:***
- Dùng khai triển nhị thức Newton: $(a \pm bx)^n$.
- Lấy đạo hàm cấp 1, cấp 2, ... và chọn a, b,x thích hợp.

— *Dấu hiệu để nhận biết dùng đạo hàm cấp 1:*
- Trong mỗi số hạng có chứa dạng: $k\mathrm{C}_n^k$ hoặc $(n-k)\mathrm{C}_n^k$.
- Trong tổng không chứa C_n^0 hoặc C_n^n.

— *Dấu hiệu để nhận biết dùng đạo hàm cấp 2:*
- Trong mỗi số hạng có chứa dạng: $k(k-1)\mathrm{C}_n^k$ hoặc $(n-k)(n-k-1)\mathrm{C}_n^k$.
- Trong tổng không chứa C_n^0, C_n^n hoặc C_n^1, C_n^{n-1}.

Bài 106. Chứng minh rằng: $\mathrm{C}_{10}^1 + 2\mathrm{C}_{10}^2 + 3\mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + 10\mathrm{C}_{10}^{10} = 5120$.

Lời giải.
Khai triển nhị thức ta có:
$$(1+x)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1x + \mathrm{C}_{10}^2x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10}x^{10}.$$
Lấy đạo hàm hai vế ta được:
$$10(1+x)^9 = \mathrm{C}_{10}^1 + 2\mathrm{C}_{10}^2x + 3\mathrm{C}_{10}^3x^2 + \cdots + 10\mathrm{C}_{10}^{10}x^9.$$
Cho $x = 1$ ta suy ra: $10\cdot 2^9 = \mathrm{C}_{10}^1 + 2\mathrm{C}_2^2 + 3\mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + 10\mathrm{C}_{10}^{10} = 5120$ (điều phải chứng minh). □

Bài 107. Chứng minh rằng $1\mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1}n\mathrm{C}_n^n = 0$.

Lời giải.
Ta có: $(1-x)^n = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1x + \mathrm{C}_n^2x^2 - \mathrm{C}_n^3x^3 + \cdots + (-1)^n\mathrm{C}_n^nx^n$.
Đạo hàm hai vế ta được:
$$-n(1-x)^{n-1} = -\mathrm{C}_n^1 + 2x\mathrm{C}_n^2 - 3x^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n(-1)^nx^{n-1}\mathrm{C}_n^n.$$
Cho $x = 1$ ta được $0 = -\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^nn\mathrm{C}_n^n$
Hay $1\mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1}n\mathrm{C}_n^n = 0$ (điều phải chứng minh). □

Bài 108. Chứng minh: $\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n = n\cdot 2^{n-1}$.

Lời giải.
Ta có: $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1x + \mathrm{C}_n^2x^2 + \mathrm{C}_n^3x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^nx^n$.
Đạo hàm hai vế ta được:
$$n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2x\mathrm{C}_n^2 + 3x^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + nx^{n-1}\mathrm{C}_n^n.$$
Cho $x = 1$ ta được $n(1+1)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n$.
Hay $\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n = n\cdot 2^{n-1}$ (điều phải chứng minh). □

Bài 109. Chứng minh rằng: $n\mathrm{C}_n^0-(n-1)\mathrm{C}_n^1+(n-2)\mathrm{C}_n^2-(n-3)\mathrm{C}_n^3+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}=0.$

Lời giải.
Ta có: $(x-1)^n=\mathrm{C}_n^0x^n-\mathrm{C}_n^1x^{n-1}+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}-\mathrm{C}_n^3x^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}x+(-1)^n\mathrm{C}_n^n.$
Đạo hàm hai vế ta được:

$$n(x-1)^{n-1}=n\mathrm{C}_n^0x^{n-1}-(n-1)\mathrm{C}_n^1x^{n-2}+(n-2)\mathrm{C}_n^2x^{n-3}-(n-3)\mathrm{C}_n^1x^{n-4}+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}.$$

Cho $x=1$ ta được $n(1-1)^{n-1}=n\mathrm{C}_n^0-(n-1)\mathrm{C}_n^1+(n-2)\mathrm{C}_n^2-(n-3)\mathrm{C}_n^1+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}.$
Hay $n\mathrm{C}_n^0-(n-1)\mathrm{C}_n^1+(n-2)\mathrm{C}_n^2-(n-3)\mathrm{C}_n^3+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}=0$ (điều phải chứng minh). □

Bài 110. Chứng minh rằng: $2\cdot 1\mathrm{C}_n^2+3\cdot 2\mathrm{C}_n^3+4\cdot 3\mathrm{C}_n^4+\cdots+n(n-1)\mathrm{C}_n^n=n(n-1)\cdot 2^{n-2}.$

Lời giải.
Ta có: $(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\mathrm{C}_n^3x^3+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n.$
Lấy đạo hàm cấp 2 hai vế ta được:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=2\cdot 1\mathrm{C}_n^2+3\cdot 2x\mathrm{C}_n^3+\cdots+n\cdot(n-1)x^{n-2}\mathrm{C}_n^n.$$

Cho $x=1$ ta được $n(n-1)(1+1)^{n-2}=2\cdot 1\mathrm{C}_n^2+3\cdot 2\mathrm{C}_n^3+4\cdot 3\mathrm{C}_n^4+\cdots+n(n-1)\mathrm{C}_n^n.$
Hay $2\cdot 1\mathrm{C}_n^2+3\cdot 2\mathrm{C}_n^3+4\cdot 3\mathrm{C}_n^4+\cdots+n(n-1)\mathrm{C}_n^n=n(n-1)\cdot 2^{n-2}$ (điều phải chứng minh). □

Bài 111. Chứng minh rằng: $(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^1+(-1)^{n-2}2\cdot 2\mathrm{C}_n^2+\cdots+(-1)^{n-k}k\cdot 2^{k-1}\mathrm{C}_n^k+\cdots+n\cdot 2^{n-1}\mathrm{C}_n^n=n.$

Lời giải.
Ta có: $(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\mathrm{C}_n^3x^3+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n.$
Đạo hàm hai vế ta được:

$$n(1+x)^{n-1}=\mathrm{C}_n^1+2x\mathrm{C}_n^2+3x^2\mathrm{C}_n^3+\cdots+nx^{n-1}\mathrm{C}_n^n.$$

Cho $x=-2$ ta được

$$\begin{aligned}
&n(1-2)^{n-1}=\mathrm{C}_n^1+2\mathrm{C}_n^2(-2)+3\mathrm{C}_n^3(-2)^2+\cdots+n\mathrm{C}_n^n(-2)^{n-1}\\
\Leftrightarrow\ &n=(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^1+(-1)^{n-2}2\cdot 2\mathrm{C}_n^2+\cdots+(-1)^{n-k}.2^{k-1}k\mathrm{C}_n^k+\cdots+(-1)^{n-1}(-2)^{n-1}n\mathrm{C}_n^n\\
\Leftrightarrow\ &n=(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^1+(-1)^{n-2}2\cdot 2\mathrm{C}_n^2+\cdots+(-1)^{n-k}k\cdot 2^{k-1}\mathrm{C}_n^k+\cdots+n\cdot 2^{n-1}\mathrm{C}_n^n \quad \text{(điều phải chứng minh).}
\end{aligned}$$

□

Bài 112. Chứng minh rằng: $\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+\cdots+(n+1)\mathrm{C}_n^n=(n+2)2^{n-1}.$

Lời giải.
Ta có: $x(1+x)^n=x\mathrm{C}_n^0+x^2\mathrm{C}_n^1+x^3\mathrm{C}_n^2+\cdots+x^{n+1}\mathrm{C}_n^n.$
Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$(1+x)^n+x\cdot n(1+x)^{n-1}=x\mathrm{C}_n^0+2x\mathrm{C}_n^1+3x^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+(n+1)x^n\mathrm{C}_n^n.$$

Cho $x=1$ ta được:

$$\begin{aligned}
&(1+1)^n+n(1+1)^{n-1}=\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+\ldots+(n+1)\mathrm{C}_n^n\\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+\ldots+(n+1)\mathrm{C}_n^n=2^{n-1}(2^1+n)\\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+\ldots+(n+1)\mathrm{C}_n^n=2^{n-1}(2+n) \quad \text{(điều phải chứng minh).}
\end{aligned}$$

□

Bài 113. Chứng minh rằng: $n(n-1)\mathrm{C}_n^0+(n-1)(n-2)\mathrm{C}_n^1+\cdots+2\mathrm{C}_n^{n-2}=n(n-1)2^{n-2}.$

Lời giải.

Ta có $(x+1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x + \mathrm{C}_n^n$.
Đạo hàm hai vế lần thứ nhất:

$$n(x+1)^{n-1} = n\mathrm{C}_n^0 x^{n-1} + (n-1)\mathrm{C}_n^1 x^{n-2} + (n-2)\mathrm{C}_n^2 x^{n-3} + \cdots + 2x\mathrm{C}_n^{n-2} + \mathrm{C}_n^{n-1}.$$

Đạo hàm hai vế lần thứ hai:

$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = n(n-1)\mathrm{C}_n^0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)\mathrm{C}_n^1 x^{n-3} + (n-2)(n-3)\mathrm{C}_n^2 x^{n-4} + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-2}.$$

Cho $x=1$ ta được:

$$n(n-1)(1+1)^{n-2} = n(n-1)\mathrm{C}_n^0 + (n-1)(n-2)\mathrm{C}_n^1 + (n-2)(n-3)\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-2}.$$

Hay $n(n-1)2^{n-2} = n(n-1)\mathrm{C}_n^0 + (n-1)(n-2)\mathrm{C}_n^1 + (n-2)(n-3)\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-2}$ (điều phải chứng minh).
□

Bài 114. Chứng minh rằng:

$$n4^{n-1}\mathrm{C}_n^0 - (n-1)4^{n-2}\mathrm{C}_n^1 + (n-2)4^{n-3}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n2^{n-1}\mathrm{C}_n^n.$$

Lời giải.
Ta có: $(x-1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n - \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n$.
Lấy đạo hàm hai vế:

$$n(x-1)^{n-1} = n\mathrm{C}_n^0 x^{n-1} - (n-1)\mathrm{C}_n^1 x^{n-2} + (n-2)\mathrm{C}_n^2 x^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}.$$

Cho $x=4$ ta được $n\cdot 3^{n-1} = n4^{n-1}\mathrm{C}_n^0 - (n-1)4^{n-2}\mathrm{C}_n^1 + (n-2)4^{n-3}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}$ (1).
Mặt khác: $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.
Lấy đạo hàm hai vế:

$$n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x^1 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x=2$ ta được

$$n\cdot 3^n = \mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n2^{n-1}\mathrm{C}_n^n \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$n4^{n-1}\mathrm{C}_n^0 - (n-1)4^{n-2}\mathrm{C}_n^1 + (n-2)4^{n-3}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n2^{n-1}\mathrm{C}_n^n.$$

□

Bài 115. Cho số tự nhiên $n \geq 2$, chứng minh rằng: $(\mathrm{C}_n^1)^2 + 2(\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + n(\mathrm{C}_n^n)^2 = \dfrac{1}{2}n\mathrm{C}_{2n}^n$.

Lời giải.
Ta có: $(x+1)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.
Đạo hàm hai vế ta được: $2(x+1)^n\left[(1+x)^n\right]' = \left[(1+x)^{2n}\right]'$ (1).
Vì $(x+1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x + \mathrm{C}_n^n$
và $[(1+x)^n]' = \left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n\right)' = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\mathrm{C}_n^1 x^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}$.
Hệ số của x^{n-1} trong khai triển ở vế trái của (1) là

$$2\left[(\mathrm{C}_n^1)^2 + 2(\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + n(\mathrm{C}_n^n)^2\right].$$

Mà $\left[(1+x)^{2n}\right]' = \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \mathrm{C}_{2n}^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}\right)' = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + 2n\mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n-1}$.
Hệ số của x^{n-1} trong khai triển ở vế phải của (1) là $n\mathrm{C}_{2n}^n$.
Vì hệ số của x^{n-1} trong khai triển ở vế phải và vế trái của (1) phải bằng nhau nên

$$(\mathrm{C}_n^1)^2 + 2(\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + n(\mathrm{C}_n^n)^2 = \frac{1}{2}n\mathrm{C}_{2n}^n.$$

□

DẠNG 0.5. Chứng minh một đẳng thức tổ hợp (Cách 6 - dùng tích phân)

— ***Phương pháp:***
- Dùng khai triển nhị thức Newton: $(a \pm bx)^n$.
- Lấy tích phân hai vế với cận tích phân thích hợp.
- Chọn a, b, x ta sẽ ra điều phải chứng minh.

! *Một số bài toán có thể lấy tích phân hai lần.*

— *Dấu hiệu để nhận biết dùng tích phân là trong các số hạng có chứa nhân tử dạng: $\dfrac{\mathrm{C}_n^k}{k+1}$ hoặc $\dfrac{\mathrm{C}_n^k}{k(n-k)}$.*

Bài 116. Chứng minh rằng: $\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{\mathrm{C}_n^1}{2} + \dfrac{\mathrm{C}_n^2}{3} + \dfrac{\mathrm{C}_n^3}{4} + \cdots + \dfrac{\mathrm{C}_n^n}{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Lời giải.
Dùng khai triển nhị thức Newton, ta có: $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{C}_n^0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^2 x^2\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^1 \mathrm{C}_n^n x^n\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left.\mathrm{C}_n^0 x\right|_0^1 + \left.\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 x^2\right|_0^1 + \cdots + \left.\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n x^{n+1}\right|_0^1\\
&\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \mathrm{C}_n^n + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n.
\end{aligned}$$

□

Bài 117. Tính $\mathrm{C}_n^0 - \dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{C}_n^n = \dfrac{1}{n+1}$.

Lời giải.
Ta có: $(1-x)^n = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 - \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n x^n$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 - \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n x^n\right)\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow -\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left.\mathrm{C}_n^0 x\right|_0^1 - \left.\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 x^2\right|_0^1 + \left.\frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 x^3\right|_0^1 - \left.\frac{1}{4}\mathrm{C}_n^3 x^4\right|_0^1 + \cdots + \left.\frac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{C}_n^n x^{n+1}\right|_0^1\\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{C}_n^n = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Bài 118. Chứng minh rằng: $2\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{2^2\mathrm{C}_n^1}{2} + \dfrac{2^3\mathrm{C}_n^2}{3} + \dfrac{2^4\mathrm{C}_n^3}{4} + \cdots + \dfrac{2^{n+1}\mathrm{C}_n^n}{n+1} = \dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

Lời giải.

Khai triển: $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.

$$\Rightarrow \int_0^2 (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n\right) \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \left.\mathrm{C}_n^0 x\right|_0^2 + \left.\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 x^2\right|_0^2 + \left.\frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 x^3\right|_0^2 + \left.\frac{1}{4}\mathrm{C}_n^3 x^4\right|_0^2 + \cdots + \left.\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n x^{n+1}\right|_0^2$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{C}_n^0 + \frac{2^2\mathrm{C}_n^1}{2} + \frac{2^3\mathrm{C}_n^2}{3} + \frac{2^4\mathrm{C}_n^3}{4} + \cdots + \frac{2^{n+1}\mathrm{C}_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

□

Bài 119. Chứng minh rằng: $\dfrac{3^0}{7}\mathrm{C}_6^0 + \dfrac{3^1}{6}\mathrm{C}_6^1 + \dfrac{3^2}{5}\mathrm{C}_6^2 + \cdots + \dfrac{3^6}{1}\mathrm{C}_6^6 = \dfrac{4^7-3^7}{7}$.

Lời giải.

Ta có: $(x+3)^6 = \mathrm{C}_6^0 x^6 + 3\mathrm{C}_6^1 x^5 + 3^2\mathrm{C}_6^2 x^4 + 3^3\mathrm{C}_6^3 x^3 + \cdots + 3^6\mathrm{C}_6^6$.

$$\Rightarrow \int_0^1 (x+3)^6 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\mathrm{C}_6^0 x^6 + 3\mathrm{C}_6^1 x^5 + 3^2\mathrm{C}_6^2 x^4 + 3^3\mathrm{C}_6^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_6^6 3^6\right) \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(x+3)^7}{7}\right|_0^1 = \left.\left(\frac{1}{7}\mathrm{C}_6^0 x^7 + \frac{3}{6}\mathrm{C}_6^1 x^6 + \frac{3^2}{5}\mathrm{C}_6^2 x^5 + \frac{3^3}{4}\mathrm{C}_6^3 x^4 + \cdots + \frac{3^6}{1}\mathrm{C}_6^6 x^1\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^0}{7}\mathrm{C}_6^0 + \frac{3^1}{6}\mathrm{C}_6^1 + \frac{3^2}{5}\mathrm{C}_6^2 + \cdots + \frac{3^6}{1}\mathrm{C}_6^6 = \frac{4^7-3^7}{7}.$$

□

Bài 120.

1. Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_0^1 (x+2)^6 \,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $S = \dfrac{3^7-2^7}{7}$.

2. Tính tổng sau: $S = \dfrac{2^6}{1}\mathrm{C}_6^0 + \dfrac{2^5}{2}\mathrm{C}_6^1 + \dfrac{2^4}{3}\mathrm{C}_6^2 + \dfrac{2^3}{4}\mathrm{C}_6^3 + \dfrac{2^2}{5}\mathrm{C}_6^4 + \dfrac{2}{6}\mathrm{C}_6^5 + \dfrac{1}{7}\mathrm{C}_6^6$.

Lời giải.

1. Ta có: $I = \displaystyle\int_0^1 (x+2)^6 \,\mathrm{d}x = I = \int_0^1 (x+2)^6 \,\mathrm{d}(x+2) = \left.\frac{(x+2)^7}{7}\right|_0^1 = \frac{3^7-2^7}{7}$ (1).

2. Ta có: $(2+x)^6 = \mathrm{C}_6^0 2^6 + \mathrm{C}_6^1 2^5 x + \mathrm{C}_6^2 2^4 x^2 + \mathrm{C}_6^3 2^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_6^6 x^6$.

$$\Rightarrow \int_0^1 (x+2)^6 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\mathrm{C}_6^0 2^6 + \mathrm{C}_6^1 2^5 x + \mathrm{C}_6^2 2^4 x^2 + \mathrm{C}_6^3 2^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_6^6 x^6\right) \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x+2)^6 \,\mathrm{d}x = \left.\left(\mathrm{C}_6^0 2^6 x + \frac{1}{2}\mathrm{C}_6^1 2^5 x^2 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_6^2 2^4 x^3 + \frac{1}{4}\mathrm{C}_6^3 2^3 x^4 + \cdots + \frac{1}{7}\mathrm{C}_6^6 x^7\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x+2)^6 \,\mathrm{d}x = \frac{2^6}{1}\mathrm{C}_6^0 + \frac{2^5}{2}\mathrm{C}_6^1 + \frac{2^4}{3}\mathrm{C}_6^2 + \frac{2^3}{4}\mathrm{C}_6^3 + \frac{2^2}{5}\mathrm{C}_6^4 + \frac{2}{6}\mathrm{C}_6^5 + \frac{1}{7}\mathrm{C}_6^6 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $S = \dfrac{3^7-2^7}{7}$. □

Bài 121. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{3}{4}C_{2n}^3 - \frac{4}{5}C_{2n}^4 + \cdots - \frac{2n}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{1}{2n+1}$.

Lời giải.
Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (1)$.
Đạo hàm hai vế của (1) ta được: $2n(1+x)^{2n-1} = C_{2n}^1 + 2C_{2n}^2 x + \cdots + 2nC_{2n}^{2n}x^{2n-1} \quad (2)$.
Nhân thêm x hai vế của (2) ta được:$2nx(1+x)^{2n-1} = C_{2n}^1 x + 2C_{2n}^2 x^2 + \cdots + 2nC_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (3)$.
Tích phân hai vế của (3) với cận thuộc $[-1;0]$ ta được:

$$\int_{-1}^{0} 2nx(1+x)^{2n-1}\,dx = \int_{-1}^{0} \left(C_{2n}^1 x + 2C_{2n}^2 x^2 + \cdots + 2nC_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\,dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2n(1+x)^{2n+1}}{2n+1} - (1+x)^{2n}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \left(\frac{1}{2}C_{2n}^1 x^2 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 x^3 + \cdots + \frac{2n}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\Bigg|_{-1}^{0}.$$

Suy ra: $\frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{3}{4}C_{2n}^3 - \frac{4}{5}C_{2n}^4 + \cdots - \frac{2n}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{1}{2n+1}$ (điều phải chứng minh). □

Bài 122.

1. Tính $I = \int_0^2 (1-x)^n\,dx$. **ĐS:** $I = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$

2. Chứng minh rằng $2C_n^0 - \frac{1}{2}\cdot 2^2C_n^1 + \frac{1}{3}\cdot 2^3C_n^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}2^{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}[1+(-1)^n]$.

Lời giải.

1. $I = \int_0^2 (1-x)^n\,dx = -\int_0^2 (1-x)^n d(1-x) = -\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$.

2. Ta có $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n x^n$.

$$\Rightarrow \int_0^2 (1-x)^n\,dx = \int_0^2 C_n^0\,dx - \int_0^2 C_n^1 x\,dx + \int_0^2 C_n^2 x^n\,dx - \cdots + (-1)^n\int_0^2 C_n^n x^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+(-1)^n}{n+1} = C_n^0\,x|_0^2 - C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + C_n^2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - \cdots + (-1)^nC_n^n\cdot\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+(-1)^n}{n+1} = 2C_n^0 - \frac{1}{2}\cdot 2^2C_n^1 + \frac{1}{3}\cdot 2^3C_n^2 - \cdots + (-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+1}C_n^n.$$ (Điều phải chứng minh)

□

Bài 123. Chứng minh rằng $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \cdots + \frac{(-1)^nC_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Lời giải.
Ta có $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \int_0^1 C_n^0\,dx - \int_0^1 C_n^1 x\,dx + \int_0^1 C_n^2 x^2\,dx - \int_0^1 C_n^3 x^3\,dx + \cdots + (-1)^n\int_0^1 C_n^n x^n\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 (1-x)^n d(1-x) = C_n^0\,x|_0^1 - C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + C_n^2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - C_n^3\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \cdots + (-1)C_n^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow -\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^1 + \cdots + (-1)C_n^n\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \cdots + \frac{(-1)^nC_n^n}{n+1}.$$ (Điều phải chứng minh) □

Bài 124.

① Tính $I_n = \int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x$. **ĐS:** $I_n = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}$

② Chứng minh rằng $1-\dfrac{\mathrm{C}_n^1}{3}+\dfrac{\mathrm{C}_n^2}{5}-\dfrac{\mathrm{C}_n^3}{7}+\cdots+\dfrac{(-1)^n\mathrm{C}_n^n}{2n+1}=\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$.

Lời giải.

① Đặt $\begin{cases} u=\left(1-x^2\right)^n \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-2n\left(1-x^2\right)^{n-1}x\,\mathrm{d}x \\ v=x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_n &= (1-x^2)x\Big|_0^1+2n\int\limits_0^1(1-x^2)^{n-1}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\int\limits_0^1(1-x^2)^{n-1}\left[1-(1-x^2)\right]\mathrm{d}x \\ &= 2n\left(I_{n-1}-I_n\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2n+1)I_n=2nI_{n-1}\Leftrightarrow \frac{I_n}{I_{n-1}}=\frac{2n}{2n+1}\quad(*).$$

Từ $(*)$, ta được:

$\dfrac{I_n}{I_{n-1}}=\dfrac{2n}{2n+1};\ \dfrac{I_{n-1}}{I_{n-2}}=\dfrac{2n-2}{2n-1};\dfrac{I_{n-2}}{I_{n-3}}=\dfrac{2n-4}{2n-3};\ \cdots;\ \dfrac{I_1}{I_0}=\dfrac{2}{3}$, với $I_0=\int\limits_0^1 1\,\mathrm{d}x=x\Big|_0^1=1$.

Nhân vế theo vế, ta được:

$$\frac{I_n}{I_{n-1}}\cdot\frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}\cdots\frac{I_1}{I_0}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\Rightarrow I_n=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}\quad(1).$$

② Ta có $\left(1-x^2\right)^n=\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1x^2+\mathrm{C}_n^2x^4-\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^nx^{2n}$.

$$\begin{aligned} I_n=\int\limits_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1\mathrm{C}_n^0\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\mathrm{C}_n^1x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\mathrm{C}_n^2x^4\,\mathrm{d}x-\cdots+(-1)^n\int\limits_0^1\mathrm{C}_n^nx^{2n}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{C}_n^0\,x\Big|_0^1-\mathrm{C}_n^1\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\mathrm{C}_n^2\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 \\ &= 1-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{C}_n^1+\frac{1}{5}\cdot\mathrm{C}_n^2-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\mathrm{C}_n^n\quad(2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$1-\frac{\mathrm{C}_n^1}{3}+\frac{\mathrm{C}_n^2}{5}-\frac{\mathrm{C}_n^3}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n\mathrm{C}_n^n}{2n+1}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.\quad\text{(Điều phải chứng minh)}$$

□

Bài 125.

① Tính $I=\int\limits_0^1 x\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{2(n+1)}$

② Chứng minh rằng $\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^0-\frac{1}{4}\mathrm{C}_n^1+\frac{1}{6}\mathrm{C}_n^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+2}\mathrm{C}_n^n=\frac{1}{2(n+1)}$.

Lời giải.

1. Đặt $t = 1 - x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận: $x = 1$ thì $t = 0$; $x = 0$ thì $t = 1$.
Suy ra $I = \int\limits_1^0 -\frac{1}{2}t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$ (1).

2. Ta có $x\left(1-x^2\right)^n = \mathrm{C}_n^0 x - \mathrm{C}_n^1 x^3 + \mathrm{C}_n^2 x^5 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n x^{2n+1}$.

$$\begin{aligned}
I = \int\limits_0^1 x(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^0 x\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^2 x^5\,\mathrm{d}x - \cdots + (-1)^n \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^n x^{2n+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{C}_n^0 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \mathrm{C}_n^1 \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \mathrm{C}_n^2 \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n \cdot \left.\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{6}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+2}\mathrm{C}_n^n \quad (2).
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{6}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+2}\mathrm{C}_n^n = \frac{1}{2(n+1)}. \quad \text{(Điều phải chứng minh)}$$

□

Bài 126.

1. Tính $I = \int\limits_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

2. Tính $S = \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n$.

Lời giải.

1. Ta có $I = \int\limits_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}(x+1) = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (1).

2. Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int\limits_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^0\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^1 x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^3 x^3\,\mathrm{d}x + \cdots + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_n^n x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{C}_n^0\, x|_0^1 - \mathrm{C}_n^1 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \mathrm{C}_n^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \mathrm{C}_n^3 \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \cdot \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 \\
&= \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n \quad (2).
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$S = \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

□

Bài 127.

1. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x\,(1-x)^{19}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I = \frac{1}{420}$

② Tính $S = \frac{1}{2}\mathrm{C}_{19}^{0} - \frac{1}{3}\mathrm{C}_{19}^{1} + \frac{1}{4}\mathrm{C}_{19}^{2} - \cdots + \frac{1}{20}\mathrm{C}_{19}^{18} - \frac{1}{21}\mathrm{C}_{19}^{19}$.

Lời giải.

① Đặt $u = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$ và $x = 1 - u$.
Đổi cận: $x = 0$ thì $t = 1$; $x = 1$ thì $t = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^0 (1-u)u^{19}(-\,\mathrm{d}u) = \int\limits_0^1 (1-u)u^{19}\,\mathrm{d}u \\ &= \int\limits_0^1 u^{19}\,\mathrm{d}u - \int\limits_0^1 u^{20}\,\mathrm{d}u \\ &= \left.\frac{u^{20}}{20}\right|_0^1 - \left.\frac{u^{21}}{21}\right|_0^1 = \frac{1}{20} - \frac{1}{21} = \frac{1}{420} \quad (1). \end{aligned}$$

② Ta có $(1-x)^{19} = \mathrm{C}_{19}^{0} - \mathrm{C}_{19}^{1}x + \mathrm{C}_{19}^{2}x^2 - \mathrm{C}_{19}^{3}x^3 + \cdots - \mathrm{C}_{19}^{19}x^{19}$.
Suy ra $x(1-x)^{19} = \mathrm{C}_{19}^{0}x - \mathrm{C}_{19}^{1}x^2 + \mathrm{C}_{19}^{2}x^3 - \mathrm{C}_{19}^{3}x^4 + \cdots - \mathrm{C}_{19}^{19}x^{20}$.

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 x(1-x)^{19}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \mathrm{C}_{19}^{0}x\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \mathrm{C}_{19}^{1}x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_{19}^{2}x^3\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \mathrm{C}_{19}^{3}x^4\,\mathrm{d}x + \cdots - \int\limits_0^1 \mathrm{C}_{19}^{19}x^{20}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{C}_{19}^{0}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \mathrm{C}_{19}^{1}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \mathrm{C}_{19}^{2}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 - \mathrm{C}_{19}^{3}\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 + \cdots - \mathrm{C}_{19}^{19}\cdot\left.\frac{x^{21}}{21}\right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{C}_{19}^{0} - \frac{1}{3}\mathrm{C}_{19}^{1} + \frac{1}{4}\mathrm{C}_{19}^{2} - \frac{1}{5}\mathrm{C}_{19}^{3} + \cdots - \frac{1}{21}\mathrm{C}_{19}^{19} \quad (2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{C}_{19}^{0} - \frac{1}{3}\mathrm{C}_{19}^{1} + \frac{1}{4}\mathrm{C}_{19}^{2} - \frac{1}{5}\mathrm{C}_{19}^{3} + \cdots - \frac{1}{21}\mathrm{C}_{19}^{19} = \frac{1}{420}.$$

□

Bài 128. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 2.

① Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^n x^2\left(1+x^3\right)^n\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I_n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$

② Chứng minh rằng: $\frac{1}{3}\mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{6}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{9}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3n+3}\mathrm{C}_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

Lời giải.

① $I_n = \int\limits_0^n x^2\left(1+x^3\right)^n\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = 1 + x^3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{3}$.

Đổi cận

x	0	1
y	1	2

Suy ra $I_n = \int\limits_1^2 u^n\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 u^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\left.\frac{u^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

Vậy $I_n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

2 Ta có $\left(1+x^3\right)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x^3 + \mathrm{C}_n^2 x^6 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{3n}$
$\Rightarrow x^2\left(1+x^3\right)^n = \mathrm{C}_n^0 x^2 + \mathrm{C}_n^1 x^5 + \mathrm{C}_n^2 x^8 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{3n+2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^n \mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{C}_n^0 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^1 x^5\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^2 x^8\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^1 \mathrm{C}_n^n x^{3n+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{C}_n^0 \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_n^1 \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_n^2 \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 + \cdots \mathrm{C}_n^n \frac{x^{3n+3}}{3n+3}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{6}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{9}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3n+3}\mathrm{C}_n^n. \quad (1)\end{aligned}$$

Theo câu trên thì $\int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^n \mathrm{d}x = \dfrac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{1}{6}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{1}{9}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \dfrac{1}{3n+3}\mathrm{C}_n^n = \dfrac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$. (Điều phải chứng minh)

□

Bài 129. Tính tích phân $I = \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$.

Từ đó chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{6}\mathrm{C}_n^2 - \frac{1}{8}\mathrm{C}_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\mathrm{C}_n^n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

ĐS: $I = \dfrac{1}{2(n+1)}$

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}\left(1-x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot \frac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}. \quad (1)\end{aligned}$$

Ta có $\left(1-x^2\right)^n = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2\left(x^2\right)^2 - \mathrm{C}_n^3\left(x^2\right)^3 + \cdots + (-1)^n\cdot \mathrm{C}_n^n\left(x^2\right)^n$.

$$\Rightarrow x\left(1-x^2\right)^n = x\mathrm{C}_n^0 - x\mathrm{C}_n^1 x^2 + x\mathrm{C}_n^2\left(x^2\right)^2 - x\mathrm{C}_n^3\left(x^2\right)^3 + \cdots + (-1)^n x\mathrm{C}_n^n\left(x^2\right)^n$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{C}_n^0 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{C}_n^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^2 x^5\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{C}_n^3 x^7\,\mathrm{d}x + \cdots + (-1)^n \int_0^1 \mathrm{C}_n^n x^{2n+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = \mathrm{C}_n^0\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \mathrm{C}_n^1\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_n^2\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 - \mathrm{C}_n^3\cdot\frac{x^8}{8}\Big|_0^1 + \cdots + (-1)^n\,\mathrm{C}_n^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{6}\mathrm{C}_n^2 - \frac{1}{8}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)\,\mathrm{C}_n^n}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{6}\mathrm{C}_n^2 - \frac{1}{8}\mathrm{C}_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\mathrm{C}_n^n = \frac{1}{2(n+1)}. \quad \text{(Điều phải chứng minh)}$$

□

DẠNG 0.6. Tính tổng một biểu thức tổ hợp

Nhận xét. *Tính tổng một biểu thức tổ hợp cũng sử dụng các cách ở dạng 5 nhưng có sự khác nhau giữa việc tính tổng và chứng minh là: chứng minh thì biết trước kết quả còn tính tổng thì chưa biết trước kết quả.*

Bài 130. Tính $S = \mathrm{C}_{11}^6 + \mathrm{C}_{11}^7 + \mathrm{C}_{11}^8 + \mathrm{C}_{11}^9 + \mathrm{C}_{11}^{10} + \mathrm{C}_{11}^{11}$ trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.
ĐS: $S = 1024$.

Lời giải.
Áp dụng tính chất $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$, ta có $S = \mathrm{C}_{11}^6 + \mathrm{C}_{11}^7 + \mathrm{C}_{11}^8 + \mathrm{C}_{11}^9 + \mathrm{C}_{11}^{10} + \mathrm{C}_{11}^{11}$
Hay $S = \mathrm{C}_{11}^5 + \mathrm{C}_{11}^4 + \mathrm{C}_{11}^3 + \mathrm{C}_{11}^2 + \mathrm{C}_{11}^1 + \mathrm{C}_{11}^0 \Rightarrow 2S = \mathrm{C}_{11}^0 + \mathrm{C}_{11}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{11}^{10} + \mathrm{C}_{11}^{11} = (1+1)^{11} = 2^{11}$.
Vậy $S = 1024$. □

Bài 131. Tính tổng

1. $S = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = 2^n$.
2. $S_1 = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n}$. **ĐS:** $S_1 = 2^{2n-1}$.
3. $\mathrm{S}_2 = \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}$. **ĐS:** $S_2 = 2^{2n-1}$.

Lời giải.

1. Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.
Cho $x = 1$ ta được $(1+1)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n$.
Vậy $S = 2^n$.
2. Ta có $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}$.
$(1-x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 - \mathrm{C}_{2n}^1 x^2 + \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} x^{2n} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}$.
Cho $x = 1$ ta được
$$\begin{aligned} 2^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \quad (1) \\ 0 &= \mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 - \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \quad (2) \end{aligned}$$
Cộng (1) với (2) vế theo vế ta có $2^{2n} = 2\mathrm{C}_{2n}^0 + 2\mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + 2\mathrm{C}_{2n}^{2n} \Rightarrow S_1 = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$.
Mặt khác từ (2) ta cũng có $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}$.
3. Vậy $S_2 = S_1 = 2^{2n-1}$.

□

Bài 132. Tính tổng $S = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** 3^n.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.
Cho $x = 2$ ta được $S = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n = (1+2)^n = 3^n$. □

Bài 133. Tính

1. $S_1 = \mathrm{C}_5^0 + \mathrm{C}_5^1 + \cdots + \mathrm{C}_5^5$. **ĐS:** $S_1 = 32$.
2. $S_2 = 4^0\mathrm{C}_8^0 + 4^1\mathrm{C}_8^1 + \cdots + 4^8\mathrm{C}_8^8$. **ĐS:** $S_2 = 390625$.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.

1. Cho $x = 1$ và $n = 5$ ta được $S_1 = \mathrm{C}_5^0 + \mathrm{C}_5^1 + \cdots + \mathrm{C}_5^5 = (1+1)^5 = 2^5 = 32$.
2. Cho $x = 4$ và $n = 8$ ta được $S_2 = 4^0\mathrm{C}_8^0 + 4^1\mathrm{C}_8^1 + \cdots + 4^8\mathrm{C}_8^8 = (1+4)^8 = 5^8 = 390625$.

□

Bài 134. Tính

① $S_1 = 3^n\left[\mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3^k}\mathrm{C}_n^k + \cdots + \frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n\right]$. **ĐS:** $S_1 = 4^n$.

② $S_2 = 9^n\mathrm{C}_n^0 + 9^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 9^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 9^0\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S_2 = 10^n$.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$. $(*)$

① Cho $x = \frac{1}{3}$ ta được

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3^k}\mathrm{C}_n^k + \cdots + \frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n$$
$$\Rightarrow\ 3^n\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = 3^n\mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{3^k}\mathrm{C}_n^k + \cdots + \frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n$$
$$\Rightarrow\ S_1 = 3^n\left(\frac{4}{3}\right)^n = 4^n.$$

Ta cũng có thể làm như sau $S_1 = 3^n\mathrm{C}_n^0 + 3^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 3^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 3^{n-k}\mathrm{C}_n^k + \cdots + \mathrm{C}_n^n$.
Vì $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ nên S_1 được viết lại $S_1 = 3^n\mathrm{C}_n^n + 3^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} + 3^{n-2}\mathrm{C}_n^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^0$.
Từ $(*)$ cho $x = 3$ ta được $(1+3)^n = 3^n\mathrm{C}_n^0 + 3^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 3^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 3^n\mathrm{C}_n^n$ hay $S_1 = (1+3)^n = 4^n$.

② Vì $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ nên $S_2 = 9^n\mathrm{C}_n^n + 9^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} + 9^{n-2}\mathrm{C}_n^{n-2} + \cdots + 9^0\mathrm{C}_n^0$.
Từ $(*)$ cho $x = 9$ ta được $S_2 = (1+9)^n = 10^n$.

□

Bài 135. Tính $S = \mathrm{C}_{14}^1 - 2\mathrm{C}_{14}^2 + 3\mathrm{C}_{14}^2 - \cdots - 14\mathrm{C}_{14}^{14}$. **ĐS:** $S = 0$.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^{14} = \mathrm{C}_{14}^0 + \mathrm{C}_{14}^1 x + \mathrm{C}_{14}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{14}^{14} x^{14}$.
Lấy đạo hàm hai vế, ta được $14(1+x)^{13} = \mathrm{C}_{14}^1 + 2\mathrm{C}_{14}^2 x + 3\mathrm{C}_{14}^3 x^2 + \cdots + 14\mathrm{C}_{14}^{14} x^{13}$.
Cho $x = -1$ ta được $0 = \mathrm{C}_{14}^1 - 2\mathrm{C}_{14}^2 + 3\mathrm{C}_{14}^2 - \cdots - 14\mathrm{C}_{14}^{14} \Rightarrow S = 0$. □

Bài 136. Tính tổng

① $S_1 = 1\mathrm{C}_n^0 + 1\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S_1 = n2^{n-1} + 1$.

② $S_2 = 1\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S_2 = 2^{n-1}(n+2)$.

Lời giải.

① Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.
Lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x = 1$ ta được $\mathrm{n}(1+1)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n$.
$\Rightarrow S_1 = 1\mathrm{C}_n^0 + 1\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n = n2^{n-1} + \mathrm{C}_n^0$.
$\Rightarrow S_1 = n2^{n-1} + 1$.

② Ta có

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$$
$$\Rightarrow x(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 x + \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{n+1}$$

Lấy đạo hàm hai vế $(1+x)^n + x\cdot n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 x + 3\mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n x^n$.
Cho $x = 1$ ta được $2^n + n2^{n-1} = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n \Rightarrow S_2 = 2^{n-1}(n+2)$.

□

Bài 137. Tính $S = 9 \cdot 2^8 \mathrm{C}_9^0 - 8 \cdot 2^7 \mathrm{C}_9^1 + 7 \cdot 2^6 \mathrm{C}_9^2 - \cdots + \mathrm{C}_9^8$. **ĐS:** $S = 9$.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^9 = \mathrm{C}_9^0 x^9 + \mathrm{C}_9^1 x^8 + \mathrm{C}_9^2 x^7 + \mathrm{C}_9^3 x^6 + \cdots + \mathrm{C}_9^9$.
$\Rightarrow 9(1+x)^8 = 9\mathrm{C}_9^0 x^8 + 8\mathrm{C}_9^1 x^7 + 7\mathrm{C}_9^2 x^6 + 6\mathrm{C}_9^3 x^5 + \cdots + \mathrm{C}_9^8$.
Cho $x = -2 \Rightarrow 9 = 9 \cdot 2^8 \mathrm{C}_9^0 - 8 \cdot 2^7 \mathrm{C}_9^1 + 7 \cdot 2^6 \mathrm{C}_9^2 - \cdots + \mathrm{C}_9^8 \Rightarrow S = 9$. □

Bài 138. Tính $S = 2 \cdot 1\mathrm{C}_{11}^9 - 3 \cdot 2 \cdot 2^1 \mathrm{C}_{11}^8 + 4 \cdot 3 \cdot 2^2 \mathrm{C}_{11}^8 - \cdots - 11 \cdot 10 \cdot 2^9 \mathrm{C}_{11}^0$. **ĐS:** $S = -110$.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^{11} = \mathrm{C}_{11}^0 x^{11} + \mathrm{C}_{11}^1 x^{10} + \mathrm{C}_{11}^2 x^9 + \cdots + \mathrm{C}_{11}^9 x^2 + \mathrm{C}_{11}^{10} x + \mathrm{C}_{11}^{11}$.
$\Rightarrow 11(1+x)^{10} = 11\mathrm{C}_{11}^0 x^{10} + 10\mathrm{C}_{11}^1 x^9 + 9\mathrm{C}_{11}^2 x^8 + \cdots + 2\mathrm{C}_{11}^9 x + \mathrm{C}_{11}^{10}$
$\Rightarrow 11 \cdot 10(1+x)^9 = 11 \cdot 10\mathrm{C}_{11}^0 x^9 + 10 \cdot 9\mathrm{C}_{11}^1 x^8 + 9 \cdot 8\mathrm{C}_{11}^2 x^7 + \cdots + 2\mathrm{C}_{11}^9$.
Cho $x = -2 \Rightarrow S = 11 \cdot 10 \cdot (-1)^9 = -110$. □

Bài 139. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2000}^0 + 2\mathrm{C}_{2000}^1 + 3\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + 2001\mathrm{C}_{2000}^{2000}$. **ĐS:** $S = 1001 \cdot 2^{2000}$.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^{2000} = \mathrm{C}_{2000}^0 + \mathrm{C}_{2000}^1 x + \mathrm{C}_{2000}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2000}^{2000} x^{2000}$. $(*)$
Cho $x = 1$ ta được $\mathrm{C}_{2000}^0 + \mathrm{C}_{2000}^1 + \mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2000}^{2000} = 2^{2000}$. (1)
Lấy đạo hàm hai vế của $(*)$

$$2000(1+x)^{1999} = \mathrm{C}_{2000}^1 + 2\mathrm{C}_{2000}^2 x + \cdots + 2000\mathrm{C}_{2000}^{2000} x^{1999}.$$

Cho $x = 1$ ta được $\mathrm{C}_{2000}^1 + 2\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + 2000\mathrm{C}_{2000}^{2000} = 2000 \cdot 2^{1999}$. (2)
Lấy (1) cộng với (2) vế theo vế

$$\mathrm{C}_{2000}^0 + 2\mathrm{C}_{2000}^1 + 3\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + 2001\mathrm{C}_{2000}^{2000} = 2^{2000} + 2000 \cdot 2^{1999}.$$

hay $S = 2^{2000} + 1000 \cdot 2 \cdot 2^{1999} = 1001 \cdot 2^{2000}$.
Ta cũng có thể làm như sau
Ta có

$$\begin{aligned} & (1+x)^{2000} = \mathrm{C}_{2000}^0 + \mathrm{C}_{2000}^1 x + \mathrm{C}_{2000}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2000}^{2000} x^{2000} \\ \Rightarrow\ & x(1+x)^{2000} = \mathrm{C}_{2000}^0 x + \mathrm{C}_{2000}^1 x^2 + \mathrm{C}_{2000}^2 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2000}^{2000} x^{2001}. \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm hai vế

$$(1+x)^{2000} + x \cdot 2000(1+x)^{1999} = \mathrm{C}_{2000}^0 + 2\mathrm{C}_{2000}^1 x + 3\mathrm{C}_{2000}^2 x^2 + \cdots + 2001\mathrm{C}_{2000}^{2000} x^{2000}.$$

Cho $x = 1$ ta được

$$\mathrm{C}_{2000}^0 + 2\mathrm{C}_{2000}^1 + 3\mathrm{C}_{2000}^2 + \cdots + 2001\mathrm{C}_{2000}^{2000} = 2^{2000} + 2000 \cdot 2^{1999}.$$

hay $S = 2^{2000} + 1000 \cdot 2 \cdot 2^{1999} = 1001 \cdot 2^{2000}$. □

Bài 140. Tính $S = 1^2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + 3^2\mathrm{C}_n^1 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = n(n+1)2^{n-2}$.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.
Lấy đạo hàm hai vế $n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}$.
$\Rightarrow xn(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 x + 2\mathrm{C}_n^2 x^2 + 3\mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^n$.
Lấy đạo hàm hai vế

$$n[(1+x)^{n-1} + x(n-1)(1+x)^{n-2}] = \mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{C}_n^2 x + 3 \cdot 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n \cdot n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x = 1$ ta được

$$n\left[2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right] = \mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n.$$

Ta cũng có thể giải bài toán trên như sau:

Đặt $f(x) = (1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$,

$g(x) = x\left[(1+x)^n\right] = \mathrm{C}_n^0 x + \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2 x^3 + \mathrm{C}_n^3 x^4 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{n+1}$.

Ta có $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 2\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}$

$\Rightarrow f'(1) = \mathrm{n} \cdot 2^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n. \qquad (1)$

$g'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 x + 3\mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n x^n$,

$g''(x) = n(1+x)^{n-1} + n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = 2\mathrm{C}_n^1 + 3\cdot 2\mathrm{C}_n^2 x + 4\cdot 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n(n+1)\mathrm{C}_n^n x^{n-1}$.

$\Rightarrow g''(1) = 2n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = 2\mathrm{C}_n^1 + 3\cdot 2\mathrm{C}_n^2 + 4\cdot 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (n+1)n\mathrm{C}_n^n. \qquad (2)$

Lấy (2) trừ (1) ta được $n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = \mathrm{C}_n^1 + 2\cdot 2\mathrm{C}_n^2 + 3\cdot 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\cdot n\mathrm{C}_n^n$

$\Rightarrow n\cdot 2^{n-2}(n-1+2) = 1^2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n$.

Vậy $S = n(n+1)2^{n-2}$. □

Bài 141. Tính

1. $S_1 = n\mathrm{C}_n^0 - (n-1)\mathrm{C}_n^1 + (n-2)\mathrm{C}_n^2 - (n-3)\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^n \cdot \mathrm{C}_n^{n-1}$. **ĐS:** $S_1 = 0$.
2. $S_2 = n(n-1)\mathrm{C}_n^0 + (n-1)(n-2)\mathrm{C}_n^1 + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-2}$. **ĐS:** $S_2 = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

Lời giải.

1. Ta có $(x-1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n - \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n$.
Đạo hàm hai vế
$$n(x-1)^{n-1} = n\mathrm{C}_n^0 x^{n-1} - (n-1)\mathrm{C}_n^1 x^{n-2} + (n-2)\mathrm{C}_n^2 x^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^n.$$
Cho $x = 1$ ta được
$$n(1-1)^n = n\mathrm{C}_n^0 - (n-1)\mathrm{C}_n^1 + (n-2)\mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}.$$
hay $S_1 = 0$.

2. Ta có $(x+1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-2}x^2 + \mathrm{C}_n^{n-1}x + \mathrm{C}_n^n$.
Lấy đạo hàm hai vế lần thứ nhất
$$n(x+1)^{n-1} = n\mathrm{C}_n^0 x^{n-1} + (n-1)\mathrm{C}_n^1 x^{n-2} + (n-2)\mathrm{C}_n^2 x^{n-3} + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-2}x + \mathrm{C}_n^{n-1}.$$
Lấy đạo hàm hai vế lần thứ hai
$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = n(n-1)\mathrm{C}_n^0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)\mathrm{C}_n^1 x^{n-3} + (n-2)(n-3)\mathrm{C}_n^2 x^{n-4} + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-2}.$$
Cho $x = 1$ ta được
$$n(n-1)(1+1)^{n-2} = n(n-1)\mathrm{C}_n^0 + (n-1)(n-2)\mathrm{C}_n^1 + (n-2)(n-3)\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-2}.$$
hay $S_2 = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

□

Bài 142. Tính $S = \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^1 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{C}_n^0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^3 x^3\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^1 \mathrm{C}_n^n x^n\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \mathrm{C}_n^0 x\Big|_0^1 + \mathrm{C}_n^1 \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_n^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_n^3 \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \mathrm{C}_n^0 = \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n.$$

Vậy $S = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$. □

Bài 143. Tính: $S = \mathrm{C}_n^0 + \dfrac{3}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{7}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = \dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

Lời giải.
Ta có

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{C}_n^0 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{C}_n^1 x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{C}_n^2 x^2 \,\mathrm{d}x + \cdots + \int_1^2 \mathrm{C}_n^n x^n \,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \mathrm{C}_n^0 x\Big|_1^2 + \mathrm{C}_n^1 \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \mathrm{C}_n^2 \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = \mathrm{C}_n^0 + \frac{3}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{7}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}\mathrm{C}_n^n.$$

Vậy $S = \dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$. □

Bài 144. Tính: $S = 2\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{2^2}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{2^3}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \dfrac{2^{n+1}}{n+1}\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = \dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

Lời giải.
Ta có

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$$

$$\Rightarrow \int_0^2 (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{C}_n^0 \,\mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{C}_n^1 x \,\mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{C}_n^2 x^2 \,\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^2 \mathrm{C}_n^n x^n \,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \mathrm{C}_n^0 x\Big|_0^2 + \mathrm{C}_n^1 \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \mathrm{C}_n^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n+1}-1}{n+1} = 2\mathrm{C}_n^0 + \frac{2^2}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{2^3}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1}\mathrm{C}_n^n.$$

Vậy $S = \dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$. □

Bài 145. Tính: $S = \mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 - 4\mathrm{C}_n^4 + \cdots + (-1)^{n-1} n\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $A = 0$.

Lời giải.
Ta có

$$(1-x)^n = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 - \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$-n(1-x)^{n-1} = -\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x - 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + (-1)^n n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x = 1$

$$-n(1-1)^{n-1} = -\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^n n\mathrm{C}_n^n$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^n n\mathrm{C}_n^n.$$

Vậy $A = 0$. □

Bài 146. Tính: $S = \dfrac{3^0}{7}\mathrm{C}_6^0 + \dfrac{3^1}{6}\mathrm{C}_6^1 + \dfrac{3^2}{5}\mathrm{C}_6^2 + \cdots + \dfrac{3^6}{1}\mathrm{C}_6^6$. **ĐS:** $S = \dfrac{4^7 - 3^7}{7}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
&(x+3)^6 = \mathrm{C}_6^0 x^6 + \mathrm{C}_6^1 x^5 \cdot 3 + \mathrm{C}_6^2 x^4 \cdot 3^2 + \cdots + \mathrm{C}_6^6 \cdot 3^6\\
\Rightarrow &\int_0^1 (x+3)^6 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{C}_6^0 x^6 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_6^1 x^5 \cdot 3 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_6^2 x^4 \cdot 3^2 \,\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^1 \mathrm{C}_6^6 \cdot 3^6 \,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow &\left.\frac{(x+3)^7}{7}\right|_0^1 = \mathrm{C}_6^0 \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 + 3\mathrm{C}_6^1 \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 + 3^2\mathrm{C}_6^2 \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 + \cdots + 3^6\mathrm{C}_6^6 x\Big|_0^1\\
\Rightarrow &\frac{4^7 - 3^7}{7} = \frac{1}{7}\mathrm{C}_6^0 + \frac{3}{6}\mathrm{C}_6^1 + \frac{3^2}{5}\mathrm{C}_6^2 + \cdots + 3^6\mathrm{C}_6^6.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{4^7 - 3^7}{7}$. □

Bài 147. Tính: $S = 2\mathrm{C}_n^0 + 4\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{26}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \dfrac{3^{n+1} - 1}{n+1}\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = \dfrac{2^{n+1}(2^{n+1} - 1)}{n+1}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
&(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n\\
\Rightarrow &\int_1^3 (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \int_1^3 \mathrm{C}_n^0 \,\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{C}_n^1 x \,\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{C}_n^2 x^2 \,\mathrm{d}x + \cdots + \int_1^3 \mathrm{C}_n^n x^n \,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow &\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_1^3 = \mathrm{C}_n^0 x\Big|_1^3 + \mathrm{C}_n^1 \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 + \mathrm{C}_n^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_1^3\\
\Rightarrow &\frac{4^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1} = 2\mathrm{C}_n^0 + 4\mathrm{C}_n^1 + \frac{26}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}\mathrm{C}_n^n.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{2^{n+1}(2^{n+1} - 1)}{n+1}$. □

Bài 148. Tính: $S = \mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + 7\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (2^n - 1)\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = 3^n - 2^n$.

Lời giải.
Ta có

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned}
&n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}\\
\Rightarrow &\int_1^2 n(1+x)^{n-1} \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{C}_n^1 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 2\mathrm{C}_n^2 x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 3\mathrm{C}_n^3 x^2 \,\mathrm{d}x + \cdots + \int_1^2 n\mathrm{C}_n^n x^{n-1} \,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow &n\left.\frac{(1+x)^n}{n}\right|_1^2 = \mathrm{C}_n^1 x\Big|_1^2 + 2\mathrm{C}_n^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 + 3\mathrm{C}_n^3 \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n \left.\frac{x^n}{n}\right|_1^2\\
\Rightarrow &3^n - 2^n = \mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + 7\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (2^n - 1)\mathrm{C}_n^n.
\end{aligned}$$

Vậy $S = 3^n - 2^n$. □

Bài 149. Tính: $S = (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + (-1)^{n-2}\cdot 2\cdot 2\cdot \mathrm{C}_n^2 + \cdots + (-1)^{n-k}\cdot k\cdot 2^{k-1}\mathrm{C}_n^k + \cdots + n\cdot 2^{n-1}\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = n$.

Lời giải.
Ta có
$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n.$$
Lấy đạo hàm hai vế ta được
$$n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + \cdots + k\mathrm{C}_n^k x^{k-1} + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$
Cho $x = -2$ ta được
$$\begin{aligned} & n(1-2)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2(-2) + \cdots + k\mathrm{C}_n^k(-2)^{k-1} + \cdots + n\mathrm{C}_n^n(-2)^{n-1} \\ \Rightarrow & n(-1)^{n-1}(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + (-1)^{-1}(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 2\cdot \mathrm{C}_n^2 + \cdots \\ & \qquad + (-1)^{n-1}(-1)^{k-1}2^{k-1}\cdot k\mathrm{C}_n^k + \cdots + (-1)^{n-1}(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1} n\mathrm{C}_n^n \\ \Rightarrow & n = (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + (-1)^{n-2}\cdot 2\cdot 2\cdot \mathrm{C}_n^2 + \cdots + (-1)^{n-k}\cdot k\cdot 2^{k-1}\mathrm{C}_n^k + \cdots + n\cdot 2^{n-1}\mathrm{C}_n^n. \end{aligned}$$
Vậy $S = n$. □

Bài 150. Tính: $S = 1^2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n$. **ĐS:** $S = n(n+1)2^{n-2}$.

Lời giải.
Ta có
$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n.$$
Lấy đạo hàm hai vế
$$\begin{aligned} & n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1} \\ \Rightarrow & nx(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 x + 2\mathrm{C}_n^2 x^2 + 3\mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^n. \end{aligned}$$
Lấy đạo hàm hai vế
$$n\left[(1+x)^{n-1} + x(n-1)(1+x)^{n-2}\right] = \mathrm{C}_n^1 + 2\cdot 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\cdot 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n\cdot n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$
Cho $x = 1$ ta được
$$n\left[2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right] = 1^2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n.$$
Vậy $S = n\cdot 2^{n-2}\left[(n-1)+2\right] = n(n+1)2^{n-2}$.

Ta có thể giải bài toán trên như sau: Đặt
$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n \\ g(x) &= x(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 x + \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2 x^3 + \mathrm{C}_n^3 x^4 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{n+1}. \end{aligned}$$
Ta có
$$\begin{aligned} & f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1} \\ \Rightarrow\ & f'(1) = n\cdot 2^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n \qquad (*) \\ & g'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 x + 3\mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n x^n \\ \Rightarrow\ & g''(x) = n(1+x)^{n-1} + n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} \\ & \qquad = 2\mathrm{C}_n^1 + 3\cdot 2\mathrm{C}_n^2 x + 4\cdot 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + (n+1)\cdot n\mathrm{C}_n^n x^{n-1} \\ \Rightarrow\ & g''(1) = 2n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = 2\mathrm{C}_n^1 + 3\cdot 2\mathrm{C}_n^2 + 4\cdot 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (n+1)\cdot n\mathrm{C}_n^n. \qquad (**) \end{aligned}$$
Lấy $(**)$ trừ $(*)$ ta được
$$\begin{aligned} & n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = \mathrm{C}_n^1 + 2\cdot 2\mathrm{C}_n^2 + 3\cdot 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\cdot n\mathrm{C}_n^n \\ \Leftrightarrow & n(n+1)2^{n-2} = 1^2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n. \end{aligned}$$
Vậy $S = n(n+1)2^{n-2}$. □

Bài 151. ① Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 (x+2)^6\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I = \dfrac{3^7-2^7}{7}$.

② Tính tổng sau $S = \dfrac{2^6}{1}\mathrm{C}_6^0 + \dfrac{2^5}{2}\mathrm{C}_6^1 + \dfrac{2^4}{3}\mathrm{C}_6^2 + \dfrac{2^3}{4}\mathrm{C}_6^3 + \dfrac{2^2}{5}\mathrm{C}_6^4 + \dfrac{2^1}{6}\mathrm{C}_6^5 + \dfrac{1}{7}\mathrm{C}_6^6$. **ĐS:** $S = \dfrac{3^7-2^7}{7}$.

Lời giải.

① $I = \int\limits_0^1 (x+2)^6\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+2)^6\,\mathrm{d}(x+2) = \dfrac{(x+2)^7}{7}\Big|_0^1 = \dfrac{3^7-2^7}{7}$.

② Ta có

$$(2+x)^6 = \mathrm{C}_6^0 2^6 + \mathrm{C}_6^1 2^5 x + \mathrm{C}_6^2 2^4 x^2 + \mathrm{C}_6^3 2^3 x^3 + \mathrm{C}_6^4 2^2 x^4 + \mathrm{C}_6^5 2 x^5 + \mathrm{C}_6^6 x^6$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 (x+2)^6\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{C}_6^0 2^6\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_6^1 2^5 x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_6^2 2^4 x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_6^3 2^3 x^3\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int\limits_0^1 \mathrm{C}_6^4 2^2 x^4\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_6^5 2 x^5\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{C}_6^6 x^6\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \dfrac{(x+2)^7}{7}\Big|_0^1 = \mathrm{C}_6^0 2^6 x\Big|_0^1 + \mathrm{C}_6^1 2^5 \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_6^2 2^4 \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_6^3 2^3 \dfrac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$+ \mathrm{C}_6^4 2^2 \dfrac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_6^5 2 \dfrac{x^6}{6}\Big|_0^1 + \mathrm{C}_6^6 \dfrac{x^7}{7}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \dfrac{3^7-2^7}{7} = \dfrac{2^6}{1}\mathrm{C}_6^0 + \dfrac{2^5}{2}\mathrm{C}_6^1 + \dfrac{2^4}{3}\mathrm{C}_6^2 + \dfrac{2^3}{4}\mathrm{C}_6^3 + \dfrac{2^2}{5}\mathrm{C}_6^4 + \dfrac{2^1}{6}\mathrm{C}_6^5 + \dfrac{1}{7}\mathrm{C}_6^6.$$

Vậy $S = \dfrac{3^7-2^7}{7}$.

□

Bài 152. Tính

$$S = \dfrac{1}{1!(n-1)!} + \dfrac{1}{3!(n-3)!} + \dfrac{1}{5!(n-5)!} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)!1!} \quad \text{(với } n \text{ chẵn)}.$$

ĐS: $S = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$.

Lời giải.
Ta có

$$n!S = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}.$$

Khai triển

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x^{n-1} + \mathrm{C}_n^n x^n.$$

Cho $x = 1$ ta được $2^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n$. (1)

Cho $x = -1$ ta được $0 = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^3 + \cdots - \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n$. (2)

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được

$$2^n = 2\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + 2\mathrm{C}_n^{n-1} x^{n-1} \Rightarrow n!S = 2^{n-1}.$$

Vậy $S = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$.

□

Bài 153. Cho $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng

$$S_n - \mathrm{C}_n^1 S_{n-1} + \mathrm{C}_n^2 S_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} S_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Lời giải.

Ta có $(x-1)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n - \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n$. (1)

Cho $x = 1$ ta được $0 = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)\mathrm{C}_n^n$. (2)

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được

$$\begin{aligned}
(x-1)^n &= x^n - 1 - \mathrm{C}_n^1(x^{n-1}-1) + \mathrm{C}_n^2(x^{n-2}-1) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}(x-1)\\
\Rightarrow (x-1)^{n-1} &= (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots) - \mathrm{C}_n^1(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots)\\
&\quad + \mathrm{C}_n^2(x^{n-3} + x^{n-4} + \cdots) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}\\
\Rightarrow \int_0^1 (x-1)^{n-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{C}_n^1(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots)\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \int_0^1 \mathrm{C}_n^2(x^{n-3} + x^{n-4} + \cdots)\,\mathrm{d}x - \cdots + \int_0^1 (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow \left.\frac{(x-1)^n}{n}\right|_0^1 &= \left.\left(\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \cdots\right)\right|_0^1 - \mathrm{C}_n^1\left.\left(\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} + \cdots\right)\right|_0^1\\
&\quad + \mathrm{C}_n^2\left.\left(\frac{x^{n-2}}{n-2} + \frac{x^{n-3}}{n-3} + \cdots\right)\right|_0^1 - \cdots + (-1)^n\mathrm{C}_n^{n-1}x\Big|_0^1\\
\Rightarrow \frac{-(-1)^n}{n} &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots\right) - \mathrm{C}_n^1\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots\right)\\
&\quad + \mathrm{C}_n^2\left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} + \cdots\right) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}\\
\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= S_n - \mathrm{C}_n^1 S_{n-1} + \mathrm{C}_n^2 S_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} S_1 \quad \text{(đpcm)}.
\end{aligned}$$

□

Bài 154. Tổng

$$S = \frac{1}{1!2001!} + \frac{1}{3!1999!} + \cdots + \frac{1}{1001!1001!} + \frac{1}{1003!999!} + \cdots + \frac{1}{1999!3!} + \frac{1}{2001!1!}.$$

ĐS: $S = \frac{2^{2001}}{2002!}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
S \cdot 2002! &= \frac{2002!}{1!2001!} + \frac{2002!}{3!1999!} + \cdots + \frac{2002!}{1001!1001!} + \frac{2002!}{1003!999!} + \cdots + \frac{2002!}{1999!3!} + \frac{2002!}{2001!1!}\\
\Leftrightarrow S \cdot 2002! &= \mathrm{C}_{2002}^1 + \mathrm{C}_{2002}^3 + \cdots + +\mathrm{C}_{2002}^{2002}.
\end{aligned}$$

Khai triển

$$(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \mathrm{C}_{2n}^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Cho $x = 1$ và $n = 1001$ ta được $2^{2002} = \mathrm{C}_{2002}^0 + \mathrm{C}_{2002}^1 + \mathrm{C}_{2002}^2 + \mathrm{C}_{2002}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2002}^{2001} + \mathrm{C}_{2002}^{2002}$. (1)

Cho $x = -1$ và $n = 1001$ ta được $0 = \mathrm{C}_{2002}^0 - \mathrm{C}_{2002}^1 + \mathrm{C}_{2002}^2 - \mathrm{C}_{2002}^3 + \cdots - \mathrm{C}_{2002}^{2001} + \mathrm{C}_{2002}^{2002}$. (2)

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế

$$\begin{aligned}
&2^{2002} = 2\mathrm{C}_{2002}^{1} + 2\mathrm{C}_{2002}^{3} + \cdots + 2\mathrm{C}_{2002}^{2001}\\
\Rightarrow &2^{2001} = \mathrm{C}_{2002}^{1} + \mathrm{C}_{2002}^{3} + \cdots + \mathrm{C}_{2002}^{2001}\\
\Rightarrow &S \cdot 2002! = 2^{2001}\\
\Rightarrow &S = \frac{2^{2001}}{2002!}.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{2^{2001}}{2002!}$. □

DẠNG 0.7. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng (Loại không cho giả thiết)

Phương pháp

1. *Khai triển*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$$
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

2. *Số hạng tổng quát thứ $(k+1)$ là*

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$$
$$T_{k+1} = \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

3. *Chọn k ứng với số hạng cần tìm. Suy ra số hạng hoặc hệ số của số hạng đó.*

!

1. *Nếu biểu thức là một đa thức thì ta đưa về dạng nhị thức $(a+b)^n$; $(a-b)^n$ và khai triển từng phần một.*
2. *Khai triển theo thứ tự bậc tăng dần hoặc giảm dần.*
3. *Chúng ta lưu ý đến số hạng cần tìm, không cần thiết phải khai triển tất cả các hạng tử.*
4. *Trong khai triển $(a+b)^n$; $(a-b)^n$ có $n+1$ số hạng.*
5. *Tổng số mũ của a và b luôn bằng n.*

Bài 155. Tìm hệ số của hạng tử thứ 4 trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$. **ĐS:** 120.

Lời giải.

Ta có $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k x^{10-k} \left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k x^{10-2k}$.

$\Rightarrow$ Hệ số của hạng tử thứ 4 là $\mathrm{C}_{10}^3 = 120$. □

Bài 156. Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$. **ĐS:** 9880.

Lời giải.

Ta có $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{40} = \displaystyle\sum_{k=0}^{40} \mathrm{C}_{40}^k x^{40-k} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} \mathrm{C}_{40}^k x^{40-3k}$.

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{31} trong khai triển là $\mathrm{C}_{40}^3 = 9880$. □

Bài 157. Xác định hệ số thứ nhất, thứ năm, thứ mười trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$.

Lời giải.
Ta biết rằng trong khai triển $(a+b)^n$ ở vế phải có $n+1$ hạng tử. Do đó

— Hệ số thứ nhất là $\mathrm{C}_n^0=1$.

— Hệ số thứ năm là $\mathrm{C}_n^4=\dfrac{n!}{4!(n-4)!}=\dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$.

— Hệ số thứ mười là $\mathrm{C}_n^9=\dfrac{n!}{9!(n-9)!}=\dfrac{(n-8)(n-7)\cdots(n-1)n}{362880}$.

□

Bài 158. Tìm hạng tử chứa x^2 của khai triển $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^7$. **ĐS:** $35x^2$.

Lời giải.
Hạng tử thứ $k+1$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_7^k\left(\sqrt[3]{x^{-2}}\right)^{7-k}x^k=\mathrm{C}_7^k x^{\frac{2(k-7)}{3}}x^k=\mathrm{C}_7^k x^{\frac{5k-14}{3}}$.

Nếu hạng tử T_{k+1} chứa x^2 thì $\dfrac{5k-14}{3}=2\Leftrightarrow k=4$.

Vậy hạng tử cần tìm là hạng tử thứ năm $T_5=\mathrm{C}_7^4x^2=35x^2$. □

Bài 159. Cho khai triển $\left(\dfrac{3}{4^3}\sqrt[3]{a^2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$. Hãy tìm xem hạng tử thứ mấy chứa a^7? **ĐS:** Hạng tử thứ bảy.

Lời giải.
Gọi số hạng thứ $k+1$ là
$$T_{k+1}=\mathrm{C}_{12}^k\left(\frac{3}{4^3}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^k=\mathrm{C}_{12}^k\left(\frac{3}{4^3}\right)^{12-k}a^{\frac{24-2k}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^k a^{\frac{k}{2}}$$
$$=\mathrm{C}_{12}^k\left(\frac{3}{4^3}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k a^{\frac{24-2k}{3}+\frac{k}{2}}=\mathrm{C}_{12}^k\left(\frac{3}{4^3}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k a^{-\frac{k}{6}+8}.$$

Hạng tử T_{k+1} chứa a^7 nếu $-\dfrac{k}{6}+8=7\Leftrightarrow k=6$.

Vậy hạng tử cần tìm là hạng tử thứ bảy $T_7=\mathrm{C}_{12}^6\left(\dfrac{3}{4^3}\right)^6\left(\dfrac{2}{3}\right)^6a^7=924\cdot 2^{-30}a^7$. □

Bài 160. Tìm hạng tử không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{15}$. **ĐS:** 3003.

Lời giải.
Các hạng tử của khai triển có dạng $\mathrm{C}_{15}^k\left(x^2\right)^{15-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=\mathrm{C}_{15}^k\dfrac{x^{30-2k}}{x^k}=\mathrm{C}_{15}^kx^{30-3k}$.

Hạng tử không chứa x khi $30-3k=0\Leftrightarrow k=10$.

Vậy hạng tử cần tìm là $\mathrm{C}_{15}^{10}=3003$. □

Bài 161. Trong khai triển $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}\right)^{12}$, hãy tìm hạng tử độc lập với x. **ĐS:** 924.

Lời giải.
Hạng tử thứ $k+1$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_{12}^k\left(\dfrac{x}{3}\right)^{12-k}\left(\dfrac{3}{x}\right)^k=\mathrm{C}_{12}^k\left(\dfrac{x}{3}\right)^{12-2k}$.

Nếu T_{k+1} độc lập đối với x thì $12-2k=0\Leftrightarrow k=6$.

Vậy hạng tử độc lập với x là hạng tử thứ bảy $\mathrm{C}_{12}^6=924$. □

Bài 162. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Newton của nhị thức $\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)^{12}$. **ĐS:** 495.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $\mathrm{C}_{12}^{k}\left(x^2\right)^{12-k}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)^{k}=\mathrm{C}_{12}^{k}\dfrac{x^{24-2k}}{x^{4k}}=\mathrm{C}_{12}^{k}x^{24-6k}$.

Số hạng này không chứa x khi $24-6k=0 \Leftrightarrow k=4$.
Vậy số hạng không chứa x là số hạng thứ năm và có hệ số là $\mathrm{C}_{12}^{4}=495$. □

Bài 163. Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(x+y)^{25}$. **ĐS:** 5200300.

Lời giải.
Ta có $(x+y)^{25}=\mathrm{C}_{25}^{0}x^{25}+\mathrm{C}_{25}^{1}x^{24}y+\cdots+\mathrm{C}_{25}^{13}x^{12}y^{13}+\cdots$.
Vậy hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(x+y)^{25}$ là $\mathrm{C}_{25}^{13}=5200300$. □

Bài 164. Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(2x-3y)^{25}$. **ĐS:** $-\dfrac{25!\cdot 2^{12}\cdot 3^{13}}{13!\cdot 12!}$.

Lời giải.
Ta có $(2x-3y)^{25}=\mathrm{C}_{25}^{0}(2x)^{25}+\mathrm{C}_{25}^{1}(2x)^{24}(-3y)+\cdots+\mathrm{C}_{25}^{13}(2x)^{12}(-3y)^{13}+\cdots$.
Vậy hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(2x-3y)^{25}$ là $\mathrm{C}_{25}^{13}2^{12}\cdot(-3)^{13}=-\dfrac{25!\cdot 2^{12}\cdot 3^{13}}{13!\cdot 12!}$. □

Bài 165. Tìm hạng tử đứng giữa của khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$. **ĐS:** $252\sqrt[3]{x^2}$.

Lời giải.

Ta biết rằng trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$ có tất cả 11 số hạng.

Số hạng đứng giữa là số hạng thứ 6: $\mathrm{C}_{10}^{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{5}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{5}=\mathrm{C}_{10}^{5}\dfrac{1}{x}\cdot x\sqrt[3]{x^2}=252\sqrt[3]{x^2}$. □

Bài 166. Tìm số hạng ở giữa của khai triển

① $\left(x^3+xy\right)^{30}$. **ĐS:** $\mathrm{C}_{30}^{15}x^{60}y^{15}$. ② $\left(x^3-xy\right)^{15}$. **ĐS:** $-6435x^{31}y^{7}$; $6435x^{29}y^{8}$.

Lời giải.

① Khai triển $\left(x^3+xy\right)^{30}$ có 31 số hạng, số hạng ở giữa là số hạng thứ 16

$$T_{16}=\mathrm{C}_{30}^{15}\left(x^3\right)^{15}(xy)^{15}=\mathrm{C}_{30}^{15}x^{60}y^{15}.$$

② Khai triển $\left(x^3-xy\right)^{15}$ có 16 số hạng và có hai số hạng ở giữa là các số hạng thứ tám và thứ chín

$$T_8=\mathrm{C}_{15}^{7}\left(x^3\right)^{8}(-xy)^{7}=-6435x^{31}y^{7}.$$
$$T_9=\mathrm{C}_{15}^{8}\left(x^3\right)^{7}(-xy)^{8}=6435x^{29}y^{8}.$$

□

Bài 167. Tìm hạng tử của khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{9}$ là một số nguyên. **ĐS:** Hạng tử thứ tư, thứ mười.

Lời giải.
Hạng tử thứ $k+1$ của khai triển là $T_{k+1}=\mathrm{C}_{9}^{k}\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{k}=\mathrm{C}_{9}^{k}3^{\frac{9-k}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{3}}\ (0\le k\le 9)$.
Hạng tử này nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{9-k}{2}$ và $\dfrac{k}{3}$ là các số nguyên.

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $\dfrac{9-k}{2}$ nguyên khi $k = 3$ hoặc $k = 9$.
Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $\dfrac{k}{3}$ nguyên khi $k = 3n$ với $n \in \mathbb{N}$.
Vậy $\dfrac{9-k}{2}$ và $\dfrac{k}{3}$ đều nguyên thì chỉ có hai giá trị là $k = 3$ và $k = 9$.

— Nếu $k = 3$ thì hạng tử cần tìm là hạng tử thứ tư và có trị số là $\mathrm{C}_9^3\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 4536$.

— Nếu $k = 9$ thì hạng tử cần tìm là hạng tử thứ mười và có trị số là $\mathrm{C}_9^9\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 8$.

□

Bài 168. Tìm số hạng của khai triển $\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6$ là số nguyên. **ĐS:** Hạng tử thứ nhất, thứ ba, thứ năm, thứ bảy.

Lời giải.
Hạng tử thứ $k+1$ của khai triển là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_6^k\left(\sqrt{3}\right)^{6-k}\left(-\sqrt{15}\right)^k = (-1)^k\,\mathrm{C}_6^k 3^{\frac{6-k}{2}}\cdot 15^{\frac{k}{2}} = (-1)^k\,\mathrm{C}_6^k 3^3\cdot 5^{\frac{k}{2}}\ (0 \le k \le 6).$$

T_{k+1} là một số nguyên khi $5^{\frac{k}{2}}$ nguyên $\Leftrightarrow k$ là bội số của 2.
Vì $k \in \mathbb{N}$ và $0 \le k \le 6$ nên $k \in \{0, 2, 4, 6\}$.

— Với $k = 0$ ta có $T_1 = (-1)^0\,\mathrm{C}_6^0 3^3\cdot 5^0 = 27$.

— Với $k = 2$ ta có $T_3 = (-1)^2\,\mathrm{C}_6^2 3^3\cdot 5^1 = 2025$.

— Với $k = 4$ ta có $T_5 = (-1)^4\,\mathrm{C}_6^4 3^3\cdot 5^2 = 10125$.

— Với $k = 6$ ta có $T_7 = (-1)^6\,\mathrm{C}_6^6 3^3\cdot 5^3 = 3375$.

□

Bài 169. Đa thức $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 20(1+x)^{20}$ được viết dưới dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$. Tìm a_{15}. **ĐS:** 400995.

Lời giải.
Ta có $15(1+x)^{15} = 15\left(\mathrm{C}_{15}^0 + \mathrm{C}_{15}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{15}^{15}x^{15}\right)$.
$16(1+x)^{16} = 16\left(\mathrm{C}_{16}^0 + \mathrm{C}_{16}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{16}^{15}x^{15} + \mathrm{C}_{16}^{16}x^{16}\right)$.
$17(1+x)^{17} = 17\left(\mathrm{C}_{17}^0 + \mathrm{C}_{17}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{17}^{15}x^{15} + \cdots\right)$.
$18(1+x)^{18} = 18\left(\mathrm{C}_{18}^0 + \mathrm{C}_{18}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{18}^{15}x^{15} + \cdots\right)$.
$19(1+x)^{19} = 19\left(\mathrm{C}_{19}^0 + \mathrm{C}_{19}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{19}^{15}x^{15} + \cdots\right)$.
$20(1+x)^{20} = 20\left(\mathrm{C}_{20}^0 + \mathrm{C}_{20}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{15}x^{15} + \cdots\right)$.
Vậy $a_{15} = 15\mathrm{C}_{15}^{15} + 16\mathrm{C}_{16}^{15} + 17\mathrm{C}_{17}^{15} + 18\mathrm{C}_{18}^{15} + 19\mathrm{C}_{19}^{15} + 20\mathrm{C}_{20}^{15} = 400995$. □

Bài 170. Khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng từ biểu thức $(1+x)^9 + (1+x)^{10} + \cdots + (1+x)^{14}$ ta sẽ được đa thức $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{14}x^{14}$. Hãy xác định hệ số A_9. **ĐS:** 3003.

Lời giải.
Ta có $(1+x)^9 = \mathrm{C}_9^0 + \mathrm{C}_9^1x + \cdots + \mathrm{C}_9^9x^9$.
$(1+x)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{10}^9x^9 + \mathrm{C}_{10}^{10}x^{10}$.
$(1+x)^{11} = \mathrm{C}_{11}^0 + \mathrm{C}_{11}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{11}^9x^9 + \cdots$.
$(1+x)^{12} = \mathrm{C}_{12}^0 + \mathrm{C}_{12}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{12}^9x^9 + \cdots$.
$(1+x)^{13} = \mathrm{C}_{13}^0 + \mathrm{C}_{13}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{13}^9x^9 + \cdots$.
$(1+x)^{14} = \mathrm{C}_{14}^0 + \mathrm{C}_{14}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{14}^9x^9 + \cdots$.
Vậy hệ số $A_9 = \mathrm{C}_9^9 + \mathrm{C}_{10}^9 + \mathrm{C}_{11}^9 + \mathrm{C}_{12}^9 + \mathrm{C}_{13}^9 + \mathrm{C}_{14}^9 = 3003$. □

Bài 171. Khai triển $(3+x)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$.

① Tính hệ số a_{46}. **ĐS:** 18654300. ② Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50}$. **ĐS:** 4^{50}.

Lời giải.

① Ta có $(3+x)^{50} = \mathrm{C}_{50}^0 3^{50} + \mathrm{C}_{50}^1 3^{49}x + \cdots + \mathrm{C}_{50}^{46}3^4x^{46} + \cdots$.
Vậy hệ số $a_{46} = \mathrm{C}_{50}^{46}3^4 = 18654300$.

② Ta có $S = f(1) = (3+1)^{50} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 4^{50}$.
Vậy $S = 4^{50}$.

□

Bài 172. Cho đa thức $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 15(1+x)^{15}$ được viết dưới dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{15}x^{15}$. Tìm hệ số a_{10}. **ĐS:** 63700.

Lời giải.

Ta có $10(1+x)^{10} = 10\left(\mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10}x^{10}\right)$.
$11(1+x)^{11} = 11\left(\mathrm{C}_{11}^0 + \mathrm{C}_{11}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{11}^{10}x^{10} + \mathrm{C}_{11}^{11}x^{11}\right)$.
$12(1+x)^{12} = 12\left(\mathrm{C}_{12}^0 + \mathrm{C}_{12}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{12}^{10}x^{10} + \cdots\right)$.
$13(1+x)^{13} = 13\left(\mathrm{C}_{13}^0 + \mathrm{C}_{13}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{13}^{10}x^{10} + \cdots\right)$.
$14(1+x)^{14} = 14\left(\mathrm{C}_{14}^0 + \mathrm{C}_{14}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{14}^{10}x^{10} + \cdots\right)$.
$15(1+x)^{15} = 15\left(\mathrm{C}_{15}^0 + \mathrm{C}_{15}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{15}^{10}x^{10} + \cdots\right)$.
Vậy hệ số $a_{10} = 10\mathrm{C}_{10}^{10} + 11\mathrm{C}_{11}^{10} + 12\mathrm{C}_{12}^{10} + 13\mathrm{C}_{13}^{10} + 14\mathrm{C}_{14}^{10} + 15\mathrm{C}_{15}^{10} = 63700$. □

Bài 173. Cho đa thức $P(x) = (x+1)^{10} + (x+1)^{11} + (x+1)^{12} + (x+1)^{13} + (x+1)^{14}$ được viết dưới dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{14}x^{14}$. Tìm hệ số a_7. **ĐS:** 6390.

Lời giải.

Ta có $(x+1)^{10} = (1+x)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{10}^7x^7 + \cdots$.
$(x+1)^{11} = (1+x)^{11} = \mathrm{C}_{11}^0 + \mathrm{C}_{11}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{11}^7x^7 + \cdots$.
$(x+1)^{12} = (1+x)^{12} = \mathrm{C}_{12}^0 + \mathrm{C}_{12}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{12}^7x^7 + \cdots$.
$(x+1)^{13} = (1+x)^{13} = \mathrm{C}_{13}^0 + \mathrm{C}_{13}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{13}^7x^7 + \cdots$.
$(x+1)^{14} = (1+x)^{14} = \mathrm{C}_{14}^0 + \mathrm{C}_{14}^1x + \cdots + \mathrm{C}_{14}^7x^7 + \cdots$.
Vậy hệ số $a_7 = \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{11}^7 + \mathrm{C}_{12}^7 + \mathrm{C}_{13}^7 + \mathrm{C}_{14}^7 = 6390$. □

Bài 174. Khai triển: $f(x) = (x-2)^{80} = a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a^{80}x^{80}$.

① Tính hệ số a_{78}. **ĐS:** $a_{78} = \mathrm{C}_{80}^2 \cdot 2^2 = 12640$

② Tính $S = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 80a_{80}$. **ĐS:** -80

Lời giải.

① Ta có $(x-2)^{80} = \mathrm{C}_{80}^0x^{80} - \mathrm{C}_{80}^1x^{79}\cdot 2 + \mathrm{C}_{80}^2x^{78}\cdot 2^2 + \cdots$
Hệ số $a_{78} = \mathrm{C}_{80}^2 \cdot 2^2 = 12640$.

② *Cách 1:* Ta chứng minh được $k\cdot \mathrm{C}_n^k = n\cdot \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ $(*)$.

Có $(x-2)^{80} = (2-x)^{80} = \sum\limits_{k=0}^{80}(-1)^k\mathrm{C}_{80}^k \cdot 2^{80-k}\cdot x^k \Rightarrow a_k = (-1)^k\mathrm{C}_{80}^k\cdot 2^{80-k}$.

Vậy

$$\begin{aligned} S &= 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 80a_{80} \\ &= \sum_{k=1}^{80}(-1)^k\cdot k\cdot \mathrm{C}_{80}^k\cdot 2^{80-k}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{80}(-1)\cdot(-1)^{k-1}\cdot 80\cdot \mathrm{C}_{79}^{k-1}\cdot 2^{80-k}, \quad \text{(theo hệ thức (*))}\\
&= -80(1-2)^{79} = -80.
\end{aligned}
$$

Cách 2
$f(x) = (x-2)^{80} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a^{80}x^{80}$.
Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$f'(x) = 80(x-2)^{79} = a_1 + +2a_2x + \cdots + 80a_{80}x^{79}.$$

Cho $x = 1$ ta có

$$f'(1) = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 80a_{80} = 80\cdot(-1)^{79} = -80.$$

□

Bài 175. Tìm hệ số của một hạng tử chứa x^4 trong khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$. **ĐS:** 8085

Lời giải.
Ta có

$$
\begin{aligned}
\left(1+2x+3x^2\right)^{10} &= \left[(1+2x)+3x^2\right]^{10}\\
&= \mathrm{C}_{10}^0(1+2x)^{10} + \mathrm{C}_{10}^1(1+2x)^9\cdot 3x^2 + \mathrm{C}_{10}^2(1+2x)^8\cdot 9x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

Các hạng tử sau không chứa x^4.
Ta có

$$+\ \mathrm{C}_{10}^0(1+2x)^{10} = \mathrm{C}_{10}^0(\mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_9^1\cdot 2x + \mathrm{C}_9^2\cdot 4x^2 + \cdots)$$

$$+\ 3x^2\mathrm{C}_{10}^1(1+2x)^9 = 3x^2\mathrm{C}_{10}^1\left(\mathrm{C}_9^0 + \mathrm{C}_9^1\cdot 2x + \mathrm{C}_9^2\cdot 4x^2 + \cdots\right)$$

$$+\ 9x^4\mathrm{C}_{10}^2(1+2x)^8 = 9x^4\mathrm{C}_{10}^2\left(\mathrm{C}_{10}^0 + \cdots\right).$$

Vậy hệ số của hạng tử chứa x^4 là

$$\mathrm{C}_{10}^0\cdot \mathrm{C}_{10}^4\cdot 2^4 + 3\mathrm{C}_{10}^1\cdot \mathrm{C}_9^2\cdot 4 + 9\mathrm{C}_{10}^2\cdot \mathrm{C}_{10}^0 = 8085.$$

□

Bài 176. Khai triển $(1+x+x^2)^{1996} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{3992}x^{3992}$.

1. Tính: $A = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{3992}$. **ĐS:** 1
2. Chứng minh rằng: $S = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2^2 + \cdots + 2^{3992}a_{3992}$ chia hết cho 2401.

Lời giải.

1. Đặt $f(x) = (1+x+x^2)^{1996} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{3992}x^{3992}$.
Ta có $f(-1) = (1-1+1)^{1996} = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{3992}$
hay $A = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{3992} = 1$.

2. Cho $x = 2$ ta được
$f(2) = (1+2+4)^{1996} = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2^2 + \cdots + 2^{3992}a_{3992} = 7^{1996}$.
Ta lại có $2401 = 7^4$,
do đó 7^{1996} chia hết cho 7^4
hay $S = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2^2 + \cdots + 2^{3992}a_{3992}$ chia hết cho 2401.

□

Bài 177. Khai triển $(1+x+x^2+x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{15}x^{15}$.

1. Tính hệ số a_{10}. **ĐS:** 101

2. Tính tổng
   - $A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15}$.
   - $B = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15}$.

ĐS: $A = 1024, B = 0$

Lời giải.

1. Ta có $(1+x+x^2+x^3)^5 = \left[(1+x)+x^2(1+x)\right]^2 = (1+x)^5(1+x^2)^5$. Mà

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= \mathrm{C}_5^0 + \mathrm{C}_5^1 x + \cdots + \mathrm{C}_5^5 x^5.\\ (1+x^2)^5 &= \mathrm{C}_5^0 + \mathrm{C}_5^1 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_5^5 x^{10}.\end{aligned}$$

Suy ra, hệ số $a_{10} = \mathrm{C}_5^0 \cdot \mathrm{C}_5^5 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_5^4 + \mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 101$.

2. Vì $f(x) = (1+x+x^2+x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{15}x^{15}$ nên
   - $A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} = 4^5 = 1024$.
   - $B = f(-1) = \left[1-1+(-1)^2+(-1)^3\right]^5 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \Rightarrow B = 0$.

□

Bài 178. Xác định hệ số của x^n trong khai triển

$$(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n)^2$$

ĐS: $\dfrac{11n+n^3}{6}$

Lời giải.
Hệ số của x^n là

$$\begin{aligned}& 1\cdot n + 1(n-1) + 2(n-2) + \cdots + n\cdot 1\\ = {} & n[2+(1+2+\cdots+n)] - \left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)\\ = {} & n\left[2+\frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{11n+n^3}{6}.\end{aligned}$$

Lưu ý: cần chứng minh hai công thức sau

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)\\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)\end{aligned}$$

Công thức (1) chứng minh dễ dàng. Thậy vậy
Đặt $S_1 = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$,
suy ra

$$\begin{aligned}2S_1 &= 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + \cdots (n-1)\cdot 2 + n\cdot 2\\ &= 1(2-0) + 2(3-1) + 3(4-2) + \cdots + (n-1)[n-(n-2)] + n[(n+1)-(n-1)]\\ \Rightarrow S_1 &= \frac{n(n+1}{2}.\end{aligned}$$

Để chứng minh công thức (2), trước hết ta chứng minh công thức

$$S_2 = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\\
\Rightarrow 3S_2 &= 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1)\cdot 3\\
&= 1\cdot 2(3-0) + 2\cdot 3(4-1) + \cdots + n\cdot(n+1)[(n+2)-(n-1)]\\
&= 1\cdot 2\cdot 3 - 0\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\\
&= n(n+1)(n+2)\\
\Rightarrow S_2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh công thức (2).
Đặt $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$.

$$\begin{aligned}
S &= 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \cdots + (n-1)(n-1) + n[(n+1)-1]\\
&= [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n] - (1+2+3+\cdots+n)\\
&= S_2 - S_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= n(n+1)\left(\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Vậy $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (đpcm). □

Bài 179. Tìm hệ số của x^2 khi khai triển và rút gọn: $\left(2+\sqrt{x}-3x^2\right)^5$. **ĐS:** -230

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
\left(2+\sqrt{x}-3x^2\right)^5 &= \left[2+\left(\sqrt{x}-3x^2\right)\right]^5\\
&= \sum_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k 2^{5-k}\left(\sqrt{x}-3x^2\right)^k\\
&= \sum_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k 2^{5-k}\cdot \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i \left(\sqrt{x}\right)^{k-i}\left(-3x^2\right)^i\\
&= \sum_{k=0}^{5}\sum_{i=0}^{k} (-3)^i\cdot 2^{5-k}\cdot \mathrm{C}_5^k\cdot \mathrm{C}_k^i\cdot x^{\frac{k+3i}{2}}.
\end{aligned}$$

Chọn $\begin{cases} i,k\in\mathbb{N}\\ 0\le i\le k\le 5\\ \dfrac{k+3i}{2}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i,k\in\mathbb{N}\\ 0\le i\le k\le 5\\ k+3i=4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} i=0\\ k=4\end{cases}\\ \begin{cases} i=1\\ k=1.\end{cases}\end{array}\right.$

- Với $\begin{cases} i=0\\ k=4\end{cases}$ ta được: $(-3)^0\cdot 2^{5-4}\cdot \mathrm{C}_5^4\cdot \mathrm{C}_4^0\cdot x^2 = 10x^2$.
- Với $\begin{cases} i=1\\ k=1\end{cases}$ ta được: $(-3)^1\cdot 2^4\cdot \mathrm{C}_5^1\cdot \mathrm{C}_1^1\cdot x^2 = -240x^2$.

Suy ra số hạng chứa x^2 là $10x^2 - 240x^2 = -230x^2$.
Vậy hệ số của x^2 là -230.

□

Bài 180. Tìm số hạng chứa x và y với số mũ của chúng đều là số nguyên dương khi khai triển

$$\left(\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt{xy}\right)^{12}.$$

ĐS: $C_{12}^0 x^4y^8$; $C_{12}^6 x^5y^7$; $C_{12}^{12} x^6y^6$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt{xy}\right)^{12} &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\sqrt[3]{xy^2}\right)^{12-k}\cdot\left(\sqrt{xy}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(xy^2\right)^{\frac{12-k}{3}}\cdot (xy)^{\frac{k}{2}}\\ &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k\cdot x^{\frac{12-k}{3}}\cdot x^{\frac{k}{2}}\cdot y^{\frac{2(12-k)}{3}}\cdot y^{\frac{k}{2}}\\ &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k\cdot x^{\frac{24+k}{6}}\cdot y^{\frac{48-k}{6}}.\end{aligned}$$

Chọn k thỏa

$$\begin{cases} k\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le 12\\ \dfrac{24+k}{6}\in\mathbb{Z}^+\\ \dfrac{48-k}{6}\in\mathbb{Z}^+\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0\\ k=6\\ k=12.\end{array}\right.$$

Vậy các số hạng cần tìm là $C_{12}^0 x^4y^8$; $C_{12}^6 x^5y^7$; $C_{12}^{12} x^6y^6$. □

Bài 181. Xác định hệ số của x^6y^2 trong khai triển $\left(\sqrt{xy}+\dfrac{x}{y}\right)^{10}$. **ĐS:** $C_{10}^2 = 45$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{xy}+\frac{x}{y}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\cdot (xy)^{\frac{10-k}{2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\cdot x^{\frac{10+k}{2}}\cdot y^{\frac{10-3k}{2}}.\end{aligned}$$

Chọn k sao cho $\begin{cases} 0\le k\le 10\\ k\in\mathbb{N}\\ \dfrac{10+k}{2}=6\\ \dfrac{10-3k}{2}=2\end{cases} \Leftrightarrow k=2.$

Vậy hệ số của x^6y^2 là $C_{10}^2 = 45$. □

Bài 182. Trong khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^{124}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên? **ĐS:** 63

Lời giải.
Ta có

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^{124} = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^k\left(\sqrt{3}\right)^{124-k}\left(\sqrt{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^k\cdot 3^{\frac{124-k}{2}}\cdot 5^{\frac{k}{2}}.$$

Chọn k sao cho $\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le 124 \\ \dfrac{124-k}{2} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{k}{2} \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le 124 \\ 62 - \dfrac{k}{2} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{k}{2} \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le 124 \\ k \text{ chẵn} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \mathbb{N} \\ k = 2t \\ 0 \le t \le 62. \end{cases}$

Vậy có 63 số hạng nguyên.

□

DẠNG 0.8. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng

— *Bài toán thường gặp*

Cho khai triển $(a+bx)^n$, $\left(ax^p + \dfrac{\beta}{x^q}\right)^n$, ... *trong đó a, b, c, q là hằng số.*

Cho biết một vài số hạng trong tổng thỏa mãn một đẳng thức nào đó. Tìm n, tìm hệ số thứ k nào đó trong khai triển.

— *Phương pháp giải*

- *Dựa vào đẳng thức đã cho, giải phương trình tìm n.*
- *Dựa vào dạng 7 để tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng.*

Bài 183. Cho khai triển $\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n - \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \dfrac{1}{8}\mathrm{C}_n^2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n$. Tìm số hạng đứng chính giữa trong khai triển biết số hạng thứ ba bằng 5. **ĐS:** $-\dfrac{28}{27}x^5$

Lời giải.

Hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển trên là $\dfrac{1}{9}\mathrm{C}_n^2$.

Theo đề cho ta có $\dfrac{1}{9}\mathrm{C}_n^2 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{9 \cdot 2!(n-2)!} = 5 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -9 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Khi $n = 10$ thì khai triển $\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^{10}$ có 11 số hạng

$\Rightarrow$ số hạng chính giữa của khai triển trên là số hạng thứ 6

$\Rightarrow T_6 = \mathrm{C}_{10}^5 x^5 \left(-\dfrac{1}{3}\right)^5 = -\dfrac{28}{27}x^5$.

□

Bài 184. Cho khai triển $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^n = \mathrm{C}_n^0 \left(x^3\right)^n + \mathrm{C}_n^0 1 \left(x^3\right)^{n-1} + \ldots + \mathrm{C}_n^n \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^n$. Biết tổng ba hệ số của ba số hạng đầu tiên của khai triển trên là 33. Tìm hệ số của x^2. **ĐS:** 24

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 = 33 \Leftrightarrow 1 + 2n + 2n(n-1) = 33 \Leftrightarrow n^2 = 16 \Leftrightarrow n = 4$ (vì $n \in \mathbb{N}^*$).

Với $n = 4$ thì $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \mathrm{C}_4^k \left(x^3\right)^{4-k} \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{4} 2^k \mathrm{C}_4^k x^{12-5k}$.

Chọn $12 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của x^2 là $\mathrm{C}_4^2 \cdot 2^2 = 24$. □

Bài 185. Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12}. **ĐS:** 210

Lời giải.

Ta có $(1+x^2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{2k}$.

Cho $x = 1$ suy ra tổng các hệ số trong khai triển là $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Khi đó $(1 + x^2)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k x^{2k}$.

Chọn $2k = 12 \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow$ hệ số của x^{12} là $\mathrm{C}_{10}^6 = 210$. □

Bài 186. Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển $\left(x \cdot \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}\right)^n$ biết $\mathrm{C}_n^n + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 79$.

ĐS: 792

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^n + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12\,(\text{thỏa mãn}) \\ n = -13\,(\text{loại}). \end{array}\right.$

Khi đó

$$\begin{aligned} \left(x \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}\right)^{12} &= \sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k \left(x\sqrt[3]{x}\right)^{12-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}\right)^x \\ &= \sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k x^{\frac{4(12-k)}{3}} \cdot x^{-\frac{28k}{5}} \\ &= \sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k \cdot x^{\frac{240-48k}{15}}. \end{aligned}$$

Chọn $\dfrac{240 - 48k}{15} = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng độc lập với x là $\mathrm{C}_{12}^5 = 792$. □

Bài 187. Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết $\mathrm{C}_{n+4}^{n+1} - \mathrm{C}_{n+3}^n = 7(n+3)$. **ĐS:** 495

Lời giải.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_{n+4}^{n+1} - \mathrm{C}_{n+3}^n = 7(n+3) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!} - \frac{(n+3)!}{3!n!} = 7(n+3) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = 7(n+3) \\ \Leftrightarrow\ & n = 12. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12} &= \sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k \left(\frac{1}{x^3}\right)^{12-k} \cdot \left(\sqrt{x^5}\right)^k \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k x^{\frac{11k-72}{2}}. \end{aligned}$$

Chọn $\dfrac{11k - 72}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy hệ số của x^8 là $\mathrm{C}_{12}^8 = 495$. □

Bài 188. Cho khai triển nhị thức

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = \mathrm{C}_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + \mathrm{C}_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} \left(2^{-\frac{x}{3}}\right) + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right) \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1} + \mathrm{C}_n^n \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $\mathrm{C}_n^3 = 5\mathrm{C}_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$, tìm x và n.
ĐS: $n = 7$ và $x = 4$

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^3 = 5\mathrm{C}_n^1 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 5n \Leftrightarrow (n-2)(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7\,(\text{thỏa mãn}) \\ n = -4\,(\text{loại}). \end{array}\right.$

Từ giả thiết suy ra $\mathrm{C}_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4 \cdot \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 20 \cdot 7 \Leftrightarrow 35 \cdot 2^{2x-2} \cdot 2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^2 \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy $n = 7$ và $x = 4$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 189. Tìm số nguyên x sao cho hạng tử thứ năm của khai triển $\left(\dfrac{4}{\sqrt[4-x]{4}} + 2\sqrt[x]{2^{-1}}\right)^6$ là 240. **ĐS:** $x = 2$

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 4$.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}} + 2\sqrt[x]{2^{-1}}\right)^6 &= \left(\frac{2^2}{2^{\frac{2}{4-x}}} + 2 \cdot 2^{-\frac{1}{x}}\right)^6 \\ &= \left(2^{2-\frac{2}{4-x}} + 2^{1-\frac{1}{x}}\right)^6 \\ &= \left(2^{\frac{2(3-x)}{4-x}} + 2^{\frac{x-1}{x}}\right)^6.\end{aligned}$$

Theo giả thiết hạng tử thứ năm của khai triển trên là 240 nên

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^{\left[\frac{2(3-x)}{4-x}\right]^2} \cdot 2^{\left(\frac{x-1}{x}\right)^4} = 240 \Leftrightarrow 15 \cdot 2^{\left[\frac{4(3-x)}{4-x} + \frac{4(x-1)}{x}\right]} = 15 \cdot 2^4 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{3-x}{4-x} + \frac{x-1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.\end{aligned}$$

Vậy $x = 2$ là số nguyên dương cần tìm. □

Bài 190. Tìm giá trị của x sao cho hạng tử thứ ba của khai triển $\left(x + x^{\log x}\right)^5$ là 1000000. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^5 \end{array}\right.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_5^2 x^3\left(x^{\log x}\right)^2 = 1000000 \\ \Leftrightarrow\ & x^{3+2\log x} = 10^5 \Leftrightarrow (3 + 2\log x) \cdot \log x = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 2\log^2 x + 3\log x - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 10^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10^5}} = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^5. \end{array}\right.\end{aligned}$$

□

Bài 191. Tìm số thực x cho biết hạng tử thứ tư trong khai triển $\left(\sqrt{x^{\frac{x}{(\log x+1)}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$ là 200. **ĐS:**

$$\left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} \end{array}\right.$$

Lời giải.
Điều kiện $x > 0$.
Hạng tử thứ tư trong khai triển trên là

$$\begin{aligned} C_6^3\left(\sqrt{x^{\frac{1}{(\log x+1)}}}\right)^3\cdot\left(\sqrt[12]{x}\right)^3 &= 20\cdot\left(x^{\frac{1}{(\log x+1)}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}} \\ &= 20\cdot\left(x^{\frac{3}{2(\log x+1)}}\right)\cdot x^{\frac{1}{4}} \\ &= 20\cdot x^{\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{2(\log x+1)}\right]}. \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} & 20\cdot x^{\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{2(\log x+1)}\right]} = 200 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2(\log x+1)}\right)\log x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{\log x}{4}+\frac{3\log x}{2(\log x+1)}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log^2 x + 3\log x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = -4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 10$ và $x = 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4}$. □

Bài 192. Tìm giá trị của x cho biết hạng tử thứ 6 của khai triển $\left(2^{\log_2\sqrt{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5}\log_2(3^{x-1}+1)}\right)^7$ là 84.
ĐS: $x = 1$ hoặc $x = 2$

Lời giải.
Hạng tử thứ sau trong khai triển trên là

$$\begin{aligned} C_7^5\cdot\left(2^{\log_2\sqrt{9^{x-1}+7}}\right)^2\cdot\left[2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right]^5 &= C_7^5\cdot 2^{\log_2\sqrt{9^{x-1}+7}}\cdot 2^{-\log_2\left(3^{x-1}+1\right)} \\ &= 21\cdot 2^{\log_2\frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1}} \\ &= 21\cdot\frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết suy ra $21\cdot\dfrac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1} = 84 \Leftrightarrow 9^{x-1}+7 = 4\cdot 3^{x-1}+4 \Leftrightarrow 3^{2(x-1)} - 4\cdot 3^{x-1} + 3 = 0\,(*)$.
Đặt $t = 3^{x-1}$ $(t > 0)$.
Phương trình $(*)$ trở thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

— Với $t = 1$, ta có $3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

— Với $t = 3$, ta có $3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $x = 1$ hoặc $x = 2$ là các giá trị cần tìm. □

Bài 193. Tìm giá trị của số thực x sao cho trong khai triển $\left(\sqrt{2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ tổng các hạng tử thứ ba và năm là 135 và tổng hệ số ba hạng tử cuối là 22. **ĐS:** $x=2$ hoặc $x=-1$

Lời giải.
Tổng hệ số hạng tử cuối cùng là 22, tức là

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_m^m+\mathrm{C}_m^{m-1}+\mathrm{C}_m^{m-2}=22 \\ \Leftrightarrow\quad & 1+m+\frac{(m-1)m}{2}=22 \\ \Leftrightarrow\quad & m^2+m-42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & m=6\,(\text{thỏa mãn}) \\ & m=-7\,(\text{loại}). \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Hạng tử thứ ba của khai triển $\left(\sqrt{2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^6$ là $\mathrm{C}_6^4\left(\sqrt{2^x}\right)^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4=15\cdot 2^x\cdot\dfrac{1}{2^{2x-2}}=15\cdot 2^{-x+2}$.
Theo giả thiết $15\cdot 2^{x+1}+15\cdot 2^{-x+2}=135 \Leftrightarrow 2^{x+1}+2^{-x+2}=9 \Leftrightarrow 2^x\cdot 2+2^{-x}\cdot 2^2=9$ $(*)$.
Đặt $t=2^x$ $(t>0)$, phương trình $(*)$ trở thành $2t+\dfrac{4}{t}-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & t=4\,(\text{thỏa mãn}) \\ & t=\frac{1}{2}\,(\text{thỏa mãn}). \end{aligned}\right.$
Với $t=4$, ta có $2^x=4 \Leftrightarrow 2^x=2^2 \Leftrightarrow x=2$.
Với $t=\dfrac{1}{2}$, ta có $x^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x=2^{-1} \Leftrightarrow x=-1$.
Vậy $x=2$ hoặc $x=-1$ là hai giá trị x cần tìm. □

Bài 194. Tìm hạng tử thứ ba của khai triển $\left(\sqrt[13]{a}+\dfrac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^m$ nếu $\mathrm{C}_m^3:\mathrm{C}_m^2=4:1$. **ĐS:** $91\cdot\sqrt[13]{a^{51}}$

Lời giải.
Ta có

$$\frac{\mathrm{C}_m^3}{\mathrm{C}_m^2}=\frac{4}{1} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{m!}{3!(m-3)!}}{\dfrac{m!}{2!(m-2)!}}=4 \Leftrightarrow \frac{m-2}{3}=4 \Leftrightarrow m=14.$$

Vậy $T_3 \doteq \mathrm{C}_{14}^2(\sqrt[13]{a})^{12}\cdot\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^2=91\cdot a^{\frac{12}{13}}\cdot a^3=91\cdot a^{\frac{12}{13}+3}=91\cdot\sqrt[13]{a^{51}}$. □

Bài 195. Cho biết trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$, tổng các hệ số của các số hạng thứ nhất, hai và ba là 46. Tìm hạng tử không chứa x. **ĐS:** $\mathrm{C}_9^6=84$

Lời giải.
Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2=16 \\ \Leftrightarrow\quad & 1+n+\frac{(n-1)n}{2}=46 \\ \Leftrightarrow\quad & n^2+n-90=0 \\ \Leftrightarrow\quad & \left[\begin{aligned} & n=9\ \ (\text{nhận}) \\ & n=-10\ \ (\text{loại}). \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Vậy $n=9$ và số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$ là

$$T_{k+1}=\mathrm{C}_1^k\cdot\left(x^2\right)^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=\mathrm{C}_9^k\cdot x^{18-2k}\cdot x^k=\mathrm{C}_9^k\cdot x^{18-3k}.$$

Hạng tử này không chứa x nếu $18-3k=0 \Leftrightarrow k=6$.
Vậy hạng tử không chứa x là hạng tử thứ bảy: $T_7 = \mathrm{C}_9^6 = 84$. □

Bài 196. Tìm A_n^2 biết hạng tử thứ sáu của khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ không phụ thuộc vào x. **ĐS:** $\mathrm{A}_n^2 = 380$

Lời giải.
Hạng tử thứ sáu của khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ là

$$T_6 = \mathrm{C}_n^5 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-5} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \mathrm{C}_n^5 \cdot x^{\frac{n-5}{3}} \cdot x^{-5} = \mathrm{C}_n^5 \cdot x^{\frac{n-20}{3}}.$$

Hạng tử này không phụ thuộc vào x nếu $\dfrac{n-20}{3} = 0 \Leftrightarrow n = 20$. Lúc đó $\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{A}_{20}^2 = 380$. □

Bài 197. Trong khai triển $\left(2^x+\dfrac{1}{4^x}\right)^n$, tổng các hệ số của hạng tử thứ hai và thứ ba bằng 36. Cho biết thêm hạng tử thứ ba gấp 7 lần hạng tử thứ hai. Tìm x. **ĐS:** $x=-\frac{1}{3}$

Lời giải.
Hạng tử thứ hai của khai triển trên là $\mathrm{C}_n^1 \cdot (2^x)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{4^x}$, có hệ số là C_n^1.

Hạng tử thứ ba của khai triển trên là $\mathrm{C}_n^2 \cdot (2^x)^{n-2} \cdot \left(\dfrac{1}{4^x}\right)^2$, có hệ số là C_n^2.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 36 \quad \Leftrightarrow n + \frac{(n-1)n}{2} = 36 \\ \Leftrightarrow \quad & n^2 + n - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \ \text{(nhận)} \\ n = -9 \ \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $n=8$ và ta có khai triển $\left(2^x+\dfrac{1}{4^x}\right)^8$.

Cũng theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & 7 \cdot \mathrm{C}_n^1 \cdot (2^x)^7 \cdot \frac{1}{4^x} = \mathrm{C}_n^2 \cdot (2^x)^6 \cdot \left(\frac{1}{4^x}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 7 \cdot 8 \cdot 2^{7x} \cdot 2^{-2x} = 28 \cdot 2^{6x} \cdot 2^{-4x} \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot 2^{5x} = 2^{2x} \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $x=-\dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 198. Cho biết tổng của ba hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$ là 97. Tìm hạng tử của khai triển chứa x^4. **ĐS:** $1120x^4$

Lời giải.
Ba hạng tử đầu tiên là

$$T_1 = \mathrm{C}_n^0 (x^2)^n; T_2 = \mathrm{C}_n^1 (x^2)^{n-1} \left(-\frac{2}{x}\right); T_3 = \mathrm{C}_n^2 \left(x^2\right)^{n-2} \left(-\frac{2}{x}\right)^2.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^0 - 2\mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 = 97 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 2n + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 97 \\ \Leftrightarrow\ & 2n^2 - 4n - 96 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} n = 8 \ \text{(nhận)} \\ n = -6 \ \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó, hạng tử thứ $k+1$ trong khai triển $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^8$ là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_8^k (x^2)^{8-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = (-2)^k \mathrm{C}_8^k x^{16-3k}.$$

Hạng tử này chứa x^4 nếu $16 - 3k = 4 \Leftrightarrow k = 4$.
Vậy hạng tử cần tìm là $T_5 = 1120x^4$. □

Bài 199. Tìm giá trị của số thực x sao cho trong khai triển $\left(\sqrt{2^x} + \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ tổng các hạng tử thứ ba và năm là 135 và tổng hệ số ba hạng tử cuối là 22. **ĐS:** $x = 2$ và $x = -1$

Lời giải.
Tổng hệ số ba hạng tử cuối là 22, tức là

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_m^m + \mathrm{C}_m^{m-1} + \mathrm{C}_m^{m-2} = 22 \\ \Leftrightarrow\ & 1 + m + \frac{(m-1)m}{2} = 22 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 + m - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \ \text{(nhận)} \\ m = -7 \ \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Hạng tử thứ ba của khai triển $\left(\sqrt{2^x} + \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^6$ là

$$\mathrm{C}_6^2 \left(\sqrt{2^x}\right)^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^2 = 15 \cdot 2^{2x} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} = 15 \cdot 2^{x+1}.$$

Hạng tử thứ năm là

$$\mathrm{C}_6^4 \left(\sqrt{2^x}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4 = 15 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^{2x-2}} = 15 \cdot 2^{-x+2}.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & 15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{-x+2} = 135 \\ \Leftrightarrow\ & 2^{x+1} + 2^{-x+2} = 9 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có hai giá trị x cần tìm là $x = 2$ và $x = -1$. □

Bài 200. Tìm giá trị của x sao cho hiệu số giữa hạng tử thứ tư và hạng tử thứ sáu của khai triển $\left(\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}} + \dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\right)^m$ bằng 56 và lũy thừa m bằng hệ số của hạng tử thứ ba trừ đi 20. **ĐS:** $x = 0$ hoặc $x = 1$

Lời giải.
Theo giả thiết, ta có

$$\mathrm{C}_m^2 - 20 = m \Leftrightarrow \frac{(m-1)m}{2} - 20 = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 8 \ \text{(nhận)} \\ m = -5 \ \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Hạng tử thứ tư của khai triển trên là

$$\mathrm{C}_8^3 \cdot \left(\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^5 \cdot \left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\right)^3 = 56 \cdot \frac{2^{\frac{5}{16}\cdot 5}}{2^{\frac{x}{2}\cdot 5}} \cdot \frac{2^{\frac{x}{2}\cdot 3}}{2^{\frac{3}{16}\cdot 3}} = 56 \cdot 2^{-x+1}.$$

Hạng tử thứ sáu của khai triển trên là

$$\mathrm{C}_8^3 \cdot \left(\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\right)^5 = 56 \cdot \frac{2^{\frac{5}{16}\cdot 3}}{2^{\frac{x}{2}\cdot 3}} \cdot \frac{2^{\frac{x}{2}\cdot 5}}{2^{\frac{3}{16}\cdot 5}} = 56 \cdot 2^x.$$

Theo giả thiết ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1. $56 \cdot 2^{-x+1} - 56 \cdot 2^x = 56 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$

Trường hợp 2. $56 \cdot 2^{-x+1} - 56 \cdot 2^x = -56 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = -1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 1$. □

Bài 201. Tìm số nguyên dương bé nhất sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có hai hệ số liên tiếp có tỷ số là $\frac{7}{15}$.
ĐS: $n = 21$

Lời giải.
Hệ số của số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $(1+x)^n$ là C_n^k.
Theo giả thiết, ta có

$$\frac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_n^{k+1}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k} = \frac{7}{15}.$$

Suy ra $n = \dfrac{22k+15}{7} = \dfrac{(21k+14)+(k+1)}{7} = 3k + 2 + \dfrac{k+1}{7}$.
Vì $n, k \in \mathbb{N}^*$ nên $k+1$ là bội số của 7, tức là $k+1 = 7m$ với $m \in \mathbb{N}^*$.
Số n bé nhất khi và chỉ khi k bé nhất, hay m là số nguyên dương bé nhất, suy ra $m = 1$, lúc đó $k = 6$ và $n = 21$.
Vậy số nguyên dương bé nhất cần tìm thỏa mãn bài toán là $n = 21$. □

Bài 202. Biết rằng tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{3m}$ là 64. Tìm hạng tử không chứa x.
ĐS: 15

Lời giải.
Thay $x = 1$, ta có tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{3m}$ là $2^{3m} = 64 \Leftrightarrow m = 2$.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_6^k \cdot x^{6-k} \cdot \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_6^k x^{6-3k}$.

Theo giả thiết, ta có $6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.
Vậy hạng tử không chứa x là $\mathrm{C}_6^2 = 15$. □

Bài 203. Biết rằng ba hạng tử đầu tiên của khai triển $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\cdot\sqrt[4]{x}}\right)^n$ có các hệ số là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Tìm tất cả các hạng tử có hệ số là số hữu tỷ trong khai triển đã cho. **ĐS:** $\frac{35}{8}; \frac{7}{4}; \frac{7}{16}; \frac{1}{16}; \frac{1}{256}$

Lời giải.
Số hạng thứ nhất của khai triển có hệ số là $\mathrm{C}_n^0 = 1$.
Số hạng thứ hai của khai triển có hệ số là $\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 = \frac{n}{2}$.
Số hạng thứ ba của khai triển có hệ số là $\frac{1}{4}\mathrm{C}_n^2 = \frac{(n-1)n}{8}$.
Theo giả thiết, ta có

$$2 \cdot \frac{n}{2} = 1 + \frac{(n-1)n}{8} \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 8. \end{array}\right.$$

Trường hợp $n = 1$ bị loại, vì lúc đó khai triển chỉ có hai hạng tử.
Trường hợp $n = 8$, ta có số hạng thứ $k + 1$ trong khai triển là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_8^k (\sqrt{x})^{8-k} \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{x}}\right)^k = \frac{1}{2^k}\mathrm{C}_8^k \cdot x^{\frac{8-k}{2}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{k}{4}}} = \frac{1}{2^k}\mathrm{C}_8^k x^{4-\frac{3k}{4}}.$$

Nhận thấy rằng các giá trị $k = 0, 1, 2, 3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Với $k = 4$, ta có hệ số là $\frac{1}{2^4}\mathrm{C}_8^4 = \frac{35}{8}$ là số hữu tỷ.
Với $k = 5$, ta có hệ số là $\frac{1}{2^5}\mathrm{C}_8^5 = \frac{7}{4}$ là số hữu tỷ.
Với $k = 6$, ta có hệ số là $\frac{1}{2^6}\mathrm{C}_8^6 = \frac{7}{16}$ là số hữu tỷ.
Với $k = 7$, ta có hệ số là $\frac{1}{2^7}\mathrm{C}_8^7 = \frac{1}{16}$ là số hữu tỷ.
Với $k = 8$, ta có hệ số là $\frac{1}{2^x}\mathrm{C}_8^8 = \frac{1}{256}$ là số hữu tỷ. □

Bài 204. Tìm hạng tử của khai triển $(a+b)^{50}$ có giá trị tuyệt đối lớn nhất, biết rằng $|a| = |b|\sqrt{3}$. **ĐS:** $\mathrm{C}_{50}^{18} \cdot 3^{16}$

Lời giải.
Gọi T_{k+1} là số hạng thứ $k+1$ trong khai triển đã cho. Ta có

$$\begin{aligned} \left|\frac{T_{k+1}}{T_k}\right| &= \left|\frac{\mathrm{C}_{50}^k a^{50-k} b^k}{\mathrm{C}_{50}^{k-1} a^{50-k-1} b^{k-1}}\right| = \frac{\mathrm{C}_{50}^k |b|}{\mathrm{C}_{50}^{k-1}|a|} = \frac{\frac{50!}{k!(50-k)!} \cdot |b|}{\frac{50!}{(k-1)!(50-k+1)!} \cdot |a|} \\ &= \frac{51-k}{k} \cdot \frac{|b|}{|a|} = \frac{51-k}{k} \cdot \frac{|b|}{b|\sqrt{3}} = \frac{51-k}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ta có $\left|\frac{T_{k+1}}{T_k}\right| > 1 = \frac{51-k}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} > 1 \Rightarrow k < 18{,}667$.
Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $k \leq 18$. (1)
Mặt khác

$$\begin{aligned} \left|\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}\right| &= \left|\frac{\mathrm{C}_{50}^k a^{50-k} b^k}{\mathrm{C}_{50}^{k+1} a^{50-k-1} b^{k+1}}\right| = \frac{\mathrm{C}_{50}^k \cdot |a|}{\mathrm{C}_{50}^{k+1} \cdot |b|} = \frac{\mathrm{C}_{50}^k \cdot |b| \cdot \sqrt{3}}{\mathrm{C}_{50}^{k+1} \cdot |b|} \\ &= \frac{\frac{50!}{k!(50-k)!} \cdot \sqrt{3}}{\frac{50!}{(k+1)!(50-k-1)!}} = \frac{(k+1)\sqrt{3}}{50-k}. \end{aligned}$$

Ta có $\left|\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{(k+1)\sqrt{3}}{50-k} > 1 \Rightarrow k > 17{,}667$. Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $k \geq 18$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $k = 18$. Lúc đó

$$|T_{19}| = \mathrm{C}_{50}^{18}|a|^{50-18} \cdot b^{18} = \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \left(|b|\sqrt{3}\right)^{32} \cdot b^{18} = \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot 3^{16} \cdot b^{50}.$$

Vậy hạng tử cần tìm là hạng tử thứ 19 và có hệ số là $\mathrm{C}_{50}^{18} \cdot 3^{16}$. □

DẠNG 0.9. Chứng minh bất đẳng thức tổ hợp

— *Rút gọn bất đẳng thức nếu được rồi biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.*

— *Dùng phương pháp quy nạp.*

— *Dùng tính tăng giảm của một dãy,...*

— *Dùng tính bị chặn,...*

Bài 205. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_{2001}^{k}+\mathrm{C}_{2001}^{k+1}\le \mathrm{C}_{2001}^{1000}+\mathrm{C}_{2001}^{1001},\quad (0\le k\le 2000)\qquad (1)$$

Lời giải.

Cách 1:

Do $\mathrm{C}_{2001}^{k}=\mathrm{C}_{2001}^{2001-k}$ nên ta chỉ cần chứng minh (1) đúng với $(0\le k\le 1000)$.

Đặt $\mathrm{U_k}=\mathrm{C_{2001}^k}\quad (0\le \mathrm{k}\le 1000)$.

Suy ra $\dfrac{\mathrm{U}_{k+1}}{\mathrm{U}_k}=\dfrac{\mathrm{C}_{2001}^{k+1}}{\mathrm{C}_{2001}^{k}}=\dfrac{2001!}{(k+1)!2000!}\cdot\dfrac{k!(2001-k)!}{2001!}$ hay $\dfrac{\mathrm{U}_{k+1}}{\mathrm{U}_k}=\dfrac{2001-k}{k+1}$.

Do đó $\dfrac{\mathrm{U}_{k+1}}{\mathrm{U}_k}\ge 1\Leftrightarrow \dfrac{2001-k}{k+1}\ge 1\Leftrightarrow 0\le k\le 1000$ (luôn đúng).

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathrm{U}_{k+1}\ge \mathrm{U}_k\quad \forall 0\le k\le 1000\\
&\Rightarrow \{\mathrm{U}_k\}\ \text{là dãy tăng}\ \forall k\in[0,1000]\\
&\Rightarrow \max_{0\le k\le 1000}\mathrm{U}_k=\mathrm{U}_{1000}\\
&\Rightarrow \max_{0\le k\le 2000}\mathrm{U}_k=\mathrm{U}_{1000}\cdot\mathfrak{M}.
\end{aligned}$$

Mà $\mathrm{U}_{1000}=\mathrm{C}_{2001}^{1000}=\mathrm{C}_{2001}^{1001}=\mathrm{U}_{1001}$ nên đây là hai số lớn nhất của $\mathrm{U}_k(0\le k\le 2000)$.

Vậy $\mathrm{C}_{2001}^{k}+\mathrm{C}_{2001}^{k+1}\le \mathrm{C}_{2001}^{1000}+\mathrm{C}_{2001}^{1001},\quad (0\le k\le 2000)$.

Cách 2:

(1)$\Leftrightarrow \mathrm{C}_{2002}^{k+1}\le \mathrm{C}_{2002}^{1001}$ với $0\le k\le 2000\Leftrightarrow C_{2002}^{k+1}\le \mathrm{C}_{2002}^{1001}$ với $0\le k\le 1000$.

Đặt $\mathrm{U}_k=\mathrm{C}_{2001}^{k+1}$ với $0\le k\le 1000$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{U}_k}{\mathrm{U}_{k-1}}=\dfrac{\mathrm{C}_{2002}^{k+1}}{\mathrm{C}_{2002}^{k}}\ge 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{2002!}{(k+1)!(2001-k)!}\cdot\frac{(2002-k)!k!}{2002!}\ge 1\\
&\Leftrightarrow \frac{2002-k}{k+1}\ge 1\Leftrightarrow 0\le k\le 1000\\
&\Rightarrow \{\mathrm{U}_k\}\ \text{là dãy tăng với}\ 0\le k\le 1000\\
&\Rightarrow \mathrm{U}_k\le \mathrm{U}_{1000}=\mathrm{C}_{2002}^{1001}\\
&\Rightarrow \mathrm{C}_{2002}^{k+1}\le \mathrm{C}_{2002}^{1001}.
\end{aligned}$$

□

Bài 206. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\ge 2$ ta luôn có

$$\mathrm{C}_{2n}^{n}>\frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

Lời giải.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học:
Khi $n = 2$ ta có: $\mathrm{C}_4^2 = 6 > \dfrac{4^2}{2 \cdot \sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là: $\mathrm{C}_{2k}^k > \dfrac{4^k}{2\sqrt{k}}$.

Khi $n = k + 1$ ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1} &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!}\\ &= \frac{(2k+1)(2k+2)(2k)!}{(k+1)(k+1)k!k!} = \frac{2(2k+1)}{k+1}\mathrm{C}_{2k}^k\end{aligned}$$

Suy ra $\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1} > \dfrac{2(2k+1)}{k+1} \cdot \dfrac{4^k}{2\sqrt{k}} = \dfrac{2(2k+1)4^k}{\sqrt{4k(k+1)(k+1)}}$.

Vì $(2k+1)^2 > 4k(k+1) \Rightarrow 2k+1 > \sqrt{4k(k+1)}$ nên $\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1} > \dfrac{2 \cdot 4^k}{\sqrt{k+1}} = \dfrac{4^{k+1}}{2\sqrt{k+1}}$.

Suy ra bất đẳng thức đúng khi $n = k + 1$.
Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$. □

Bài 207. Chứng minh rằng:

$$\frac{\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n}{n} < n! \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3.$$

Lời giải.
Ta có:

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \mathrm{C}_n^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + 3\mathrm{C}_n^3 x^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x = 1$ ta được:

$$n \cdot 2^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n$$

Vậy ta cần chứng minh bất đẳng thức $2^{n-1} < n! \quad (*)$.
Khi $n = 3$ ta có $2^2 < 3!$ đúng.
Giả sử $(*)$ đúng với $n = k, n \in \mathbf{Z}^+, k > 3$ thì $2^{k-1} < k!$.
Ta chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$, tức là $2^k < (k+1)! \quad (2)$.
Vì $2 < 3 < k < k + 1$ nên

$$\begin{aligned}2^k = 2 \cdot 2^{k-1} &< (k+1) \cdot k!\\ \Rightarrow 2^k &< (k+1)!.\end{aligned}$$

Suy ra bất đẳng thức $(*)$ đã được chứng minh hay $\dfrac{\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n}{n} < n!$. □

Bài 208. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^2 + 2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (n-1)\mathrm{C}_n^n > (n-2) \cdot 2^{n-1}.$$

Lời giải.
Ta có:

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1} \qquad (2)$$

Cho $x = 1$ ta được:

$$n \cdot 2^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n \qquad (3)$$

Từ (1) cho $x = 1$ ta được:

$$2^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \qquad (4)$$

Lấy (3) trừ (4) ta được:

$$\begin{aligned}
&n \cdot 2^{n-1} - 2^n = -\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + 2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (n-1)\mathrm{C}_n^n \\
&\Rightarrow (n-2) \cdot 2^{n-1} = -1 + \mathrm{C}_n^2 + 2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (n-1)\mathrm{C}_n^n \\
&\Rightarrow \mathrm{C}_n^2 + 2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + (n-1)\mathrm{C}_n^n = (n-2) \cdot 2^{n-1} + 1 > (n-2) \cdot 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Bài 209 (Đại học Y dược TP HCM - 1999). Cho $0 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_{2n+k}^n \cdot \mathrm{C}_{2n-k}^n \leq (\mathrm{C}_{2n}^n)^2 .$$

Lời giải.
Đặt $\mathrm{U}_k = \mathrm{C}_{2n+k}^n \cdot \mathrm{C}_{2n-k}^n$
Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{U_{k+1}}{U_k} &= \frac{\mathrm{C}_{2n+k+1}^n \mathrm{C}_{2n-k+1}^n}{\mathrm{C}_{2n+k}^n \cdot \mathrm{C}_{2n-k}^n} \\
&= \frac{(2n+k+1)!(2n-k+1)!}{n!(n+k+1)!n!(n-k+1)!} \cdot \frac{n!(n+k)!}{(2n+k)!} \cdot \frac{n!(n-k)!}{(2n-k)!} \\
&= \frac{2n+k+1}{n+k+1} \cdot \frac{n-k}{2n-k} \\
&= \frac{2n^2 - nk + n - k^2 - k}{2n^2 + nk + 2n - k^2 - k} \leq 1 \text{ với } \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Suy ra $U_{k+1} \leq U_k \Rightarrow \{U_k\}$ là dãy giảm với $0 \leq k \leq n$.
$\Rightarrow U_k \leq U_0 = \mathrm{C}_{2n}^n \cdot \mathrm{C}_{2n}^n = (\mathrm{C}_{2n}^n)^2$
$\Rightarrow \mathrm{C}_{2n+k}^n \mathrm{C}_{2n-k}^n \leq (\mathrm{C}_{2n}^n)^2$ (đpcm). □

Bài 210. Chứng minh rằng:

$$\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < \mathrm{C}_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{10}.$$

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{100}}\mathrm{C}_{100}^{50} &= \frac{100!}{2^{100} \cdot 50! \cdot 50!} = \frac{100!}{2^{50} \cdot 50! \cdot 2^{50} \cdot 50!} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots 100}{2^{50}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 50) \cdot 2^{50}(1 \cdot 2 \cdots 50)} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 100}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100)} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} = A
\end{aligned}$$

Ta đi chứng minh bài toán tổng quát sau:

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (*) \quad n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học:
Khi $n = 1$ ta có $T_1 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3.1+1}}$.

Giả sử T_n đúng với $n = k$ tức là

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Ta chứng minh T_{k+1} cũng đúng tức là

$$T_{k+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \qquad (1)$$

Ta nhân hai vế của (1) cho $\dfrac{2k+1}{2k+2}$ ta được

$$\mathrm{T}_k \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}\left[\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}\right]^2 &= \frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+19k+20k+1}\\ &= \frac{(2k+1)^2}{(12k^3+28k^2+19k+4)+k}\\ &= \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k} < \frac{1}{3k+4}.\end{aligned}$$

Suy ra $T_{k+1} < \dfrac{1}{\sqrt{3k+4}}$.

Theo nguyên lý quy nạp ta kết luận

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Thay $n = 50$ ta có $A = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} < \dfrac{1}{\sqrt{3 \cdot 50+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{151}} < \dfrac{1}{\sqrt{100}} = \dfrac{1}{10} = B.$ (2)

Ta lại có: $2A = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 99}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 100}$ vì $\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5} < \dfrac{5}{6}, \dots, \dfrac{98}{99} < \dfrac{99}{100}$.

$\Rightarrow \mathrm{B} < 2\mathrm{A} \Rightarrow 2\mathrm{A}^2 > \mathrm{AB} = \dfrac{1}{100}$

$\Rightarrow \mathrm{A}\sqrt{2} > \dfrac{1}{10} \Rightarrow \mathrm{A} > \dfrac{1}{10\sqrt{2}}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} < A < \dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{10\sqrt{2}} < \dfrac{1}{2^{100}} \cdot \mathrm{C}_{100}^{50} < \dfrac{1}{100}$

$\Rightarrow \dfrac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < \mathrm{C}_{100}^{50} < \dfrac{2^{100}}{10}$. $\square$

DẠNG 0.10. Đếm số dùng quy tắc nhân và quy tắc cộng

Bài 211. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hãy tìm tất cả các số có bốn chữ số khác nhau. **ĐS:** 300 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.
Ta có

— a_1 có 5 cách chọn vì $a_1 \neq 0$.

— a_2 có 5 cách chọn.

— a_3 có 4 cách chọn.

— a_4 có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 300$ số. □

Bài 212. Tìm tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau. **ĐS:** 16080 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Ta có

— a_1 có 9 cách chọn vì $a_1 \neq 0$.

— a_2 có 9 cách chọn (vì a_2 có thể là số 0).

— a_3 có 8 cách chọn.

— a_4 có 7 cách chọn.

— a_5 có 6 cách chọn.

— a_6 có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 16080$ số. □

Bài 213. Từ các chữ số 0, 1, 2, 7, 8, 9.

1. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm năm chữ số khác nhau? **ĐS:** 312 số

2. Có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm năm chữ số khác nhau? **ĐS:** 288 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

1. Vì n chẵn nên a_5 chỉ có thể là 0, 2, 8.

   — Nếu $a_5 = 0$ thì $n = \overline{a_1a_2a_3a_40}$.
   Ta có a_1 có 5 cách chọn, a_2 có 4 cách chọn, a_3 có 3 cách chọn, a_4 có 2 cách chọn.
   Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ số.

   — Nếu $a_5 \in \{2, 8\}$ thì a_5 có 2 cách chọn.
   Ta có a_1 có 4 cách chọn, a_2 có 4 cách chọn, a_3 có 3 cách chọn, a_4 có 2 cách chọn.
   Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 192$ số.

   Vậy có tất cả $120 + 192 = 312$ số chẵn gồm 5 chữ số thỏa mãn.

2. Vì n là số lẻ nên a_5 chỉ có thể là 1, 7, 9.
Khi đó a_5 có 3 cách chọn, a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
a_2 có 4 cách chọn, a_3 có 3 cách chọn, a_4 có 2 cách chọn.
Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 288$ số.

□

Bài 214. Từ các chữ số 0, 4, 5, 7, 9.

1. Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau. **ĐS:** 96 số
2. Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 5000? **ĐS:** 72 số
3. Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 5? **ĐS:** 42 số

Lời giải.

1. Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.
   - a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
   - a_2 có 4 cách chọn.
   - a_3 có 3 cách chọn.
   - a_4 có 2 cách chọn.

   Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ số.
2. Số lớn hơn 5000 thì chữ số hàng nghìn $a_1 \geq 5$.
   - Nếu $a_1 = 5$ thì $n = \overline{5a_2a_3a_4}$.
   Khi đó a_2 có 4 cách chọn, a_3 có 3 cách chọn, a_4 có 2 cách chọn.
   Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ số.
   - Nếu $a_1 = 7$ hoặc $a_1 = 9$ thì cũng giống trường hợp $a_1 = 5$

   Suy ra có tất cả $24 \cdot 3 = 72$ số lớn hơn 5000.
3. Số chia hết cho 5 phải có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 nên a_4 có 2 cách chọn.
   Cách 1.
   - Nếu $a_4 = 0$ thì $n = \overline{a_1a_2a_30}$.
   Khi đó a_1 có 4 cách chọn, a_2 có 3 cách chọn, a_3 có 2 cách chọn.
   Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ số.
   - Nếu $a_4 = 5$ thì $n = \overline{a_1a_2a_35}$.
   Khi đó a_1 có ba cách chọn (vì $a_1 \neq 0$), a_2 có 3 cách chọn, a_3 có hai cách chọn.
   Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ số.

   Vậy có tất cả $24 + 18 = 42$ số.
   Cách 2.
   Số các số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 5 là $2\mathrm{A}_4^3$.
   Số các số có chữ số 0 đứng đầu là $1\mathrm{A}_3^2$.
   Suy ra số cần tìm là $2\mathrm{A}_4^3 - 1\mathrm{A}_3^2 = 42$ số.

□

Bài 215. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có năm chữ số khác nhau? **ĐS:** 1260 số
2. Có thể lập được bao nhiêu số lẻ có ba chữ số khác nhau nhỏ hơn 400? **ĐS:** 35 số

Lời giải.

1. Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.
   Vì n chẵn nên $a_5 \in \{0, 2, 4, 6\}$.

   — Nếu $a_5 = 0$ thì a_1 có 6 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn, a_4 có 3 cách chọn.
   Suy ra có $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$ số.

   — Nếu $a_5 \in \{2, 4, 6\}$ thì a_5 có 3 cách chọn, a_1 có 5 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$), a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn, a_4 có 3 cách cách chọn.

   Suy ra có $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 900$ số.
   Vậy có tất cả $360 + 900 = 1260$ số.

2. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số cần tìm. Vì n lẻ nên a_3 chỉ có thể là 1, 3, 5.
   Số n nhỏ hơn 400 nên chữ số hàng trăm a_1 chỉ có thể là 1, 2, 3.

   — Khi $a_1 = 1$ thì $n = \overline{1a_2a_3}$.
   Ta có a_3 có hai cách chọn, a_2 có 5 cách chọn. Suy ra có $5 \cdot 2 = 10$ số.

   — Khi $a_1 = 2$ thì $n = \overline{2a_2a_3}$.
   Ta có a_3 có 3 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn. Suy ra có $5 \cdot 3 = 15$ số.

   — Khi $a_1 = 3$ thì $n = \overline{3a_2a_3}$.
   Ta có a_3 có hai cách chọn, a_2 có 5 cách chọn. Suy ra có $5 \cdot 2 = 10$ số.

   Vậy có tất cả $10 + 15 + 10 = 35$ số có ba chữ số khác nhau là số lẻ và nhỏ hơn 400.

□

Bài 216. Từ các chữ số 0, 1, 2, 6, 7, 8, 9 hãy tìm tất cả các số chẵn có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 5000. **ĐS:** 280 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm.
Vì $n > 5000$ nên a_1 chỉ có thể là 6, 7, 8, 9 và n chẵn nên a_4 chỉ có thể là 0, 2, 6, 8.

— Nếu $a_1 = 6$ thì $n = \overline{6a_2a_3a_4}$.
Khi đó a_4 có 3 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn.
Suy ra có $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ số.

— Nếu $a_1 = 7$ thì $n = \overline{7a_2a_3a_4}$.
Khi đó a_4 có 4 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn.
Suy ra có $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ số.

— Khi $a_1 = 8$ giống như $a_1 = 6$ và $a_1 = 9$ giống $a_1 = 7$.

Vậy có tất cả $60 \cdot 2 + 80 \cdot 2 = 280$ số. □

Bài 217. Từ các chữ số 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau thỏa mãn

1. Số đó không có tận cùng bằng 6. **ĐS:** 620 số
2. Số đó chia hết cho 5. **ĐS:** 220 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

1. Khi đó a_1 có 6 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$), a_2 có 6 cách chọn, a_3 có 5 cách chọn, a_4 có 4 cách chọn.
   Suy ra có $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 720$ số có bốn chữ số khác nhau lập được.
   Các chữ số tận cùng bằng 6 có dạng $n = \overline{a_1a_2a_36}$.
   Khi đó a_1 có 5 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn.
   Suy ra có $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ số có bốn chữ số có tận cùng bằng 6.
   Vậy số các số cần tìm là $720 - 100 = 620$ số.

② Số n chia hết cho 5 nên a_4 phải là 0 hoặc 5.

- Nếu $a_4 = 0$ thì a_1 có 6 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn.
  Suy ra có $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ số.
- Nếu $a_4 = 5$ thì a_1 có 5 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn.
  Suy ra có $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ số.

Vậy có tất cả $120 + 100 = 220$ số.

□

Bài 218. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau trong đó phải có chữ số 2? **ĐS:** 750 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

- Nếu $a_1 = 2$ thì a_2 có 7 cách chọn, a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 5 cách chọn.
  Suy ra có $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ số.
- Nếu $a_1 \neq 2$ và $a_2 = 2$ thì a_1 có 6 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$), a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 5 cách chọn.
  Suy ra có $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ số.
  Tương tự đối với các trường hợp a_3, a_4 bằng 2 đều giống trường hợp $a_2 = 2$.

Suy ra số các số cần tìm là $210 + 180 \cdot 3 = 750$ số. □

Bài 219. Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau sao cho

① Luôn có mặt chữ số 5. **ĐS:** 750 số

② Số tạo thành nhỏ hơn 4000. **ĐS:** 630 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.

①
- Nếu $a_1 = 5$ thì a_2 có 7 cách chọn, a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 5 cách chọn.
  Suy ra có $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ số.
- Nếu $a_1 \neq 5$ và $a_2 = 5$ thì a_1 có 6 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$), a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 5 cách chọn.
  Suy ra có $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ số.
  Vị trí của số 5 ở a_2 giống như vị trí của số 5 ở a_3, a_4.

Vậy số các số cần tìm là $210 + 180 \cdot 3 = 750$ số.

② Số tạo thành nhỏ hơn 4000 thì a_1 chỉ có thể là 1, 2, 3.
Khi đó a_1 có 3 cách chọn, a_2 có 7 cách chọn, a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 5 cách chọn.
Suy ra có $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 = 630$ số.

□

Bài 220. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 hãy lập các số có bốn chữ số khác nhau sao cho

① Chữ số hàng trăm là 2. **ĐS:** 48 số

② Luôn có mặt chữ số 4 và chữ số hàng nghìn là 5. **ĐS:** 36 số

Lời giải.
Số có bốn chữ số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

① Chữ số hàng trăm là 2 nên $n = \overline{a_12a_2a_4}$.

- a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
- a_3 có 4 cách chọn.

— a_4 có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \times 4 \times 4 = 48$ số.

(2) Chữ số hàng nghìn là 5 nên $n = \overline{5a_2a_3a_4}$.

— Nếu $a_2 = 4$ thì $n = \overline{54a_3a_4}$. Khi đó,
• a_3 có 4 cách chọn.
• a_4 có 3 cách chọn.
Suy ra có $3 \times 4 = 12$ số.

— Vị trí của số 4 ở a_2 giống như vị trí của số 4 ở a_3, a_4.

Vậy có tất cả $3 \times 12 = 36$ số thỏa mãn bài toán.

□

Bài 221. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5:

(1) Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300; 500)$. **ĐS:** 24 số

(2) Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số nằm trong khoảng $(300; 500)$ (các chữ số không cần khác nhau). **ĐS:** 50 số

Lời giải.
Số có ba chữ số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3}$.

(1) Ta có $300 < n < 500$ nên a_1 chỉ có thể là 3 hoặc 4.

— Nếu $a_1 = 3$ thì $n = \overline{3a_2a_3}$. Khi đó,
• a_2 có 4 cách chọn.
• a_3 có 3 cách chọn.
Do đó, có $4 \times 3 = 12$ số.

— Nếu $a_1 = 4$ thì $n = \overline{4a_2a_3}$. Khi đó,
• a_2 có 4 cách chọn.
• a_3 có 3 cách chọn.
Do đó, có $4 \times 3 = 12$ số.

Vậy có tất cả $12 + 12 = 24$ số.

(2) Ta có $300 < n < 500$ nên $a_1 \in \{3, 4\}$. Kết hợp với các chữ số không cần khác nhau thì

— a_1 có 2 cách chọn.

— a_2 có 5 cách chọn.

— a_3 có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $2 \times 5 \times 5 = 50$ số.

□

Bài 222. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 hãy lập một số có năm chữ số khác nhau, trong đó hai chữ số 3 và 4 không đứng cạnh nhau. **ĐS:** 444 số

Lời giải.

— Đầu tiên ta lập số có năm chữ số khác nhau $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà không quan tâm hai chữ số 3 và 4 có đứng cạnh nhau hay không.

- a_1 có 5 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
- a_2 có 5 cách chọn.
- a_3 có 4 cách chọn.
- a_4 có 3 cách chọn.

- a_5 có 2 cách chọn.

Do đó, có $5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 600$ số.

— Tiếp đến, ta tìm số các số có năm chữ số khác nhau mà 3 và 4 đứng cạnh nhau.

- Trường hợp hai chữ số 3 và 4 chiếm hai vị trí a_1 và a_2.
  Sắp hai chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau, có 2! cách.
  a_3 có 4 cách chọn.
  a_4 có 3 cách chọn.
  a_5 có 2 cách chọn.
  Suy ra, có $2! \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ số.
- Trường hợp hai chữ số 3 và 4 chiếm hai vị trí a_2 và a_3.
  Sắp hai chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau, có 2! cách.
  a_1 có 3 cách chọn ($a_1 \neq 0$).
  a_4 có 3 cách chọn.
  a_5 có 2 cách chọn.
  Suy ra, có $2! \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ số.
- Trường hợp hai chữ số 3 và 4 chiếm hai vị trí a_3, a_4 và a_4, a_5 làm tương tự sẽ có $2 \times 2! \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ số.

Như thế, có $48 + 36 + 72 = 156$ số có năm chữ số khác nhau mà 3 và 4 đứng cạnh nhau.

Vậy có tất cả $600 - 156 = 444$ số thỏa mãn bài toán. □

Bài 223. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ sao cho $a_1 + a_6 = 10$, $a_2 + a_5 = 10$, $a_3 + a_4 = 10$. **ĐS:** 36864 số

Lời giải.
Nhận xét. Chữ số 0 và 5 có mặt trong n không thỏa mãn bài toán. Do đó, chỉ còn tám chữ số 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Như thế,

- a_1 có 8 cách chọn, suy ra a_6 có 8 cách chọn.
- a_2 có 6 cách chọn, suy ra a_5 có 6 cách chọn.
- a_3 có 4 cách chọn, suy ra a_4 có 4 cách chọn.

Vậy có tất cả $8 \times 6 \times 4 \times 4 \times 6 \times 8 = 36864$ số. □

Bài 224. Hãy tính tổng của tất cả các số có năm chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. **ĐS:** 3999960

Lời giải.
Có $5! = 120$ số có năm chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số đã cho. Trong đó,

— 24 số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_41}$.

— 24 số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_42}$.

— 24 số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_43}$.

— 24 số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_44}$.

— 24 số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_45}$.

Tổng các số hàng đơn vị là $24 \times 1 + 24 \times 2 + 24 \times 3 + 24 \times 4 + 24 \times 5 = 360$.
Tương tự, tổng các số hàng chục là 3600.
Tổng các số hàng trăm là 36000.
Tổng các số hàng nghìn là 360000.
Tổng các số hàng chục nghìn là 3600000.
Vậy tổng của 120 số là $360 + 3600 + 36000 + 360000 + 3600000 = 3999960$. □

Bài 225. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hãy lập số có năm chữ số đôi một khác nhau sao cho

1. Chữ số đầu tiên là 5 và chia hết cho 5. **ĐS:** 60 số
2. Một trong hai chữ số đầu tiên là 2 và chia hết cho 5. **ĐS:** 228 số

Lời giải.
Số có năm chữ số khác nhau có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

1. Chữ số đầu tiên là 5 nên $a_1 = 5$ và chia hết cho 5 nên $a_5 = 0$. Do đó, $n = \overline{5a_2a_3a_40}$. Như thế,

    - a_2 có 5 cách chọn.
    - a_3 có 4 cách chọn.
    - a_4 có 3 cách chọn.

    Vậy có tất cả $5 \times 4 \times 3 = 60$ số.

2. Một trong hai chữ số đầu tiên là 2 nên $a_1 = 2$ hoặc $a_2 = 2$. Tiếp đến, n chia hết cho 5 nên $a_5 = 5$ hoặc $a_5 = 0$.

    — Trường hợp $a_1 = 2$ và $a_5 = 0$ thì $n = \overline{2a_2a_3a_40}$. Khi đó,
    - a_2 có 5 cách chọn.
    - a_3 có 4 cách chọn.
    - a_4 có 3 cách chọn.

    Suy ra, có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số.

    — Trường hợp $a_1 = 2$ và $a_5 = 5$ cũng giống như trên, ta có 60 số.

    — Trường hợp $a_2 = 2$ và $a_5 = 0$ thì $n = \overline{a_12a_3a_40}$. Khi đó,
    - a_1 có 5 cách chọn.
    - a_3 có 4 cách chọn.
    - a_4 có 3 cách chọn.

    Suy ra, có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số.

    — Trường hợp $a_2 = 2$ và $a_5 = 5$ thì $n = \overline{a_12a_3a_45}$. Khi đó,
    - a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
    - a_3 có 4 cách chọn.
    - a_4 có 3 cách chọn.

    Suy ra, có $4 \times 4 \times 3 = 48$ số.

    Vậy có tất cả $60 + 60 + 60 + 48 = 228$ số.

□

Bài 226. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số khác nhau và một trong hai chữ số đầu tiên phải là 7? **ĐS:** 66 số

Lời giải.
Số có bốn chữ số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.
Vì n chẵn nên a_4 chỉ có thể là 0, 2, 6.
Một trong hai chữ số đầu tiên là 7 nên $a_1 = 7$ hoặc $a_2 = 7$.

— Trường hợp $a_1 = 7$ và $a_4 = 0$ thì $n = \overline{7a_2a_30}$. Khi đó,

- a_2 có 4 cách chọn.
- a_3 có 3 cách chọn.

Do đó, có $4 \times 3 = 12$ số.

— Trường hợp $a_1 = 7$ và $a_4 = 2$ hoặc $a_4 = 6$ thì cũng giống như trường hợp $a_1 = 7$ và $a_4 = 0$, ta đều có 12 số.

— Trường hợp $a_2 = 7$ và $a_4 = 0$ thì $n = \overline{a_1 7 a_3 0}$. Khi đó,

- a_1 có 4 cách chọn.
- a_3 có 3 cách chọn.

Do đó, có $4 \times 3 = 12$ số.

— Trường hợp $a_2 = 7$ và $a_4 = 2$ thì $n = \overline{a_1 7 a_3 2}$. Khi đó,

- a_1 có 3 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
- a_3 có 3 cách chọn.

Do đó, có $3 \times 3 = 9$ số.

— Trường hợp $a_2 = 7$ và $a_4 = 6$ thì ta cũng có 9 số.

Vậy có tất cả $12 + 2 \times 12 + 12 + 9 + 9 = 66$ số. □

Bài 227. Cho tám chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ tám chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số mỗi số gồm bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 10? **ĐS:** 1260 số

(Đại học sư phạm Vinh 1999)

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ là số cần lập.
Vì n không chia hết cho 10 nên $a_4 \neq 0$. Khi đó,

- a_4 có 7 cách chọn (vì $a_4 \neq 0$).
- a_1 có 6 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_4$).
- a_2 có 6 cách chọn.
- a_3 có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $7 \times 6 \times 6 \times 5 = 1260$ số. □

Bài 228. Hỏi từ mười chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm sáu chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1? **ĐS:** 42000 số

(Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông 1999)

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ là số cần tìm.

— Trường hợp $a_1 = 1$ thì $n = \overline{1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$.

- Có 5 vị trí cho chữ số 0.
- Có A_8^4 cách chọn 4 chữ số còn lại.

Do đó, có $5 \times \mathrm{A}_8^4$ số.

— Trường hợp $a_2 = 1$ thì $n = \overline{a_1 1 a_3 a_4 a_5 a_6}$.

- Có 4 vị trí cho chữ số 0 (vì $a_1 \neq 0$).
- Có A_8^4 cách chọn 4 chữ số còn lại.

— Trường hợp $a_3 = 1$ hoặc $a_4 = 1$ hoặc $a_5 = 1$ hoặc $a_6 = 1$ thì cũng tương tự như $a_2 = 1$.

Vậy có tất cả $5 \times \mathrm{A}_8^4 + 5 \times 4 \times \mathrm{A}_8^4 = 42000$ số. □

Bài 229. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Có bao nhiêu tập con X của A thỏa điều kiện X chứa 1 và không chứa 2? **ĐS:** 64
2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập hợp A và không bắt đầu bằng 123? **ĐS:** 3348 số

Lời giải.

1. Gọi X_1 là một tập con tùy ý của tập hợp $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ta có $X_1 \subset A$ và $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ có 6 phần tử.
Do đó, có tất cả 2^6 tập con X_1 như thế.
Suy ra số tập con X của A chứa 1 và không chứa 2 chính là số tập hợp $X_1 \cup \{1\}$.
Vậy số tập con cần tìm là $2^6 = 64$.

2. Số có năm chữ số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.
Vì n chẵn nên a_5 chỉ có thể là 2, 4, 6, 8. Khi đó,

   - a_5 có 4 cách chọn.
   - a_1 có 7 cách chọn.
   - a_2 có 6 cách chọn.
   - a_3 có 5 cách chọn.
   - a_4 có 4 cách chọn.

   Do đó, có $4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 3360$ số.
   Tiếp đến, ta tìm các số chẵn bắt đầu bằng 123, tức là $n = \overline{123a_4a_5}$. Khi đó,

   - a_5 có 3 cách chọn (vì $a_5 \in \{4, 6, 8\}$).
   - a_4 có 4 cách chọn.

   Suy ra, có $3 \times 4 = 12$ số.
   Vậy có tất cả $3360 - 12 = 3348$ số cần tìm.

□

Bài 230.

1. Có bao nhiêu số chẵn gồm sáu chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ? **ĐS:** 42000 số
2. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số khác nhau đôi một, trong đó có đúng ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác 0)? **ĐS:** 64800 số

(Đại học Quốc gia TPHCM, khối A, đợt 1)

Lời giải.
Số có sáu chữ số có dạng $n = \overline{1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

1. Vì n chẵn nên a_6 chỉ có thể là 0, 2, 4, 6, 8.
Chữ số đầu tiên là chữ số lẻ nên a_1 chỉ có thể là 1, 3, 5, 7, 9. Khi đó,

   - a_6 có 5 cách chọn.
   - a_1 có 5 cách chọn.
   - a_2 có 8 cách chọn.
   - a_3 có 7 cách chọn.
   - a_4 có 6 cách chọn.
   - a_5 có 5 cách chọn.

   Vậy có tất cả $5 \times 5 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 42000$ số cần tìm.

2. Chọn bất kỳ ba số lẻ trong năm số lẻ là một tổ hợp chập 3 của 5 nên có C_5^3 cách chọn.
Chọn bất kỳ ba số chẵn trong năm số chẵn là một tổ hợp chập 3 của 5 nên có C_5^3 cách chọn.
Do đó, có $C_5^3 \times C_5^3$ số có sáu chữ số gồm ba chữ số chẵn và ba chữ số lẻ. Nhưng khi ta hoán vị sáu chữ số này sẽ có 6! số mới. Như thế, có $C_5^3 \times C_5^3 \times 6!$ số có ba chữ số chẵn và ba chữ số lẻ.
Khi ta hoán vị như trên thì có trường hợp chữ số 0 lại nhảy lên đứng đầu. Trong trường hợp này ta có $C_5^3 \times C_4^2 \times 5!$ số có chữ số 0 đứng đầu.
Vậy có tất cả $C_5^3 \times C_5^3 \times 6! - C_5^3 \times C_4^2 \times 5! = 64800$ số.

□

DẠNG 0.11. Bài toán đếm số - Dùng chỉnh hợp

Bài 231. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau? **ĐS:** 136080 số

Lời giải.
Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm.
Chọn số có sáu số khác nhau trong mười chữ số là một chỉnh hợp chập 6 của 10, suy ra số cách chọn là A_{10}^6.
Số cách chọn số có 6 chữ số khác nhau mà số 0 đứng đầu là A_9^5.
Suy ra, số các số tự nhiên cần tìm là $A_{10}^6 - A_9^5 = \dfrac{10!}{(10-6)!} - \dfrac{9!}{(9-5)!} = 136080$ số. □

Bài 232. Từ các chữ số 0, 1, 2, 7, 8, 9.

1. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau?
2. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm năm chữ số khác nhau?

ĐS: 312 số, 288 số

Lời giải.

1. Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần tìm.
   — Chọn a_5 có 3 cách. Chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có A_5^4 cách. Suy ra, lập được $3 \cdot A_5^4$ số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau bất kỳ.
   — Số các số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau mà số 0 đứng đầu là $2 \cdot A_4^3$.

   Suy ra, số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau là $3 \cdot A_5^4 - 2 \cdot A_4^3 = 360 - 48 = 312$.
2. Gọi $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ là số cần tìm.
   — Bước 1. Chọn b_5 từ 1, 7, 9 $\Rightarrow$ b_5 có 3 cách chọn.
   — Bước 2. Chọn b_1 từ 6 số bỏ đi hai chữ số 0 và số mà b_5 đã chọn $\Rightarrow$ b_1 có 4 cách.
   — Bước 3. Chọn $\overline{b_2b_3b_4}$ có A_4^3 cách.

   Suy ra, lập được $3 \cdot 4 \cdot A_4^3 = 288$ số cần tìm.

□

Bài 233. Từ các số 1, 3, 5, 7, 9. Hãy lập một số gồm năm chữ số khác nhau sao cho:

1. Có chữ số đầu tiên là 3?
2. Không bắt đầu bằng 13?

ĐS: 24 số, 114 số

Lời giải.

1. Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần tìm. Chọn bốn số còn lại vào 4 vị trí $\overline{a_2a_3a_4a_5}$ là một chỉnh hợp chập 4 chập 4, suy ra có $\mathrm{A}_4^4 = 4! = 24$ số.

2. Số các số có 5 chữ số khác nhau là $\mathrm{A}_5^5 = 5! = 120$.
Số các số bắt đầu bằng 13 là $\mathrm{A}_3^3 = 3! = 6$.
Suy ra, số các số cần tìm là $120 - 6 = 114$ số.

□

Bài 234. Từ các số 1, 3, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau và lớn hơn 6000?

ĐS: 168 số

Lời giải.

- Nếu số có bốn chữ số thì chữ số đầu tiên phải là 6 hoặc 7 nên ta có $2 \cdot \mathrm{A}_4^3 = 48$ số.
- Nếu số có năm chữ số thì có $\mathrm{A}_5^5 = 120$ số.

Vậy có $48 + 120 = 168$ số thỏa đề bài. □

Bài 235. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau và không bắt đầu bởi 345?

ĐS: 714 số

Lời giải.
Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần lập.

- Chọn sáu số vào năm vị trí là một chỉnh hợp chập 5 của 6, nên có $\mathrm{A}_6^5 = 720$ số.
- Nếu ba chữ số đầu là 345, chọn ba chữ số 1, 2, 6 xếp vào hai vị trí còn lại, nên có $\mathrm{A}_3^2 = 6$ số.

Vậy có $720 - 6 = 714$ số thỏa đề bài. □

Bài 236. Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hỏi có bao nhiêu số có năm chữ số đôi một khác nhau sao cho

1. chữ số đầu tiên là 5 và chữ số cuối chia hết cho 5?
2. một trong hai chữ số đầu tiên là 2 và chia hết cho 5?

ĐS: 60 số, 228 số

Lời giải.
Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần lập.

1. Theo đề, suy ra $a_1 = 5$ và $a_5 = 0$. Chọn 5 chữ số xếp vào ba vị trí a_2, a_3, a_4 nên có A_5^3 cách.
Theo quy tắc nhân, có $1 \cdot 1 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 60$ số.

2. Theo đề, $a_1 = 2$ hoặc $a_2 = 2$ và $a_5 = 0$ hoặc $a_5 = 5$.

   - Trường hợp 1. Nếu $a_1 = 2$ thì $a_5 = 0$ hoặc $a_5 = 5$. Chọn ba chữ số trong năm chữ số còn lại xếp vào ba vị trí a_2, a_3, a_4 có $\mathrm{A}_5^3 = 60$ cách.
   Theo quy tắc nhân, trường hợp 1 có $1 \cdot 2 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 120$ số.
   - Trường hợp 2. Nếu $a_2 = 2$ thì a_5 có 2 cách chọn, ba vị trí ở giữa có A_5^3 cách. Suy ra, có $2 \cdot \mathrm{A}_5^3$ số.
   Tuy nhiên, ta phải trừ đi số các số có chữ số 0 đứng đầu là A_4^2. Do đó, trường hợp 2 có $2 \cdot \mathrm{A}_5^3 - \mathrm{A}_4^2 = 108$ số.

   Vậy có tất cả $120 + 108 = 228$ số.

□

Bài 237. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 5 chữ số khác nhau, lớn hơn 70000? **ĐS:** 4368 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần lập.
n lẻ $\Rightarrow a_5$ chỉ có thể là 1, 3, 5, 7, 9.
$n > 70000 \Rightarrow a_1$ chỉ có thể là 7, 8, 9. Do đó, ta xét 3 trường hợp sau:

— Trường hợp 1. Nếu $a_1 = 7$ hoặc $a_1 = 9$ thì a_5 có 4 cách chọn, chọn 3 chữ số trong 8 chữ số xếp vào 3 vị trí giữa có A_8^3 cách. Theo quy tắc nhân, trường hợp 1 có $2 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_8^3$ số.

— Trường hợp 2. $a_1 = 8$ thì a_5 có 5 cách chọn, chọn 3 chữ số trong 8 chữ số xếp vào 3 vị trí giữa có A_8^3 cách. Theo quy tắc nhân, trường hợp 2 có $5 \cdot \mathrm{A}_8^3$ số.

Theo quy tắc cộng, có $2 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_8^3 + 5 \cdot \mathrm{A}_8^3 = 4368$ số thỏa đề bài. □

Bài 238. Cho các số 0, 2, 4, 6, 8, 9.

1. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số, mà trong mỗi số các chữ số khác nhau?
2. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 6?

ĐS: 100 số, 204 số

Lời giải.

1. Gọi $\overline{a_1a_2a_3}$ là số cần lập.
Có A_6^3 số có ba chữ số khác nhau, trong đó có A_5^2 số có ba chữ số khác nhau và chữ số 0 đứng đầu.
Suy ra, có $\mathrm{A}_6^3 - \mathrm{A}_5^2 = 100$ số.
2. Gọi $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ là số cần lập.
Nếu $b_1 = 6$ thì có A_5^3 số có bốn chữ số khác nhau. Nếu $b_1 \neq 6$ và $b_1 \neq 0$ thì có $4 \cdot 3\mathrm{A}_4^2$ số có bốn chữ số khác nhau.
Suy ra, theo quy tắc cộng có $\mathrm{A}_5^3 + 4 \cdot 3\mathrm{A}_4^2 = 204$ số.

□

Bài 239. Có 100000 chiếc vé xổ số được đánh số từ 00000 đến 9999. Hỏi số các vé gồm năm chữ số khác nhau là bao nhiêu? **ĐS:** 30240 vé

Lời giải.
Mỗi vé có năm chữ số khác nhau ứng với một chỉnh hợp chập 5 của 10 phần tử từ 0, 1, 2,..., 9.
Do đó, số các vé có năm chữ số khác nhau là $\mathrm{A}_{10}^5 = 30240$ vé. □

Bài 240. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 có mặt ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần? **ĐS:** 5880 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ là số cần lập.
Trong n, vì chữ số 5 có mặt ba lần nên ta ghi thêm: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5.

— Có A_8^8 số có tám chữ số trong đó chữ số 5 có mặt ba lần.

— Có A_7^7 số có tám chữ số trong đó số 0 đứng đầu và chữ số 5 có mặt ba lần.

— Có 3! lần hoán vị mà n vẫn không đổi.

Vậy, lập được $\dfrac{\mathrm{A}_8^8 - \mathrm{A}_7^7}{3!} = \dfrac{40320 - 4040}{6} = 5880$. □

Bài 241. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau sao cho:

1. chữ số hàng trăm là 2?
2. luôn có mặt chữ số 4 và chữ số hàng nghìn là 5?

ĐS: 48 số, 36 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.

1. Chữ số hàng trăm là 2 nên $a_2 = 2$.
Chọn 3 số trong 5 số và xếp vào 3 vị trí a_1, a_3, a_5 nên có A_5^3 cách.
Ta phải trừ đi số các số mà có chữ số 0 đứng đầu là A_4^2. Vậy lập được $\mathrm{A}_5^3 - \mathrm{A}_4^2 = 60 - 12 = 48$ số.
2. Chữ số hàng nghìn là 5 nên $a_1 = 5$.
Xếp chữ số 4 vào 3 vị trí, sau đó chọn 2 trong 4 chữ số xếp vào 2 vị trí còn lại. Theo quy tắc nhân, có $3 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 36$ số.

□

Bài 242. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm năm chữ số khác nhau, trong đó chữ số 3 và 4 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 444 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần lập.

— Có $\mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_5^4$ số các số có 5 chữ số mà chữ số đứng đầu khác 0.

— Chữ số $3, 4$ đứng cạnh nhau, ta xem $(3, 4)$ là một chữ số.
Suy ra, số các số có 5 chữ số mà $3, 4$ luôn đứng cạnh nhau là $2! \cdot \mathrm{A}_4^3 + 2! \cdot 3 \cdot \mathrm{A}_4^3$.

Vậy, lập được $\dfrac{\mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_7^7}{3!} = \dfrac{40320 - 4040}{6} = 5880$. □

Bài 243. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5? **ĐS:** 60 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.

— Vì n chia hết cho 5 nên $a_4 = 5$.

— Chọn 3 số trong 5 số còn lại xếp vào ba vị trí a_1, a_2, a_3 $\Rightarrow$ có $\mathrm{A}_5^3 = 60$ cách.

Theo quy tắc nhân, lập được $1 \cdot 60 = 60$ số. □

Bài 244. Hỏi từ mười chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1? **ĐS:** 42000 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập.

— Có A_{10}^6 số n có sáu chữ số khác nhau, trong đó có chứa A_9^5 số có chữ số 0 đứng đầu.

— Có A_8^6 số n có sáu chữ số khác nhau, không chứa hai chữ số 0 và 1.

— Có $6 \cdot \mathrm{A}_8^5$ số n có sáu chữ số khác nhau, chứa chữ số 1 và không chứa chữ số 0.

— Có $5 \cdot \mathrm{A}_8^5$ số n có sáu chữ số khác nhau, chứa chữ số 0 và không chứa chữ số 1.

Vậy có tất cả $\mathrm{A}_{10}^6 - \mathrm{A}_9^5 - 6 \cdot \mathrm{A}_8^5 - 5 \cdot \mathrm{A}_8^5 = 42000$ số. □

Bài 245. Từ tám chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 10? **ĐS:** 1260 số

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.
Vì n không chia hết cho 10 $\Rightarrow a_4$ phải khác 0.

— Trong 8 số 0, 1,..., 7 ta chọn ra bốn số có thứ tự là một chỉnh hợp chập 4 của 8 $\Rightarrow$ có A_8^4 cách.

— Trong A_8^4 số có A_7^3 số gồm bốn chữ số phân biệt và có số 0 đứng đầu.

— Mặt khác trong A_{10}^6 lại chứa A_7^3 số mà có chữ số tận cùng là 0.

Vậy có tất cả $\mathrm{A}_8^4 - \mathrm{A}_7^3 - \mathrm{A}_7^3 = 1260$ số. □

Bài 246. ① Từ năm số 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

② Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17} \quad \text{với } x > 0.$$

(Đại học Quốc gia Hà Nội, khối B, năm 2000)

ĐS:

① 54 số.

② 24310.

Lời giải.

① Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.
Cách 1. n không chia hết cho 5 nên $a_4 \neq 0$ và $a_4 \neq 5$.
Ta có

— a_4 có 3 cách chọn.

— a_1 có 3 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_4$).

— a_2 có 3 cách chọn (vì $a_2 \neq a_4$ và $a_2 \neq a_1$).

— a_3 có 2 cách chọn.

Vậy số số n ta có thể lập được là $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ số.
Cách 2. Từ 5 số đã cho ta chọn được A_5^4 bộ 4 chữ số a_1, a_2, a_3, a_4.
Trong đó có A_4^3 cách chọn sao cho chữ số 0 đứng đầu.
Mà để n chia hết cho 5 thì a_4 chỉ có thể là 0 hoặc 5, suy ra a_4 có 2 cách chọn.
Bộ a_1, a_2, a_3 có A_4^3 cách chọn.
Suy ra có $2 \times \mathrm{A}_4^3$ số chia hết cho 5 được lập thành từ các chữ số đã cho.
Nhưng trong $2 \times \mathrm{A}_4^3$ số đó có A_3^2 số các số chia hết cho 5 và bắt đầu bằng chữ số 0.
Vậy có $2 \times \mathrm{A}_4^3 - \mathrm{A}_3^2$ số có nghĩa có bốn chữ số và chia hết cho 5.
Như vậy ta có $\mathrm{A}_5^4 - \mathrm{A}_4^3 - \left(2\mathrm{A}_4^3 - A_3^2\right) = 120 - 24 - (48 - 6) = 54$ số có bốn chữ số có nghĩa, các chữ số của nó đôi một khác nhau và số đó không chia hết cho 5 được lập thành từ các chữ số 0, 1, 3, 5, 7.
Cách 3. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.
Ta có

— a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).

— a_2 có 4 cách chọn (vì $a_2 \neq a_1$).

— a_3 có 3 cách chọn (vì $a_3 \neq a_2$ và $a_3 \neq a_1$).

— a_4 có 2 cách chọn (vì $a_4 \neq a_3$; $a_4 \neq a_2$ và $a_4 \neq a_1$).

Suy ra có $2 \times 3 \times 4 \times 4 = 96$ cách lập các số có 4 chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau từ năm chữ số 0, 1, 3, 5, 7.
Tiếp theo ta tìm số các số có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ năm chữ số 0, 1, 3, 5, 7 sao cho số đó chia hết cho 5.
Để $\overline{a_1a_2a_3a_4} \vdots 5$ thì a_4 chỉ có thể là 0 hoặc 5.

— Nếu $a_4 = 0$ thì
  - a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
  - a_2 có 3 cách chọn.
  - a_3 có 2 cách chọn.

  Suy ra có $2 \times 3 \times 4 = 24$ cách.
— Nếu $a_4 = 5$ thì
  - a_1 có 3 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$, $a_1 \neq 5$).
  - a_2 có 3 cách chọn.
  - a_3 có 2 cách chọn.

  Suy ra có $2 \times 3 \times 3 = 18$ cách.

Vậy số số n không chia hết cho 5 là $96 - 24 - 18 = 54$ số.

(2) Gọi số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ là T_{k+1}. Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{k+1} &= \mathrm{C}_{17}^k \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17-k} \cdot \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^k \\ &= \mathrm{C}_{17}^k \cdot x^{\frac{2}{3}\cdot(17-k)} \cdot x^{\frac{3}{4}k} = \mathrm{C}_{17}^k \cdot x^{\frac{17}{2}k - \frac{34}{3}}. \end{aligned}$$

Số hạng thứ $k+1$ không chứa x nếu $\dfrac{17}{12}k - \dfrac{34}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 8$.
Vậy số hạng không chứa x là số hạng thứ 9 và bằng $\mathrm{C}_{17}^8 = 24310$.

□

Bài 247. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho ta lập được

(1) Bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số và bốn chữ số đó khác nhau từng đôi một?

(2) Bao nhiêu số chia hết cho 5, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một?

(3) Bao nhiêu số chia hết cho 9, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một?

ĐS:

(1) 156.

(2) 36.

(3) 16.

Lời giải.

(1) Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.
Vì n chẵn nên a_4 chỉ có thể là 0, 2, 4.
Cách 1. Ta xét các trường hợp sau đây.
Nếu $a_4 = 0$ thì $n = \overline{a_1a_2a_30}$, ta có

— a_1 có 5 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).

— a_2 có 4 cách chọn (vì $a_2 \neq a_4$ và $a_2 \neq a_1$).

— a_3 có 3 cách chọn.

Suy ra có $3 \times 4 \times 5 = 60$ cách.
Nếu $a_4 = 2$ thì $n = \overline{a_1a_2a_32}$, ta có

— a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_4$).
— a_2 có 4 cách chọn (vì $a_2 \neq a_4$ và $a_2 \neq a_1$).
— a_3 có 3 cách chọn.

Suy ra có $3 \times 4 \times 4 = 48$ cách.

② $a_4 = 4$ ta có số $n = \overline{a_1a_2a_34}$.
Ta có

— a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_4$).
— a_2 có 4 cách chọn (vì $a_2 \neq a_4$ và $a_2 \neq a_1$).
— a_3 có 3 cách chọn.

Suy ra có $3 \times 4 \times 4 = 48$ cách. Vậy số số n ta có thể lập được là $60 + 48 + 48 = 156$ số.
Cách 2. Có A_6^4 cách chọn bộ bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 bất kì.
Trong đó có A_5^3 cách chọn bốn số có chữ số $a_1 = 0$.
Bây giờ ta tìm xem có bao nhiêu số lẻ.
Ta có $3 \cdot \mathrm{A}_5^3$ số lẻ trong đó có $3 \cdot \mathrm{A}_4^2$ số lẻ bắt đầu bằng chữ số 0.
Suy ra có $\left(3 \cdot \mathrm{A}_5^3 - 3 \cdot \mathrm{A}_4^2\right)$ số lẻ có bốn chữ số.
Vậy tất cả có $\mathrm{A}_6^4 - \mathrm{A}_5^3 - (3 \cdot \mathrm{A}_5^3 - 3 \cdot \mathrm{A}_4^2) = 156$ số n cần tìm.
Cách 3. n chẵn $\Leftrightarrow a_4$ có 3 cách chọn.
Có A_5^3 cách chọn bộ ba số $\overline{a_1a_2a_3}$, suy ra có $3 \cdot \mathrm{A}_5^3$ số n chẵn.
Trong đó có $2 \cdot \mathrm{A}_4^2$ số bắt đầu bằng chữ số 0.
Vậy có tất cả $3 \cdot \mathrm{A}_5^3 - 2 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 180 - 24 = 156$ số cần tìm.

③ Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số cần tìm.
$n \,\vdots\, 5$ nên $a_3 = 0$ hoặc $a_3 = 5$.
Cách 1.

— Nếu $a_3 = 0$ ta có số $n = \overline{a_1a_20}$.
Ta có
  - a_1 có 5 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
  - a_2 có 4 cách chọn (vì $a_2 \neq a_1$ và $a_2 \neq a_3$).

  Suy ra có $5 \times 4 = 20$ cách.
— Nếu $a_3 = 5$ ta có số $n = \overline{a_1a_25}$.
Ta có
  - a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_3$).
  - a_2 có 4 cách chọn (vì $a_2 \neq a_1$ và $a_2 \neq a_3$).

  Suy ra có $4 \times 4 = 16$ cách.

Vậy số số n ta có thể lập được là $20 + 16 = 36$ số.
Cách 2. a_3 có 2 cách chọn, suy ra có $2\mathrm{A}_5^2$ số có ba chữ số chia hết cho 5.
Trong đó, có $1 \cdot \mathrm{A}_4^1$ số có ba chữ số chia hết cho 5 bắt đầu bằng chữ số 0.
Vậy có $2 \cdot \mathrm{A}_5^2 - 1 \cdot \mathrm{A}_4^1 = 40 - 4 = 36$ số cần tìm.
Cách 3.

— Có A_6^3 cách chọn số có ba chữ số khác nhau đôi một.
— Có A_5^2 cách chọn số có ba chữ số bắt đầu bằng chữ số 0.

Suy ra có $\mathrm{A}_6^3 - \mathrm{A}_5^2$ số có ba chữ số có nghĩa.

— Có $4 \cdot \mathrm{A}_5^2$ số có ba chữ số không chia hết cho 5.
— Có $4 \cdot \mathrm{A}_4^1$ số có ba chữ số không chia hết cho 5 và bắt đầu bằng chữ số 0.

Suy ra có $4 \cdot \mathrm{A}_5^2 - 4 \cdot \mathrm{A}_4^1$ số có ba chữ số có nghĩa và không chia hết cho 5.
Vậy có $\mathrm{A}_6^3 - \mathrm{A}_5^2 - \left(4 \cdot \mathrm{A}_5^2 - 4 \cdot \mathrm{A}_4^1\right) = 36$ số n cần tìm.

4 Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số cần tìm.

$n \vdots 9$ khi và chỉ khi tổng $a_1 + a_2 + a_3 \vdots 9$.
Suy ra $\{a_1; a_2; a_3\}$ có thể là $\{1; 3; 5\}$; $\{2; 3; 4\}$; $\{0; 4; 5\}$.

— Khi $\{a_1; a_2; a_3\} = \{1; 3; 5\}$ thì có $3! = 6$ số chia hết cho 9.
— Khi $\{a_1; a_2; a_3\} = \{2; 3; 4\}$ thì có $3! = 6$ số chia hết cho 9.
— Khi $\{a_1; a_2; a_3\} = \{0; 4; 5\}$ thì có $3! - 2! = 4$ số chia hết cho 9.

Vậy tất cả có $4 + 6 + 6 = 16$ số chia hết cho 9 có ba chữ số khác nhau từng đôi một được lập thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.

□

Bài 248. Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số chia hết cho 9?
(Đại học Cảnh sát nhân dân khối G - 2000) **ĐS:** 5000 số.

Lời giải.
Các số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9 viết theo thứ tự tăng dần là 100017, 100035, 100053, 100071, ..., 999999.
Các số lẻ có 6 chữ số, chia hết cho 9 lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 18$.
Do đó $100017 + (n - 1) \cdot 18 = 999999 \Leftrightarrow n = 50000$.
Vậy có tất cả 50000 số lẻ gồm sáu chữ số chia hết cho 9.
□

Bài 249. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu số có ba chữ số không chia hết cho 3 mà các chữ số trong mỗi số là khác nhau?
(Đại học Lâm nghiệp, 1999) **ĐS:** 66 số.

Lời giải.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số mà các chữ số của nó khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.

— a_1 có 5 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).

— a_2 có 5 cách chọn (vì $a_2 \neq a_1$).

— a_3 có 4 cách chọn (vì $a_3 \neq a_1$ và $a_3 \neq a_2$).

Vậy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta lập được $5 \times 5 \times 4 = 100$ số có 3 chữ số mà các chữ số trong mỗi số là khác nhau.
Trong 100 số này có những số chia hết cho 3 và những số không chia hết cho 3.
Số n chia hết cho 3 nếu tổng các chữ số của nó $(a_1 + a_2 + a_3) \vdots 3$.
Suy ra ta có các trường hợp sau

— $\{a_1, a_2, a_3\} = \{0, 1, 2\}$ thì ta có 4 số chia hết cho 3.

— $\{a_1, a_2, a_3\} = \{0, 1, 5\}$ thì ta có 4 số chia hết cho 3.

— $\{a_1, a_2, a_3\} = \{0, 2, 4\}$ thì ta có 4 số chia hết cho 3.

— $\{a_1, a_2, a_3\} = \{0, 4, 5\}$ thì ta có 4 số chia hết cho 3.

— $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 2, 3\}$ thì ta có 6 số chia hết cho 3.

— $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 3, 5\}$ thì ta có 6 số chia hết cho 3.

— $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 3, 4\}$ thì ta có 6 số chia hết cho 3.

Suy ra trong các số n lập được có $4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 = 34$ số chia hết cho 3.
Vậy số các số có ba chữ số không chia hết cho 3 mà các chữ số trong mỗi số là khác nhau được lập bởi các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 là $100 - 34 = 66$ số. □

Bài 250. Có bao nhiêu số khác nhau gồm bảy chữ số mà tổng các chữ số của mỗi số là một số chẵn? (Đại học sư phạm Vinh, khối A, B, E, 2000) **ĐS:** 4500000 số.

Lời giải.
Gọi số có 7 chữ số cần tìm là $n = \overline{abcdefg}$.
Ta có

— a có 9 cách chọn.

— b có 10 cách chọn.

— c có 10 cách chọn.

— d có 10 cách chọn.

— e có 10 cách chọn.

— f có 10 cách chọn.

Suy ra có $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900000$ cách chọn 6 chữ số đầu của số n. Đến đây có hai trường hợp xảy ra

— **Trường hợp 1.** $a + b + c + d + e + f$ là một số chẵn.
Khi đó ta có 5 cách chọn g để $a + b + c + d + e + f + g$ là một số chẵn.
Như vậy số cách chọn số n sao cho tổng các chữ số của nó là một số chẵn là

$$900000 \times 5 = 4500000 \text{ (cách)}.$$

— **Trường hợp 2.** $a + b + c + d + e + f$ là một số lẻ.
Khi đó ta có 5 cách chọn g để $a + b + c + d + e + f + g$ là một số chẵn.
Như vậy số cách chọn số n sao cho tổng các chữ số của nó là một số chẵn là

$$900000 \times 5 = 4500000 \text{ (cách)}.$$

Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều có 4500000 cách chọn, hay có 4500000 số khác nhau gồm bảy chữ số mà tổng các chữ số của mỗi số là một số chẵn. □

Bài 251. Có bao nhiêu số gồm năm chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ. **ĐS:** 45000 số.

Lời giải.
Gọi số có 5 chữ số cần tìm là $n = \overline{abcde}$.
Ta có

— a có 9 cách chọn.

— b có 10 cách chọn.

— c có 10 cách chọn.

— d có 10 cách chọn.

Suy ra có $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ cách chọn 4 chữ số đầu của số n. Đến đây có hai trường hợp xảy ra

— **Trường hợp 1.** $a + b + c + d$ là một số chẵn.
Khi đó ta có 5 cách chọn e để $a + b + c + d + e$ là một số lẻ.
Như vậy số cách chọn số n sao cho tổng các chữ số của nó là một số lẻ là

$$9000 \times 5 = 45000 \text{ (cách)}.$$

— **Trường hợp 2.** $a+b+c+d$ là một số lẻ.
Khi đó ta có 5 cách chọn g để $a+b+c+d+e$ là một số lẻ.
Như vậy số cách chọn số n sao cho tổng các chữ số của nó là một số lẻ là

$$9000 \times 5 = 45000 \text{ (cách)}.$$

Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều có 45000 cách chọn, hay có 45000 số khác nhau gồm năm chữ số mà tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ. □

Bài 252. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta lập các số mà mỗi số có năm chữ số trong đó các chữ số khác nhau đôi một. Hỏi

1. Có bao nhiêu số trong đó phải có mặt chữ số 2?
2. Có bao nhiêu số trong đó phải có mặt chữ số 1 và 6?

(Đại học Cần Thơ, khối D, năm 2000) **ĐS:** 600 số, 480 số.

Lời giải.

1. Gọi $n = \overline{abcd}$ là số cần tìm.
Cách 1. Chữ số 2 có 5 vị trí.
Có A_5^4 cách chọn cho 4 số còn lại.
Suy ra có $5 \cdot \mathrm{A}_5^4 = 600$ số n cần tìm.
Cách 2. Có A_6^5 số có năm chữ số khác nhau đôi một.
Trong đó có A_5^5 số có năm chữ số khác nhau đôi một và không có mặt chữ số 2.
Vậy có $\mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_5^5 = 720 - 120 = 600$ số có năm chữ số khác nhau đôi một và luôn có mặt chữ số 2.

2. Có A_5^2 vị trí hai chữ số 1 và 6 trong n.
Cách 1. Có A_4^3 vị trí ba chữ số còn lại.
Suy ra có $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{A}_4^3 = 480$ số cần tìm.
Cách 2. Có A_6^5 số có năm chữ số bất kì.
Có A_5^5 số có năm chữ số mà trong đó có mặt chữ số 1 và không có mặt chữ số 6.
Có A_5^5 số có năm chữ số mà trong đó có mặt chữ số 6 và không có mặt chữ số 1.
Vậy có $\mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_5^5 - \mathrm{A}_5^5 = 720 - 120 - 120 = 480$ số cần tìm.

□

Bài 253. Xét biển số xe là dãy gồm hai chữ cái đứng trước và bốn chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B,. . . , Z. Các chữ số được lấy từ mười số 0, 1, . . . , 9.

1. Có bao nhiêu biển số xe trong đó có ít nhất một chữ cái khác chữ O và các chữ số đôi một khác nhau?
2. Có bao nhiêu biển số xe có hai chữ cái khác nhau đồng thời có đúng hai chữ số lẻ giống nhau?

ĐS: 1. 3402000; 2. 975000

Lời giải.

1. Có 26 cách chọn chữ cái thứ nhất.
Có 26 cách chọn chữ cái thứ hai.
Do đó, số cách chọn hai chữ cái có ít nhất một chữ cái O là

$$26 \cdot 26 - 1 = 675 \text{ cách}.$$

Số cách chọn bốn chữ số đứng sau khác nhau đôi một là

$$\mathrm{A}_{10}^4 = 5040 \text{ cách}.$$

Vậy số biển số xe cần tìm là

$$675 \cdot 5040 = 3402000 \text{ biển số}.$$

2. Có A_{26}^2 cách chọn hai chữ cái khác nhau.
Có 5 cách chọn các cặp số lẻ giống nhau.
Có A_4^2 vị trí hai chữ số lẻ giống nhau trong một biển số.
Có $5 \cdot 5$ cách chọn hai chữ số chẵn còn lại.
Vậy số biển số xe cần tìm là
$$A_{26}^2 \cdot 5 \cdot A_4^2 \cdot 5 \cdot 5 = 975000 \text{ biển số.}$$

□

Bài 254. Có tất cả bao nhiêu số lẻ gồm sáu chữ số khác nhau lớn hơn 500000? **ĐS:** 36960

Lời giải.
Cách 1.
Gọi $\overline{n} = \overline{abcdef}$ là số cần tìm.
Do $\overline{n}$ lẻ nên $f \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ và $\overline{n} > 500000$ nên $a \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$.

— Nếu $a = 5$ thì $\overline{n} = \overline{5bcdef}$.
Ta có
  - f có 4 cách chọn.
  - Có A_8^4 cách chọn $\overline{bcde}$

  Vậy có $4 \cdot A_8^4 = 6720$ số $\overline{n}$.

— Nếu $a = 6$ thì $\overline{n} = \overline{6bcdef}$.
Ta có
  - f có 5 cách chọn.
  - Có A_8^4 cách chọn $\overline{bcde}$

  Vậy có $5 \cdot A_8^4 = 8400$ số $\overline{n}$.

— Nếu $a = 7$ hoặc $a = 9$ thì cũng tương tự như $a = 5$ ta có 6720 số $\overline{n}$.

— Nếu $a = 8$ thì cũng tương tự như $a = 6$ ta có 8400 số $\overline{n}$.

Vậy có tất cả $3 \cdot 6720 + 2 \cdot 8400 = 36960$ số cần tìm.
Cách 2.
Nếu $\overline{n}$ lẻ thì

— f có 5 cách chọn.

— Có 8 cách chọn a (vì $a \neq 0$).

— Có A_8^4 cách chọn $\overline{bcde}$

Vậy có $5 \cdot 8 \cdot A_8^4 = 67200$ số lẻ có sáu chữ số khác nhau.
Bây giờ ta tìm trong 67200 số lẻ trên có bao nhiêu số lẻ nhỏ hơn 500000.
Nếu $\overline{n} < 500000$ thì $a \in \{1; 2; 3; 4\}$ và $\overline{n}$ lẻ thì $f \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

— Nếu a chẵn, ta có
  - Có 2 cách chọn a.
  - Có 5 cách chọn f.
  - Có A_8^4 cách chọn $\overline{bcde}$

  Vậy có $2 \cdot 5 \cdot A_8^4 = 16800$ số $\overline{n}$.

— Nếu a lẻ, ta có
  - Có 2 cách chọn a.

- Có 4 cách chọn f.
- Có A_8^4 cách chọn $\overline{bcde}$

Vậy có $2 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_8^4 = 13400$ số $\overline{n}$.

Vậy có tất cả $67200 - 16800 - 13400 = 36960$ số cần tìm.
□

Bài 255. Cho tám chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có thể lập được tất cả bao nhiêu số gồm sáu chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4? **ĐS:** 13320

Lời giải.
Cách 1.
Gọi $\overline{n} = \overline{abcdef}$ là số cần lập.
$\overline{n}$ phải có chữ số 4 nên có 6 vị trí cho chữ số 4.

— Nếu $a = 4$ thì $\overline{n} = \overline{4bcdef}$.
Có A_7^5 cách chọn $\overline{bcdef}$.

— Nếu $a \neq 4$

- a có 6 cách chọn.
- Số 4 có 5 vị trí.
- Có A_6^4 cách chọn cho bốn số còn lại.

Vậy có $\mathrm{A}_7^5 + 6 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_6^4 = 2520 + 10800 = 13320$ số $\overline{n}$.
Cách 2.
Có A_8^6 cách lập số có sáu chữ số khác nhau bất kì. Trong đó có A_7^5 số có sáu chữ số khác nhau mà chữ số 0 đứng đầu.
Vậy có $\mathrm{A}_8^6 - \mathrm{A}_7^5 = 17640$ số có sáu chữ số khác nhau có nghĩa.
Có A_7^6 số có sáu chữ số khác nhau mà không có chữ số 4.
Có A_6^5 số có sáu chữ số khác nhau mà có chữ số 0 đứng đầu và không có chữ số 4.
Khi đó có $\mathrm{A}_7^6 - \mathrm{A}_6^5 = 4320$ số có sáu chữ số khác nhau mà không có chữ số 4.
Vậy có $17640 - 4320 = 13320$ số cần tìm. □

Bài 256. Tính tổng tất cả các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8. **ĐS:** 37332960

Lời giải.
Gọi X là tập tất cả các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ sáu chữ số trên.
Gọi $\overline{n} = \overline{abcde} \in X$.

— Nếu $e = 1$ thì có A_5^4 cách chọn $\overline{abcd}$.
Vậy có A_5^4 phần tử $\overline{n} \in X$ với chữ số hàng đơn vị bằng 1.

— Tương tự có A_5^4 phần tử $\overline{n} \in X$ với chữ số hàng đơn vị bằng 3, ...

Khi đó, tổng tất cả các chữ số hàng đơn vị của các phần tử $\overline{n} \in X$ là

$$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8) \cdot \mathrm{A}_5^4 = 3360.$$

Lập luận tương tự, tổng tất cả các chữ số hàng chục của các phần tử $\overline{n} \in X$ là

$$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8) \cdot \mathrm{A}_5^4 \cdot 10 = 3360 \cdot 10, \ldots$$

Vậy tổng tất cả các phần tử $\overline{n}$ cần tìm là

$$3360 + 3360 \cdot 10 + 3360 \cdot 100 + 3360 \cdot 1000 + 3360 \cdot 10000 = 37332960.$$

□

Bài 257. (1) Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

(2) Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 mà các số đó nhỏ hơn 345?

ĐS: 1. 24; 2. 50

Lời giải.

(1) Gọi $\overline{n} = \overline{abc}$ là số cần tìm.
Do n chẵn nên

— c chỉ có thể là 2 hoặc 4, c có 2 cách chọn.

— Có A_4^2 cách chọn $\overline{ab}$.

Vậy có $2 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 24$ số $\overline{n}$ cần tìm.

(2) Gọi $\overline{n} = \overline{abc}$ là số cần tìm.
Do $\overline{n} < 345$ nên $a \in \{1; 2; 3\}$.

— Nếu $a = 1$ thì $\overline{n} = \overline{1bc}$.
Có A_5^2 cách chọn $\overline{bc}$.

— Nếu $a = 2$ thì $\overline{n} = \overline{2bc}$.
Có A_5^2 cách chọn $\overline{bc}$.

— Nếu $a = 3$ thì $\overline{n} = \overline{3bc}$

  – Nếu $b \in \{1; 2\}$ thì c có 4 cách chọn.
  Vậy có $2 \cdot 4 = 8$ số $\overline{n}$.

  – Nếu $b = 4$ thì $\overline{n} = \overline{34c}$. Khi đó $c \in \{1; 2\}$, vậy có 2 số $\overline{n}$.

Vậy có tất cả $\mathrm{A}_5^2 + \mathrm{A}_5^2 + 8 + 2 = 50$ số $\overline{n} < 345$.

□

Bài 258. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau và không lớn hơn 789? **ĐS:** 171

Lời giải.
Gọi $\overline{n} = \overline{abc}$ là số cần tìm.
Do $\overline{n}$ chẵn nên $c \in \{2; 4; 6; 8\}$ và $\overline{n} \leq 789$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

— Nếu $a = 1$ thì $\overline{n} = \overline{1bc}$

  – c có 4 cách chọn.

  – b có 7 cách chọn.

  Vậy có $4 \cdot 7 = 28$ số $\overline{n}$.

— Tương tự cho $a = 3$ hoặc $a = 5$ ta đều có $4 \cdot 7 = 28$ số $\overline{n}$.

— Nếu $a = 2$ thì $\overline{n} = \overline{2bc}$

  – c có 3 cách chọn.

  – b có 7 cách chọn.

  Vậy có $3 \cdot 7 = 21$ số $\overline{n}$.

— Tương tự cho $a = 4$ hoặc $a = 6$ ta đều có $3 \cdot 7 = 21$ số $\overline{n}$.

— Nếu $a = 7$ thì $\overline{n} = \overline{7bc}$

- c có 4 cách chọn.
- b có 6 cách chọn.

Vậy có $4 \cdot 6 = 24$ số $\overline{n}$.

Vậy có tất cả $3 \cdot 28 + 3 \cdot 21 + 24 = 171$ số $\overline{n} < 789$. □

Bài 259. Cho tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1. Từ tập hợp X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau từng đôi một và có chữ số đứng đầu là số 2?
2. Từ tập hợp X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau từng đôi một, sao cho trong năm chữ số đó có đúng ba chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

ĐS: 1. 360; 2. 2448

Lời giải.

1. Gọi $\overline{n} = \overline{2bcde}$ là số cần tìm.
   Do $\overline{n}$ chẵn suy ra $e \in \{0; 4; 6\}$ nên e có 3 cách chọn.
   Có A_6^3 cách chọn $\overline{bcd}$.
   Vậy có $3 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 360$ số chẵn có năm chữ số khác nhau từng đôi một và có chữ số đứng đầu là số 2.
2. Gọi $\overline{n} = \overline{abcde}$ là số cần tìm.
   a có 7 cách chọn.
   - Nếu $a \in \{2; 4; 6\}$ thì
     - Có C_3^2 cách chọn hai chữ số chẵn.
     - Có C_4^2 cách chọn hai chữ số lẻ.
     - Có 4! hoán vị bốn số đã chọn.
     - Có 3 cách chọn a.

     Vậy có $3 \cdot 4! \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_3^2 = 1296$ số $\overline{n}$.
   - Nếu $a \in \{1; 3; 5; 7\}$ thì
     - Có C_4^3 cách chọn ba chữ số chẵn.
     - Có C_3^1 cách chọn một chữ số lẻ.
     - Có 4! hoán vị bốn số đã chọn.
     - Có 4 cách chọn a.

     Vậy có $4 \cdot 4! \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^3 = 1152$ số có dạng $\overline{n}$.

   Vậy có $1296 + 1152 = 2448$ số cần tìm.

□

Bài 260.
1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm sáu chữ số đôi một khác nhau, trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1?
2. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

ĐS: 1. 33600; 2. 11340

Lời giải.

1. Gọi $\overline{n} = \overline{abcde}$ là số cần tìm.
   Cách 1.
   Chữ số 0 có 5 vị trí.
   Có A_8^5 cách chọn 5 số còn lại.

Vậy có $5 \cdot \mathrm{A}_8^5 = 33600$ số cần tìm.
Cách 2.
Gọi $\overline{n} = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần tìm. Ta có

— $a_1 \neq 0$. (1)

— $a_i \neq 1,\ \forall i = \overline{1,6}$. (2)

— $a_i = 0$ nếu $i \in [2;6]$. (3)

Số có sáu chữ số khác nhau thỏa (2) và ($a_1 = 0$ hoặc $a_1 \neq 0$) là A_9^6.
Số có sáu chữ số khác nhau thỏa (2) và $a_1 = 0$ là A_8^5.
Số có sáu chữ số khác nhau thỏa (1), (2) và $a_1 \neq 0$ nếu $i \in [2;6]$ là A_8^6.
Vậy có $\mathrm{A}_9^6 - \mathrm{A}_8^5 - \mathrm{A}_8^6 = 33600$ số cần tìm.

2. Gọi $\overline{n} = \overline{a_1a_2\ldots a_7}$ là số cần tìm.

— Xét cả a_1 tùy ý.
Chọn 2 vị trí để xếp hai chữ số 2 có C_7^2 cách.
Chọn 3 vị trí để xếp ba chữ số 3 có C_5^3 cách.
Chọn hai chữ số để xếp vào 2 vị trí còn lại có $2! \cdot \mathrm{C}_8^2$ cách.
Vậy có $\mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 2! \cdot \mathrm{C}_8^2 = 11760$ số.

— Xét $a_1 = 0$.
Chọn 2 vị trí để xếp hai chữ số 2 có C_6^2 cách.
Chọn 3 vị trí để xếp ba chữ số 3 có C_4^3 cách.
Chọn một chữ số để xếp vào vị trí còn lại có 7 cách.
Vậy có $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 7 = 420$ số.

Vậy có $11760 - 420 = 11340$ số cần tìm.

□

DẠNG 0.12. Bài toán sắp xếp đồ vật

Bài 1. Có 5 quyển sách toán, 4 quyển sách lý, 6 quyển sách hóa. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chúng vào một kệ sách sao cho:

1. Chúng nằm tùy ý. **ĐS:** 15!

2. Những quyển sách thuộc cùng loại thì ở chung. **ĐS:** 12441600

Lời giải.

1. Xếp 5 quyển sách toán, 4 quyển sách lý, 6 quyển sách hóa tùy ý vào một kệ sách có $(5+4+6)! = 15!$.

2. Xếp bất kì 5 quyển sách toán vào một kệ sách, ta có 5! cách.
Xếp bất kì 4 quyển sách toán vào một kệ sách, ta có 4! cách.
Xếp bất kì 6 quyển sách toán vào một kệ sách, ta có 6! cách.
Mỗi lần đổi chỗ ba bộ sách này ta lại được 3! cách. Suy ra, có tất cả $5! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 3! = 12441600$ cách.

□

Bài 2. Trong một tủ sách có tất cả 10 quyển sách. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

1. Quyển thứ nhất ở cạnh quyển thứ hai? **ĐS:** 725760

2. Quyển thứ nhất không ở cạnh quyển thứ hai? **ĐS:** 2903040

Lời giải.

① Quyển thứ nhất luôn ở cạnh quyển thứ hai nên ta xem đây là một khối thống nhất.
Khối thống nhất này cộng với 8 quyển còn lại ta sẽ có 9! cách sắp xếp.
Khi ta thay đổi vị trí quyển thứ nhất với vị trí của quyển thứ hai ta được 2! cách.
Vậy có tất cả $9! \cdot 2! = 725760$ cách.

② Với 10 quyển sách ta có 10! cách sắp xếp tùy ý.
Suy ra có $10! - 9! \cdot 2! = 2903040$ cách sắp xếp mà quyển thứ nhất không ở cạnh quyển thứ hai.

□

Bài 3. Có 12 quyển sách gồm ba loại với số lượng bằng nhau. Có bao nhiêu cách sắp xếp chúng vào một kệ sách sao cho những sách cùng một loại thì ở cùng một chỗ? **ĐS:** 82994

Lời giải.

— Có 12 quyển sách gồm ba loại với số lượng bằng nhau nên mỗi loại có 4 quyển sách.

— Mỗi lần ta đổi chỗ 4 quyển sách thuộc cùng một loại thì ta được 4! cách sắp xếp.

— Mỗi lần ta đổi chỗ ba bộ sách thuộc ba loại khác nhau thì ta được 3! cách sắp xếp mới.

Vậy có tất cả $4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 3! = 82994$ cách. □

Bài 4. Có bao nhiêu cách xếp 5 cái bánh vào 2 hộp bánh? **ĐS:** 32

Lời giải.

— Nếu xếp 0 cái bánh vào hộp I, ta có C_5^0.

— Nếu xếp 1 cái bánh vào hộp I, ta có C_5^1.

— Nếu xếp 2 cái bánh vào hộp I, ta có C_5^2.

— Nếu xếp 3 cái bánh vào hộp I, ta có C_5^3.

— Nếu xếp 4 cái bánh vào hộp I, ta có C_5^4.

— Nếu xếp 5 cái bánh vào hộp I, ta có C_5^5.

Vậy có tất cả $\mathrm{C}_5^0 + \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_5^4 + \mathrm{C}_5^5 = 32$ cách sắp xếp. □

Bài 5. Có 5 thẻ trắng và 5 thẻ đen, đánh dấu mỗi loại theo các số 1, 2, 3, 4, 5. Có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các thẻ này thành một hàng sao cho hai thẻ cùng màu không nằm liền nhau? **ĐS:** 28800

Lời giải.

— Nếu các thẻ trắng nằm ở vị trí lẻ thì các thẻ đen nằm ở vị trí chẵn, ta có $5! \cdot 5!$ cách xếp khác nhau.

— Nếu các thẻ trắng nằm ở vị trí chẵn thì các thẻ đen nằm ở vị trí lẻ, ta có $5! \cdot 5!$ cách xếp khác nhau.

Vậy có tất cả $5! \cdot 5! + 5! \cdot 5! = 28800$ cách. □

Bài 6. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán một tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy? **ĐS:** 1200

Lời giải.

— Chọn bất kì 3 tem thư trong 5 tem thư là một tổ hợp chập 3 của 5: C_6^3.

— Chọn bất kì 3 bì thư trong 6 bì thư là một tổ hợp chập 3 của 6: C_6^3.

Mặt khác, khi 3 tem thư này dán lên 3 bì thư ta sẽ có 3! cách dán tem. Vậy có $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 \cdot 3! = 1200$ cách. □

Bài 7. Xếp 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh giống nhau vào một dãy 7 ô trống.

① Hỏi có bao nhiêu cách xếp khác nhau? **ĐS:** 840

② Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 viên bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 viên bi xanh xếp cạnh nhau? **ĐS:** 36

Lời giải.

① Xếp 3 viên bi đỏ (có bán kính khác nhau) vào 7 ô trống. Ta có A_7^3 cách xếp.
Sau đó, xếp 3 viên bi xanh vào 4 còn lại. Ta có C_4^3 cách xếp (vì 3 viên bi xanh giống nhau). Vậy có tất cả $A_7^3 \cdot C_4^3 = 840$ cách xếp.

② Để 3 viên bi đỏ đứng cạnh nhau, 3 viên bi xanh đứng cạnh nhau ta có 6 cách xếp. Sau đó, trong mỗi cách xếp trên ta lại hoán vị các bi đỏ với nhau và các bi xanh với nhau
Ta có 3! cách hoán vị các bi đỏ, vì các bi xanh giống nhau nên khi ta hoán vị 3 viên bi xanh các cách xếp ban đầu vẫn không đổi, vậy số cách xếp để các bi đỏ đứng cạnh nhau và các bi xanh đứng cạnh nhau là
$$6 \cdot 3! \cdot 1 = 36.$$

□

Bài 8. Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 2 cuốn sách môn toán, 4 cuốn sách môn văn, 6 cuốn sách môn Anh văn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp tất cả các cuốn sách cạnh nhau lên một kệ dài? **ĐS:** 207360

Lời giải.

— Có 2! cách xếp 2 cuốn sách toán.

— Có 4! cách xếp 4 cuốn sách văn.

— Có 6! cách xếp 6 cuốn sách Anh văn.

Mỗi lần ta hoán vị 3 nhóm sách này ta có 3! cách xếp mới. Vậy có tất cả $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 3! = 207360$ cách. □

DẠNG 0.13. Bài toán sắp xếp người

Bài 1. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho:

① Bạn C ngồi chính giữa. **ĐS:** 24

② Hai bạn A và E ngồi hai đầu ghế. **ĐS:** 12

Lời giải.

① Xếp C ngồi chính giữa có 1 cách. Xếp A, B, D và E vào 4 vị trí còn lại có $4! = 24$ cách. Suy ra có 24 cách xếp chỗ theo yêu cầu bài toán.

② Xếp A và E ngồi hai đầu ghế có 2! cách. Xếp B, C, D xếp vào 3 vị trí còn lại có 3! cách.
Suy ra có $2! \cdot 3! = 12$ cách xếp chỗ theo yêu cầu bài toán.

□

Bài 2. Có 4 người nam và 3 người nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp họ ngồi thành một hàng sao cho:

① Họ ngồi tùy ý. **ĐS:** 5040

② Nam, nữ xen kẽ với nhau. **ĐS:** 144

Lời giải.

① Nam, nữ ngồi tùy ý có $7! = 5040$ cách.

② Có 4! cách các người nam ngồi, 3! cách người nữ ngồi. Vậy có $4! \cdot 3! = 144$ cách.

□

Bài 3. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh và 3 nam sinh đứng thành 1 hàng dọc để vào lớp sao cho:

① Các học sinh nữ đứng cạnh nhau. **ĐS:** 144

② Nam nữ không đứng cạnh nhau. **ĐS:** 72

Lời giải.

① Các bạn nữ đứng cạnh nhau ta xem như một khối đoàn kết, có 4! cách. Mỗi lần ta hoán vị 3 bạn nữ với nhau ta được cách xếp mới có 3! cách.
Vậy có $3! \cdot 4! = 144$ cách.

② Các bạn nam đứng riêng, ta có 3! cách, các bạn nữ đứng riêng ta có 3! cách.
Mỗi lần ta đổi chỗ hai nhóm nam và nữ ta được 2! cách. Vậy có tất cả $2! \cdot 3! \cdot 3! = 72$ cách.

□

Bài 4. Có 8 học sinh xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau nếu có ba học sinh không chịu rời nhau? **ĐS:** 4320

Lời giải.
Ba học sinh không chịu ròi nhau ta xem như đó là một khối đoàn kết.

- Khối đoàn kết này cùng với 5 học sinh còn lại ta sẽ có 6! cách xếp khác nhau.
- Mỗi lần ta đổi chỗ 3 học sinh trong khối đoàn kết ta được 3! cách xếp khác nhau.

Vậy có tất cả $6! \cdot 3! = 4320$ cách. □

Bài 5. Trong cuộc hội nghị thân mật giữa ba nước Đông Dương, phái đoàn Việt Nam có 5 người, Lào có 4 người và Campuchia có 4 người. Có bao nhiêu cách sắp xếp họ ngồi trên một bàn dài sao cho:

① Các đại biểu ngồi tùy ý. **ĐS:** 622702800

② Những người cùng quốc gia cùng ngồi một chỗ. **ĐS:** 414720

Lời giải.

① Các đại biểu ngồi tùy ý có tất cả là $(5+4+4)! = 13! = 622702800$ cách.

② Đoàn Việt Nam có 5 đại biểu, ta có 5! cách sắp xếp.
Đoàn Lào có 4 đại biểu ta có 4! cách sắp xếp.
Đoàn Campuchia có 4 đại biểu có 4! cách sắp xếp.
Mỗi lần ta đổi chỗ 3 đoàn đại biểu của 3 nước ta có 3! cách sắp xếp khác nhau.
Suy ra có tất cả $5! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 3! = 414720$ cách.

□

Bài 6. Có 8 học sinh được sắp xếp vào 8 chỗ ngồi trên một bàn dài. Có bào nhiêu cách sắp xếp khác nhau nếu như chị Nga không chịu ngồi cạnh anh Duy? **ĐS:** 30240

Lời giải.

- Có 8! cách sắp xếp 8 học sinh ngồi vào 8 chỗ trên một bàn dài, trong đó chứa trường hợp chị Nga và anh Duy ngồi cạnh nhau.
- Trong trường hợp này ta xem chị Nga và anh Duy như một khối thống nhất.
- Khối thống nhất này cùng với 6 học sinh còn lại có 7! cách xếp khác nhau.
- Mỗi lần ta đổi chỗ 2 học sinh Nga, Duy ta được 2! cách xếp khác nhau.

Vậy số cách sắp xếp là $8! - 7! \cdot 2! = 30240$ cách. □

Bài 7. Một hàng ghế dài có 8 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp một đôi vợ chồng ngồi vào 8 ghế trên và vợ luôn ngồi ở bên trái chồng? **ĐS:** 28

Lời giải.
Ghế có đánh số thứ tự từ 1 đến 8.

- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ nhất thì vợ có 7 cách chọn ghế.
- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ hai thì vợ có 6 cách chọn ghế.
- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ ba thì vợ có 5 cách chọn ghế.
- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ tư thì vợ có 4 cách chọn ghế.
- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ năm thì vợ có 3 cách chọn ghế.
- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ sáu thì vợ có 2 cách chọn ghế.
- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ bảy thì vợ có 1 cách chọn ghế.
- Khi chồng ngồi ở ghế số thứ tám thì vợ có 0 cách chọn ghế.

Vậy có tất cả $0+1+2+3+4+5+6+7=28$ cách. □

Bài 8. Có 5 nam và 5 nữ. Có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một bàn dài và xen kẽ nhau? **ĐS:** 28800

Lời giải.

- Nếu có 1 nam ngồi ở vị trí thứ nhất thì kết thúc ở vị trí thứ 10 là một nữ. Vậy có $5!\cdot 5!$ cách xếp.
- Nếu có 1 nữ ngồi ở vị trí thứ nhất thì kết thúc ở vị trí thứ 10 là một nam. Vậy có $5!\cdot 5!$ cách xếp.

Do đó, có $5!\cdot 5!+5!\cdot 5!=28800$ cách. □

Bài 9. Có bao nhiêu cách xếp 6 nam và 6 nữ ngồi xen kẽ quanh một bàn tròn? **ĐS:** 1036800

Lời giải.

- Có $6!$ cách xếp 6 nam.
- Có $6!$ cách xếp 6 nữ.
- Có $2!$ cách xếp khi nam, nữ ngồi đổi chỗ nhau.

Vậy có tất cả $6!\cdot 6!\cdot 2!=1036800$ cách. □

Bài 10. Trong một phòng học có hai bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam, 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:

1. Các học sinh ngồi tùy ý. **ĐS:** 3628800
2. Các học sinh nam ngồi một bàn và các học sinh nữ ngồi một bàn. **ĐS:** 28800

Lời giải.

1. Có 10 học sinh xếp tùy ý vào 10 ghế ta có $10!=3628800$ cách xếp.
2. Các học sinh nam ngồi riêng một bàn có $5!$ cách xếp.
   Các học sinh nữ ngồi một bàn ta có $5!$ cách xếp.
   Mỗi lần đổi chỗ 2 nhóm học sinh nam nữ ta có $2!$ cách ngồi mới. Vậy có tất cả $5!\cdot 5!\cdot 2!=28800$ cách xếp.

□

Bài 11. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc.

① Có bao nhiêu cách xếp khác nhau? **ĐS:** 3628800

② Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau? **ĐS:** 2800

Lời giải.

① Xếp tùy ý 5 nam và 5 nữ thành một hàng dọc là một hoán vị của 10 phần tử. Do đó, số cách xếp là $10! = 3628800$ cách.

② Có 5! cách xếp 5 học sinh nam.
+ Có 5! cách xếp 5 học sinh nữ.
+ Có 2! cách xếp 2 nhóm học sinh nam và nữ.
Có $5! \cdot 5! \cdot 2! = 2800$ cách.

□

Bài 12. Có 6 học sinh sẽ được sắp xếp ngồi vào 6 chỗ đã được ghi số thứ tự trên một bàn dài.

① Tìm số cách sắp xếp 6 học sinh này ngồi vào bàn. **ĐS:** 720

② Tìm số cách sắp xếp 6 học sinh này sao cho hai học sinh A và B không được ngồi cạnh nhau. **ĐS:** 480

Lời giải.

① Mỗi cách sắp xếp là một hoán vị 6 phần tử nên số cách sắp xếp là: $6! = 720$ cách.

② Ta tìm số cách sắp xếp mà 2 học sinh A và B ngồi cạnh nhau. Hai học sinh A và B ngồi cạnh nhau ta xem đó là một khối thống nhất, khối thống nhất này cùng với 4 học sinh còn lại sẽ có 5! cách sắp xếp. Mỗi cách sắp xếp ở trên, hoán vị 2 học sinh ta sẽ có 2! cách sắp xếp mới. Do đó theo quy tắc nhân suy ra có $5! \cdot 2!$ cách sắp xếp 6 học sinh và A, B ngồi cạnh nhau.
Vậy có: $6! - 5! \cdot 2! = 720 - 240 = 480$ cách sắp xếp học sinh và A, B không ngồi cạnh nhau.

□

Bài 13. Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp theo một hàng dọc để đi vào lớp. Hỏi có bao nhiêu cách để có đúng 2 học sinh nam đứng xen kẽ 3 học sinh nữ. (Khi đổi chỗ hai học sinh bất kì cho nhau ta được một cách sắp xếp hàng mới). **ĐS:** 21600

Lời giải.

— Có 5 vị trí cho 3 học sinh nữ đứng cách nhau một vị trí để có thể xem 2 học sinh nam vào.

— Có 3! cách xếp 3 học sinh nữ.

— Có 6! cách xếp 6 học sinh nam.

Suy ra có $5 \cdot 3! \cdot 6! = 21600$ cách. □

Bài 14. Một nhóm gồm 10 học sinh, trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành một hàng dọc sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau? **ĐS:** 120960

(Đại học Cần Thơ, 2001)

Lời giải.

— Cả 7 học sinh nam đứng liền nhau ta xem như một khối thống nhất, khối thống nhất này cùng với 3 học sinh nữ ta sẽ có 4! cách sắp xếp.

— Mỗi lần hoán vị 7 học sinh nam ta sẽ có 7! cách sắp xếp.

Vậy có $4! \cdot 7! = 120960$ cách sắp xếp khác nhau. □

Bài 15. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm 4 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 4 học sinh trường A và 4 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp trong mỗi trường hợp sau:

1. Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau khác trường với nhau. **ĐS:** 1152
2. Bất cứ hai học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau. **ĐS:** 9216

(Đại học Quốc gia TPHCM, khối B,1999)

Lời giải.

1. Ta có:
   - Có $2!$ cách xếp chỗ cho 2 nhóm học sinh trường A và học sinh trường B.
   - Có $4!$ cách xếp chỗ cho 4 học sinh trường A.
   - Có $4!$ cách xếp chỗ cho 4 học sinh trường B.

   Vậy có $2! \cdot 4! \cdot 4! = 1152$ cách xếp.
2. Ta có:
   - Học sinh thứ nhất của trường A ngồi trước, có 8 cách chọn ghế ngồi.
   - Sau đó, xếp 1 học sinh của trường B ngồi đối diện với học sinh trên, có 4 cách chọn 1 học sinh của trường B.
   - Học sinh thứ hai của trường A có 6 chỗ ngồi, có 3 cách chọn học sinh thứ hai của trường B.
   - Lý luận tương tự đến học sinh cuối cùng.

   Vậy có $8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9216$ cách xếp.

□

Bài 16. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:

1. Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau khác trường với nhau. **ĐS:** 1036800
2. Bất cứ hai học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau. **ĐS:** 33177600

(Đại học Quốc gia TPHCM, khối A,1999)

a)

Lời giải.

1. Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau. Điều này chứng tỏ 6 học sinh trường A được chia ra, mỗi ghế có 3 bạn và 6 học sinh trường B cũng được chia ra, mỗi ghế có 3 bạn. Giả thiết trên cũng cho ta biết rằng nếu đầu ghế thứ nhất là học sinh trường B thì cạnh đó là học sinh trường A và đối diện với học sinh trường B là học sinh trường A.

Ghế 1	B	A	B	A	B	A
Ghế 2	A	B	A	B	A	B

Ngược lại, nếu đầu ghế thứ nhất là học sinh trường A thì cạnh đó là học sinh trường B và đối diện với học sinh trường A là học sinh trường B.

Ghế 1	A	B	A	B	A	B
Ghế 2	B	A	B	A	B	A

Như vậy ta có 2! cách sắp xếp 2 nhóm học sinh trường A và trường B.
Với 6 vị trí chỗ ngồi cho học sinh trường A ta có 6! cách sắp xếp họ vào 6 chỗ, 6 học sinh trường B ta có 6! cách xếp họ ngồi vào 6 chỗ.
Vậy có tất cả $2! \cdot 6! \cdot 6! = 1036800$ cách xếp.

2. Giả sử học sinh thứ nhất của trường A ngồi trước: có 12 cách chọn chỗ ngồi. Sau đó, chọn 1 học sinh của trường B ngồi đối diện với học sinh trường A đã ngồi ta có 6 cách chọn 1 học sinh trường B.
Học sinh thứ hai của trường A còn 10 chỗ để chọn: có 10 cách chọn chỗ ngồi cho học sinh thứ hai của trường A.
Chọn học sinh của trường B ngồi đối diện với học sinh thứ hai của trường A: có 5 cách chọn học sinh thứ hai của trường B.
Tiếp tục lý luận như trên đến học sinh cuối cùng.
Như vậy có $12 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 33177600$ cách.

□

Bài 17. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách là các toa I, II, III. Trên sân ga có 4 khách chuẩn bị đi tàu. Biết mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi:

1. Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa. **ĐS:** 99
2. Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách nói trên. **ĐS:** 24

Lời giải.

1. Vì có 4 khách và 3 toa, nên trong 3 toa ít nhất có 1 toa có không ít hơn hai khách lên tàu. Giả sử không ít hơn hai khách lên toa I, ta có các khả năng sau:

— 4 khách lên toa I: có 1 cách.

— 3 khách lên toa I, có C_4^3 cách xếp 3 khách lên toa I, một khách còn lại có 2 cách chọn lên toa II hoặc toa III.

— 2 khách lên toa I, có C_4^2 cách xếp 2 khách lên toa I, hai khách còn lại lên cùng toa (2 khả năng) hoặc lên toa khác nhau (có 2 khả năng) là: $2\mathrm{C}_4^2 + 2\mathrm{C}_4^2$.

Toa II và toa III cũng tương tự như toa I.
Vậy có tất cả:
$$\left(1 + 2\mathrm{C}_4^3 + 2\mathrm{C}_4^2 + 2\mathrm{C}_4^2\right) \cdot 3 = 99 \text{ cách.}$$

2. Ta có:

— Giả sử lúc đầu có 3 vị khách lên toa I, ta có C_4^3 cách sắp xếp chỗ ngồi, 1 vị khách còn lại có 2 cách chọn lên toa II hoặc toa III.

— Nếu có 3 vị khách lên toa II hoặc toa III cũng tương tự như 3 vị khách lên toa I.

Vậy có tất cả là: $3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 2 = 24$ cách sắp xếp.

□

DẠNG 0.14. Bài toán chọn vật, dùng tổ hợp

Bài 1. Một bộ bài có 52 quân trong đó có 4 quân Át.

1. Có bao nhiêu cách rút 3 quân trong 52 quân? **ĐS:** 22100
2. Có bao nhiêu cách rút 3 quân trong 52 quân, trong đó có đúng 1 quân Át? **ĐS:** 4512

Lời giải.

1. Rút bất kì 3 quân trong 52 quân là tổ hợp chập 3 của 52. Vậy có $\mathrm{C}_{52}^3 = 22100$ cách.

② Rút 1 quân Át bất kì trong 4 quân Át là tổ hợp chập 1 của 4: có C_4^1 cách. Hai quân còn lại rút trong 48 quân không có Át là một tổ hợp chập 2 của 48: có C_{48}^2 cách.
Suy ra số cách rút 3 quân có 1 quân Át là $C_4^1 \cdot C_{48}^2 = 4512$ cách.

□

Bài 2. Một cỗ bài có 52 con bài. Có bao nhiêu cách rút ra từ cỗ bài 10 con bài gồm 3 con Cơ, 3 con Rô và 4 con Bích? **ĐS:** 58484140

Lời giải.
Một cỗ bài gồm 13 con Cơ, 13 con Rô, 13 con Chuồn và 13 con Bích.

— Rút bất kì 3 con Cơ trong 13 con Cơ là một tổ hợp chập 3 của 13: C_{13}^3.

— Rút bất kì 3 con Rô trong 13 con Rô là một tổ hợp chập 3 của 13: C_{13}^3.

— Rút bất kì 4 con Bích trong 13 con Bích là một tổ hợp chập 4 của 13: C_{13}^4.

Vậy số cách rút 10 con bài là: $C_{13}^3 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^4 = 58484140$ cách. □

Bài 3. Trong một hộp bánh trung thu có 6 loại bánh thịt và 4 loại bánh đậu xanh. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 bánh để phát cho các em thiếu nhi nếu:

① Lấy tùy ý các loại bánh trung thu trong hộp trên. **ĐS:** 210

② Có đúng 4 loại bánh thịt. **ĐS:** 90

Lời giải.

① Lấy tùy ý 6 bánh trong $(6 + 4)$ bánh trên là một tổ hợp chập 6 của 10: $C_{10}^6 = 210$ cách.

② Chọn tùy ý 4 bánh thịt trong 6 bánh thịt là một tổ hợp chập 2 của 4: C_4^2.
Suy ra số cách chọn là $C_6^4 \cdot C_4^2 = 90$ cách.

□

Bài 4. Một hộp có 3 bi xanh, 4 bi đỏ, 5 bi vàng. Ta lấy ra từ đó 6 viên bi. Hỏi có bao nhiêu cách lấy khác nhau để có:

① Có 6 viên bi bất kì. **ĐS:** 924

② Có đúng 2 bi xanh và 1 bi đỏ. **ĐS:** 120

Lời giải.

① Có tất cả 12 viên bi. Lấy 6 viên bi bất kì trong 12 viên bi là một tổ hợp chập 6 của 12: $C_{12}^6 = 924$ cách.

② Chọn bất kì 2 bi xanh trong 3 bi xanh là một tổ hợp chập 2 của 3: C_3^2.
Chọn bất kì 1 bi đỏ trong 4 bi đỏ là một tổ hợp chập 1 của 4: C_4^1.
Chọn bất kì 3 bi vàng trong 5 bi vàng là một tổ hợp chập 3 của 5: C_5^3.
Vậy có tất cả $C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_5^3 = 120$ cách.

□

Bài 5. Một bạn học sinh có 7 cuốn sách gồm 3 cuốn toán, 2 cuốn lý, 2 cuốn hóa, mỗi buổi học lấy ra 3 cuốn.

① Có bao nhiêu cách lấy sao cho mỗi loại có đúng 1 cuốn? **ĐS:** 12

② Có bao nhiêu cách lấy sao cho mỗi lần lấy có đúng 2 quyển sách toán? **ĐS:** 12

Lời giải.

① Chọn 1 cuốn bất kì trong 3 cuốn sách toán, ta có C_3^1 cách chọn.
Chọn 1 cuốn bất kì trong 2 cuốn sách lý, ta có C_2^1 cách chọn.
Chọn 1 cuốn bất kì trong 2 cuốn sách hóa, ta có C_2^1 cách chọn.
Vậy số cách chọn là $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 12$ cách.

② Chọn bất kì 2 quyển sách toán trong 3 quyển sách toán là một tổ hợp chập 2 của 3: C_3^2.
Quyển còn lại chọn bất kì trong $(2+2)$ quyển ta có C_4^1.
Suy ra số cách chọn là $C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$ cách.

□

Bài 6. Trong một lô hàng có 10 quạt bàn và 5 quạt trần.

① Có bao nhiêu cách lấy 5 quạt trong đó có 3 quạt bàn? **ĐS:** $C_{10}^3 \cdot C_5^2$

② Có bao nhiêu cách lấy 4 quạt trong đó có ít nhất 2 quạt bàn? **ĐS:** 1260

Lời giải.

① Chọn bất kì 3 quạt bàn trong 10 quạt bàn là một tổ hợp chập 3 của 10: C_{10}^3.
Chọn 2 quạt còn lại trong 5 quạt trần là một tổ hợp chập 2 của 5: C_5^2.
Vậy số cách lấy là $C_{10}^3 \cdot C_5^2$ cách.

② Có $C_{10}^2 \cdot C_5^2$ cách chọn trong đó có 2 quạt bàn và 2 quạt trần.

— **Cách 1.** Có $C_{10}^3 \cdot C_5^1$ cách chọn trong đó có 3 quạt bàn và 1 quạt trần.
Có $C_{10}^4 \cdot C_5^0$ cách chọn trong đó có 4 quạt bàn và không có quạt trần.
Vậy có $C_{10}^2 \cdot C_5^2 + C_{10}^3 \cdot C_5^1 + C_{10}^4 \cdot C_5^0 = 1260$ cách.

— **Cách 2.** Có C_{15}^4 cách chọn 4 quạt bất kì, trong đó có $C_{10}^1 \cdot C_5^3$ cách chọn có 1 quạt bàn và 3 quạt trần, $C_{10}^0 \cdot C_5^4$ cách chọn không có quạt bàn và 4 quạt trần.

Do đó có $C_{15}^4 - C_{10}^1 \cdot C_5^3 - C_{10}^0 \cdot C_5^4 = 1260$ cách.

□

Bài 7. Có 8 bi xanh, 5 bi đỏ, 3 bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ đó ra 4 viên bi sao cho:

① Có đúng 2 bi xanh. **ĐS:** 784

② Số bi xanh bằng số bi đỏ. **ĐS:** 400

Lời giải.

① Chọn 2 bi xanh trong 8 bi xanh là một tổ hợp chập 2 của 8: C_8^2.
Hai viên bi còn lại chọn bất kì trong 5 bi đỏ và 3 bi vàng, tức là một tổ hợp chập 2 của 8: C_8^2.
Vậy số cách chọn $C_8^2 \cdot C_8^2 = 784$ cách.

② Có $C_8^2 \cdot C_5^2$ cách chọn có 2 bi xanh và 2 bi đỏ.
Có $C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2$ cách chọn có 1 bi xanh, 1 bi đỏ và 2 bi vàng.
Vậy có $C_8^2 \cdot C_5^2 + C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 = 400$ cách.

□

Bài 8. Có 5 bi xanh, 4 bi trắng và 3 bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy 6 viên bi có đúng 2 màu? **ĐS:** 119

Lời giải.

— **Trường hợp 1.** Lấy 6 viên bi gồm màu xanh và màu trắng.
Có $C_5^5 \cdot C_4^1 + C_5^4 \cdot C_4^2 + C_5^3 \cdot C_4^3 + C_5^2 \cdot C_4^4 = 84$ cách (hay C_9^6).

— **Trường hợp 2.** Lấy 6 viên bi gồm màu xanh và màu vàng.
Có $C_5^5 \cdot C_3^1 + C_5^4 \cdot C_3^2 + C_5^3 \cdot C_3^3 = 28$ cách (hay C_8^6).

— **Trường hợp 3.** Lấy 6 viên bi gồm màu trắng và màu vàng.
Có $C_4^4 \cdot C_3^2 + C_4^3 \cdot C_3^3 = 7$ cách (hay C_7^6).

Vậy có $84 + 28 + 7 = 119$ cách. □

Bài 9. Có 6 cuốn sách khác nhau trong đó có cuốn Giải tích tổ hợp. Lấy có thứ tự từ đó ra 4 cuốn. Có bao nhiêu cách lấy nếu:

1. Trong 4 cuốn đó phải có cuốn Giải tích tổ hợp. **ĐS:** 240
2. Trong 4 cuốn đó không có cuốn Giải tích tổ hợp. **ĐS:** 120

Lời giải.

1. Giả sử ta rút được cuốn Giải tích tổ hợp, 3 cuốn còn lại chọn trong bất kì 5 cuốn là một tổ hợp chập 3 của 5: C_5^3.
Mặt khác ta lại có 4! cách sắp xếp thứ tự 4 cuốn đã chọn, nên số cách lấy là $C_5^3 \cdot 4! = 240$ cách.
2. Lấy có thứ tự 4 cuốn trong 6 cuốn là một chỉnh hợp chập 4 của 6: A_6^4 trong đó có chứa $C_5^3 \cdot 4!$ trường hợp rút có cuốn Giải tích tổ hợp.
Vậy có $A_6^4 - C_5^3 \cdot 4! = 120$ cách.

□

Bài 10. Trong một kì thi, một học sinh phải trả lời 7 trong 10 câu hỏi.

1. Có bao nhiêu cách chọn nếu 4 câu hỏi đầu là bắt buộc? **ĐS:** 20
2. Nếu chọn tùy ý? **ĐS:** 120

Lời giải.

1. Nếu 4 câu hỏi đầu là bắt buộc, 3 câu còn lại chọn bất kì trong 6 câu hỏi không bắt buộc là một tổ hợp chập 3 của 6: $C_6^3 = 20$ cách.
2. Chọn bất kì 7 câu trong 10 câu là một tổ hợp chập 7 của 10: $C_{10}^7 = 120$ cách.

□

Bài 11. Có 15 chữ cái gồm 3 nguyên âm và 12 phụ âm. Có thể tạo ra nhiều chữ (không cần nghĩa) gồm 6 kí tự chứa

1. Đúng 2 nguyên âm? **ĐS:** 1069200
2. Có ít nhất 1 nguyên âm? **ĐS:** 2938320

Lời giải.

1. Có C_3^2 cách chọn 2 nguyên âm.
Có C_{12}^4 cách chọn 4 phụ âm.
Có 6! cách hoán vị 6 kí tự để tạo thành chữ mới.
Vậy ta có: $C_3^2 \cdot C_{12}^4 \cdot 6! = 1069200$ chữ.
2. Cách 1: Có C_{15}^6 cách chọn 6 kí tự.
Có 6! cách hoán vị 6 kí tự.
Suy ra có tổng cộng là $C_{15}^6 \cdot 6!$ chữ.
Có $C_{12}^6 \cdot C_3^0$ cách chọn có 6 phụ âm và 0 nguyên âm.
Suy ra có $C_{12}^6 \cdot C_3^0 \cdot 6!$ chữ không có nguyên âm.
Vậy có $C_{15}^6 \cdot 6! - C_{12}^6 \cdot C_3^0 \cdot 6! = 2938320$ chữ.

Cách 2: Có $C_3^1 \cdot C_{12}^5 \cdot 6!$ chữ có 1 nguyên âm và 5 phụ âm.
Có $C_3^2 \cdot C_{12}^4 \cdot 6!$ chữ có 2 nguyên âm và 4 phụ âm.
Có $C_3^3 \cdot C_{12}^3 \cdot 6!$ chữ có 3 nguyên âm và 3 phụ âm.
Vậy có $C_3^1 \cdot C_{12}^5 \cdot 6! + C_3^2 \cdot C_{12}^4 \cdot 6! + C_3^3 \cdot C_{12}^3 \cdot 6! = 2938320$ chữ.

□

Bài 12. Bảng chữ cái có 26 kí tự trong đó có 5 nguyên âm, có bao nhiêu chữ gồm 6 kí tự trong đó có 3 phụ âm khác nhau và 3 nguyên âm khác nhau sao cho

1. Chữ đó chứa a và b? **ĐS:** 820800
2. Chữ đó bắt đầu bằng a và kết thúc bằng 2 chữ b, c (không có thứ tự)? **ĐS:** 1368

Lời giải.

1. Vì chữ a là nguyên âm nên chọn 2 nguyên âm trong 4 nguyên âm còn lại là một tổ hợp chập 2 của 4, do đó số cách chọn là C_4^2.
   Vì chữ b là phụ âm nên chọn 2 phụ âm trong 20 phụ âm còn lại là một tổ hợp chập 2 của 20, do đó số cách chọn là C_{20}^2.
   Mặt khác, có 6! hoán vị 6 chữ cái để có một chữ mới nên có 6! cách hoán vị.
   Vậy có $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{20}^2 \cdot 6! = 820800$ chữ thỏa mãn yêu cầu.
2. Vì a là nguyên âm, nên việc chọn 2 nguyên âm trong 4 nguyên âm còn lại là một tổ hợp chập 2 của 4, do đó số cách chọn là C_4^2.
   Vì chữ b, c là phụ âm, nên việc chọn 1 phụ âm trong 19 phụ âm còn lại là một tổ hợp chập 1 của 19, do đó số cách chọn là C_{19}^1.
   Mà có 3! hoán vị 3 chữ số ở giữa để tạo ra chữ mới. b, c không có thứ tự nên ta có 2! cách hoán vị để tạo ra chữ mới.
   Vậy có tất cả $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{19}^1 \cdot 3! \cdot 2! = 1368$ chữ thỏa mãn yêu cầu.

□

Bài 13. Có 26 chữ cái gồm 21 phụ âm và 5 nguyên âm.

1. Có bao nhiêu chữ gồm 6 kí tự trong đó chứa 3 phụ âm khác nhau và 3 nguyên âm khác nhau? **ĐS:** 9576000
2. Trong các chữ ở câu a, có bao nhiêu chữ bằng đầu bằng D và kết thúc bằng E? **ĐS:** 27360
3. Trong các chữ ở câu a, có bao nhiêu chữ chứa cả C, D và E? **ĐS:** 82080

Lời giải.

1. — Có C_{21}^3 cách chọn phụ âm.
   — Có C_5^3 cách chọn nguyên âm.
   — Có 6! hoán vị 6 kí tự.

   Suy ra có $\mathrm{C}_{21}^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 6! = 9576000$ chữ.
2. D là phụ âm $\Rightarrow$ Có C_{20}^2 cách chọn 2 phụ âm còn lại.
   E là nguyên âm $\Rightarrow$ Có C_4^2 cách chọn 2 nguyên âm còn lại.
   Có 4! hoán vị 4 chữ ở giữa D và E.
   $\Rightarrow$ Có $\mathrm{C}_{20}^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot 4! = 27360$ chữ.
3. C, D là 2 phụ âm $\Rightarrow$ Có C_{19}^1 cách chọn 1 phụ âm còn lại.
   E là nguyên âm $\Rightarrow$ Có C_4^2 cách chọn 2 nguyên âm còn lại.
   Có 6! cách hoán vị 6 kí tự.
   $\Rightarrow$ Có $\mathrm{C}_{19}^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot 6! = 82080$ chữ.

□

Bài 14. Một hộp đựng 12 bóng đèn trong đó có 4 bóng đèn bị hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng đèn (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Có bao nhiêu cách lấy để có 1 bóng bị hỏng? **ĐS:** 112

Lời giải.

— Có C_4^1 cách chọn 1 bóng đèn bị hỏng.

— Có C_8^2 cách chọn 2 bóng đèn không bị hỏng.

Vậy có $C_4^1 \cdot C_8^2 = 112$ cách. □

Bài 15. Có một hộp đựng 2 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng, 5 viên bi vàng chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó có số viên bi lấy ra không đủ cả ba màu? **ĐS:** 105

Lời giải.

— Có C_{10}^4 cách chọn 4 viên bi.

— Có $C_5^2C_2^1C_3^1$ cách chọn 4 viên bi trong đó có 2 bi vàng, 1 bi đỏ, 1 bi trắng.

— Có $C_5^1C_2^2C_3^1$ cách chọn 4 viên bi trong đó có 1 bi vàng, 2 bi đỏ, 1 bi trắng.

— Có $C_5^1C_2^1C_3^2$ cách chọn 4 viên bi trong đó có 1 bi vàng, 1 bi đỏ, 2 bi trắng.

Vậy có $C_{10}^4 - C_5^2C_2^1C_3^1 - C_5^1C_2^2C_3^1 - C_5^1C_2^1C_3^2 = 105$ cách chọn. □

Bài 16. Có 9 viên bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau.

1. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có đúng 2 viên bi đỏ? **ĐS:** 7150
2. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ? **ĐS:** 3045

Lời giải.

1. — Có C_5^2 cách chọn ra 2 viên bi đỏ.

   — Có C_{13}^4 cách chọn 4 viên bi còn lại.

   Vậy có $C_5^2 \cdot C_{13}^4 = 7150$ cách chọn 6 viên bi có đúng 2 bi đỏ.

2. — Có $C_9^3C_5^3$ cách chọn 6 viên có 3 xanh, 3 đỏ và 0 vàng.

   — Có $C_9^2C_5^2C_4^2$ cách chọn 6 viên có 2 xanh, 2 đỏ và 2 vàng.

   — Có $C_9^1C_5^1C_4^4$ cách chọn 6 viên có 1 xanh, 1 đỏ và 4 vàng.

   Vậy số cách chọn 6 viên bi trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ là

$$C_9^3C_5^3 + C_9^2C_5^2C_4^2 + C_9^1C_5^1C_4^4 = 840 + 2160 + 45 = 3045 \text{ (cách)}.$$

□

Bài 17. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ ba màu? **ĐS:** 645

Lời giải.
Hộp đựng tất cả 15 viên bi, nên số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi là C_{15}^4.
Ta sẽ tìm số cách chọn 4 viên bi có đủ ba màu, có các trường hợp sau

— Trường hợp chứa 2 đỏ, 1 trắng, 1 vàng có $C_4^2C_5^1C_6^1$ cách chọn.

— Trường hợp chứa 1 đỏ, 2 trắng, 1 vàng có $C_4^1C_5^2C_6^1$ cách chọn.

— Trường hợp chứa 1 đỏ, 1 trắng, 2 vàng có $C_4^1C_5^1C_6^2$ cách chọn.

Vậy số cách chọn 4 viên bi không đủ ba màu là

$$C_{15}^4 - C_4^2C_5^1C_6^1 - C_4^1C_5^2C_6^1 - C_4^1C_5^1C_6^2 = 645 \text{ cách chọn.}$$

□

Bài 18. Một người muốn chọn 6 bông hoa từ 3 bó hoa để cắm vào một bình hoa. Bó thứ nhất có 10 bông hồng, bó thứ hai có 6 bông thược dược và bó thứ ba có 4 bông cúc.

1. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 38760
2. Nếu người đó muốn chọn đúng 2 bông hồng, 2 bông thược dược và 2 bông cúc thì người đó có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 4050

Lời giải.

1. Chọn bất kì 6 bông trong tổng số $(10+6+4)$ bông là một tổ hợp chập 6 của 20:
$$C_{20}^{6} = \frac{20!}{6! \cdot 14!} = 38760 \text{ cách chọn.}$$
2. Chọn bất kì 2 bông hồng trong 10 bông hồng là một tổ hợp chập 2 của 10: C_{10}^{2};
Chọn bất kì 2 bông thược dược trong 6 bông thược dược là một tổ hợp chập 2 của 6: C_{6}^{2};
Chọn bất kì 2 bông cúc trong 4 bông cúc là một tổ hợp chập 2 của 10: C_{4}^{2}.
Vậy có tất cả: $C_{10}^{2}C_{6}^{2}C_{4}^{2} = 4050$ cách chọn.

□

Bài 19. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn ra một bó hoa gồm 7 bông.

1. Có bao nhiêu cách chọn một bó hoa trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ? **ĐS:** 112
2. Có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ? **ĐS:** 150

(Đại học Quốc gia Tp. HCM, khối D, đợt 2, 2000)

Lời giải.

1. Có C_{4}^{1} cách chọn 1 bông hồng đỏ.
Có C_{8}^{6} cách chọn 6 bông hồng còn lại trong số các bông hồng vàng và trắng.
Do đó có $C_{4}^{1} \cdot C_{8}^{6} = 112$ cách chọn 7 bông hồng, trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ.
2. Có $C_{5}^{3} \cdot C_{4}^{3} \cdot C_{3}^{1}$ cách chọn 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng.
Có $C_{5}^{4} \cdot C_{4}^{3} \cdot C_{3}^{0}$ cách chọn 4 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 0 bông hồng trắng.
Có $C_{5}^{3} \cdot C_{4}^{4} \cdot C_{3}^{0}$ cách chọn 3 bông hồng vàng, 4 bông hồng đỏ và 0 bông hồng trắng.
Vậy có $C_{5}^{3} \cdot C_{4}^{3} \cdot C_{3}^{1} + C_{5}^{4} \cdot C_{4}^{3} \cdot C_{3}^{0} + C_{5}^{3} \cdot C_{4}^{4} \cdot C_{3}^{0} = 120 + 20 + 10 = 150$ cách chọn 7 bông hoa, trong đó có ít nhất 3 bông hồng trắng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

□

Bài 20. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 5 cuốn sách văn học, 4 cuốn sách âm nhạc và 3 cuốn sách hội họa. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn.

1. Giả sử thầy giáo chỉ muốn tặng cho các học sinh trên những cuốn sách thuộc hai thể loại văn học và âm nhạc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tặng? **ĐS:** 60480
2. Giả sử thầy giáo muốn rằng sau khi tặng xong, mỗi một trong ba thể loại văn học, âm nhạc và hội họa đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tặng? **ĐS:** 579600

(Đại học Quốc gia Tp. HCM, khối A, đợt 2, 2000)

Lời giải.

1. Cách 1:
Chọn bất kì 6 cuốn sách từ 5 cuốn sách văn học và 4 cuốn sách âm nhạc là một tổ hợp chập 6 của 9.
Ta có C_{9}^{6} cách lấy 6 cuốn sách mà không có sách hội họa, với mỗi cách lấy ta có 6! cách tặng. Vậy số cách tặng là $C_{9}^{6} \cdot 6! = 60480$ cách.

Cách 2:
Số cách tặng là số cách chọn 6 cuốn sách từ 9 cuốn sách (gồm 5 cuốn sách văn học, 4 cuốn sách âm nhạc) có kể thứ tự. Vậy số cách tặng là $A_9^6 = 60480$ cách.

(2) Có C_{12}^6 cách chọn 6 cuốn sách bất kì, trong đó

— Có $C_5^5 \cdot C_7^1$ cách chọn 6 cuốn sách trong đó đó 5 cuốn văn học.
— Có $C_4^4 \cdot C_8^2$ cách chọn 6 cuốn sách trong đó đó 4 cuốn âm nhạc.
— Có $C_3^3 \cdot C_9^3$ cách cọn 6 cuốn sách trong đó đó 3 cuốn hội họa.

Vậy có $C_{12}^6 - C_5^5 \cdot C_7^1 - C_4^4 \cdot C_8^2 - C_3^3 \cdot C_9^3 = 805$ cách chọn 6 cuốn sách mà sau khi chọn xong mỗi một trong 3 loại sách văn học, âm nhạc và hội họa còn lại ít nhất một cuốn.
Với mỗi cách chọn ta có 6! cách tặng. Vậy số cách tặng thỏa đề bài là $805 \cdot 6! = 579600$ cách.

□

DẠNG 0.15. Bài toán chọn về người - Dùng tổ hợp

Bài 1. Một tổ gồm 6 nam và 4 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một ban đại diện gồm 5 người sao cho

(1) Không phân biệt nam nữ. **ĐS:** 252

(2) Có đúng 2 nữ. **ĐS:** 120

Lời giải.

(1) Chọn 5 người không xếp thứ tự trong 10 người là một tổ hợp chập 5 của 10. Vậy ta có $C_{10}^5 = 252$ cách.

(2) Chọn 2 nữ trong 4 nữ là một tổ hợp chập 2 của 4. Vậy có C_4^2 cách.
Chọn 3 nam trong 6 nam là một tổ hợp chập 3 của 6. Vậy có C_6^3 cách.
Do đó có $C_4^2 \cdot C_6^3 = 120$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 2. Có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ.

(1) Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 6 người? **ĐS:** 3003

(2) Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 6 người, trong đó có nhiều nhất là 2 nữ? **ĐS:** 1414

Lời giải.

(1) Chọn không xếp thứ tự 6 người trong 14 người là một tổ hợp chập 6 của 14.
Vậy ta có $C_{14}^6 = 3003$ cách chọn.

(2) Chọn 2 nữ trong 6 nữ là một tổ hợp chập 2 của 6. Vậy ta có C_6^2 cách.
Chọn 4 nam trong 8 nam là một tổ hợp chập 4 của 8. Vậy ta có C_8^4 cách.
Do đó, có tổng cộng $C_6^2 \cdot C_8^4$ cách chọn 6 người trong đó có 4 nam và 2 nữ.
Tương tự, có $C_6^1 \cdot C_8^5$ cách chọn 6 người trong đó có 5 nam và 1 nữ và $C_6^0 \cdot C_8^6$ cách chọn 6 người trong đó không có nữ.
Vậy tổng số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$C_6^2 \cdot C_8^4 + C_6^1 \cdot C_8^5 + C_6^0 \cdot C_8^6 = 1050 + 336 + 28 = 1414 \text{ (cách)}.$$

□

DẠNG 0.16. Bài toán chọn về người - Dùng tổ hợp

Bài 3. Một tổ gồm 6 nam và 4 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một ban đại diện gồm 5 người sao cho

1. Không phân biệt nam nữ?
2. Có đúng 2 nữ?

ĐS: 1) 252, 2) 120

Lời giải.

1. Số cách chọn 5 người không thứ tự trong 10 người bằng số tổ hợp chập 5 của 10.
   Do đó, có $\mathrm{C}_{10}^5 = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$ cách.
2. Số cách chọn 2 nữ trong 4 nữ bằng số tổ hợp chập 2 của 4. Do đó, có C_4^2 cách.
   Số cách chọn 3 nam trong 6 nam bằng số tổ hợp chập 3 của 6. Do đó, có C_6^3 cách.
   Vậy, có $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_6^3 = 120$ cách thỏa mãn.

□

Bài 4. Có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ.

1. Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 6 người?
2. Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 6 người, trong đó có nhiều nhất là 2 nữ?

ĐS: 1) 3003, 2) 1414

Lời giải.

1. Số cách chọn không thứ tự 6 người trong 14 người bằng số tổ hợp chập 6 của 14.
   Do đó, có $\mathrm{C}_{14}^6 = 3003$ cách.
2. Số cách chọn 2 nữ trong 6 nữ bằng số tổ hợp chập 2 của 6. Do đó, có C_6^2 cách.
   Số cách chọn 4 nam còn lại trong 8 nam bằng số tổ hợp chập 4 của 8. Do đó, có C_8^4 cách.
   Vậy, trong trường hợp này có $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_8^4$ cách.
   Tương tự ta có
   $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_8^5$ cách chọn trong đó có đúng 1 nữ.
   $\mathrm{C}_6^0 \cdot \mathrm{C}_8^6$ cách chọn trong đó không có bạn nữ nào.
   Vậy, có tất cả $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_8^4 + \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_8^5 + \mathrm{C}_8^6 = 1050 + 336 + 28 = 1414$ cách.

□

Bài 5. Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách bầu một ban cán sự gồm 6 người sao cho

1. Số nam và nữ bằng nhau?
2. Có ít nhất 5 nữ?

ĐS: 1) 136800, 2) 5250

Lời giải.

1. Số nam, nữ bằng nhau nên nam có 3 người và nữ có 3 người trong ban cán sự.
   Số cách chọn không thứ tự 3 nam trong 20 nam bằng số tổ hợp chập 3 của 20. Do đó, có C_{20}^3 cách.
   Số cách chọn không thứ tự 3 nữ trong 10 nữ bằng số tổ hợp chập 3 của 10. Do đó, có C_{10}^3 cách.
   Vậy, số cách chọn thỏa mãn là $\mathrm{C}_{20}^3 \cdot \mathrm{C}_{10}^3 = 136800$ cách.
2. Có $\mathrm{C}_{10}^5 \cdot \mathrm{C}_{20}^1$ cách chọn có 5 nữ và 1 nam.
   Có $\mathrm{C}_{10}^6 \cdot \mathrm{C}_{20}^0$ cách chọn có 6 nữ và 0 nam.
   Do đó, có $\mathrm{C}_{10}^5 \cdot \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{10}^6 \cdot \mathrm{C}_{20}^0 = 5250$ cách thỏa mãn.

□

Bài 6. Trong một buổi biểu diễn văn nghệ có 8 nam và 6 nữ. Chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp lên biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy? **ĐS:** 40320

Lời giải.

— Số cách chọn có thứ tự 3 nam trong 8 nam bằng số chỉnh hợp chập 3 của 8. Do đó, có A_8^3 cách.

— Số cách chọn có thứ tự 3 nữ trong 6 nữ bằng số chỉnh hợp chập 3 của 6. Do đó, có A_6^3 cách.

Vậy, có $A_8^3 \cdot A_6^3 = 40320$ cách chọn thỏa mãn. □

Bài 7. Một tổ có 10 nam và 5 nữ. Cần lập một ban đại diện gồm 4 người. Có bao nhiêu cách lập để

1. Có nhiều nhất 2 nữ?
2. Có ít nhất 3 nam?

ĐS: 1) 1260, 2) 810

Lời giải.

1. Có $C_5^2 \cdot C_{10}^2$ cách chọn có 2 nữ và 2 nam.
Có $C_5^1 \cdot C_{10}^3$ cách chọn có 1 nữ và 3 nam.
Có $C_5^0 \cdot C_{10}^4$ cách chọn có 0 nữ và 4 nam.
Do đó, có tất cả $C_5^2 \cdot C_{10}^2 + C_5^1 \cdot C_{10}^3 + C_5^0 \cdot C_{10}^4 = 1260$ cách.

2. Có $C_{10}^3 \cdot C_5^1$ cách chọn có 3 nam và 1 nữ.
Có $C_{10}^4 \cdot C_5^0$ cách chọn có 4 nam và 0 nữ.
Do đó, có $C_{10}^3 \cdot C_5^1 + C_{10}^4 \cdot C_5^0 = 810$ cách.

□

Bài 8. Một tổ học sinh gồm 6 nam và 5 nữ. Chọn từ đó ra 3 học sinh làm vệ sinh. Có bao nhiêu cách chọn trong đó có ít nhất 1 nam sinh? **ĐS:** 155

Lời giải.

Cách 1. Có $C_6^1 \cdot C_5^2$ cách chọn có 1 nam và 2 nữ.
Có $C_6^2 \cdot C_5^1$ cách chọn có 2 nam và 1 nữ.
Có $C_6^3 \cdot C_5^0$ cách chọn có 3 nam và 0 nữ.
Do đó, có tất cả $C_6^1 \cdot C_5^2 + C_6^2 \cdot C_5^1 + C_6^3 \cdot C_5^0 = 155$ cách.

Cách 2. Chọn bất kì 3 học sinh trong tổng số 11 học sinh có C_{11}^3 cách.
Chọn 3 nữ sinh bất kì trong 5 nữ sinh có C_5^3 cách.
Do đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_{11}^3 - C_5^3 = 155$ cách.

□

Bài 9. Một lớp có 15 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Chọn từ đó ra 4 học sinh để lập một tốp ca. Có bao nhiêu cách chọn khác nhau

1. Nếu có ít nhất 2 nữ?
2. Có đúng 2 nữ?

ĐS: 1) 19215, 2) 11025

Lời giải.

① Cách 1. Có $C_{15}^2 \cdot C_{15}^2$ cách chọn có 2 nữ và 2 nam.
Có $C_{15}^3 \cdot C_{15}^1$ cách chọn có 3 nữ và 1 nam.
Có $C_{15}^4 \cdot C_{15}^0$ cách chọn có 4 nữ và 0 nam.
Do đó, có tất cả $C_{15}^2 \cdot C_{15}^2 + C_{15}^3 \cdot C_{15}^1 + C_{15}^4 \cdot C_{15}^0 = 19215$ cách.

Cách 2. Có C_{30}^4 cách chọn 4 học sinh bất kì.
Trong đó có chứa trường hợp $C_{15}^1 \cdot C_{15}^3$ (1 nữ và 3 nam) và trường hợp $C_{15}^0 \cdot C_{15}^4$ (0 nữa và 4 nam).
Do đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_{30}^4 - C_{15}^1 \cdot C_{15}^3 - C_{15}^0 \cdot C_{15}^4 = 19215$ cách.

② Chọn 2 học sinh nữ trong tổng số 15 học sinh nữ có C_{15}^2 cách.
Chọn 2 học sinh nam trong tổng số 15 học sinh nam có C_{15}^2 cách.
Do đó, có $C_{15}^2 \cdot C_{15}^2 = 11025$ cách.

□

Bài 10. Một lớp có 20 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh để được 3 học sinh cùng phái? **ĐS:** 1595

Lời giải.

— Có C_{20}^3 cách chọn 3 học sinh nam.

— Có C_{15}^3 cách chọn 3 học sinh nữ.

Do đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_{20}^3 + C_{15}^3 = 1595$ cách. □

Bài 11. Một lớp có 20 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh để được 3 học sinh khác phái? **ĐS:** 4950

Lời giải.

— Có $C_{20}^2 \cdot C_{15}^1$ cách chọn có 2 nam và 1 nữ.

— Có $C_{20}^1 \cdot C_{15}^2$ cách chọn có 1 nam và 2 nữ.

Do đó, có tất cả $C_{20}^2 \cdot C_{15}^1 + C_{20}^1 \cdot C_{15}^2 = 4950$ cách. □

Bài 12. Một lớp có 20 học sinh, trong đó có Duân. Có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh làm vệ sinh, trong đó nhất thiết phải có Duân? **ĐS:** 3876

Lời giải.
Trong 5 người được chọn luôn có Duân, chọn 4 học sinh còn lại chọn trong 19 học sinh có

$$C_{19}^4 = 3876 \text{ cách.}$$

□

Bài 13. Một nhóm học sinh có 5 trai và 6 gái. Chọn từ đó ra 4 em học sinh để làm ban đại diện. Có bao nhiêu cách chọn trong đó có ít nhất 2 trai và 1 gái? **ĐS:** 210

Lời giải.

— Có $C_5^2 \cdot C_6^2$ cách chọn có 2 trai và 2 gái.

— Có $C_5^3 \cdot C_6^1$ cách chọn có 3 trai và 1 gái.

Do đó, có tất cả $C_5^2 \cdot C_6^2 + C_5^3 \cdot C_6^1 = 210$ cách. □

Bài 14. Một lớp có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Chọn từ đó ra 6 học sinh để lập một tốp ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau

① Nếu có ít nhất 2 nữ?

2. Nếu chọn tùy ý?

ĐS: 1) 5413695, 2) 8145060

Lời giải.

1. Cách 1. Có $C_{15}^2 \cdot C_{30}^4$ cách chọn có 2 nữ và 4 nam.
   Có $C_{15}^3 \cdot C_{30}^3$ cách chọn có 3 nữ và 3 nam.
   Có $C_{15}^4 \cdot C_{30}^2$ cách chọn có 4 nữ và 2 nam.
   Có $C_{15}^5 \cdot C_{30}^1$ cách chọn có 5 nữ và 1 nam.
   Có $C_{15}^6 \cdot C_{30}^0$ cách chọn có 6 nữ và 0 nam.
   Do đó, có tất cả $C_{15}^2 \cdot C_{30}^4 + C_{15}^3 \cdot C_{30}^3 + C_{15}^4 \cdot C_{30}^2 + C_{15}^5 \cdot C_{30}^1 + C_{15}^6 \cdot C_{30}^0 = 5413695$ cách.
   Cách 2. Có C_{45}^6 cách chọn 1 tốp ca tùy ý.
   Trong đó có chứa trường hợp $C_{15}^1 \cdot C_{30}^5$ (1 nữ và 5 nam) và trường hợp $C_{15}^0 \cdot C_{30}^6$ (0 nữ và 6 nam).
   Do đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_{45}^6 - C_{15}^1 \cdot C_{30}^5 - C_{15}^0 \cdot C_{30}^6 = 5413695$ cách.
2. Nếu chọn tùy ý ta sẽ có
$$C_{45}^6 = 8145060 \text{ cách.}$$

□

Bài 15. Một đội văn nghệ có 20 người, trong đó có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho

1. Có đúng 2 nam trong 5 người đó?
2. Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó?

ĐS: 1) 5400, 2) 12900

Lời giải.

1. Số cách chọn 2 nam trong tổng số 10 nam bằng số tổ hợp chập 2 của 10. Do đó, có C_{10}^2 cách.
   Số cách chọn 3 nữ trong tổng số 10 nữ bằng số tổ hợp chập 3 của 10. Do đó, có C_{10}^3 cách.
   Vậy, có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 = 5400$ cách chọn thỏa mãn.
2. Cách 1. Có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$ cách chọn có 2 nam và 3 nữ.
   Có $C_{10}^3 \cdot C_{10}^2$ cách chọn có 3 nam và 2 nữ.
   Có $C_{10}^4 \cdot C_{10}^1$ cách chọn có 4 nam và 1 nữ.
   Do đó, có tất cả $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{10}^1 = 12900$ cách.
   Cách 2. Có C_{20}^5 cách chọn 5 người bất kì.
   Có $C_{10}^1 \cdot C_{10}^4$ cách chọn có 1 nam và 4 nữ.
   Có $C_{10}^0 \cdot C_{10}^5$ cách chọn có 0 nam và 5 nữ.
   Có $C_{10}^5 \cdot C_{10}^0$ cách chọn có 5 nam và 0 nữ.
   Do đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_{20}^5 - C_{10}^1 \cdot C_{10}^4 - C_{10}^0 \cdot C_{10}^5 - C_{10}^5 \cdot C_{10}^0 = 12900$ cách.

□

Bài 16. Từ một tập thể 8 người gồm 5 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một tổ công tác gồm 4 người thỏa điều kiện trong mỗi trường hợp

1. Không có điều kiện gì thêm?
2. Tổ chỉ gồm 4 nam?
3. Tổ phải gồm 2 nam và 2 nữ?

ĐS: 1) 70, 2) 5, 3) 30

Lời giải.

1. Số cách chọn bất kì 4 người trong 8 người bằng số tổ hợp chập 4 của 8. Do đó, có $C_8^4 = 70$ cách.

2. Số cách chọn 4 nam trong 5 nam bằng số tổ hợp chập 4 của 5. Do đó, có $C_5^4 = 5$ cách.

3. Có C_5^2 cách chọn 2 nam.
Có C_3^2 cách chọn 2 nữ.
Do đó, có $C_5^2 \cdot C_3^2 = 30$ cách chọn 4 người có đúng 2 nam và 2 nữ.

□

Bài 17. Một lớp có 20 em học sinh, trong đó có 14 nam và 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập một đội gồm 4 học sinh trong đó có

1. Số nam và nữ bằng nhau?

2. Có ít nhất 1 nữ?

ĐS: 1) 1365, 2) 3844

Lời giải.

1. Có C_{14}^2 cách chọn 2 nam sinh.
Có C_6^2 cách chọn 2 nữ sinh.
Do đó, có $C_{14}^2 \cdot C_6^2 = 1365$ cách.

2. Cách 1. Có $C_6^1 \cdot C_{14}^3$ cách chọn có 1 nữ và 3 nam.
Có $C_6^2 \cdot C_{14}^2$ cách chọn có 2 nữ và 2 nam.
Có $C_6^3 \cdot C_{14}^1$ cách chọn có 3 nữ và 1 nam.
Có $C_6^4 \cdot C_{14}^0$ cách chọn có 4 nữ và 0 nam.
Do đó, có tất cả $C_6^1 \cdot C_{14}^3 + C_6^2 \cdot C_{14}^2 + C_6^3 \cdot C_{14}^1 + C_6^4 \cdot C_{14}^0 = 3844$ cách.

Cách 2. Có C_{20}^4 cách chọn 4 học sinh bất kì, trong đó có C_{14}^4 cách chọn 4 học sinh không có nữ. Do đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_{20}^4 - C_{14}^4 = 3844$ cách.

□

Bài 18. Có 10 học sinh, trong đó có 3 học sinh giỏi, 4 học sinh khá và 3 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên ra một nhóm gồm 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để

1. Trong nhóm được chọn mỗi loại có 1 học sinh?

2. Trong nhóm được chọn không có học sinh trung bình?

ĐS: 1) 36, 2) 35

Lời giải.

1. Có C_3^1 cách chọn 1 học sinh giỏi.
Có C_4^1 cách chọn 1 học sinh khá.
Có C_3^1 cách chọn 1 học sinh trung bình.
Do đó, có $C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 36$ cách chọn 3 học sinh, mỗi loại có 1 học sinh.

2. Trong nhóm được chọn không có học sinh trung bình, nên số cách chọn 3 học sinh là số tổ hợp chập 3 của 7 học sinh giỏi và khá. Do đó số cách chọn là $C_7^3 = 35$ cách chọn.

□

Bài 19. Từ một nhóm học sinh gồm 7 nam và 6 nữ, thầy giáo cần chọn ra 5 em tham dự lễ mít tinh tại trường với yêu cầu có cả nam và nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 1260

Lời giải.

— Có $C_7^1 \cdot C_6^4$ cách chọn 5 học sinh có 1 nam và 4 nữ.

— Có $C_7^2 \cdot C_6^3$ cách chọn 5 học sinh có 2 nam và 3 nữ.

— Có $C_7^3 \cdot C_6^2$ cách chọn 5 học sinh có 3 nam và 2 nữ.

— Có $C_7^4 \cdot C_6^1$ cách chọn 5 học sinh có 4 nam và 1 nữ.

Do đó, có $C_7^1 \cdot C_6^4 + C_7^2 \cdot C_6^3 + C_7^3 \cdot C_6^2 + C_7^4 \cdot C_6^1 = 1260$ cách chọn. □

Bài 20. Một đội văn nghệ có 10 người, trong đó có 6 nữ và 4 nam.

① Có bao nhiêu cách chia đội văn nghệ thành hai nhóm để giao nhiệm vụ khác nhau sao cho mỗi nhóm có số người bằng nhau và mỗi nhóm có số nữ như nhau?

② Có bao nhiêu cách chọn ra 5 người mà trong đó không có quá 1 nam?

ĐS: 1) 120, 2) 66

Lời giải.

① Theo đề thì mỗi nhóm phải có đúng 3 nữ và 2 nam.

— Có C_6^3 cách chọn 3 nữ.

— Có C_4^2 cách chọn 2 nam.

Do đó, có $C_6^3 \cdot C_4^2 = 120$ cách chia 2 nhóm, mỗi nhóm có 5 người gồm 3 nữ và 2 nam.

② **Cách 1.**
Có C_{10}^5 cách chọn 5 người bất kì, trong đó

— Có $C_4^2 \cdot C_6^3$ cách chọn 5 người có 2 nam và 3 nữ.

— Có $C_4^3 \cdot C_6^2$ cách chọn 5 người có 3 nam và 2 nữ.

— Có $C_4^4 \cdot C_6^1$ cách chọn 5 người có 4 nam và 1 nữ.

Do đó, có $C_{10}^5 - C_4^2 \cdot C_6^3 - C_4^3 \cdot C_6^2 - C_4^4 \cdot C_6^1 = 66$ cách chọn 5 người trong đó có không quá 1 nam.
Cách 2.

— Có $C_4^1 \cdot C_6^4$ cách chọn 5 người có 1 nam và 4 nữ.

— Có $C_4^0 \cdot C_6^5$ cách chọn 5 người có 0 nam và 5 nữ.

Do đó, có $C_4^1 \cdot C_6^4 + C_4^0 \cdot C_6^5 = 66$ cách chọn thỏa đề.

□

Bài 21. Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 học sinh khá và 8 học sinh trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ 8 người, để giao nhiệm vụ khác nhau, sao cho ở mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất hai học sinh khá? **ĐS:** 7560

Lời giải.
Ta chọn 8 học sinh thỏa đề bài vào tổ 1, 8 học sinh còn lại tạo thành tổ thứ hai.

— Có $C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_8^5$ cách chọn tổ có 1 học sinh giỏi, 2 học sinh khá và 5 học sinh trung bình.

— Có $C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot C_8^3$ cách chọn tổ có 2 học sinh giỏi, 3 học sinh khá và 3 học sinh trung bình.

— Có $C_3^1 \cdot C_5^3 \cdot C_8^4$ cách chọn tổ có 1 học sinh giỏi, 3 học sinh khá và 4 học sinh trung bình.

— Có $C_3^2 \cdot C_5^2 \cdot C_8^4$ cách chọn tổ có 2 học sinh giỏi, 2 học sinh khá và 4 học sinh trung bình.

Vậy có $C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_8^5 + C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot C_8^3 + C_3^1 \cdot C_5^3 \cdot C_8^4 + C_3^2 \cdot C_5^2 \cdot C_8^4 = 7560$ cách chia tổ. □

Bài 22. Một lớp có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 người trong lớp để đi làm công tác phong trào "Mùa hè xanh". Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 người đó phải có ít nhất

① Hai học sinh nữ và hai học sinh nam?

② Một học sinh nữ và một học sinh nam?

ĐS: 1) 10800, 2) 15000

Lời giải.

a) Có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$ cách chọn 5 học sinh có 2 nữ và 3 nam.
Có $C_{10}^3 \cdot C_{10}^2$ cách chọn 5 học sinh có 3 nữ và 2 nam.
Do đó, có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 = 10800$ cách chọn.

b) Có C_{20}^5 cách chọn 5 học sinh bất kỳ. Trong đó

— Có $C_{10}^0 \cdot C_{10}^5$ cách chọn 5 học sinh có 0 nữ và 5 nam.

— Có $C_{10}^5 \cdot C_{10}^0$ cách chọn 5 học sinh có 5 nữ và 0 nam.

Do đó, có $C_{20}^5 - C_{10}^0 \cdot C_{10}^5 - C_{10}^5 \cdot C_{10}^0 = 15000$ cách chọn.

□

Bài 23. Một chi đoàn có 51 người. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm gồm có

① Một bí thư và một lớp phó học tập?

② Một bí thư và 6 ủy viên?

ĐS: 1) 2550, 2) 810425700

Lời giải.

① Có 51 cách chọn một bí thư.
Có 50 cách chọn một lớp phó học tập.
Do đó, có $50 \cdot 51 = 2550$ cách.

② Có 51 cách chọn một bí thư và C_{50}^6 cách chọn 6 ủy viên.
Do đó, có $51 \cdot C_{50}^6 = 810425700$ cách.

□

Bài 24. Một đội ngủ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nam. Chọn từ đó ra 4 người để dự hội thảo khoa học. Có bao nhiêu cách chọn nếu

① Chọn tùy ý?

② Trong 4 người phải có nữ và phải có đủ 3 bộ môn?

ĐS: 780

Lời giải.

① Chọn tùy ý 4 người trong 16 người là một tổ hợp chập 4 của 16. Do đó, có $C_{16}^4 = 1820$ cách.

② Có $C_5^1 \cdot C_8^1 \cdot C_3^2$ cách chọn 1 nữ vật lý, 1 nam toán học, 2 nam hóa học.
Có $C_5^1 \cdot C_8^2 \cdot C_3^1$ cách chọn 1 nữ vật lý, 2 nam toán học, 1 nam hóa học.
Có $C_5^2 \cdot C_8^1 \cdot C_3^1$ cách chọn 2 nữ vật lý, 1 nam toán học, 1 nam hóa học.
Do đó, có $C_5^1 \cdot C_8^1 \cdot C_3^2 + C_5^1 \cdot C_8^2 \cdot C_3^1 + C_5^2 \cdot C_8^1 \cdot C_3^1 = 780$ cách.

□

Bài 25. Một tổ có 10 học sinh. Chọn từ đó ra 4 học sinh để lập ban đại diện.

① Có bao nhiêu cách chọn?

② Có bao nhiêu cách chọn nếu cô Anh và cậu Tâm không chịu làm việc chung với nhau?

③ Có bao nhiêu cách chọn nếu cậu Oai và cô Hiền phải làm việc chung mới chịu?

ĐS: 1) 210, 2) 182, 3) 98

Lời giải.

1) Chọn bất kì 4 học sinh trong 10 học sinh là một tổ hợp chập 4 của 10, do đó có $C_{10}^4 = 210$ cách.

2) **Cách 1.**
Trong C_{10}^4 có C_8^2 trường hợp cô Anh và cậu Tâm làm việc chung với nhau. Do đó có $C_{10}^4 - C_8^2 = 182$ cách chọn nếu cô Anh và cậu Tâm không làm việc chung với nhau.
Cách 2.

— Có C_8^3 cách chọn trong đó có Anh và không có Tâm.
— Có C_8^3 cách chọn trong đó có cậu Tâm và không có Anh.
— Có C_8^4 cách chọn không có cả Anh lẫn Tâm.

Do đó, có $C_8^3 + C_8^3 + C_8^4 = 182$ cách.

3) **Cách 1.**

— Có C_8^2 cách chọn có cả Oai và Hiền trong ban đại diện.
— Có C_8^4 cách chọn không có cả Oai và Hiền trong ban đại diện.

Do đó, có $C_8^2 + C_8^4 = 98$ cách chọn nếu Oai và Hiền không chịu rời nhau.
Cách 2.
Trong C_{10}^4 có C_8^3 trường hợp có Oai và không có Hiền và có C_8^3 trường hợp có Hiền và không có Oai.
Do đó, có $C_{10}^4 - \left(C_8^3 + C_8^3\right) = 98$ cách nếu Oai và Hiền không chịu rời nhau.

□

Bài 26. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự hội nghị học sinh của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp? **ĐS:** 324

Lời giải.
Cách 1.

— Có $C_2^1 \cdot C_{18}^2$ cách cử 3 người có 1 cán bộ lớp.

— Có $C_2^2 \cdot C_{18}^1$ cách cử 3 người có 2 cán bộ lớp.

Do đó, có $C_2^1 \cdot C_{18}^2 + C_2^2 \cdot C_{18}^1 = 324$ cách.
Cách 2.

— Có C_{20}^3 cách cử 3 người bất kì.

— Trong C_{20}^3 có C_{18}^3 cách cử 3 người không có 2 cán bộ lớp.

Vậy số cách cử 3 người có ít nhất một cán bộ lớp là $C_{20}^3 - C_{18}^3 = 324$ cách. □

Bài 27. Một lớp có 51 học sinh gồm 29 nữ và 22 nam thì có bao nhiêu cách bầu một ban cán sự gồm 5 người nếu

① Mọi người đều vui vẻ tham gia?

② Cậu Huy và cô Thục phải làm việc chung với nhau?

③ Anh Bính và chị Hằng không thể làm việc chung với nhau?

ĐS: 1) 2349060, 2) 1925308, 3)2330636

Lời giải.

① Mọi người đều vui vẻ tham gia ta chọn tùy ý 5 người trong 51 tức là một tổ hợp chập 5 của 51, có $C_{51}^5 = 2349060$ cách.

② Trường hợp cả Huy và Thục cùng tham gia vào ban cán sự, ta có C_{49}^3 cách chọn.
Trường hợp cả Huy và Thục đều không tham gia vào ban cán sự, ta có C_{49}^5 cách chọn.
Do đó, có $C_{49}^3 + C_{49}^5 = 1925308$ cách.

③ Có C_{51}^5 cách chọn ban cán sự trong đó có C_{49}^3 trường hợp anh Bính và chị Hằng cùng tham gia vào ban cán sự. Do đó, có $C_{51}^5 - C_{49}^3 = 2330636$ cách chọn không đồng thời chứa cả Bính và Hằng.

□

Bài 28. Một lớp học có 20 học sinh, cần chọn ra ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 5 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 3255840

Lời giải.

— Có C_{20}^1 cách chọn 1 lớp trưởng.

— Có C_{19}^1 cách chọn 1 lớp phó.

— Có C_{18}^5 cách chọn 5 ủy viên.

Do đó, có $C_{20}^1 \cdot C_{19}^1 \cdot C_{18}^5 = 3255840$ cách. □

Bài 29. Từ một tập thể 14 người gồm 6 nam và 8 nữ trong đó có An và Bình, người ta muốn chọn một tổ công tác gồm 6 người. Tìm số cách chọn trong trường hợp

① Trong tổ phải có cả nam lẫn nữ.

② Trong tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên hơn nữa An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

Lời giải.

1) **Cách 1.**

— Có $C_6^1 \cdot C_8^5$ cách chọn tổ có 1 nam và 5 nữ.
— Có $C_6^2 \cdot C_8^4$ cách chọn tổ có 2 nam và 4 nữ.
— Có $C_6^3 \cdot C_8^3$ cách chọn tổ có 3 nam và 3 nữ.
— Có $C_6^4 \cdot C_8^2$ cách chọn tổ có 4 nam và 2 nữ.
— Có $C_6^5 \cdot C_8^1$ cách chọn tổ có 5 nam và 1 nữ.

Do đó, có $C_6^1 \cdot C_8^5 + C_6^2 \cdot C_8^4 + C_6^3 \cdot C_8^3 + C_6^4 \cdot C_8^2 + C_6^5 \cdot C_8^1 = 2974$ cách chọn tổ.
Cách 2.
Có C_{14}^6 cách chọn tổ có 6 người. Trong đó

— Có C_6^6 cách chọn tổ chỉ có toàn nam.
— Có C_8^6 cách chọn tổ chỉ có toàn nữ.

Do đó, có $C_{14}^6 - C_6^6 - C_8^6 = 2974$ cách chọn tổ.

2) Có 14 cách chọn tổ trưởng và có C_{13}^5 cách chọn 5 tổ viên. Do đó, có $14 \cdot C_{13}^5$ cách chọn tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên.
Bây giờ, ta tìm số trường hợp mà An và Bình cùng có mặt trong tổ.

— Nếu chọn tổ trưởng không trùng An và Bình thì
  - Có 12 cách chọn tổ trưởng.
  - Có C_{11}^3 cách chọn 3 tổ viên còn lại.

  Do đó, có $12 \cdot C_{11}^3$ cách chọn tổ.

— Nếu chọn tổ trưởng trùng An hoặc trùng Bình thì
  - Có 2 cách chọn tổ trưởng.
  - Có C_{12}^4 cách chọn 4 tổ viên còn lại.

  Do đó, có $2 \cdot C_{12}^4$ cách chọn tổ.

Vậy có tất cả $14 \cdot C_{13}^5 - 12 \cdot C_{11}^3 - 2 \cdot C_{12}^4 = 15048$ cách chọn tổ.

□

DẠNG 0.17. Bài toán phân chia tập hợp - dùng tổ hợp

Bài 30. Có 10 em học sinh đi học ngoại ngữ, trong đó có 2 em đã biết ngoại ngữ. Thầy giáo muốn chia thành 2 nhóm với số lượng học sinh bằng nhau. Có bao nhiêu cách chia để cho 2 em đã biết ngoại ngữ về hai nhóm khác nhau?

ĐS: 140

Lời giải.
Trong 10 học sinh đã có 2 em biết ngoại ngữ còn lại 8 học sinh chưa biết ngoại ngữ.

— 8 học sinh này chia đều cho 2 nhóm ta có C_8^4 cách chia các học sinh chưa biết ngoại ngữ.

— 2 học sinh đã biết ngoại ngữ chia đều cho 2 nhóm ta có C_2^1 cách chia.

Vậy có tất cả $C_8^4 \cdot C_2^1 = 140$ cách. □

Bài 31. Một lớp có 20 học sinh gồm 10 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chia thành 2 nhóm bằng nhau sao cho trong mỗi nhóm số lượng học sinh nam bằng số lượng học sinh nữ?

ĐS: 63504

Lời giải.
Để mỗi nhóm có số lượng học sinh nam bằng số lượng học sinh nữ thì mỗi nhóm có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ.
Vậy có tất cả $C_{10}^5 \cdot C_{10}^5 = 63504$ cách. □

Bài 32. Một gia đình có 15 vệ sĩ. Trong đó có 3 người làm nhiệm vụ bảo vệ bà mẹ, 5 người bảo vệ cho người cha, số còn lại bảo vệ cho cô con gái đầu lòng. Có bao nhiêu cách phân công như vậy?

ĐS: 360360

Lời giải.

— Chọn 3 người bảo vệ bà mẹ ta có C_{15}^3 cách chọn.

— Chọn 5 người bảo vệ người cha ta có C_{12}^5 cách chọn.

— Số còn lại bảo vệ cho cô con gái ta có C_7^7 cách chọn.

Vậy có tất cả $C_{15}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_7^7 = 360360$ cách phân công. □

Bài 33. Một lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ. Mỗi tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ?

ĐS: $C_{50}^{10} \cdot C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$

Lời giải.

— Tổ thứ nhất có 10 học sinh được chọn bất kì trong 50 học sinh là một tổ hợp chập 10 của 50: C_{50}^{10}.

— Tổ thứ hai có 10 học sinh được chọn bất kì trong 40 học sinh là một tổ hợp chập 10 của 40: C_{40}^{10}.

— Tổ thứ ba có 10 học sinh được chọn bất kì trong 30 học sinh là một tổ hợp chập 10 của 30: C_{30}^{10}.

— Tổ thứ tư có 10 học sinh được chọn bất kì trong 20 học sinh là một tổ hợp chập 10 của 20: C_{20}^{10}.

— Tổ thứ năm có 10 học sinh được chọn bất kì trong 10 học sinh là một tổ hợp chập 10 của 10: C_{10}^{10}.

Vậy có tất cả $\mathrm{C}_{50}^{10} \cdot \mathrm{C}_{40}^{10} \cdot \mathrm{C}_{30}^{10} \cdot \mathrm{C}_{20}^{10} \cdot \mathrm{C}_{10}^{10}$ cách chia tổ. □

Bài 34. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng một cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy?

ĐS: 2520

Lời giải.

— Có C_8^2 cách chọn cặp thứ nhất.

— Có C_6^2 cách chọn cặp thứ hai.

— Có C_4^2 cách chọn cặp thứ ba.

— Có C_2^2 cách chọn cặp thứ tư.

Vậy có tất cả $\mathrm{C}_8^2 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^2 = 2520$ cách. □

Bài 35. ① Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người làm nhiệm vụ ở địa điểm B, còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công?

② Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12}$ thành dạng $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{12}x^{12}$.
Tìm $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$.

ĐS: 1) 1260 2) 126720

Lời giải.

① — Có C_9^3 cách chọn người làm nhiệm vụ ở địa điểm A.
— Có C_6^2 cách chọn người làm nhiệm vụ ở địa điểm B.
— Có C_4^4 cách chọn người thường trực tại đồn.

Vậy có tất cả $\mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_4^4 = 1260$ cách.

② Ta thấy $(1+2x)^{12} = \mathrm{C}_{12}^0 + \mathrm{C}_{12}^1(2x)^1 + \mathrm{C}_{12}^2(2x)^2 + \cdots + \mathrm{C}_{12}^{12}(2x)^{12}$.
Suy ra $a_k = \mathrm{C}_{12}^k 2^k$ với mọi $0 \le k \le 12, k \in \mathbb{N}$.
Ta thấy

$$\begin{aligned}
a_k < a_{k+1} &\Leftrightarrow \mathrm{C}_{12}^k \cdot 2^k < \mathrm{C}_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{12!}{k!(12-k)!} < \frac{12!}{(k+1)!(11-k)!} \cdot 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{12-k} < \frac{2}{k+1} \\
&\Leftrightarrow k < \frac{23}{3}.
\end{aligned}$$

Mà k là số tự nhiên nên $k \le 7$. Vậy $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{12}) = a_8 = \mathrm{C}_{12}^8 2^8 = 126720$.

□

Bài 36. Cho một tập hợp gồm 10 phần tử khác nhau. Xét các tập con không rỗng chứa một số chẵn các phần tử rút ra từ tập hợp trên. Hãy tính xem có bao nhiêu tập hợp con như vậy?

ĐS: 511

Lời giải.
Số tập hợp con khác rỗng và chứa chẵn phần tử của một tập hợp có 10 phần tử là

$$T = \mathrm{C}_{10}^{2} + \mathrm{C}_{10}^{4} + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10}.$$

Để tính T ta xét các khai triển sau

$$\begin{aligned} 2^{10} = (1+1)^{10} = &\quad \mathrm{C}_{10}^{0} + \mathrm{C}_{10}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} \qquad (1)\\ 0^{10} = (1-1)^{10} = &\quad \mathrm{C}_{10}^{0} - \mathrm{C}_{10}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Cộng 2 vế của (1) và (2) ta được $2^{10} = 2(\mathrm{C}_{10}^{0} + \mathrm{C}_{10}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10})$. Suy ra $2^{10} = 2(1+T)$.
Vậy $T = 2^9 - 1 = 511$.
Nhận xét. *Tương tự như quá trình suy luận ở trên rút ta ra đẳng thức*

$$\mathrm{C}_{n}^{0} + \mathrm{C}_{n}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{n}^{n} = 2^{n-1}.$$

Từ đó có thể giải bài toán trên trong trường hợp tổng quát khi tập hợp ban đầu có n phần tử với $n \in \mathbb{N}$.

□

Bài 37. Cho A là một tập hợp chứa 20 phần tử.

1. Có bao nhiêu tập hợp con của A?
2. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là số chẵn?

ĐS: 1) 2^{20} 2) $2^{19}-1$

Lời giải.

1. — Số tập con của A có 0 phần tử (tập rỗng) là C_{20}^{0}.
   — Số tập con của A có 1 phần tử là C_{20}^{1}.
   — ...
   — Số tập con của A có 20 phần tử là C_{20}^{20}.
   Vậy số tập con của A là $\mathrm{C}_{20}^{0} + \mathrm{C}_{20}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} = (1+1)^{20} = 2^{20}$.
2. Số tập hợp con khác rỗng của A chứa chẵn phần tử là

$$T = \mathrm{C}_{20}^{2} + \mathrm{C}_{20}^{4} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20}.$$

Để tính T ta xét các khai triển sau

$$\begin{aligned} 2^{20} = (1+1)^{20} = &\quad \mathrm{C}_{20}^{0} + \mathrm{C}_{20}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} \qquad (1)\\ 0^{20} = (1-1)^{20} = &\quad \mathrm{C}_{20}^{0} - \mathrm{C}_{20}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Cộng 2 vế của (1) và (2) ta được $2^{20} = 2(\mathrm{C}_{20}^{0} + \mathrm{C}_{20}^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20})$.
Suy ra $2^{20} = 2(1+T)$. Vậy $T = 2^{19} - 1$.

□

DẠNG 0.18. Đếm số điểm, số đoạn thẳng, số góc, số đa giác, số miền

Bài 38. Một đa giác lồi n cạnh có bao nhiêu đường chéo? **ĐS:** $\frac{n(n-3)}{2}$

Lời giải.
Nối hai đỉnh bất kì của đa giác ta được một đường chéo hay một cạnh. Như vậy, số các cặp đỉnh tạo thành một đường chéo hay một cạnh là C_n^2.

Vì đa giác có n cạnh nên số đường chéo là $\mathrm{C}_n^2 - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$. □

Bài 39. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thứ nhất có 10 điểm. Trên đường thứ hai có 15 điểm. Có bao nhiêu tam giác tạo bởi các điểm đã cho? **ĐS:** 1725

Lời giải.
Tam giác tạo bởi một điểm trên đường thứ nhất và hai điểm trên đường thứ hai ta có: $10 \cdot \mathrm{C}_{15}^2$ tam giác.
Tam giác tạo bởi hai điểm trên đường thứ nhất và một điểm trên đường thứ hai ta có: $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot 15$ tam giác.
Vậy có $10 \cdot \mathrm{C}_{15}^2 + \mathrm{C}_{10}^2 \cdot 15 = 1725$ tam giác. □

Bài 40. Trên một đường tròn có 10 điểm. Có bao nhiêu tam giác nhận các điểm đó làm đỉnh? **ĐS:** 120

Lời giải.
Mỗi tam giác có 3 đỉnh ứng với 3 trong 10 điểm đã cho. Vậy số tam giác tạo thành là $\mathrm{C}_{10}^3 = 120$ tam giác. □

Bài 41. Trong mặt phẳng cho đa giác đều có 10 cạnh.

1. Có bao nhiêu tam giác tạo thành từ các đỉnh của đa giác?
2. Có bao nhiêu tam giác có đúng hai cạnh của đa giác?
3. Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh của đa giác?
4. Có bao nhiêu tam giác không chứa cạnh nào của đa giác? **ĐS:** 1) 120 2) 10 3) 60 4) 50

Lời giải.

1. Đa giác có 10 cạnh tương ứng có 10 đỉnh.
Chọn 3 đỉnh trong 10 đỉnh ta sẽ được một tam giác. Vậy số tam giác tạo thành là $\mathrm{C}_{10}^3 = 120$ tam giác.
2. Tam giác có 3 đỉnh liên tiếp của đa giác là tam giác chứa hai cạnh của đa giác. Các tam giác đó là
$$A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \ldots, A_9A_{10}A_1, A_{10}A_1A_2.$$
Vậy có 10 tam giác cần tìm.
3. Tam giác có đúng một cạnh của đa giác là tam giác chứa 2 đỉnh thuộc một cạnh của đa giác và đỉnh thứ 3 là đỉnh không kề với 2 đỉnh đó, có 6 đỉnh không kề như vậy.
Vậy với một cạnh sẽ có 6 tam giác thỏa yêu cầu. Đa giác có 10 cạnh nên có tất cả $10 \cdot 6 = 60$ tam giác thỏa yêu cầu bài toán.
4. Trong C_{10}^3 tam giác có 10 tam giác chứa 2 cạnh của đa giác, có 60 tam giác chứa 1 cạnh của đa giác.
Như vậy, có $\mathrm{C}_{10}^3 - 10 - 60 = 50$ tam giác không chứa cạnh nào của đa giác.

□

Bài 42. Cho p điểm trong không gian trong đó có q điểm đồng phẳng. Số còn lại không có 4 điểm nào đồng phẳng. Dựng tất cả các mặt phẳng chứa 3 trong p điểm đó.

1. Có bao nhiêu mặt phẳng khác nhau?
2. Có bao nhiêu tứ diện? **ĐS:** 1) $\mathrm{C}_p^3 - \mathrm{C}_q^3 + 1$ 2) $\mathrm{C}_p^4 - \mathrm{C}_q^4$

Lời giải.

1. Mỗi mặt phẳng chứa 3 trong p điểm $\Rightarrow$ số mặt phẳng là tổ hợp chập 3 của p: C_p^3.
Nhưng trong đó có q điểm đồng phẳng tức q điểm này xác định một mặt phẳng. Số mặt phẳng tạo ra từ q điểm này là C_q^3 ta xem như một mặt phẳng lớn.
Vậy số mặt phẳng mặt phẳng cần tìm là: $C_p^3 - C_q^3 + 1$.

2. Một tứ diện có 4 đỉnh tương ứng với 4 điểm không đồng phẳng trong p điểm.
Chọn bất kì 4 điểm trong p điểm trên là một tổ hợp chập 4 của p: C_p^4.
Trong C_p^4 có chứa C_q^4 không phải tứ diện.
Vậy số tứ diện cần tìm là $C_p^4 - C_q^4$.

□

Bài 43. Trên mặt phẳng, cho thập giác lồi (hình 10 cạnh lồi) $A_1A_2\ldots A_{10}$. Xét tất cả các tam giác mà các đỉnh của nó là đỉnh của thập giác. Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của thập giác? **ĐS:** 50

Lời giải.

— Có $C_{10}^3 = 120$ tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của thập giác.

— Có 10 tam giác có hai cạnh là cạnh của thập giác.

— Có $10 \cdot 6 = 60$ tam giác có 1 cạnh là cạnh của thập giác.

Vậy có $120 - 10 - 60 = 50$ tam giác mà 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của thập giác. □

Bài 44. Trong mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh. Xét các tam giác có 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của H.

1. Có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy ? Có bao nhiêu tam giác có đúng hai cạnh của H ?

2. Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H ? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào của H ? **ĐS:** 1) 20 2) 800

Lời giải.

1. Đa giác có 20 cạnh nên đa giác có 20 đỉnh. Các đa giác có 3 đỉnh là đỉnh của H suy ra số các tam giác là một tổ hợp chập 3 của 20: $C_{20}^3 = 1140$ tam giác.
Tam giác có đúng 2 cạnh của đa giác là tam giác được tạo bởi 3 đỉnh liên tiếp của đa giác. Đó là các tam giác $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $\ldots$, $A_{19}A_{20}A_1$, $A_{20}A_1A_2$. Vậy số các tam giác có đúng 2 cạnh của H là 20 tam giác.

2. Chọn một cạnh của H và bỏ đi 2 cạnh ở hai bên cạnh đã chọn, tức bỏ đi 4 đỉnh, còn lại 16 đỉnh. Ứng với một trong 16 đỉnh này và một cạnh đã chọn ban đầu ta có một tam giác có đúng một cạnh của H, nên có 16 tam giác ứng với một cạnh đã chọn ban đầu của H.
Vậy số tất cả các tam giác cần tìm là $16 \cdot 20 = 320$ tam giác.
Từ trên ta suy ra số các tam giác không chứa cạnh nào của H là $1140 - 20 - 320 = 800$ tam giác.

□

Bài 45. Trong một mặt phẳng có 9 đường thẳng song song cắt 10 đường thẳng song song khác thì tạo nên bao nhiêu hình bình hành ? **ĐS:** 1620

Lời giải.
Một hình bình hành là một cách chọn của hai đường thẳng $\mathrm{d_i} \parallel \mathrm{d_j}$ trong số 9 đường thẳng song song và hai đường thẳng $\triangle_i \parallel \triangle_j$ trong số 10 đường thẳng song song.
Như vậy có $C_9^2 \cdot C_{10}^2 = 1620$ hình bình hành. □

Bài 46. Kẻ tất cả các đường chéo của một đa giác lồi 7 cạnh. Biết rằng không có 3 đường chéo nào đồng quy. Có bao nhiêu giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác ? **ĐS:** 35

Lời giải.
Mỗi giao điểm của hai đường chéo tương ứng duy nhất với một tứ giác lồi có các đỉnh là các đỉnh của đa giác. Do đó có bao nhiêu tứ giác thì có bấy nhiêu giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác.
Vậy số giao điểm phải tìm là $\mathrm{C}_7^4 = 35$. □

Bài 47. Trong mặt phẳng cho 5 điểm. Giả sử trong các đường thẳng nối từ cặp điểm trong 5 điểm này không có cặp đường thẳng song, vuông góc hay trùng nhau. Qua mỗi điểm ta kẻ các đường thẳng vuông góc với tất cả những đường thẳng có thể dựng được bằng cách nối từng cặp điểm trong 4 điểm còn lại. Tìm số giao điểm nhiều nhất có thể của các đường thẳng vuông góc đó ? (không kể 5 điểm đã cho).
ĐS: 320

Lời giải.
Đường thẳng cần dựng là đường thẳng qua 2 điểm suy ra có $\mathrm{C}_5^2 = 10$ đường thẳng. Với mỗi điểm, chẳng hạn A có 4 đường thẳng đi qua A và 6 đường thẳng không đi qua A.
Từ A kẻ được $\mathrm{C}_4^2 = 6$ đường thẳng vuông góc góc xuống các đường thẳng không đi qua A.
Xét 2 điểm bất kì $B \neq A$. Các đường thẳng vuông góc từ B xuống các đường thẳng qua A cắt tất cả các đường thẳng vuông góc hạ từ A. Có 3 đường thẳng qua A mà không qua B. Vậy từ B ta hạ được 3 đường thẳng vuông góc với 3 đường thẳng đó. Ba đường thẳng vuông góc này cắt 6 đường thẳng vuông góc ha từ A tại $3 \cdot 6 = 18$ điểm.
Hạ từ B còn có 3 đường thẳng vuông góc nữa, mỗi đường thẳng này sẽ cắt 5 đường thẳng vuông góc hạ từ A (nó song song với một đường còn lại).
Vậy có thêm $3 \cdot 5 = 15$ giao điểm.
Suy ra có tổng cộng $10(18 + 15) = 330$ giao điểm.
Nhưng cứ mỗi 3 giao điểm lại tạo thành một tam giác mà 3 đường cao của nó là 3 đường vuông góc đã xét. Vậy các trực tâm của các tam giác này được kể 3 lần, mà số tam giác được tạo thành là $\mathrm{C}_5^3 = 10$.
Suy ra số giao điểm nhiều nhất có thể có là $330 - 10 = 320$.

□

Bài 48. Trong mặt phẳng cho 3 điểm A, B, C. Từ A dựng m đường thẳng, từ B dựng n đường thẳng, từ C dựng p đường thẳng. Trong số các đường thẳng vừa dựng không có 3 đường thẳng nào đồng qui và không có cặp đường thẳng nào song song. Tìm số các tam giác tạo bởi các đường thẳng dựng từ 3 điểm A, B, C. Trừ ba điểm A, B, C. **ĐS:** $\mathrm{C}_{mn+np+pm}^3 - m\mathrm{C}_{n+p}^3 - n\mathrm{C}_{m+p}^3 - p\mathrm{C}_{m+n}^3$

Lời giải.

— Số các giao điểm nằm trên 1 đường thẳng kẻ từ A là $n + p$.

— Số các giao điểm nằm trên 1 đường thẳng kẻ từ B là $m + p$.

— Số các giao điểm nằm trên 1 đường thẳng kẻ từ C là $m + n$.

Suy ra tổng tất cả các giao điểm là

$$\frac{1}{2}[m(n+p) + n(m+p) + p(m+n)] = mn + np + pm.$$

Một bộ ba giao điểm không thẳng hàng sẽ tạo thành 1 tam giác.
Vậy số tam giác được tạo ra là $\mathrm{C}_{mn+np+pm}^3 - m\mathrm{C}_{n+p}^3 - n\mathrm{C}_{m+p}^3 - p\mathrm{C}_{m+n}^3$. □

BÀI 1. BỘ ĐỀ SỐ 1

Câu 1. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau? Hãy chọn phương án trả lời đúng nhất trong các phương án sau

A. 1260. **B.** $4\mathrm{A}_6^4 - 3\mathrm{A}_5^3$.
C. $\left(\mathrm{A}_7^5 - \mathrm{A}_6^4\right) - \left(3\mathrm{A}_6^4 - 3\mathrm{A}_5^3\right)$. **D.** Cả ba đáp án trên đều đúng.

Lời giải.

Gọi số cần lập là $\overline{abcde}$. Khi đó các trường hợp xảy ra gồm:

- **Trường hợp 1:** Nếu $e = 0$ thì số cách chọn các chữ số a, b, c, d là A_6^4.
- **Trường hợp 2:** Nếu $e \in \{2; 4; 6\}$ thì có 3 cách chọn chữ số e, 5 cách chọn chữ số a và A_5^3 cách chọn các chữ số b, c, d.

Vậy có $\mathrm{A}_6^4 + 3 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 1260$ số thỏa mãn yêu cầu.
Các đáp án $4\mathrm{A}_6^4 - 3\mathrm{A}_5^3 = \left(\mathrm{A}_7^5 - \mathrm{A}_6^4\right) - \left(3\mathrm{A}_6^4 - 3\mathrm{A}_5^3\right) = 1260$.
Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong một buổi dạ vũ có 22 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 người ra khiêu vũ?

A. A_{22}^2. **B.** A_{18}^2. **C.** C_{40}^2. **D.** A_{40}^2.

Lời giải.

Số cách chọn 2 người ra khiêu vũ là số cách lấy 2 phần tử từ tập có 40 phần tử. Vậy có C_{40}^2 cách.
Chọn đáp án C □

Câu 3. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 quyển sách lên kệ sách theo thứ tự?

A. P_5. **B.** A_5^0. **C.** A_5^1. **D.** C_5^5.

Lời giải.

Sắp xếp 5 cuốn sách lên kệ theo thứ tự. Mỗi cách sắp xếp là một hoán vị của 5 nên có P_5 cách.
Chọn đáp án A □

Câu 4. Có bao nhiêu cách rút ra 3 quân bài từ bộ bài 52 con?

A. C_{52}^3. **B.** A_{52}^3. **C.** 52^3. **D.** 3^{52}.

Lời giải.

Mỗi bộ 3 quân bài được rút ra là một tập con của tập 52 quân bài. Do đó có $\mathrm{C}_{52}^3 = 22100$ cách rút.
Chọn đáp án A □

Câu 5. Trong một ủy ban có 10 người, cần chọn ra 3 người để 1 người làm chủ tịch, 1 người làm phó chủ tịch và 1 người làm thư ký. Hỏi có thể có bao nhiêu cách chọn?

A. C_{10}^3. **B.** $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot 3!$. **C.** $3!\mathrm{A}_{10}^3$. **D.** $3\mathrm{C}_{10}^3$.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra 3 người từ 10 người trong ủy ban để sắp xếp vào các vị trí chủ tịch, phó chủ tịch và thư ký là một chỉnh hợp chập 3 của 10. Vậy có A_{10}^3 cách sắp xếp.
Mặt khác lại có $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot 3! = \mathrm{A}_{10}^3$
Chọn đáp án B □

Câu 6. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

A. $\mathrm{A}_{10}^5 - \mathrm{A}_9^4$. **B.** A_{10}^5. **C.** $\mathrm{C}_{10}^5 - \mathrm{C}_9^4$. **D.** A_9^4.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau là $\overline{abcde}$ với $a \neq 0$. Khi đó có 9 cách chọn chữ số a và A_9^4 cách chọn cho các chữ số còn lại. Vậy có $9\mathrm{A}_9^4 = 27216$ số thỏa mãn yêu cầu.
Ta có $\mathrm{A}_{10}^5 - \mathrm{A}_9^4 = 27216$.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Có bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 2, 4, 6, 8?

A. $\mathrm{C}_5^3 - \mathrm{C}_4^2$. **B.** 4^3. **C.** $\mathrm{A}_5^3 - \mathrm{A}_4^2$. **D.** A_5^3.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau là $\overline{abc}$ với $a \neq 0$. Khi đó có 4 cách chọn chữ số a và A_4^2 cách chọn cho các chữ số còn lại. Vậy có $4\mathrm{A}_4^2 = 48$ số thỏa mãn yêu cầu.
Ta có $\mathrm{A}_5^3 - \mathrm{A}_4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Trước phiên tòa, các vị thẩm phán bắt tay nhau từng đôi một. Hỏi có tất cả bao nhiêu cái bắt tay biết rằng có 8 vị thẩm phán.

A. A_8^2. **B.** C_8^2. **C.** C_8^1. **D.** 16.

Lời giải.

Hai vị thẩm phán bất kỳ bắt tay nhau đúng một lần. Vậy số cái bắt tay là số tập con có 2 phần tử của tập 8 phần tử. Vậy có C_8^2 cái bắt tay được thực hiện.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trước phiên tòa, các vị thẩm phán bắt tay nhau từng đôi một. Biết rằng có 36 cái bắt tay được thực hiện (hai vị thẩm phán bất kỳ chỉ bắt tay nhau đúng một lần). Hỏi đoàn thẩm phán có bao nhiêu người?

A. 18. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải.

Giả sử đoàn thẩm phán có n người ($n \in \mathbb{N}^*$). Hai vị thẩm phán bất kỳ bắt tay nhau đúng một lần. Vậy số cái bắt tay là số tập con có 2 phần tử của tập n phần tử. Do đó có C_n^2 cái bắt tay được thực hiện.

Theo bài ra ta có $\mathrm{C}_n^2 = 36 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 9 \quad \text{(thỏa mãn)} \\ n = -8 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ với $x > 0$.

A. C_{17}^7. **B.** C_8^{17}. **C.** Không tồn tại. **D.** C_{17}^8.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_{17}^k \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17-k} \cdot \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^k = \mathrm{C}_{17}^k \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k} \cdot \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k = \mathrm{C}_{17}^k x^{\frac{17k-136}{12}}.$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với số nguyên k thỏa mãn $\dfrac{17k - 136}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là C_{17}^8.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Có 8 vận động viên võ thuật tham gia thi đấu theo hình thức loại trực tiếp trong mỗi trận đấu, người thắng cuộc sẽ tiếp tục đấu ở vòng sau. Kết thúc giải đấu, ba người xếp hạng ở vị trí thứ nhất, nhì và ba sẽ lần lượt được nhận huy chương vàng, huy chương bạc và huy chương đồng. Hỏi có bao nhiêu khả năng trao huy chương cho các vận động viên biết rằng khả năng chiến thắng của các vận động viên là như nhau.

A. A_8^3. **B.** C_8^3. **C.** $8!$. **D.** 8^3.

Lời giải.

Mỗi khả năng trao huy chương cho các vận động viên là kết quả của việc sắp thứ tự của 3 vận động viên ở các vị trí thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Do đó số khả năng trao huy chương là số chỉnh hợp chập 3 của 8.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Có 4 người nam và 3 người nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp họ ngồi thành một hàng ngang sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau?

A. $4! \cdot 3!$. **B.** $7!$. **C.** $4! \cdot 5!$. **D.** $4! + 3!$.

Lời giải.

Sắp xếp 4 người nam thành một hàng khi đó có $4!$ cách sắp xếp, có 3 khoảng trống giữa những người nam. Sau đó ta sắp xếp 3 người nữ xen kẽ vào 3 vị trí giữa 4 người nam, số cách sắp xếp là $3!$ cách.

Vậy có $4! \cdot 3!$ cách sắp xếp.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Một người sắp xếp thời khóa biểu cho 7 môn học. Do ngày Thứ Hai có tiết sinh hoạt tập thể nên chỉ có 3 tiết học văn hóa. Người đó dự định sắp xếp 3 môn học cho ngày Thứ Hai, mỗi môn có 1 tiết học. Hỏi người đó có bao nhiêu khả năng xếp thời khóa biểu cho ngày Thứ Hai đó?

A. C_7^3. **B.** A_7^3. **C.** $3!$. **D.** $7!$.

Lời giải.

Mỗi khả năng xếp thời khóa biểu cho ngày Thứ Hai đó là việc sắp xếp 3 môn học từ 7 môn học cho 3 tiết học theo thứ tự. Do đó số cách sắp xếp là số chỉnh hợp chập 3 của 7.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Có 10 hòn bi kích thước hoàn toàn giống nhau, trong đó có 7 hòn bi màu trắng và 3 hòn bi màu đen. Ta xếp chúng thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

A. C_{10}^3. **B.** A_{10}^3. **C.** $10!$. **D.** $7! \cdot 3!$.

Lời giải.

Số cách sắp xếp 10 viên bi theo hàng ngang là 10! cách.

Do có 7 viên bi trắng giống nhau và 3 viên bi đen giống nhau nên mỗi hoán vị của các viên bi cùng màu là như nhau. Do đó có $\dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = C_{10}^3$ cách sắp xếp khác nhau cho 10 viên bi nói trên.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau sao cho hai chữ số chẵn không đứng cạnh nhau?

A. 48. **B.** 72. **C.** 120. **D.** 150.

Lời giải.

Cách 1: (Sử dụng quy tắc đếm)

Số các số có 4 chữ số khác nhau được lập từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là $5! = 120$. Ta tìm số các số có 4 chữ số khác nhau sao cho hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau. Vì chỉ có hai số chẵn là 2 và 4 nên chỉ có 2 trường hợp đó là số 2 đứng trước và 4 đứng sau hoặc 4 đứng trước và 2 đứng sau. Trong mỗi trường hợp thì có 4 ví trí để hai số đó đứng vào. Còn 3 vị trí còn lại trong số có 5 chữ số thì vị trí thứ nhất có 3 cách chọn, vị trí thứ 2 có 2 cách chọn và vị trí thứ 3 có 1 cách chọn. Do đó số các số có 4 chữ số khác nhau sao cho hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau bằng $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$. Vậy số các số cần tìm bằng $120 - 48 = 72$.

Cách 2: (Sử dụng chỉnh hợp)

Xếp 3 chữ số 1, 3, 5 theo hàng ngang ta có 3! cách. Khi đó có 4 khoảng trống (kể cả 2 đầu) để xếp các chữ số 2, 4 nên có A_4^2 cách. Vậy số các số cần lập là $3 \times A_4^2 = 72$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Từ các số 0, 1, 2, 7, 8, 9. Có bao nhiêu chữ số lẻ gồm 5 chữ số khác nhau?

A. 120. **B.** 184. **C.** 288. **D.** 360.

Lời giải.

Giả sử số cần chọn có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Ta thấy a_5 có 3 cách chọn, a_1 có 4 cách chọn, a_2 có 4 cách chọn, a_3 có 3 cách chọn, a_4 có 2 cách chọn. Theo quy tắc nhân thì số các chữ số cần tìm bằng $3 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 288$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Có 12 công nhân xây dựng. Người đội trưởng bố trí 3 người làm ở A, 4 người làm ở B và 5 người làm ở C. Có bao nhiêu cách bố trí?

A. 19248. **B.** 19720. **C.** 20150. **D.** 27720.

Lời giải.

Có C_{12}^3 cách bố trí 3 người làm ở A, C_9^4 cách bố trí 4 người làm ở B và C_5^5 cách bố trí 5 người làm ở C. Theo quy tắc nhân số cách bố trí bằng $C_{12}^3 \times C_9^4 \times C_5^5 = 27720$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ số từ bảng chữ cái tiếng Anh?

A. C_{26}^5. **B.** A_{24}^5. **C.** A_{26}^5. **D.** C_{24}^5.

Lời giải.

Bảng chữ cái tiếng Anh có 26 chữ số. Một tập hợp 5 chữ số từ bảng chữ cái tiếng Anh là một tổ hợp chập 5 của 26. Do đó số cách chọn cần tìm bằng C_{26}^5.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam bằng số ủy viên nữ?

A. C_{25}^6. **B.** $C_{10}^3 \cdot C_{15}^3$. **C.** $A_{10}^3 \cdot A_{15}^3$. **D.** $C_{10}^6 \cdot C_{15}^6$.

Lời giải.

Việc chọn 6 ủy viên gồm 3 nam và 3 nữ nên có số cách chọn là $C_{10}^3 \cdot C_{15}^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 4 chữ số khác nhau và trong đó nhất thiết phải có chữ số 1?

A. $4A_5^3 - 3A_4^3$. **B.** $\left(A_6^4 - A_5^3\right) - \left(A_5^4 - A_4^3\right)$.

C. $4A_5^3 - 4A_4^2$. **D.** $A_6^4 - A_5^4$.

Lời giải.
Có A_6^4 cách lấy ra bốn chữ số và viết liền nhau theo thứ tự, trong đó có A_5^3 cách viết có chữ số 0 đứng ở đầu. Do đó, số các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được chọn từ tập các chữ số đã cho là $\mathrm{A}_6^4 - \mathrm{A}_5^3$.
Nếu không có chữ số 1 thì tương tự như trên, số cách viết các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau từ các chữ số 0, 2, 3, 4, 5 là $\mathrm{A}_5^4 - \mathrm{A}_4^3$.
Vậy kết quả là có $\left(\mathrm{A}_6^4 - \mathrm{A}_5^3\right) - \left(\mathrm{A}_5^4 - \mathrm{A}_4^3\right)$.
Chọn đáp án B □

Câu 21. Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử. Tính giá trị của tổng $S = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 3^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 3^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} 3^{2n}$.
A. $2^{2n-1}(2^{2n}+1)$. **B.** $2^{2n}(2^{2n-1}+1)$. **C.** $2^{2n+1}(2^{2n}+1)$. **D.** $2^{2n}(2^{2n+1}+1)$.
Lời giải.
Xét khai triển $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}$.
Chọn $x = 3$, ta được $4^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 3 + \mathrm{C}_{2n}^2 3^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} 3^{2n}$.
Chọn $x = -3$, ta được $(-2)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 3 + \mathrm{C}_{2n}^2 3^2 - \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} 3^{2n}$.
Cộng vế với vế hai đẳng thức trên, ta có $S = 2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Một đội văn nghệ có 20 người trong đó có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho có đúng 2 nam trong 5 người đó?
A. $\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{11}^2$. **B.** $\mathrm{C}_{12}^3\mathrm{C}_{11}^2$. **C.** $\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_{10}^3$. **D.** $\mathrm{C}_{12}^3\mathrm{C}_{12}^4$.
Lời giải.
Cần chọn 2 trong số 10 nam và chọn tiếp 3 trong số 10 nữ. Vậy có $\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_{10}^3$ cách chọn.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho một tập hợp gồm 10 phần tử khác nhau. Xét các tập con khác rỗng chứa một số chẵn các phần tử rút ra từ tập hợp trên. Hãy tính xem có bao nhiêu tập con như vậy?
A. $2^{10}-1$. **B.** 2^8-1. **C.** $2^{11}-1$. **D.** 2^9-1.
Lời giải.
Số tập con có k phần tử $(1 \le k \le 10)$ được rút ra từ 10 phần tử là C_{10}^k.
Số các tập con khác rỗng chứa một số chẵn các phần tử là

$$\mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^4 + \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_{10}^8 + \mathrm{C}_{10}^{10} = 2^9 - 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 24. Có một hộp đựng 2 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng, 5 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó số viên bi lấy ra không đủ cả ba màu?
A. $\mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_8^4$. **B.** $\mathrm{C}_8^4 \cdot \mathrm{C}_7^4$. **C.** $\mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_8^5$. **D.** $\mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_8^4 + \mathrm{C}_5^4$.
Lời giải.
Ta có các trường hợp sau

TH1. 4 viên bi được chọn từ 2 màu đỏ và trắng. Số cách chọn là C_5^4.

TH2. 4 viên bi được chọn từ 2 màu đỏ và vàng. Số cách chọn là C_7^4

TH3. 4 viên bi được chọn từ 2 màu trắng và vàng. Số cách chọn là C_8^4

Trong các các chọn ở trên có C_5^4 cách chọn 4 viên bi cùng màu vàng ở trường hợp 2 và 3 bị trùng nhau.
Vậy số cách chọn thỏa mãn là $\mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_8^4 + \mathrm{C}_5^4 - \mathrm{C}_5^4 = \mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_8^4$.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ nội tiếp đường tròn tâm O, với n là số nguyên dương, $n \ge 2$. Biết rằng số tam giác có các đỉnh là ba trong số $2n$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có đỉnh là bốn trong $2n$ điểm đó, tìm n.
A. $n = 7$. **B.** $n = 8$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 10$.
Lời giải.
Số tam giác được tạo thành là C_{2n}^3.
Đa giác đều có n đường chéo đi qua tâm O nên số hình chữ nhật là C_n^2.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{2n}^3 = 20\mathrm{C}_n^2 &\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\frac{n!}{(n-2)!2!}\\
&\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2}\\
&\Leftrightarrow 4n(n-1)(2n-1) = 60n(n-1)\\
&\Leftrightarrow n(n-1)(4n-32) = 0 \Leftrightarrow n = 8 \text{ (do } n \geq 2).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN BỘ ĐỀ 01

1. D	2. C	3. A	4. A	5. B	6. A	7. C	8. B	9. C	10. D
11. A	12. A	13. B	14. A	15. B	16. C	17. D	18. A	19. B	20. B
21. A	22. C	23. D	24. A	25. B					

BÀI 2. BỘ ĐỀ SỐ 2

Câu 1. Có 10 điểm nằm trên một đường tròn. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu tứ giác lồi?

A. C_{10}^4. **B.** A_{10}^4. **C.** C_{10}^2. **D.** A_{10}^2.

Lời giải.

Cứ 4 điểm bất kỳ trong 10 điểm đã cho sẽ tạo thành một tứ giác lồi. Do đó có C_{10}^4 tứ giác.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 20 học sinh nam. Có bao nhiêu các chọn ra một ban cán sự gồm 4 học sinh trong đó có ít nhất một bạn học sinh nam?

A. C_{30}^4. **B.** C_{20}^4. **C.** $C_{30}^4 - C_{20}^4$. **D.** $C_{30}^4 - C_{10}^4$.

Lời giải.

Số cách chọn ra 4 học sinh bất kỳ là C_{30}^4.

Số cách chọn ra 4 học sinh đều là nữ là C_{10}^4.

Do đó, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là $C_{30}^4 - C_{10}^4$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Từ các số 0, 4, 5, 7, 9. Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5?

A. 96. **B.** 48. **C.** 60. **D.** 72.

Lời giải.

Gọi số cần lập có dạng $\overline{abcd}$ ta có:

* Nếu $d = 0$ có A_4^3 số thỏa mãn.

* Nếu $d = 5$ có $3 \cdot A_4^2$ số thỏa mãn.

Vậy có 96 số thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau sao cho các số đó không tận cùng bằng chữ số 5?

A. 5040. **B.** 840. **C.** 120. **D.** 720.

Lời giải.

Gọi số cần lập có dạng $\overline{abcde}$

Theo bài ra ta có a có 7 cách chọn (trừ chữ số 0); e có 6 cách chọn.

Các chữ số còn lại có A_6^3 cách chọn.

Vậy, có $7 \cdot 6 \cdot A_6^3 = 5040$. □

Câu 5. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Có bao nhiêu số lẻ có 3 chữ số khác nhau nhỏ hơn 400?

A. 35. **B.** 210. **C.** 120. **D.** 6!.

Lời giải.

Gọi số cần lập có dạng $\overline{abc}$.

Theo đề bài ra ta có a có 3 cách chọn (các chữ số 1, 2, 3).

Xét các trường hợp:

* Nếu a lẻ: Có 2 cách chọn a và 2 cách chọn c. Do đó có $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ số.

* Nếu a chẵn: Có 3 cách chọn c. Suy ra có $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ số.

Vậy, có 35 số thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh và 3 nam sinh đứng thành một hàng dọc vào lớp sao cho các bạn nữ đứng chung với nhau?

A. $3! \cdot 3!$. **B.** $3! \cdot 3! \cdot 2!$. **C.** $3! \cdot 4!$. **D.** $6!$.

Lời giải.

Ta thực hiện xếp 3 bạn nam thành một hàng. Vì 3 nữ sinh đứng chung với nhau nên số cách xếp chính là số cách xếp 3 bạn nữ vào giữa các hai bạn nam bất kỳ hoặc ở hai đầu.

Mặt khác với mỗi cách xếp trên, nếu hoán vị các bạn nữ với nhau, ta sẽ được một cách xếp khác phù hợp.

Vậy có $3! \cdot 4!$ cách xếp thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Từ 9 nam và 6 nữ có bao nhiêu cách lập một nhóm gồm 5 người có ít nhất 2 nam và 2 nữ?

A. C_{15}^5. **B.** $C_9^2 \cdot C_6^2$. **C.** $C_9^2 \cdot C_6^3 + C_9^3 \cdot C_6^2$. **D.** $C_9^2 \cdot C_9^3$.

Lời giải.

Yêu cầu đầu bài được thỏa mãn nếu 5 người có đúng 2 nam và 3 nữ, hoặc 2 nữ và 3 nam.
Có $C_9^2 \cdot C_6^3$ cách chọn 2 nam và 3 nữ.
Có $C_9^3 \cdot C_6^2$ cách chọn 2 nam và 3 nữ.
Vậy có $C_9^2 \cdot C_6^3 + C_9^3 \cdot C_6^2$ cách chọn thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Một tòa nhà có 9 cửa ra vào. Hỏi có bao nhiêu cách vào cửa này và ra bằng cửa khác

A. 9. **B.** 72. **C.** 36. **D.** 9!.

Lời giải.

Số cách vào một cửa và ra một cửa là số chỉnh hợp chập 2 của 9 phần tử. Do đó số cách thực hiện là $A_9^2 = 72$.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Có 10 thực tập sinh, 4 vị trí công tác và chế độ làm việc hai ca. Nếu mỗi thực tập sinh phải tập làm ở từng vị trí trong cả hai ca thì cuộc thực tập phải kéo dài trong mấy ngày?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 5.

Lời giải.

Gọi hai ca làm việc là S và C. Do có 4 vị trí công tác nên mỗi buổi sáng có thể xếp được 4 người thực hiện và mỗi ca chiều có 4 người thực hiện.
Do đó có tất cả 4 (vị trị) $\cdot 2$ (ca) $= 8$ công việc. Mỗi công việc đều được 10 thực tập sinh làm nên sẽ hoàn thành trong vòng 10 ngày.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm có 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

A. $\dfrac{8! - 7!}{3!}$. **B.** $8! - 7!$. **C.** $\dfrac{8!}{3!}$. **D.** $\dfrac{6! - 5!}{3!}$.

Lời giải.

Giả sử số có 8 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$.
Ta có 8! cách xếp 8 chữ số (gồm tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và hai chữ số 1. Trong đó có 7! số có chữ số 0 đứng đầu.
Vậy có $8! - 7!$ số có 8 chữ số lập từ tập X và có 3 chữ số 1.
Mặt khác, trong các số thỏa mãn ở trên , những số có 2 chữ số 1 đứng cạnh nhau được tính 2 lần, các số có 3 chữ số 1 đứng cạnh nhau, được tính 3 lần.
Do đó, số các số thỏa mãn là $\dfrac{8! - 7!}{3!}$. □

Câu 11. Có 6 công việc và 5 công nhân. Có mấy cách phân cho một người nào đó làm một việc?

A. 6. **B.** 5. **C.** 30. **D.** 11.

Lời giải.

Sô cách phân công thỏa mãn yêu cầu là $C_6^5 = 6$
Chọn đáp án A □

Câu 12. Mỗi khóa gồm 5 vòng số ghi từ 0 đến 9. Mỗi dãy 5 chữ số cho một cách để mở khóa. Có bao nhiêu khóa ứng với các cách mở khác nhau?

A. A_{10}^5. **B.** $A_{10}^5 - A_{10}^4$. **C.** 10^5. **D.** $C_{10}^5 - A_{10}^4$.

Lời giải.

Số khóa ứng với các cách mở là số các dãy số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ (chữ số đầu tiên có thể là chữ số 0). Do đó có $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ cách.
Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong mặt phẳng có 15 điểm A, B, C, ... và không có ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác chứa điểm A?

A. C_{15}^3. **B.** C_{14}^2. **C.** C_{14}^3. **D.** C_{15}^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra 2 điểm trong số 14 điểm khác điểm A cho ta một tam giác thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Do đó có C_{14}^2 tam giác.
Chọn đáp án B □

Câu 14. Xếp 10 người thành một hàng ngang từ trái sang phải. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để hai anh A và B đứng không cạnh nhau?

A. $10! - 9!$. **B.** $10! - 9! \cdot 2!$. **C.** $9! \cdot 2!$. **D.** $10! + 9! \cdot 2!$.

Lời giải.

Xếp 10 người thành một hàng ngang từ trái sang phải có 10! cách.
Xếp anh A và B cạnh nhau có 2! cách.
Xếp cặp A,B và 8 người còn lại có 9! cách.
Vậy có $10! - 9! \cdot 2!$ cách xếp hai anh A và B đứng không cạnh nhau.
Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong mặt phẳng có 5 đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt 10 đường thẳng song song khác. Có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên?

A. $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^2$. **B.** $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{A}_{10}^2$. **C.** C_{15}^2. **D.** C_{15}^4.

Lời giải.

Ta thấy cứ hai đường thẳng song song lần lượt cắt hai đường thẳng song song khác thì tạo thành một bình hành. Nên sẽ có $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^2$ hình bình hành được tạo nên.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Tập hợp các điểm $P(x; y; z)$ của không gian ba chiều. Có bao nhiêu điểm nếu $x \in \{1; 2; 3\}$, $y \in \{2; 5\}$, $z \in \{3; 7; 8; 9\}$?

A. 20. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 24.

Lời giải.

Có $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ điểm.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho 20 điểm A, B, C, ... trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng nằm trong cùng một mặt phẳng. Có bao nhiêu tam giác nhận BC làm cạnh chung?

A. C_{18}^1. **B.** C_{18}^2. **C.** C_{20}^2. **D.** C_{20}^3.

Lời giải.

Để chọn tam giác nhận BC làm cạnh chung, ta chọn 1 điểm ngoài B, C làm đỉnh còn lại của tam giác. Vậy có C_{18}^1 tam giác thỏa yêu cầu.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Sau buổi tổng kết, có 5 công nhân của xí nghiệp A được khen thưởng. Công đoàn của nhà máy có 3 suất đi du lịch để thưởng cho 3 trong số 5 công nhân đó, 2 công nhân còn lại được thưởng tiền. Có bao nhiêu cách phân phối các phiếu du lịch cho 3 trong số 5 công nhân nói trên với giả thiết các phiếu du lịch khác nhau.

A. C_5^3. **B.** A_5^3. **C.** $3 \cdot \mathrm{C}_5^3$. **D.** $3 \cdot \mathrm{A}_5^3$.

Lời giải.

Chọn 3 người công nhân để phân phối phiếu du lịch có C_5^3 cách.
Chia 3 suất du lịch cho 3 người có 3! cách.
Vậy có $3! \cdot \mathrm{C}_5^3 = \mathrm{A}_5^3$ cách.
Chọn đáp án B □

Câu 19. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5. Hãy lập các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho hai chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau.

A. 120. **B.** 72. **C.** 48. **D.** 16.

Lời giải.

Số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau có 5! cách. Xếp hai chữ số 1 và 2 có 2! cách.
Xếp cặp hai chữ số 1 và 2 với 3 chữ số còn lại có 4! cách.
Vậy có $5! - 2! \cdot 4! = 72$ số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà 1 và 2 không đứng cạnh nhau.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Có bao nhiêu cách xếp 4 vật khác nhau vào 2 hộp có đánh số?

A. 16. **B.** 8. **C.** 42. **D.** 36.

Lời giải.

Mỗi một vật có 2 cách xếp vào hộp. Nên có $2^4 = 16$ cách xếp 4 vật vào 2 hộp có đánh số.
Chọn đáp án A □

Câu 21. Tìm hệ số của một hạng tử chứa x^4 trong khai triển $(1+2x+3x^2)^{10}$

A. 8085. **B.** 8086. **C.** 8014. **D.** 8055.

Lời giải.

Ta có $(1+2x+3x^2)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10}\sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{10}^{k}\mathrm{C}_{k}^{i}(2x)^{k-i}(3x^2)^{10-k} = \sum\limits_{k=0}^{10}\sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{10}^{k}\mathrm{C}_{k}^{i}2^{k-i}3^{10-k}x^{20-k-i}$.

Vậy hệ số của hạng tử chứa x^4 trong khai triển là

$$\mathrm{C}_{10}^{10}\mathrm{C}_{10}^{6}2^4 3^0 + \mathrm{C}_{10}^{9}\mathrm{C}_{9}^{7}2^2 3^1 + \mathrm{C}_{10}^{8}\mathrm{C}_{8}^{8}2^0 3^2 = 8085.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Xét khai triển $\left[\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right]^m$. Cho biết hạng tử thứ sáu là 21 và các hệ số thứ hai, ba và bốn của khai triển là các số hạng thứ nhất, ba và năm của một cấp số cộng. Tìm giá trị của x.

A. $x=0 \vee x=2$. **B.** $x=2 \vee x=1$. **C.** $x=2 \vee x=3$. **D.** $x=1 \vee x=3$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$C_m^k \cdot \left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}\right)^k \cdot \left(\sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right)^{m-k}$$

Ta có hệ số thứ hai, ba và bốn lần lượt là C_m^1, C_m^2, C_m^3.

Do hệ số thứ hai, ba và bốn của khai triển cũng là số hạng thứ nhất, ba và năm của cấp số cộng nên

$$\mathrm{C}_m^1 + \mathrm{C}_m^3 = 2\mathrm{C}_m^2 \Leftrightarrow m^2 - 9m + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (loại)} \\ m = 7. \end{array}\right.$$

Số hạng thức sáu của khai triển là

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_7^5\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right)^5 = 21 \\ \Leftrightarrow\ & \log(10-3^x) + \log 3^{x-2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (3^x)^2 - 10\cdot 3^x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Tính $S = \mathrm{C}_n^0 + \dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \dfrac{1}{4}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n$.

A. $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$. **B.** $\dfrac{2^n+1}{n+1}$. **C.** $\dfrac{2^{n+1}-2}{n+1}$. **D.** $\dfrac{2^{n+1}+1}{n+1}$.

Lời giải.

Ta có với mọi n, $k \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq k \geq 1$ thì $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

Thật vậy, với n, $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \geq k \geq 1$ thì

$$\begin{aligned} k\mathrm{C}_n^k &= k\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{k\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-k)!k\cdot(k-1)!} \\ &= n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}. \text{ (điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

Suy ra ta có $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \frac{1}{4}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n \\ &= \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^1 + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^n \\ &= \frac{1}{n+1}\left[2^{n+1} - 1\right]. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tính $S = \mathrm{C}_{11}^6 + \mathrm{C}_{11}^7 + \mathrm{C}_{11}^8 + \mathrm{C}_{11}^9 + \mathrm{C}_{11}^{10} + \mathrm{C}_{11}^{11}$.

A. $2^9 + 2$. **B**. $2^{10} - 1$. **C**. 2^{10}. **D**. $2^{11} - 1$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$. Do đó xét khai triển

$$\begin{aligned} & (1+1)^{11} = \mathrm{C}_{11}^0 + \mathrm{C}_{11}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{11}^{10} + \mathrm{C}_{11}^{11} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{11} = 2(\mathrm{C}_{11}^6 + \mathrm{C}_{11}^7 + \cdots + \mathrm{C}_{11}^{11}) \\ \Rightarrow\ & \mathrm{C}_{11}^6 + \mathrm{C}_{11}^7 + \cdots + \mathrm{C}_{11}^{11} = 2^{10}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 25. Một đội văn nghệ có 20 người trong đó có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó?

A. $\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{10}^4 + \mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{10}^1$. **B**. $2\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{10}^1$.

C. $3\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_{10}^3 + 9\mathrm{C}_{10}^4$. **D**. $\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{10}^4 + \mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_{10}^3$.

Lời giải.

Chọn 2 nam, 3 nữ có $\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_{10}^3$ cách.

Chọn 3 nam, 2 nữ có $\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{10}^2$ cách.

Chọn 4 nam, 1 nữ có $\mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{10}^1$ cách.

Vậy có $2\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{10}^1$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN BỘ ĐỀ 02

1. A	2. D	3. A	5. A	6. C	7. C	8. B	9. A	11. A	12. C
13. B	14. B	15. A	16. D	17. A	18. B	19. B	20. A	21. A	22. A
23. A	24. C	25. B							

BÀI 3. BỘ ĐỀ SỐ 3

Câu 1. Trong bảng chữ cái tiếng Anh có 21 phụ âm và 5 nguyên âm. Có bao nhiêu chữ (không cần có nghĩa) gồm 6 chữ chứa ít nhất hai nguyên âm?

A. $C_5^2C_{21}^4 + C_5^3C_{21}^3 + C_5^4C_{21}^2 + C_5^5C_{21}^1$.
B. $C_{26}^6 - C_5^1C_{21}^5 - C_{21}^6$.
C. B sai.
D. A và B đúng.

Lời giải.

Cách 1.
Chọn 2 nguyên âm và 4 phụ âm có $C_5^2C_{21}^4$ cách.
Chọn 3 nguyên âm và 3 phụ âm có $C_5^3C_{21}^3$ cách.
Chọn 4 nguyên âm và 2 phụ âm có $C_5^4C_{21}^2$ cách.
Chọn 5 nguyên âm và 1 phụ âm có $C_5^5C_{21}^1$ cách.
Vậy có tất cả $C_5^2C_{21}^4 + C_5^3C_{21}^3 + C_5^4C_{21}^2 + C_5^5C_{21}^1$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2.
Chọn bất kì 6 chữ cái có C_{26}^6 cách.
Chọn 1 nguyên âm và 5 phụ âm có $C_5^1C_{21}^5$ cách.
Chọn 6 phụ âm có C_{21}^6 cách.
Vậy có tất cả $C_{26}^6 - C_5^1C_{21}^5 - C_{21}^6$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 2. Có 3 bộ sách, mỗi bộ có 3 cuốn sách. Có bao nhiêu cách xếp số sách đó trên cùng một kệ sao cho sách cùng một bộ phải ở cạnh nhau?

A. $9!$. **B.** $3!\cdot 3!\cdot 3!$. **C.** $(3!)^4$. **D.** $3!\cdot 9!$.

Lời giải.
Số cách xếp 3 bộ sách lên kệ là 3! cách.
Số cách xếp 3 cuốn sách trong từng bộ sách là 3! cách.
Vậy có $3!3!3!3! = (3!)^4$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 3. Một hộp có 3 bi xanh, 4 bi đỏ và 5 bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy 6 viên bi sao cho có đúng 2 viên bi đỏ?

A. C_{12}^6. **B.** $C_4^2C_8^4$. **C.** $C_4^2C_8^6$. **D.** C_4^2.

Lời giải.
Lấy 2 viên bi đỏ từ 4 viên bi đỏ có C_4^2 cách.
Lấy 4 viên bất kì từ 8 viên bi xanh và vàng có C_8^4 cách.
Vậy có $C_4^2C_8^4$ cách thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong mặt phẳng cho đa giác đều có 10 cạnh. Có bao nhiêu tam giác có đúng 2 cạnh của đa giác?

A. C_{10}^2. **B.** 10. **C.** C_{10}^3. **D.** 20.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán tương đương với việc chọn 2 cạnh từ 10 cạnh của đa giác sao cho 2 cạnh ấy phải kề nhau. Vậy có 10 cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Có bao nhiêu cách xếp 10 người ngồi thành hàng ngang sao cho A và B ngồi cạnh nhau, còn C và D thì không ngồi cạnh nhau?

A. $9!2!$. **B.** $10! - 9!2!$. **C.** $9!2! - 8!2!$. **D.** $9!2! - 8!2!2!$.

Lời giải.

Bước 1. Sắp xếp 10 người với A và B ngồi cạnh nhau, C và D ngồi bất kì.
Coi như A và B là một nhóm. Xếp chỗ ngồi A và B trong nhóm có 2! cách.
Sắp xếp chỗ ngồi 1 nhóm và 8 người có 9! cách.
Suy ra có 9!2! cách sắp xếp thỏa bước 1.

Bước 2. Sắp xếp 10 người với A và B ngồi cạnh nhau, C và D ngồi cạnh nhau.
Coi như A và B là một nhóm C và D là một nhóm. Xếp chỗ 2 người trong từng nhóm có 2! cách.
Sắp xếp chỗ ngồi 2 nhóm và 6 người có 8! cách.

Suy ra có $8!2!2!$ cách sắp xếp thỏa bước 2.
Vậy có $9!2! - 8!2!2!$ cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong một buổi họp mặt, có 5 nam sinh và 5 nữ sinh. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có 2 nam sinh, 2 nữ sinh nào ngồi cạnh nhau?

A. $2 \cdot 5! \cdot 5!$. **B.** $5! \cdot 5!$. **C.** $10!$. **D.** $10! \cdot 2!$.

Lời giải.
Từ yêu cầu bài toán, ta có nam nữ ngồi xen kẽ nhau.
Chọn nam hoặc nữ để xếp vào trước có 2 cách.
Xếp 5 nam vào 5 chỗ xen kẽ có $5!$ cách.
Xếp 5 nữ vào 5 chỗ còn lại có $5!$ cách.
Vậy có $2 \cdot 5! \cdot 5!$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong các số nguyên dương có đúng 3 chữ số, có bao nhiêu số chia hết cho 3 và 4?

A. 75. **B.** 450. **C.** 225. **D.** 675.

Lời giải.
Ta có $\mathrm{BCNN}(3;4) = 12$.
Từ yêu cầu bài toán, ta suy ra số đó phải chia hết cho 12.
Số nguyên dương nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 12 là 108.
Số nguyên dương lớn nhất có 3 chữ số chia hết cho 12 là 996.
Vậy có $\dfrac{996-108}{12} + 1 = 75$ số thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 8. Có bao nhiêu biển đăng kí xe nếu mỗi biển số gồm 2 chữ số tiếp sau là 4 chữ cái hoặc 2 chữ cái theo sau là 4 chữ số?

A. 45697600. **B.** 52457600. **C.** 33177600. **D.** 46547600.

Lời giải.
Chọn biển số gồm 2 chữ số tiếp sau là 4 chữ cái có $10^2 \cdot 26^4$ cách.
Chọn biển số gồm 4 chữ số tiếp sau là 2 chữ cái có $10^4 \cdot 26^2$ cách.
Vậy có $10^2 \cdot 26^4 + 10^4 \cdot 26^2 = 52457600$ biển số thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Có bao nhiêu biển đăng kí xe mà mỗi biển số gồm hai hoặc ba chữ cái tiếp sau bởi hai hoặc ba chữ số?

A. 20077200. **B.** 25657200. **C.** 2278200. **D.** 24607200.

Lời giải.
Chọn từ gồm hai hoặc ba chữ cái có $26^2 + 26^3$ cách.
Chọn một số gồm hai hoặc ba chữ số có $10^2 + 10^3$ cách.
Vậy có $(26^2 + 26^3) \cdot (10^2 + 10^3) = 20077200$ biển số thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Để lập 700 bảng đăng kí, mỗi bảng gồm ba kí số, cần phải dùng ít nhất bao nhiêu chữ số nếu các chữ số không được trùng nhau trong một bảng?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải.
Gọi x là số chữ số ít nhất phải dùng. $(x \in \mathbb{N},\ 3 \leq x \leq 10)$
Số bảng đăng kí có thể lập từ x chữ số là $x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$ bảng.
Theo đề bài ta phải lập được 700 bảng, nghĩa là $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \geq 700$.
Thử từng giá trị của x ta thấy $x = 10$ thỏa. Vậy cần dùng ít nhất 10 chữ số.
Chọn đáp án D □

Câu 11. Với các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương khác nhau sao cho mỗi số gồm 3 chữ số trong đó chữ số 1 là chữ số duy nhất lặp lại nhiều nhất 2 lần?

A. A_4^3. **B.** C_4^3. **C.** $\dfrac{1}{2!}\mathrm{A}_4^3$. **D.** $\dfrac{1}{2!}\mathrm{C}_4^3$.

Lời giải.

Vì chữ số 1 lặp lại nhiều nhất 2 lần nên xem như ta chọn 3 chữ số từ tập hợp $\{1;1;2;3\}$ có A_4^3.
Tuy nhiên, do số được lập từ hai chữ số 1 bị lặp lại 2 lần nên có $\frac{1}{2}A_4^3$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho các số 1, 2, 5, 7, 8. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 278?
A. 12. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 20.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.

TH 1. $a = 1$.
Chọn a có 1 cách. Chọn b có 4 cách. Chọn c có 3 cách.

TH 2. $a = 2$, $b < 7$.
Chọn a có 1 cách. Chọn b có 2 cách. Chọn c có 3 cách.

TH 3. $a = 2$, $b = 7$.
Chọn a có 1 cách. Chọn b có 1 cách. Chọn c có 2 cách.

Vậy có $1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 20$ số thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 13. Có bao nhiêu cách xếp 6 người quanh bàn tròn sao cho có một cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau?
A. $6!$. **B.** $2! \cdot 4!$. **C.** $5!$. **D.** $5! \cdot 2!$.

Lời giải.
Xem như cặp vợ chồng là một nhóm. Số cách xếp 1 nhóm và 4 người vào bàn tròn là $4!$ cách.
Số cách xếp 2 vợ chồng trong nhóm là $2!$ cách.
Vậy có $2!4!$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 14. Có 8 học sinh xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau nếu có 3 học sinh không chịu rời nhau?
A. $8!$. **B.** $5! \cdot 3!$. **C.** $6! \cdot 3!$. **D.** $5!$.

Lời giải.
Ta xem 3 học sinh không chịu rời nhau là một, khi đó số cách sắp xếp 6 người vào một hàng dọc là $6!$. Với mỗi cách xếp ta hoán đổi vị trí 3 học sinh đó có $3!$ cách.
Theo quy tắc nhân ta có $6! \cdot 3!$ cách.
Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh. Có bao nhiêu tam giác không chứa cạnh nào của H?
A. 800. **B.** 1140. **C.** 320. **D.** 20.

Lời giải.
Số tất cả các tam giác được tạo thành có đỉnh là đỉnh của H là $C_{20}^3 = 1140$.
Ta xét các trường hợp mà tam giác tạo thành chứa cạnh của H.

TH 1. Tam giác có chứa hai cạnh của H. Loại tam giác này được tạo thành từ 3 đỉnh liên tiếp của H. Vì H có 20 cạnh nên có 20 tam giác như vậy.

TH 2. Tam giác có chứa một cạnh của H. Loại tam giác này được tạo thành từ 2 đỉnh liền kề và một đỉnh khác không liền kề với hai đỉnh đó. Ta có 20 cách chọn ra 2 đỉnh liền kề (chọn 1 cạnh) và C_{16}^1 cách chọn 1 đỉnh không liền kề với 2 đỉnh đã chọn. Vậy có $20 \cdot C_{16}^1 = 320$ tam giác.

Từ đó suy ra có $1140 - 20 - 320 = 800$ tam giác thỏa mãn.
Nhận xét: Có thể xét cho bài toán tổng quát: *"Cho đa giác H có n cạnh. Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của H và không chứa cạnh nào của H?"*
Lập luận như trên ta đưa ra được kết quả là $C_n^3 - n - nC_{n-4}^1$ tam giác không chứa cạnh nào của H.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Từ các số 0, 4, 5, 7, 9. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 5000?

A. 24. **B.** 36. **C.** 48. **D.** 120.

Lời giải.

Gọi số cần lập có dạng $\overline{abcd}$ với a, b, c, d khác nhau đôi một, $d \in \{0; 4\}$.
Ta xét các trường hợp:

TH 1. $a > 5$, khi đó có 2 cách chọn chữ số a, 2 cách chọn chữ số d và A_3^2 cách chọn các chữ số b, c. Vậy có $2 \cdot 2 \cdot \mathrm{A}_3^2 = 24$ số.

TH 2. $a = 5$, $b = 0$ thì $d = 4$, khi đó có 2 cách chọn chữ số c (7 hoặc 9). Vậy có 2 số.

TH 3. $a = 5$, $b = 4$ thì $d = 0$, khi đó có 2 cách chọn chữ số c (7 hoặc 9). Vậy có 2 số.

TH 4. $a = 5$, $b \neq 4$, khi đó có 2 cách chọn chữ số b (7 hoặc 9), 2 cách chọn chữ số d và 2 cách chọn chữ số c. Vậy có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ số.

Vậy có tất cả $24 + 2 + 2 + 8 = 36$ số thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án B □

Câu 17. Từ các số 0, 1, 2, 6, 7, 8, 9. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau và lớn hơn 5000?

A. 60. **B.** 320. **C.** 260. **D.** 280.

Lời giải.

Giả sử số cần lập có dạng $\overline{abcd}$, trong đó a, b, c, d khác nhau đôi một.
Ta xét các trường hợp:

TH 1. $a = 6$, khi đó ta có 3 cách chọn d, 5 cách chọn b và 4 cách chọn c. Vậy có $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ số.

TH 2. $a = 8$, khi đó ta có 3 cách chọn d, 5 cách chọn b và 4 cách chọn c. Vậy có $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ số.

TH 3. $a \in \{7; 9\}$, khi đó ta có 2 cách chọn a, 4 cách chọn d, 5 cách chọn b và 4 cách chọn c. Vậy có $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 160$ số.

Vậy có tất cả $60 + 60 + 160 = 280$ số thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Một người mời 6 bạn đến nhà, bố trí họ ngồi vào một bàn dài và đãi tiệc. Tiệc xong, khi tiễn các bạn về ông ta tuyên bố, bắt đầu từ tuần tới, mỗi tuần lại mời các bạn đến nhà chơi một lần và mỗi lần ngồi theo một trật tự khác nhau. Phải mất bao lâu người đó mới thực hiện xong lời mời đó?

A. 719 tuần. **B.** 718 tuần. **C.** 720 tuần. **D.** 721 tuần.

Lời giải.

Để thực hiện xong lời mời, số lần mời phải bằng số cách sắp xếp 6 người vào một bàn dài.
Số cách sắp xếp 6 người vào một bàn dài là $6! = 720$ cách. Người nọ đã thực hiện được một lần mời, vậy cần $720 - 1 = 719$ tuần để thực hiện xong lời mời.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Có bao nhiêu trường hợp ta nhận được các số khác nhau khi tung cùng lúc ba súc sắc?

A. 30. **B.** 120. **C.** 90. **D.** 60.

Lời giải.

Ta coi mỗi lần tung kết quả thu được là một số có 3 chữ số khác nhau đôi một dạng $\overline{abc}$, trong đó a, b, $c \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Số các số có 3 chữ số khác nhau đôi một được lập từ các chữ số thuộc tập A là $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số. Vậy có tất cả 120 kết quả thu được.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Có bao nhiêu số tự nhiên là số có 5 chữ số mà trong mỗi số có đúng hai chữ số 8, các chữ số còn lại khác nhau?

A. 7404. **B.** 9408. **C.** 4704. **D.** 3108.

Lời giải.

Gọi số cần viết có dạng $\overline{abcde}$ với $a \neq 0$.
Ta xét hai trường hợp sau:

TH 1. Với $a = 8$ thì có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 8 còn lại, có A_9^3 cách chọn giá trị cho 3 chữ số còn lại. Khi đó có $4 \cdot \mathrm{A}_9^3 = 2016$ số thoả mãn.

TH 2. Với $a \neq 8$ thì có 8 cách chọn giá trị cho a, C_4^2 cách chọn vị trí cho hai chữ số 8 và A_8^2 cách chọn giá trị cho 2 chữ số còn lại. Khi đó có $8 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{A}_8^2 = 2688$ số thoả mãn.

Vậy tổng cộng có $2016 + 2688 = 4704$ số thoả mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Đa thức $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 20(1+x)^{20}$ được viết dưới dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$. Tìm a_{15}.

A. 400996. **B.** 400895. **C.** 400995. **D.** 400896.

Lời giải.
Từ dạng của khai triển ta thấy a_{15} chính là hệ số của số hạng chứa x^{15}. Hệ số này chỉ xuất hiện trong khai triển của các biểu thức $n(1+x)^n$ với $n = \overline{15, 20}$.
Số hạng tổng quát trong khai triển của biểu thức $n(1+x)^n$ là $T = n\mathrm{C}_n^k \cdot x^k$. Khi đó, tổng tất cả các hệ số của số hạng chứa x^{15} trong tất cả các khai triển trên là

$$\sum_{n=15}^{20} n\mathrm{C}_n^{15} = 15\mathrm{C}_{15}^{15} + 16\mathrm{C}_{16}^{15} + 17\mathrm{C}_{17}^{15} + 18\mathrm{C}_{18}^{15} + 19\mathrm{C}_{19}^{15} + 20\mathrm{C}_{20}^{15} = 400995.$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển của biểu thức $(x^3 + xy)^{15}$.

A. C_{15}^{10}. **B.** C_{15}^{11}. **C.** C_{15}^{9}. **D.** C_{15}^{12}.

Lời giải.
Số hạng tổng quát của khai triển là $T = \mathrm{C}_{15}^k \cdot x^{3(15-k)} \cdot (xy)^k = \mathrm{C}_{15}^k \cdot x^{45-2k} \cdot y^k$.
Để T là số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ thì $k = 10$. Khi đó, hệ số của số hạng cần tìm là C_{15}^{10}.
Chọn đáp án A □

Câu 23. Giá trị của tổng $S = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n$ bằng

A. 3^n. **B.** $3^{n+1} - 1$. **C.** 3^{n-1}. **D.** $3^n + 1$.

Lời giải.
Ta xét khai triển $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + x\mathrm{C}_n^1 + x^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + x^n\mathrm{C}_n^n$.
Khi $x = 2$, từ khai triển trên ta được $(1+2)^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n = 3^n$.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12}$ thành dạng $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{12}x^{12}$. Tìm $\max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12}\}$.

A. $2^8 \cdot \mathrm{C}_{11}^5$. **B.** $2^9 \cdot \mathrm{C}_{12}^7$. **C.** $2^8 \cdot \mathrm{C}_{12}^8$. **D.** $2^8 \cdot \mathrm{C}_{11}^8$.

Lời giải.
Số hạng thứ $k+1$ của khai triển đã cho là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{12}^k \cdot 2^k \cdot x^k$. Suy ra hệ số tương ứng là $a_{k+1} = \mathrm{C}_{12}^k \cdot 2^k$.
Giải sử a_{k+1} là hệ số lớn nhất trong tất cả các hệ số a_i, $\forall i = 1, \ldots, 12$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} a_{k+1} \geq a_k \\ a_{k+1} \geq a_{k+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_{12}^k \cdot 2^k \geq \mathrm{C}_{12}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \\ \mathrm{C}_{12}^k \cdot 2^k \geq \mathrm{C}_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12!}{k! \cdot (12-k)!} \cdot 2^k \geq \dfrac{12!}{(k-1)! \cdot (12-k+1)!} \cdot \dfrac{2^k}{2} \\ \dfrac{12!}{k! \cdot (12-k)!} \cdot 2^k \geq \dfrac{12!}{(k+1)! \cdot (12-k-1)!} \cdot 2 \cdot 2^k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2(12-k+1)} \\ \dfrac{1}{12-k} \geq \dfrac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} \leq k \leq \frac{26}{3}.$$

Do k nguyên nên $k = 8$. Vậy hệ số lớn nhất cần tìm là $a_9 = 2^8 \cdot \mathrm{C}_{12}^8$.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Một lớp có 20 học sinh gồm 9 nam và 11 nữ trong đó có một học sinh nam tên Duy và học sinh nữ tên Nga. Có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự lớp gồm 5 học sinh trong đó phải có ít nhất 2 nam và 2 nữ nếu Duy và Nga không chịu làm việc chung với nhau?

A. $\mathrm{C}_9^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^7 + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_{11}^2 - \left(8\mathrm{C}_{10}^2 + 10\mathrm{C}_8^2\right)$.
B. $\mathrm{C}_9^2 \cdot \mathrm{C}_{11}^3 + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_{11}^2 - \left(\mathrm{C}_8^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_8^2\right)$.
C. $\mathrm{C}_9^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^3 + \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_9^3 - \left(8\mathrm{C}_{10}^2 + 10\mathrm{C}_{10}^2\right)$.
D. $\mathrm{C}_9^2 \cdot \mathrm{C}_{11}^3 + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_{11}^2 - \left(\mathrm{C}_8^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_8^2\right)$.

Lời giải.

— Trước hết ta tìm số các cách để lập một ban cán sự lớp gồm 5 học sinh sao cho có ít nhất 2 nam và 2 nữ.

- Chọn 2 nam và 3 nữ có $C_9^2 \cdot C_{11}^3$ cách.
- Chọn 3 nam và 2 nữ có $C_9^3 \cdot C_{11}^2$ cách.

Vậy có $C_9^2 \cdot C_{11}^3 + C_9^3 \cdot C_{11}^2$ cách tất cả.

— Tiếp theo ta lập ban cán sự có mặt cả Duy và Nga.

- Chọn 1 nữ và 2 nam (không chọn Duy và Nga) có $C_8^1 \cdot C_{10}^2$ cách.
- Chọn 1 nam và 2 nữ (không chọn Duy và Nga) có $C_{10}^1 \cdot C_8^2$ cách.

Vậy có $C_8^1 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^1 \cdot C_8^2$ cách.

Vậy số cách thỏa mãn yêu cầu đề bài là $C_9^2 \cdot C_{11}^3 + C_9^3 \cdot C_{11}^2 - \left(C_8^1 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^1 \cdot C_8^2\right)$.
Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN BỘ ĐỀ 03

1. D	2. C	3. B	4. B	5. D	6. A	7. A	8. B	9. A	10. D
11. C	12. D	13. B	14. C	15. A	16. B	17. D	18. A	19. B	20. C
21. C	22. A	23. A	24. C	25. D					

BÀI 4. BỘ ĐỀ SỐ 4

Câu 1. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên khác nhau, mỗi số có các chữ số không trùng nhau?

A. 120. **B.** 72. **C.** 261. **D.** 60.

Lời giải.

— Số cần lập là số có 1 chữ số: có 5 số (0, 1, 2, 3, 4).

— Số cần lập có 2 chữ số: có $4 \cdot 4 = 16$ số.

— Số cần lập có 3 chữ số: có $4 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 48$ số.

— Số cần lập có 4 chữ số: có $4 \cdot \mathrm{A}_4^3 = 96$ số.

— Số cần lập có 5 chữ số: có $4 \cdot \mathrm{A}_4^4 = 96$ số.

Vậy có $5 + 16 + 48 + 96 + 96 = 261$ số.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

A. 420. **B.** 50400. **C.** 220. **D.** 480.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ $(a_1 \neq 0)$.

— Chữ số 5 đứng đầu $(a_1 = 5)$:
a_1 có 1 cách chọn; $\overline{a_2a_3a_4}$ có A_6^3.
Suy ra trường hợp này có $1 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 120$ số.

— Chữ số 5 không đứng đầu $(a_1 \neq 5)$: có 3 vị trí để đặt chữ số 5, khi đó:
a_1 có 5 cách chọn (khác 0 và 5); hai chữ số còn lại có A_5^2 cách chọn.
Suy ra trường hợp này có $3 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 300$ số.

Vậy có tất cả $120 + 300 = 420$ số.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau?

A. 328. **B.** 320. **C.** 248. **D.** 40.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3}$ $(a_1 \neq 0)$.

— Chữ số cuối cùng bằng 0 $(a_3 = 0)$:
a_3 có 1 cách chọn; a_1 có 9 cách chọn; a_2 có 8 cách chọn.
Suy ra trường hợp này có $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ số.

— Chữ số cuối cùng khác 0 $(a_3 \neq 0)$:
a_3 có 4 cách chọn; a_1 có 8 cách chọn; a_2 có 8 cách chọn.
Suy ra trường hợp này có $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ số.

Vậy có tất cả $72 + 256 = 328$ số cần tìm.
Chọn đáp án A □

Câu 4. Từ các chữ số lẻ có thể viết được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. $\mathrm{A}_5^4 - \mathrm{A}_4^3$. **B.** A_5^4. **C.** 96. **D.** 100.

Lời giải.
Có 5 chữ số lẻ là 1, 3, 5, 7, 9. Do đó có thể viết được $\mathrm{A}_5^4 = 120$ số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 7.

A. $1 \cdot \mathrm{A}_7^4 + 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \mathrm{A}_6^3$.
B. $1\mathrm{A}_7^4 + 1 \cdot 6 \cdot \mathrm{A}_6^3$.
C. $\mathrm{A}_8^5 - \mathrm{A}_7^4 + 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \mathrm{A}_6^3$.
D. $1 \cdot \mathrm{A}_7^4 + 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \mathrm{A}_6^3$.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $(a_1 \neq 0)$.

— Trường hợp 1: $a_1 = 7$
a_1 có 1 cách chọn; $\overline{a_2a_3a_4a_5}$ có A_7^4 cách chọn.
Suy ra trường hợp này có $1 \cdot \mathrm{A}_7^4$ số.

— Trường hợp 2: $a_2 = 7$
a_1 có 6 cách chọn; $\overline{7a_3a_4a_5}$ có A_6^3 cách chọn.
Suy ra trường hợp này có $6 \cdot \mathrm{A}_6^3$ số.

— Trường hợp 3: $a_3 = 7$
a_1 có 6 cách chọn; $\overline{a_27a_4a_5}$ có A_6^3 cách chọn.
Suy ra trường hợp này có $6 \cdot \mathrm{A}_6^3$ số.

Vậy có tất cả $1 \cdot \mathrm{A}_7^4 + 2 \cdot 6 \cdot \mathrm{A}_6^3$ số cần tìm.
Chọn đáp án A □

Câu 6. Tìm số hạng đứng giữa của khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

A. $\mathrm{C}_{10}^5 \sqrt[3]{x^2}$.
B. $\mathrm{C}_{10}^4 x \sqrt[3]{x}$.
C. $\mathrm{C}_{11}^5 \sqrt[3]{x^2}$.
D. $\mathrm{C}_{11}^6 x \sqrt[3]{x}$.

Lời giải.
Khai triển có tất cả 11 số hạng nên số hạng ở giữa ứng với $k = 5$. Số hạng đó là $\mathrm{C}_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^5 = \mathrm{C}_{10}^5 \sqrt[3]{x^2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Cô dâu và chú rể mời 4 người bạn đứng thành một hàng để chụp ảnh cùng với mình. Có bao nhiêu cách xếp hàng nếu cô dâu đứng ở phía bên trái chú rể?

A. 240.
B. 360.
C. 480.
D. 600.

Lời giải.
Ta đánh số 6 vị trí để xếp 6 người từ 1 đến 6 theo thứ tự từ trái sang phải của người chụp ảnh.

— Trường hợp 1: Chú rể đứng ở vị trí số 1.
Khi đó có 5 cách xếp cô dâu và 4! cách xếp 4 người còn lại.

— Trường hợp 2: Chú rể đứng ở vị trí số 2.
Khi đó có 4 cách xếp cô dâu và 4! cách xếp 4 người còn lại.

— Trường hợp 3: Chú rể đứng ở vị trí số 3.
Khi đó có 3 cách xếp cô dâu và 4! cách xếp 4 người còn lại.

— Trường hợp 4: Chú rể đứng ở vị trí số 4.
Khi đó có 2 cách xếp cô dâu và 4! cách xếp 4 người còn lại.

— Trường hợp 5: Chú rể đứng ở vị trí số 5.
Khi đó có 1 cách xếp cô dâu và 4! cách xếp 4 người còn lại.

Vậy có tất cả $4! \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360$ cách xếp.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên không lớn 100 chia hết cho 4 hoặc cho 6.

A. 16.
B. 34.
C. 17.
D. 33.

Lời giải.

— Các số nguyên không lớn 100 chia hết cho 4 có dạng $4k \leq 100$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \leq 25$, $k \in \mathbb{Z}$.
Suy ra trường hợp này có 26 số.

— Các số nguyên không lớn 100 chia hết cho 6 có dạng $6k \leq 100$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \leq \dfrac{50}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Suy ra trường hợp này có 17 số.

— Các số nguyên không lớn 100 chia hết cho cả 4 và 6 có dạng $12k \leq 100$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \leq \dfrac{25}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Suy ra trường hợp này có 9 số.

Vậy có tất cả $26 + 17 - 9 = 34$ số thỏa yêu cầu.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Có bao nhiêu cách xếp các chữ a, b, c, d thành một dãy sao cho chữ b không đi liền sau chữ a?

A. 15. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 17.

Lời giải.
Số cách xếp tùy ý là $4!$.
Số cách xếp b đi liền sau a là $3 \cdot 2!$
Vậy số cách xếp b không đi liền sau a là $4! - 3 \cdot 2! = 18$.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Một đa giác lồi n cạnh có bao nhiêu đường chéo?

A. $n(n-3)$. **B.** $\dfrac{n(n-3)}{2}$. **C.** $\dfrac{n(n-2)}{2}$. **D.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Lời giải.
Đa giác có n cạnh nên có n đỉnh. Qua 2 đỉnh nối với nhau thì được 1 đường. Suy ra tổng số đường chéo và số cạnh là C_n^2. Vậy số đường chéo là $\mathrm{C}_n^2 - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên dương khác nhau có 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của nó là số chẵn?

A. 10^5. **B.** $9 \cdot 10^5$. **C.** $9 \cdot 5 \cdot 10^5$. **D.** $8 \cdot 5 \cdot 10^5$.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abcdefg}$.
Vị trí a có 9 cách chọn ($a \neq 0$).
Các vị trí b, c, d, e, f, mỗi vị trí có 10 cách chọn.
Vị trí g:

— Nếu $a + b + c + d + e + f$ là số chẵn thì g cũng chẵn nên g có 5 cách chọn.

— Nếu $a + b + c + d + e + f$ là số lẻ thì g cũng lẻ nên g có 5 cách chọn.

Suy ra g có 5 cách chọn.
Vậy có $9 \cdot 10^5 \cdot 5$ số thỏa mãn điều kiện đề bài.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300; 500)$?

A. $2 \cdot \mathrm{A}_4^2$. **B.** A_4^2. **C.** A_4^3. **D.** A_4^4.

Lời giải.
Bạn gọi tập các số cần tìm có dạng là $\overline{abc}$.
Vì cần lập ra các số có 3 chữ số khác nhau năm trong khoảng $(300, 500)$ nên a có 2 cách chọn (là 3 và 4); $\overline{bc}$ có A_4^2 cách chọn.
Vậy có thể lập được $2 \cdot \mathrm{A}_4^2$ số.
Chọn đáp án A □

Câu 13. Từ các chữ số 1, 3, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có các chữ số khác và lớn hơn 6000?

A. $2 \cdot \mathrm{A}_4^3$. **B.** A_5^5. **C.** P_5. **D.** $2\mathrm{A}_4^3 + \mathrm{A}_5^5$.

Lời giải.

— Trường hợp số cần lập có 5 chữ số: có A_5^5 số.

— Trường hợp số cần lập có 4 chữ số: có 2 cách chọn chữ số hàng nghìn và A_4^3 cách chọn 3 chữ số còn lại.
Suy ra có $2 \cdot \mathrm{A}_4^3$ số.

Vậy có tất cả $2A_4^3 + A_5^5$ số.
Chọn đáp án D □

Câu 14. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số mà 3 chữ số sau đều nhỏ hơn 6, còn 2 chữ số đầu không nhỏ hơn 6 trong đó các chữ số đều khác nhau?

A. 1440. **B.** 1442. **C.** 1444. **D.** 1446.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $(a_1 \neq 0)$.

— Vì hai chữ số đầu không nhỏ hơn 6 nên a_1, $a_2 \in \{6; 7; 8; 9\}$ do đó có A_4^2 cách chọn $\overline{a_1a_2}$.

— Vì ba chữ số sau đều nhỏ hơn 6 nên a_3, a_4, $a_5 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ do đó có A_6^3 cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$.

Vậy có tất cả $A_4^2 \cdot A_6^3 = 1440$ số cần tìm.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho $P(x, y, z)$ là điểm trong không gian ba chiều với các thành phần tọa độ là các số nguyên có 1 chữ số. Hỏi có bao nhiêu điểm như vậy?

A. 1000. **B.** 503. **C.** 879. **D.** 1001.

Lời giải.
Ta có x, y, $z \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Do đó có tất cả $10^3 = 1000$ điểm thỏa mãn điều kiện đề bài.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Trong một ván cờ vua gồm nam và nữ vận động viên, mỗi vận động viên phải chơi hai ván với từng vận động viên còn lại. Cho biết có hai vận động viên nữ và số ván vận động viên nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với vận động viên nữ là 66. Hỏi có bao nhiêu vận động viên tham dự giải và số ván tất cả các vận động viên đã chơi là bao nhiêu?

A. 13 vận động viên, 156 ván. **B.** 12 vận động viên, 35 ván.
C. 15 vận động viên 35 ván. **D.** 15 vận động viên, 210 ván.

Lời giải.
Gọi n là số vận động viên tham dự giải. Theo đề bài ta có số vận động viên nam là $n - 2$.
Số ván cờ vận động viên nam chơi với nhau là $(n - 2)(n - 3)$.
Số ván cờ vận động viên nam chơi với vận động viên nữ là $4(n - 2)$. Theo đề bài ta có phương trình

$$\begin{aligned} & (n-2)(n-3) - 4(n-2) = 66 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - 9n - 52 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & n = 13\,(\text{nhận}) \\ & n = -4\,(\text{loại}). \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Vậy có 13 vận động viện tham dự giải và có tất cả $n(n - 1) = 156$ ván cờ.
Chọn đáp án A □

Câu 17. Một tổ có 10 nam và 5 nữ. Cần lập một ban đại diện gồm 4 người. Có bao nhiêu cách lập để có nhiều nhất là 2 nữ?

A. $C_5^3C_{10}^2 + C_5^1C_{10}^3 + C_5^0C_{10}^4$. **B.** 1260.
C. 1050. **D.** 215.

Lời giải.
Trường hợp 1. Chọn ban đại diện có 4 nam, có C_{10}^4 cách chọn
Trường hợp 2. Chọn ban đại diện có 3 nam và 1 nữ, có $C_{10}^3C_5^1$ cách chọn.
Trường hợp 3. Chọn ban đại diện có 2 nam và 2 nữ, có $C_{10}^2C_5^2$ cách chọn.
Vậy có tất cả $C_{10}^4 + C_{10}^3C_5^1 + C_{10}^2C_5^2 = 1260$ cách lập ban đại diện thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Có 3 loại cây và 4 hố trồng cây. Hỏi có mấy cách trồng cây nếu mỗi hố trồng một cây và mỗi loại cây phải có ít nhất một cây được trồng?

A. 35. **B.** 36. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải.

Theo yêu cầu đề bài thì trong 4 hố sẽ có 2 cây cùng loại và hai cây còn lại khác loại, áp dụng hoán vị lặp ta có $\frac{4!}{2!} = 12$ cách trồng cho mỗi trường hợp. Vì có 3 trường hợp tương ứng 3 loại cây nên có tất cả $3 \cdot 12 = 36$ cách trồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong một ngăn buồng trên xe lửa có hai dãy ghế đối mặt nhau, mỗi dãy có 5 chỗ ngồi có đánh số. Trong số 10 hành khách vào ngăn đó có 4 người muốn quay mặt về hướng tàu đi, ba người muốn quay về hướng ngược lại. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho các yếu tố đó được thỏa mãn?

A. 43200. **B.** 20000. **C.** 37500. **D.** 300.

Lời giải.

Sắp xếp 4 người ngồi quay mặt về hướng tàu đi, có A_5^4 cách chọn.
Sắp xếp 3 người ngồi quay mặt về hướng ngược lại, có A_5^3 cách chọn.
Sắp xếp 3 người còn lại sắp tùy ý, có 3! cách chọn.
Vậy có $\mathrm{A}_5^4 \cdot \mathrm{A}_5^3 \cdot 3! = 43200$ cách sắp xếp.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển nhị thức $\left(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n$ bằng 36. Hãy tìm số hạng thứ 7.

A. $84x^3\sqrt{x}$. **B.** $\mathrm{C}_7^3 x^3 \sqrt[3]{x^2}$. **C.** $\mathrm{C}_7^4 \sqrt[3]{x^2}$. **D.** $\mathrm{C}_8^5 x^4 \sqrt{x}$.

Lời giải.

Hệ số của số hạng thứ 3 khai triển bằng C_n^2. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_n^2 = 36 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n!}{2(n-2)!} = 36 \\ \Leftrightarrow\ & n(n-1) = 72 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - n - 72 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} n = 9\,(\text{nhận}) \\ n = -8\,(\text{loại}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta được $n = 9$. Do đó số hạng thứ 7 của khai triển là

$$\mathrm{C}_9^6 (x^2\sqrt{x})^3 \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^6 = 84x^3\sqrt{x}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển của $f(x) = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. C_{40}^2. **B.** C_{40}^3. **C.** C_{40}^4. **D.** C_{40}^5.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển có dạng

$$\mathrm{C}_{40}^k x^{40-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{40}^k x^{40-3k}.$$

Theo đề bài ta có $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow k = 3$.
Vậy hệ số cần tìm là C_{40}^3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Tìm số nguyên dương x sao cho số hạng thứ 5 của khai triển $\left[\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}} + 2\sqrt[x]{2^{-1}}\right]^6$ bằng 240.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4. \end{cases}$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_6^4 \left(\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^2 \cdot \left(2^4 \sqrt[x]{2^{-1}}\right)^4 = 240 \\ \Leftrightarrow\ & 4^{2-\frac{2}{4-x}} \cdot 2^4 \cdot 2^{\frac{-4}{x}} = 16 \\ \Leftrightarrow\ & 2^{4-\frac{4}{4-x}} \cdot 2^{\frac{-4}{x}} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4 - \frac{4}{4-x} - \frac{4}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm số nguyên dương x cho biết trong khai triển $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ tỉ số của hạng tử thứ 7 kể từ hạng tử đầu và hạng tử thứ 7 kể từ hạng tử cuối bằng $\frac{1}{6}$.

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải.

Hạng tử thứ 7 của khai triển kể từ hạng tử đầu tiên là $\mathrm{C}_x^6 \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-6} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6$.

Hạng tử thứ 7 của khai triển kể từ hạng tử cuối cùng là $\mathrm{C}_x^{x-6} \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x-6}$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_x^6 \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-6} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6 = \frac{1}{6}\mathrm{C}_x^{x-6} \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x-6} \\ \Leftrightarrow\ & 6\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-12} = \frac{1}{(\sqrt[3]{3})^{x-12}} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt[3]{6}\right)^{x-12} = \left(\sqrt[3]{6}\right)^{-3} \\ \Leftrightarrow\ & x - 12 = -3 \\ \Leftrightarrow\ & x = 9. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Từ một tập thể 14 người gồm 6 nam và 8 nữ. Người ta muốn chọn một tổ công tác gồm 6 người. Tìm số cách chọn nếu trong tổ phải có cả nam lẫn nữ.

A. 2974. **B.** 2984. **C.** 2985. **D.** 2975.

Lời giải.

Chọn 6 người từ 14 người có C_{14}^6 cách chọn.
Chọn 6 người từ 14 người mà chỉ có nam thì có C_6^6.
Chọn 6 người từ 14 người mà chỉ có nữ thì có C_8^6.
Vậy chọn 6 từ 14 người trong đó có cả nam lẫn nữ thì có $\mathrm{C}_{14}^6 - \mathrm{C}_6^6 - \mathrm{C}_8^6 = 2974$ cách chọn.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Giá trị của tổng $S = \mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{C}_n^n$ là

A. $\frac{1}{n+1}$. **B.** $\frac{1}{n+2}$. **C.** $\frac{1}{n-1}$. **D.** $\frac{1}{2n+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}(1-x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
&(1-x)^n = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n x^n \\
\Rightarrow\ & \int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{C}_n^0 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{C}_n^1 x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{C}_n^2 x^2 \,\mathrm{d}x - \cdots + \int_0^1 (-1)^n \mathrm{C}_n^n x^n \,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{n+1} = \mathrm{C}_n^0 x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^3 x^2\Big|_0^1 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{C}_n^n x^{n+1}\Big|_0^1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{n+1} = \mathrm{C}_n^0 - \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{C}_n^n.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{1}{n+1}$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN BỘ ĐỀ 04

1. C	2. A	3. A	4. B	5. A	6. A	7. B	8. B	9. C	10. B
11. C	12. A	13. D	14. A	15. A	16. A	17. B	18. B	19. A	20. A
21. B	22. A	23. C	24. A	25. A					

BÀI 5. BỘ ĐỀ SỐ 5

Câu 1. Trên mặt phẳng có 10 điểm, trong đó 4 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có bất cứ ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh tại các điểm đã cho?

A. C_6^1. **B.** C_{10}^3. **C.** $C_{10}^3 - C_4^3$. **D.** C_{10}^3.

Lời giải.

Có C_{10}^3 cách chọn 3 điểm trong 10 điểm đã cho, có C_4^3 cách chọn 3 điểm trong 4 điểm thẳng hàng. Suy ra có $C_{10}^3 - C_4^3$ tam giác.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Từ 10 nam và 5 nữ người ta chọn ra một ban đại diện gồm 5 người trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ. Có bao nhiêu cách chọn nếu cậu A và cô B từ chối tham gia?

A. $C_{10}^2 - C_5^3 + C_{10}^3 - C_5^3$. **B.** $C_{15}^5 - C_{10}^2C_{10}^3 + C_{10}^3C_5^3$.

C. $C_9^2C_4^3 + C_9^3C_4^2$. **D.** C_{13}^2.

Lời giải.

Có 2 trường hợp:

— 2 nam và 3 nữ: có C_9^2 cách chọn 2 nam, C_4^3 cách chọn 3 nữ. Suy có $C_9^2C_4^3$ 2 nam và 3 nữ.

— 3 nam và 2 nữ: có C_9^3 cách chọn 3 nam, C_4^2 cách chọn 2 nữ. Suy có $C_9^3C_4^2$ 3 nam và 2 nữ.

Vậy có tất cả $C_9^2C_4^3 + C_9^3C_4^2$ cách chọn.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Bảng chữ cái có 26 kí tự trong đó có 5 nguyên âm. Có bao nhiêu chuỗi gồm 6 kí tự trong đó có 3 phụ âm khác nhau và 3 nguyên âm khác nhau sao cho trong các chữ số đó chứa q và v?

A. $C_4^2C_{20}^2 6!$. **B.** $C_5^3C_{21}^3 6!$. **C.** $C_4^2C_{20}^2$. **D.** $C_5^3C_{21}^3$.

Lời giải.

Có C_4^2 hai nguyên âm, C_{20}^2 cách chọn hai phụ âm, 6! cách sắp xếp 6 kí tự vừa được chọn. Vậy có tất cả $A_6^2C_4^2A_4^2A_{20}^2 = C_4^2C_{20}^2 6!$ chuỗi.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Có 90 phiếu được đánh số từ 1 đến 90. Tính số cách rút ra 5 phiếu cùng một lúc sao cho có ít nhất 2 phiếu có số thứ tự là 2 số liên tiếp.

A. C_{86}^5. **B.** C_{90}^5. **C.** $C_{90}^5 + C_{86}^5$. **D.** $C_{90}^5 - C_{86}^5$.

Lời giải.

Giả sử các phiếu được chọn có số thứ tự là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và $1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leqslant 90$.

Ta xét trường hợp không tồn tại hai phiếu nào có số thứ tự là hai số liên tiếp. Mỗi trường hợp như vậy tương ứng với bộ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ thỏa mãn

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leqslant 90 \text{ và } a_{i+1} - a_i \geqslant 2, i = \overline{1,4} \quad (1)$$

Đặt $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - 1, b_3 = a_3 - 2, b_4 = a_4 - 3, b_5 = a_5 - 4$, ta có

$$1 \leqslant b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 \leqslant 86 \text{ và } b_{i+1} - b_i \geqslant 1, i = \overline{1,4} \quad (2)$$

Ta thấy số cách chọn bộ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ thỏa mãn (1) bằng số cách chọn bộ $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ thỏa mãn (2) và bằng C_{86}^5. Vậy có $C_{90}^5 - C_{86}^5$ cách rút phiếu.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Có bao nhiêu cách chia 3 thầy giáo dạy toán vào dạy 6 lớp 12, mỗi thầy dạy đúng 2 lớp?

A. C_6^2. **B.** C_4^2. **C.** $C_6^2C_4^2$. **D.** $C_6^2 + C_4^2$.

Lời giải.

Thầy giáo thứ nhất có C_6^2 cách chọn lớp, thầy thứ hai có C_4^2 cách chọn 2 lớp trong 4 lớp còn lại, thầy thứ ba có 1 cách chọn 2 lớp còn lại. Vậy có cách $C_6^2C_4^2$ chia lớp.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho $P(x, y, z)$ là điểm trong không gian ba chiều với các tọa độ là số tự nhiên chỉ có một chữ số. Hỏi có thể lấy một hệ gồm nhiều nhất bao nhiêu điểm như vậy sao cho không có bất cứ hai điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với trục Ox?

A. 1000. **B.** 10. **C.** 10000. **D.** 100.

Lời giải.

Hai điểm (x_1, y_1, z_1) và (x_2, y_2, z_2) không cùng nằm trong mặt phẳng vuông góc với Ox khi $x_1 \neq x_2$. Vậy mỗi hệ có nhiều nhất 10 điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại M. Trên a lấy 9 điểm phân biệt khác M, trên b lấy 10 điểm phân biệt khác M. Hỏi từ 20 điểm đã cho lập được bao nhiêu tam giác?

A. C_{20}^3. **B.** $\mathrm{C}_{20}^3 - \mathrm{C}_{10}^3 - \mathrm{C}_{11}^3$. **C.** $\mathrm{C}_{20}^3 - \mathrm{C}_9^3 - \mathrm{C}_{10}^3$. **D.** $9\mathrm{C}_{11}^2 + 10\mathrm{C}_{10}^2$.

Lời giải.

Có C_{20}^3 cách chọn 3 điểm trong 20 đã cho, có C_{10}^3 cách chọn 3 điểm trên a, C_{11}^3 cách chọn 3 điểm trên b. Suy ra lập được $\mathrm{C}_{20}^3 - \mathrm{C}_{10}^3 - \mathrm{C}_{11}^3$ tam giác.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Ba bạn A, B, C cùng đến nhà bạn D mượn sách. Bạn D có 9 quyển sách khác nhau, trong đó có 8 quyển sách học và một cuốn tiểu thuyết. Bạn B mượn 2 quyển, C muốn mượn 3 quyển. Bạn A mượn 2 quyển trong đó có một cuốn tiểu thuyết. Hỏi bạn D có bao nhiêu cách cho mượn?

A. $\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^5$. **B.** $\mathrm{C}_9^2\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^3$. **C.** $\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^3$. **D.** $3\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^3$.

Lời giải.

Bạn A có 8 cách chọn, sau khi bạn A chọn bạn B có C_7^2 cách chọn, sau khi bạn A và B chọn bạn C có C_5^5 cách chọn. Vậy bạn D có $8\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^3$ cách cho mượn.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất ta lấy 10 điểm. Trên đường thẳng thứ 2 ta lấy 20 điểm. Có bao nhiêu tam giác tạo bởi các điểm đã cho?

A. $20\mathrm{C}_{10}^3 + 10\mathrm{C}_{20}^3$. **B.** $10\mathrm{C}_{10}^3 + 10\mathrm{C}_{10}^2$. **C.** C_{20}^3. **D.** $10\mathrm{C}_{20}^2 + 20\mathrm{C}_{10}^2$.

Lời giải.

Có C_{30}^3 cách chọn 3 điểm bất kì, C_{10}^3 cách chọn 3 điểm trên đường thẳng thứ nhất, C_{20}^3 cách chọn 3 điểm trên đường thẳng thứ hai. Vậy có $\mathrm{C}_{30}^3 - \mathrm{C}_{10}^3 - \mathrm{C}_{20}^3 = 10\mathrm{C}_{20}^2 + 20\mathrm{C}_{10}^2$ tam giác.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau trong đó có hai chữ số 3 và 4 không đứng cạnh nhau?

A. 576. **B.** 444. **C.** $\mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_5^4 - 78$. **D.** Kết quả khác.

Lời giải.

Gọi X là tập các chỉnh hợp chập 5 của tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, Y là tập con của X gồm tất cả các chỉnh hợp mà 0 đứng đầu, Z là tập con của X gồm tất cả các chỉnh hợp được lập từ $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ trong đó $3, 4$ đứng cạnh nhau và chữ số đứng đầu khác 0.

Ta có $|X| = \mathrm{A}_6^5$, $|Y| = \mathrm{A}_5^4$.

Giả sử $a_1a_2a_3a_4a_5 \in Z$. Nếu $a_1 = 3$ hoặc $a_1 = 4$ có 2 cách chọn vị trí của 3 và 4, A_4^3 cách chọn và sắp xếp các chữ số còn lại. Nếu $a_1 \neq 3$ và $a_1 \neq 4$ thì có 3 cách chọn a_1, có 6 cách chọn vị trí của 3 và 4, A_3^2 cách chọn và sắp xếp các chữ số còn lại. Vậy $|Z| = 2\mathrm{A}_4^3 + 3 \cdot 6\mathrm{A}_3^2 = 156$.

Suy ra số các số tự nhiên cần tìm là $|X| - |Y| - |Z| = \mathrm{A}_6^5 - \mathrm{A}_5^4 - 156 = 444$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho các số tự nhiên $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau sao cho luôn có mặt chữ số 4 và chữ số hàng nghìn là 5?

A. $3\mathrm{A}_4^2$. **B.** $4\mathrm{A}_4^2$. **C.** A_4^3. **D.** $4\mathrm{A}_4^3$.

Lời giải.

Chữ số hàng nghìn là 5 nên có 3 cách chọn vị trí cho số 4, A_4^2 cách chọn và sắp xếp các chữ số còn lại. Vậy có tất cả $3\mathrm{A}_4^2$ số.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho các chữ số $0, 1, 2, 3, 6, 7$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau và một trong hai chữ số đầu tiên là 7?

A. 36. **B.** 48. **C.** 57. **D.** 66.

Lời giải.

- Xét trường hợp chữ số cuối là 0. Có 2 cách chọn vị trí của chữ số 7, A_4^2 cách chọn và sắp xếp các chữ số còn lại. Suy ra có $2A_4^2 = 24$ số.
- Xét trường hợp chữ số cuối là 2 hoặc 6. Có 2 cách chọn chữ số cuối. Nếu chữ số đầu là 7, có A_4^2 cách chọn và sắp xếp các chữ số còn lại. Nếu chữ số thứ hai là 7 thì có 3 cách chọn chữ số đầu, 3 cách chọn chữ số còn lại. Suy ra có $2(A_4^2 + 3 \cdot 3) = 42$ số.

Vậy có tất cả $24 + 42 = 66$ số.
Chọn đáp án D □

Câu 13. Có bao nhiêu người tham gia vào cuộc đấu cờ theo thể thức vòng tròn một lượt, biết rằng cuộc đấu có tất cả 84 ván và có hai người bỏ cuộc sau khi mỗi người đã đấu đúng ba ván?

A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải.
Gọi n là số người tham gia ($n \in \mathbb{N}^*$), hai người bỏ cuộc là A và B. Có hai trường hợp xảy ra

- A đã đấu với B. Trong 84 ván có 79 ván không có A, B tham gia. Số ván không có A, B tham gia là $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$. Suy ra
$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 79 \Leftrightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{633}}{2} \text{ (không thỏa mãn).}$$
- A chưa đấu với B. Trong 84 ván có 78 ván không có A, B tham gia. Số ván không có A, B tham gia là $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$. Suy ra
$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 79 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 15 \\ n = -10 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy số người tham gia là 15.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Có 10 đường thẳng, trong đó có 4 đường thẳng song song với nhau và không có bất cứ 3 đường nào đồng quy, hỏi chúng cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 39. **B.** 40. **C.** 41. **D.** 42.

Lời giải.
Gọi 4 đường thẳng song song là a_1, a_2, a_3, a_4, các đường thẳng còn lại là $b_1, b_2, \ldots, b_6$. Mỗi đường thẳng b_i cắt a_j tại một điểm. Suy ra tổng số giao điểm các đường thẳng $b_i, i = \overline{1,6}$ cắt các đường thẳng $a_j, j = \overline{1,4}$ là 24. Tổng số giao điểm các đường thẳng $b_i, i = \overline{1,6}$ cắt nhau là $C_6^2 = 15$. Vậy các đường thẳng đã cho cắt nhau tại $24 + 15 = 39$ điểm.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$. Tính tổng tất cả các số có 5 chữ số khác nhau được tạo thành từ các số trên.

A. 66666. **B.** 7999920. **C.** 3333300. **D.** 3999960.

Lời giải.
Gọi S là tập hợp tất cả các số. Ta sắp xếp tất cả các phần tử của S dạng

$$\begin{array}{c} 12345 \\ 21435 \\ 45321 \\ \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \\ 54321 \\ \hline \end{array}$$

Trong mỗi cột mỗi chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ xuất hiện $4! = 24$ lần cho nên tổng các chữ số của mỗi cột là

$$24(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360.$$

Ta thực hiện cộng như sau : Tổng cột thứ 5 bằng 360 viết 0 nhớ 36, tổng cột thứ 4 bằng 360 cộng thêm 36 bằng 396 ta viết 6 nhớ 39, tổng cột thứ 3 bằng 360 cộng thêm 39 bằng 399 ta viết 9 nhớ 39 tổng cột thứ 2 bằng 360 cộng thêm 39 bằng 399 ta viết 9 nhớ 39, tổng cột thứ nhất bằng 360 cộng thêm 39 bằng 399 ta được kết quả 3999960.
Chọn đáp án D □

Câu 16. Một lớp học có 51 học sinh gồm 29 học sinh nữ và 22 nam. Có bao nhiêu cách bầu một ban cán sự gồm 5 người nếu cậu Huy và cô Thục phải làm việc chung mới chịu?

A. C_{21}^5. **B.** C_{49}^5. **C.** C_{39}^3. **D.** $C_{49}^5 + C_{49}^3$.

Lời giải.

Trường hợp 1: Cậu Huy và cô Thục cùng làm việc trong ban cán sự.

— Chọn cậu Huy và cô Thục vào ban cán sự lớp có 1 cách.

— Chọn 3 học sinh vào 3 vị trí còn lại trong ban cán sự lớp có C_{49}^3.
Do đó có $1 \cdot C_{49}^3 = C_{49}^3$ cách.

Trường hợp 2: Cậu Huy và cô Thục không cùng làm việc trong ban cán sự.
Chọn 5 học sinh từ 49 học sinh (bỏ cậu Huy và cô Thục ra) vào ban cán sự lớp có C_{49}^3 cách.
Vậy có $C_{49}^5 + C_{49}^3$ cách chọn thỏa yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Một lớp học có 51 học sinh gồm 29 học sinh nữ và 22 nam. Có bao nhiêu cách bầu một ban cán sự gồm 5 người nếu cậu Huy và cô Thục không thể làm chung với nhau?

A. C_{51}^5. **B.** C_{49}^3. **C.** C_{39}^3. **D.** $\cdot C_{51}^5 - C_{49}^3$.

Lời giải.
Có C_{51}^5 cách chọn ban cán sự và có C_{49}^3 trường hợp cậu Huy và cô Thục cùng tham gia vào ban cán sự.
Vậy có $\cdot C_{51}^5 - C_{49}^3$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong mặt phẳng cho 5 điểm. Giả sử trong các đường thẳng nối từng cặp điểm trong 5 điểm này không có cặp đường thẳng song song, vuông góc hay trùng nhau. Qua mỗi điểm ta kẻ các đường thẳng vuông góc với tất cả những đường thẳng có thể dựng được bằng cách nối từng cặp điểm trong 4 điểm còn lại. Tìm số giao điểm của các đường thẳng vuông góc đó, không kể 5 điểm đã cho, nhiều nhất là bao nhiêu?

A. 320. **B.** 330. **C.** 20. **D.** 15.

Lời giải.
Đường thẳng cần dựng là đường thẳng đi qua 2 điểm nên có $C_5^2 = 10$ đường thẳng.
Qua mỗi điểm A chẳng hạn, có $C_4^1 = 4$ đường thẳng. Do đó có 6 đường thẳng không đi qua A.
Vậy từ A có $C_5^2 - C_4^1 = 6$ đường thẳng vuông góc.
Xét hai điểm bất kỳ $B \neq A$. Các đường thẳng vuông góc từ B xuống các đường thẳng qua A cắt tất cả các đường thẳng vuông góc hạ từ A. Có 3 đường thẳng qua A mà không qua B. Vậy từ B ta hạ được 3 đường vuông góc với 3 đường thẳng đó. Ba đường thẳng vuông góc này cắt 6 đường thẳng vuông góc hạ từ A tại $3 \cdot 6 = 18$ điểm.
Hạ từ B còn có 3 đường thẳng vuông góc nữa, mỗi đường này sẽ cắt 5 đường vuông góc hạ từ A (nó song song với một đường còn lai).
Vậy có $3 \cdot 5 = 15$ giao điểm.
Vậy có tổng cộng $10 \cdot (18 + 15) = 330$ giao điểm.
Nhưng cứ mỗi 3 giao điểm lại tạo thành một tam giác mà 3 đường cao của nó là 3 đường vuông góc đã xét. Vậy, các trực tâm của các tam giác này được kể 3 lần. Số các tam giác được tạo thành là $C_5^3 = 10$.
Vậy số giao điểm nhiều nhất có thể là $330 - 10 = 320$.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$. Hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết rằng $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

A. C_{12}^5. **B.** C_{12}^6. **C.** C_{12}^7. **D.** C_{12}^8.

Lời giải.
Điều kiện: $2 \le n \in \mathbb{Z}$.
Ta có: $\mathrm{C}_n^n + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13 \end{array}\right.$. Ta nhận $n = 12$ vì $2 \le n \in \mathbb{Z}$.
Khi đó ta có khai triển: $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}$.
Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{12}^k \cdot \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-k} \cdot \left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k = \mathrm{C}_{12}^k \cdot x^{-\frac{48k}{15} + \frac{112}{5}}$.
Số hạng không phụ thuộc x ứng với $-\dfrac{48k}{15} + \dfrac{112}{5} = 0 \Leftrightarrow k = 7$.
Vậy số hạng không chứa x là C_{12}^7.
Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong khai triển nhị thức $\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}\right)^{12}$. Tìm hạng tử độc lập với x.

A. C_{12}^7. **B.** C_{12}^5. **C.** C_{12}^8. **D.** C_{12}^6.

Lời giải.
Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{12}^k \cdot \left(\dfrac{x}{3}\right)^{12-k} \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^k = \mathrm{C}_{12}^k \cdot 3^{2k-12} \cdot x^{12-2k}$.
Số hạng không chứa x ứng với $12 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là C_{12}^6.
Chọn đáp án D □

Câu 21. Tính $A = \mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 - 4\mathrm{C}_n^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n\mathrm{C}_n^n$.

A. 1. **B.** $(-1)^n$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải.
Áp dụng công thức $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ ta được:
$A = n\mathrm{C}_{n-1}^0 - n\mathrm{C}_{n-1}^1 + n\mathrm{C}_{n-1}^2 - n\mathrm{C}_{n-1}^3 + \cdots + (-1)^{n-1} n\mathrm{C}_{n-1}^{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho khai triển nhị thức: $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \cdots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$. Tìm số hạng a_k lớn nhất.

A. $\dfrac{2^8}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^8$. **B.** $\dfrac{2^7}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^7$. **C.** $\dfrac{2^9}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^9$. **D.** $\dfrac{2^6}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^6$.

Lời giải.
$\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10} = \dfrac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10} = \dfrac{1}{30}\sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k (2x)^k \Rightarrow a_k = \dfrac{1}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^k 2^k$.

Ta có: a_k lớn nhất khi $\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_{10}^k 2^k \ge \mathrm{C}_{10}^{k+1} 2^{k+1} \\ \mathrm{C}_{10}^k 2^k \ge \mathrm{C}_{10}^{k-1} 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{10-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \\ \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{11-k} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{3} \le k \le \frac{22}{3} \Rightarrow k = 7 \ (k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 10).$$

Vậy $\max a_k = a_7 = \dfrac{2^7}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^7$.
Chọn đáp án B □

Câu 23. Một đội văn nghệ có 10 người trong đó có 6 nữ và 4 nam. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 người mà trong đó không có quá 1 nam?

A. $4\mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_6^5$. **B.** $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_6^5$. **C.** $\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_6^5$. **D.** $\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_6^5$.

Lời giải.
Trường hợp 1: Chọn 1 nam và 4 nữ có $4\mathrm{C}_6^4$.
Trường hợp 2: Chọn 5 nữ có C_6^5.
Theo quy tắc cộng có $4\mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_6^5$.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Tính tổng $S=\dfrac{2^6}{1}\mathrm{C}_6^0+\dfrac{2^5}{2}\mathrm{C}_6^1+\dfrac{2^4}{3}\mathrm{C}_6^2+\dfrac{2^3}{4}\mathrm{C}_6^3+\dfrac{2^2}{5}\mathrm{C}_6^4+\dfrac{2}{6}\mathrm{C}_6^5+\dfrac{1}{7}\mathrm{C}_6^6$.

A. $\dfrac{3^7-2^8}{7}$. **B.** $\dfrac{3^8-2^7}{7}$. **C.** $\dfrac{3^7-2^7}{8}$. **D.** $\dfrac{3^7-2^7}{7}$.

Lời giải.

Xét khai triển: $(x+2)^6=\mathrm{C}_6^0 2^6+\mathrm{C}_6^1 2^5x+\mathrm{C}_6^2 2^4x^2+\mathrm{C}_6^3 2^3x^3+\mathrm{C}_6^4 2^2x^4+\mathrm{C}_6^5 2x^5+\mathrm{C}_6^6 x^6$.

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 (x+2)^6\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\mathrm{C}_6^0 2^6+\mathrm{C}_6^1 2^5x+\mathrm{C}_6^2 2^4x^2+\mathrm{C}_6^3 2^3x^3+\mathrm{C}_6^4 2^2x^4+\mathrm{C}_6^5 2x^5+\mathrm{C}_6^6 x^6\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^7}{7}\Big|_0^1=\left(\mathrm{C}_6^0 2^6x+\mathrm{C}_6^1 2^5\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{C}_6^2 2^4\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{C}_6^3 2^3\dfrac{x^4}{7}+\mathrm{C}_6^4 2^2\dfrac{x^5}{5}+\mathrm{C}_6^5 2\dfrac{x^6}{6}+\mathrm{C}_6^6\dfrac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3^7-2^7}{7}=\dfrac{2^6}{1}\mathrm{C}_6^0+\dfrac{2^5}{2}\mathrm{C}_6^1+\dfrac{2^4}{3}\mathrm{C}_6^2+\dfrac{2^3}{4}\mathrm{C}_6^3+\dfrac{2^2}{5}\mathrm{C}_6^4+\dfrac{2}{6}\mathrm{C}_6^5+\dfrac{1}{7}\mathrm{C}_6^6$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho khai triển biểu thức

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)^n=\mathrm{C}_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n+\mathrm{C}_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}2^{-\frac{x}{3}}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm n và x.

A. $x=4; n=7$. **B.** $x=7; n=4$. **C.** $x=6; n=3$. **D.** $x=5; n=7$.

Lời giải.

Điều kiện: $3\le n\in\mathbb{Z}$.

Từ phương trình $\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1$ ta tìm được $n=7$.

Số hạng thứ tư bằng $20n$ nên $\mathrm{C}_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\cdot\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3=20\cdot 7\Leftrightarrow 2^{x-2}=2^2\Leftrightarrow x=4$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN BỘ ĐỀ 05

1. C	2. C	3. A	4. D	5. C	6. B	7. B	8. C	9. D	10. B
11. A	12. D	13. C	14. A	15. D	16. D	17. D	18. A	19. C	20. D
21. C	22. B	23. A	24. D	25. A					

CHƯƠNG 4. CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT THI HỌC SINH GIỎI

DẠNG 0.1. Bài toán chia hết

Bài 1. Từ các chữ số 1, 3, 4, 8 lập các số tự nhiên có sáu chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Trong các số được tạo thành nói trên, chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 4? **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{1}{5}$.

Lời giải.
Gọi số có 6 chữ số mà trong đó chữ số 3 có mặt ba lần và các chữ số còn lại có mặt đúng một lần là $\overline{abcdef}$ với a, b, c, d, e, $f \in \{1, 3, 4, 8\}$.
Sắp xếp chữ số 3 vào 3 trong 6 vị trí, có C_6^3 cách. Sắp xếp 3 chữ số 1; 4; 8 vào 3 vị trí còn lại có 3! cách. Vậy có tất cả $\mathrm{C}_6^3 \times 3! = 120$ số.
Một số chia hết cho 4 khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng tạo thành một số chia hết cho 4.
Trong các số trên, số lấy chia hết cho 4 có tận cùng là 48, 84. Trong mỗi trường hợp có $\mathrm{C}_4^3 = 4$ cách sắp xếp chữ số 3 và 1 vào 4 vị trí còn lại, suy ra có 8 số chia hết cho 4.
Gọi A là biến cố "Số lấy ra chia hết cho 4". Vậy số các kết quả thuận lợi cho A là $|\Omega_A| = 8$.
Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 120$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{5}$. □

Bài 2. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A. Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 3. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{11}{27}$.

Lời giải.
Trước hết ta tính $n(A)$. Với số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có 9 cách chọn và có A_9^8 cho 8 vị trí còn lại. Vậy $n(A) = 9 \times \mathrm{A}_9^8$.

Giả sử $B = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ ta thấy tổng các phần tử của B bằng $45 \,\vdots\, 3$ nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3 sẽ được tạo thành từ 9 chữ số của các tập $B \setminus \{0\}$, $B \setminus \{3\}$, $B \setminus \{6\}$, $B \setminus \{9\}$ nên số các số loại này là $\mathrm{A}_9^9 + 3 \times 8 \times \mathrm{A}_8^8$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{\mathrm{A}_9^9 + 3 \times 8 \times \mathrm{A}_8^8}{9 \times \mathrm{A}_9^8} = \dfrac{11}{27}$. □

Bài 3. Gọi S là tập hợp các ước số nguyên dương của số 43200. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử thuộc S. Tính xác suất lấy được hai phần tử là hai số không chia hết cho 5. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{9}{23}$.

Lời giải.
Ta có $43200 = 2^6 \times 3^3 \times 5^2$.
Mỗi ước nguyên dương của số 43200 là một số có dạng $2^i \times 3^j \times 5^k$, trong đó $i \in \{0; 1; \ldots; 6\}$, $j \in \{0; 1; 2; 3\}$, $k \in \{0; 1; 2\}$.
Số ước nguyên dương bằng số bộ (i, j, k) được chọn từ 3 tập trên. Suy ra số cách chọn bộ (i, j, k) từ 3 tập trên là $7 \times 4 \times 3 = 84$ cách, nên số phần tử của S là 84. Có C_{84}^2 cách chọn ngẫu nhiên hai phần tử thuộc S.
Mỗi ước nguyên dương không chia hết cho 5 của số 43200 là một số có dạng $2^i \times 3^j \times 5^0$. Suy ra số các ước của 43200 không chia hết cho 5 trong tập S là $7 \times 4 = 28$. Do đó có C_{28}^2 cách lấy hai phần tử thuộc S mà không chia hết cho 5.
Suy ra xác suất lấy được hai số không chia hết cho 5 trong S là $P = \dfrac{\mathrm{C}_{28}^2}{\mathrm{C}_{84}^2} = \dfrac{9}{23}$. □

Bài 4. Từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau đôi một sao cho các số này là số lẻ và chữ số đứng ở vị trí thứ 3 luôn chia hết cho 6? **ĐS:** 640.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là: $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Ta có hai trường hợp là

— **TH1:** $a_3 = 0$.
Do n lẻ nên a_6 có 4 cách chọn, a_1 có 6 cách. Chọn 3 chữ số còn lại có A_5^3 cách.

— **TH2:** $a_3 = 6$.
Do n lẻ nên a_6 có 4 cách chọn, a_1 có 5 cách. Chọn 3 chữ số còn lại có A_5^3 cách.

Vậy có $S = 4 \times 6 \times \mathrm{A}_5^3 + 4 \times 5 \times \mathrm{A}_5^3 = 2640$ số. □

Bài 5. Trong tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số ta chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{43}{3000}$.

Lời giải.
Số các số tự nhiên có 4 chữ số là $9999 - 1000 + 1 = 9000$.
Giả sử số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là $\overline{abc1}$.
Ta có $\overline{abc1} = 10\overline{abc} + 1 = 3\overline{abc} + 7\overline{abc} + 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3\overline{abc} + 1$ chia hết cho 7. Đặt $3\overline{abc} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abc} = 2h + \dfrac{h-1}{3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$.
Khi đó ta được $\overline{abc} = 7t + 2 \Rightarrow 100 \leq 7t + 2 \leq 999 \Leftrightarrow \dfrac{98}{7} \leq t \leq \dfrac{997}{7} \Leftrightarrow t \in \{14; 15; \ldots; 142\}$, suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abc1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 129.
Vậy xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{129}{9000} = \dfrac{43}{3000}$. □

Bài 6. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1. **ĐS:** $\mathrm{P} \approx 0{,}015$.

Lời giải.
Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $99999 - 10000 + 1 = 90000$.
Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là $\overline{abcd1}$.
Ta có $\overline{abcd1} = 10\overline{abcd} + 1 = 3\overline{abcd} + 7\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7. Đặt $3\overline{abcd} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2h + \dfrac{h-1}{3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$.
Khi đó ta được $\overline{abcd} = 7t + 2 \Rightarrow 1000 \leq 7t + 2 \leq 9999 \Leftrightarrow \dfrac{998}{7} \leq t \leq \dfrac{9997}{7} \Leftrightarrow t \in \{143; 144; \ldots; 1428\}$, suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 1286.
Vậy xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{1286}{90000} = \dfrac{643}{45000} \approx 0{,}015$. □

Bài 7. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số không chia hết cho 3. **ĐS:** $\mathrm{P} = 0,6$.

Lời giải.

— Tìm số có ba chữ số khác nhau lập từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$, chọn a có 5 cách, chọn 2 số trong 5 số còn lại của E để xếp vào hai vị trí b, c có A_5^2 cách. Vậy có $5 \times \mathrm{A}_5^2 = 100$ số.

— Tính số lập được chia hết cho 3. Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$, với $a + b + c \,\vdots\, 3$.
Xét các tập con gồm 3 phần tử của tập E, ta thấy chỉ có các tập sau thỏa mãn điều kiện tổng các chữ số chia hết cho 3 là $A_1 = \{0; 1; 2\}$, $A_2 = \{0; 1; 5\}$, $A_3 = \{0; 2; 4\}$, $A_4 = \{0; 4; 5\}$, $A_5 = \{1; 2; 3\}$, $A_6 = \{1; 3; 5\}$, $A_7 = \{2; 3; 4\}$, $A_8 = \{3; 4; 5\}$.
Khi $a, b, c \in A_1, A_2, A_3, A_4$ mỗi trường hợp lập được 4 số thỏa mãn yêu cầu.
Khi $a, b, c \in A_5, A_6, A_7, A_8$ mỗi trường hợp lập được 6 số thỏa mãn yêu cầu.
Vậy có $4 \times 4 + 4 \times 6 = 40$ số. Suy ra số không chia hết cho 3 là $100 - 40 = 60$ số.

Xác suất cần tính là $P = \dfrac{60}{100} = 0,6$. □

Bài 8. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số chia hết cho 1111. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{1}{105}$.

Lời giải.
Ta có số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 8!$.
Giả sử số tự nhiên $n = \overline{a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}$ chia hết cho 1111 trong đó a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 thuộc $\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Ta có $1+2+3+\cdots+8 = 36 \vdots 9 \Rightarrow \begin{cases} n \vdots 9 \\ n \vdots 1111 \end{cases} \Rightarrow n \vdots 9999$. Đặt $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$, $y = \overline{b_1b_2b_3b_4} \Rightarrow$ $n = 10^4x + y = 9999x + x + y$.

$n \vdots 9999 \Rightarrow x + y \vdots 9999$, vì $0 < x + y < 2 \times 9999$ nên $x + y = 9999$.
Suy ra $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = 9$. Có 4 cặp số có tổng bằng 9 là $(1;8)$, $(2;7)$, $(3;6)$, $(4;5)$.
Có 4! cách chọn cặp số trên, mỗi cặp số có 2 hoán vị nên có $4! \times 2^4$ số chia hết cho 1111.
Gọi A là biến cố "Số tự nhiên được lấy chia hết cho 1111", suy ra $n(A) = 4! \times 2^4$. Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{105}$. □

Bài 9. Một hộp đựng 20 viên bi khác nhau được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ba viên bi từ hộp trên rồi cộng số ghi trên đó lại. Hỏi có bao nhiêu cách lấy để kết quả thu được là một số chia hết cho 3. **ĐS:** 384.

Lời giải.
Ta chia 20 số từ 1 đến 20 thành ba nhóm sau:

— $A = \{3;6;9;11;15;18\}$. Nhóm chia hết cho 3, $n(A) = 6$.

— $B = \{1;4;7;10;13;16;19\}$. Nhóm chia cho 3 dư 1, $n(B) = 7$.

— $C = \{2;5;8;11;14;17;20\}$. Nhóm chia cho 3 dư 2, $n(C) = 7$.

Tổng 3 số đã cho chia hết cho 3 có bốn trường hợp sau:

TH1. 3 số thuộc A. Có $\mathrm{C}_6^3 = 20$ cách chọn.

TH2. 3 số thuộc B. Có $\mathrm{C}_7^3 = 35$ cách chọn.

TH3. 3 số thuộc C. Có $\mathrm{C}_7^3 = 35$ cách chọn.

TH4. 1 số thuộc A, 1 số thuộc B, 1 số thuộc C. Có $\mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_7^1 \times \mathrm{C}_7^1 = 294$ cách chọn.

Vậy tất cả có $20 + 35 + 35 + 294 = 384$ cách chọn số thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 10. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập S. Tính xác suất để chọn được một số thuộc S và số đó chia hết cho 9. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{1}{9}$.

Lời giải.
Gọi số có 8 chữ số phân biệt có dạng là: $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$. Có $n(\Omega) = \mathrm{A}_{10}^8 - \mathrm{A}_9^7$.
Gọi A là biến cố "x chia hết cho 9".
Các số a_1, a_2, ..., a_8 được lập từ 4 trong 5 cặp $(0;9)$, $(1;8)$, $(2;7)$, $(3;6)$, $(4;5)$. Xét hai trường hợp sau

— **TH1:** Trong x không có chữ số 0 và 9. Có 8! số.

— **TH2:** Trong x có chứa chữ số 0 và 9.

  – Chọn 3 trong 4 cặp còn lại có C_4^3.
  – Xếp 8 số chọn được thành số có 8 chữ số có $8! - 7!$.

Vậy có $8! + \mathrm{C}_4^3 \times (8! - 7!)$ số, suy ra xác suất là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{8! + \mathrm{C}_4^3 \times (8! - 7!)}{\mathrm{A}_{10}^8 - \mathrm{A}_9^7} = \dfrac{1}{9}$. □

Bài 11. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập hợp $A = \{0; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập X. Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 4. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{53}{105}$.

Lời giải.
Mỗi số tự nhiên thuộc X có dạng $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ trong đó $a_1 \neq 0$ và a_4 chẵn.

— Trường hợp $a_4 = 0$, số các số dạng x có $a_4 = 0$ là $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số.

— Trường hợp $a_4 \neq 0$, số các số dạng trong trường hợp này là $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

Vậy X có $120 + 300 = 420$ số. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 420$.
Gọi A là biến cố chọn được số chia hết cho 4. Ta có x chia hết cho 4 khi và chỉ khi $\overline{a_3a_4}$ chia hết cho 4. Do đó $\overline{a_3a_4}$ thuộc tập hợp $\{04; 08; 20; 24; 28; 32; 40; 48; 52; 72; 80; 84\}$.
Nếu $\overline{a_3a_4} \in \{04; 08; 20; 40; 80\}$ thì số cách chọn x là $\mathrm{A}_5^2 \times 5 = 100$ số.
Nếu $\overline{a_3a_4} \in \{24; 28; 32; 48; 52; 72; 84\}$ thì số cách chọn x là $4 \times 4 \times 7 = 112$ số.
Suy ra $n(A) = 212$. Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{212}{420} = \dfrac{53}{105}$. □

Bài 12. Cho X là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau mà tổng các chữ số bằng 18. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập X. Tính xác suất để chọn được là số chẵn. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{43}{75}$.

Lời giải.
Gọi số có 6 chữ số khác nhau là $\overline{abcdef}$, mà tổng các chữ số bằng 18 nên tập $\{a; b; c; d; e; f\}$ là một trong các tập hợp sau: $\{0; 1; 2; 3; 4; 8\}$; $\{0; 1; 2; 3; 5; 7\}$; $\{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$.
Ứng với mỗi trường hợp có 5 cách chọn chữ số a, các chữ số còn lại có $5!$ cách chọn. Suy ra có $3 \times 5 \times 5! = 1800$ số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà tổng bằng 18. Suy ra $n(\Omega) = 1800$.
Gọi A là biến cố "Số tự nhiên được chọn là số chẵn". Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "Số tự nhiên được chọn là số lẻ".

— $a, b, c, d, e, f \in \{0; 1; 2; 3; 4; 8\}$, có $2 \times 4 \times 4! = 192$ số.

— $a, b, c, d, e, f \in \{0; 1; 2; 3; 5; 7\}$, có $4 \times 4 \times 4! = 384$ số.

— $a, b, c, d, e, f \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$, có $2 \times 4 \times 4! = 192$ số.

Suy ra $n\left(\overline{A}\right) = 768$, nên $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{43}{75}$. □

Bài 13. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng của ba chữ số hàng chục nghìn, hàng nghìn và hàng trăm bằng 9? **ĐS:** 2160.

Lời giải.
Ta có $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$.
Gọi số cần lập là $\overline{abcdef}$. Vì tổng của ba chữ số hàng chục nghìn, hàng nghìn và hàng trăm bằng 9 nên $\overline{bcd}$ có $3 \times 3! = 18$ cách lập.
Khi đó, $a, e, f \in \{1; 2; \ldots; 9\}$ nên các vị trí còn lại có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ cách lập.
Vậy số các số cần lập là $18 \times 120 = 2160$ (số) □

Bài 14. Một hộp chứa 11 quả cầu được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 11, lấy ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để tổng của các số được ghi trên 6 quả cầu đó là số lẻ. **ĐS:** $\mathrm{P} = \frac{118}{231}$.

Lời giải.
Số cách bốc ngẫu nhiên 6 quả cầu từ 11 quả là $\mathrm{C}_{11}^6 = 462$ (cách).
Trong 11 quả cầu thì có 5 quả đánh số chẵn và 6 quả đánh số lẻ. Để bốc được 6 quả mà tổng các số là số lẻ thì trong đó phải có số quả đánh số lẻ là một số lẻ. Ta xét các trường hợp sau.

— **TH1:** Bốc được 1 quả có số lẻ, có $\mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_5^5 = 6$ cách.

— **TH2:** Bốc được 3 quả có số lẻ, có $C_6^3 \times C_5^3 = 200$ cách.

— **TH3:** Bốc được 5 quả có số lẻ, có $C_6^5 \times C_5^1 = 30$ cách.

Vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{6 + 200 + 30}{462} = \dfrac{118}{231}$. □

Bài 15. Một hộp đựng chín quả cầu giống nhau được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải lấy ít nhất bao nhiêu quả cầu để xác suất có ít nhất một quả ghi số chia hết cho 4 và lớn hơn $\dfrac{5}{6}$. **ĐS:** 6.

Lời giải.
Nhận thấy trong chín quả cầu đã cho, có hai quả ghi số chia hết cho 4 (các quả ghi số 4 hoặc số 8), bảy quả còn lại ghi số không chia hết cho 4.
Giả sử rút ra x quả $1 \leq x \leq 9$, $x \in \mathbb{N}$. Số cách chọn x quả từ 9 quả trong hộp là C_9^x nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^x$.
Gọi A là biến cố "Trong số x quả lấy ra, có ít nhất một quả ghi số chia hết cho 4" thế thì biến cố đối của A là $\overline{A}$: "Trong số x quả lấy ra, không có quả nào ghi số chia hết cho 4".
Số cách chọn tương ứng với biến cố $\overline{A}$ là $n\left(\overline{A}\right) = C_7^x$.
Ta có $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_7^x}{C_9^x} = \dfrac{(9-x)(8-x)}{72}$. Do đó

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{(9-x)(8-x)}{72} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 12.$$

Suy ra $6 \leq x \leq 9$, $x \in \mathbb{N}$. Vậy số quả cầu phải rút ra ít nhất mà ta phải tìm là 6. □

DẠNG 0.2. Số lần xuất hiện của chữ số

Bài 16 (Thi HSG Quảng Nam lớp 11, 2016-2017). Từ 10 chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên thỏa điều kiện là số có 8 chữ số, trong đó có 2 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần. **ĐS:** 428400.

Lời giải.
• **Bước 1:** Xét các số có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần (kể cả chữ số 0 đứng đầu).
Từ 10 chữ số đã cho chọn ra 5 chữ số gồm 2 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn là $C_5^2 \cdot C_5^3$ cách chọn. Với mỗi cách chọn ta có thể viết ra được $\dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ chữ số (kể cả số 0 đứng đầu) có 8 chữ số trong đó mỗi số chẵn xuất hiện 2 lần.
Do đó ta có viết được $C_5^2 \cdot C_5^3 \cdot \dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ số có 8 chữ số (kể cả số 0 đứng đầu) theo yêu cầu đề.
• **Bước 2:** Ta tìm số cách viết số như trên nhưng số 0 lại xuất hiện tại ví trí đầu tiên.
Đầu tiên ta chọn ra 2 số lẻ và 2 chữ số chẵn khác 0 có $C_5^2 \cdot C_4^2$ cách chọn. Mà mỗi cách chọn ta có thể viết ra được $\dfrac{7!}{2! \cdot 2!}$ số có 8 chữ số theo yêu cầu đề mà số 0 đứng đầu.
Do đó ta có viết được $C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot \dfrac{7!}{2! \cdot 2!}$ số có 8 chữ số theo yêu cầu đề mà số 0 đứng đầu.
Vậy có $C_5^2 \cdot C_5^3 \cdot \dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} - C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot \dfrac{7!}{2! \cdot 2!} = 428400$ số thỏa yêu cầu đề bài. □

Bài 17 (Thi HSG Thanh Hóa lớp 12, 2013-2014). Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau. **ĐS:** $\dfrac{12600}{59049}$.

Lời giải.
Số các số tự nhiên có 5 chữ số đều khác 0 là 9^5.
Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác 0 mà chỉ có 3 chữ số khác nhau là $C_9^3 \cdot C_3^1 \cdot \dfrac{5!}{3!} + C_9^3 \cdot C_3^2 \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 2!}$ (do 3 số mà

tạo ra số có 5 chữ số nên chỉ có hai trường hợp hoặc có 1 số lặp 3 lần hoặc có 2 số mỗi số lặp 2 lần).

Vậy xác suất $P = \dfrac{C_9^3 \cdot C_3^1 \cdot \dfrac{5!}{3!} + C_9^3 \cdot C_3^2 \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 2!}}{9^5} = \dfrac{12600}{59049}$. □

Bài 18 (Thi HSG Bắc Giang lớp 11, 2012-2013). Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó có một chữ số xuất hiện hai lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần? **ĐS:** 3888.

Lời giải.
Ta xét các trường hợp sau
• **Trường hợp 1.** Chữ số 0 xuất hiện hai lần.
Có C_3^2 cách chọn vị trí cho hai chữ số 0.
Có A_9^2 cách sắp xếp hai chữ số trong 9 chữ số vào hai vị trí còn lại.
Suy ra trường hợp này có $C_3^2 \cdot A_9^2 = 216$ số thỏa mãn.
• **Trường hợp 2.** Chữ số x (khác 0) xuất hiện hai lần và x ở vị trí đầu tiên.
Có 9 cách chọn x.
Có 3 cách chọn thêm một vị trí cho x còn lại.
Có A_9^2 cách xếp 2 chữ số trong 9 chữ số vào 2 vị trí còn lại.
Suy ra có $9 \cdot 3 \cdot A_9^2 = 1944$.
• **Trường hợp 3.** Chữ số x (khác 0) xuất hiện hai lần và x không nằm ở vị trí đầu.
Có 9 cách chọn x.
Có C_3^2 cách chọn vị trí cho chữ số x.
Có 8 cách chọn cho số ở vị trí đầu và 8 cách chọn cho vị trí còn lại.
Suy ra có $8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot C_3^2 = 1728$.
Vậy ta có $216 + 1944 + 1728 = 3888$ số thỏa yêu cầu đề. □

Bài 19 (Thi HSG Nam Định lớp 11, 2012-2013). Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp $A = \{1; 2; 3; \ldots; 20\}$. Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp. **ĐS:** $\frac{68}{95}$.

Lời giải.
Số cách chọn ba số đôi một khác nhau từ tập A là $C_{20}^3 = 1140$ cách.
Số cách chọn ra ba số liên tiếp là 18 cách
Số cách chọn ra ba số mà có đúng hai số liên tiếp là $17 + 17 = 306$ cách.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1140 - 18 - 306}{1140} = \dfrac{68}{95}$. □

Bài 20 (Thi HSG Thanh Hóa lớp 12, 2008-2009). Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau mà trong đó có đúng một chữ số lẻ? **ĐS:** 3000.

Lời giải.
Ta kí hiệu số có dạng là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_5a_6}$.
Có 5 cách chọn một chữ số lẻ.
Mỗi cách chọn ra một số lẻ và 5 số chẵn ta có thể viết được 6! số (kể cả $a_1 = 0$).
Suy ra có $5 \cdot 6!$ số (kể cả $a_1 = 0$).
Ta tìm số cách làm như trên nhưng $a_1 = 0$.
Vì $a_1 = 0$ nên số cách viết 5 số còn lại là $5 \cdot 5!$.
Vậy có $5 \cdot 6! - 5 \cdot 5! = 3000$ số. □

Bài 21 (Thi HSG Nam Định lớp 12, 2013-2014). Từ các số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó luôn có mặt chữ số 6. **ĐS:** 1560.

Lời giải.
Có 5 cách chọn vị trí cho số 6.
Điền vào 4 vị trí còn lại bởi 6 số còn lại ta có A_6^4 cách điền.
Suy ra số các số vừa tìm được là $5 \cdot A_6^4$ (kể cả số 0 đứng đầu).

Trong đó số cách làm mà số 0 đứng vị trí đầu tiên là $4 \cdot \mathrm{A}_5^3$.
Vậy có $5 \cdot \mathrm{A}_6^4 - 4 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 1560$ số thỏa yêu cầu bài. $\square$

Bài 22 (Thi HSG Diễn Châu-Nghệ An lớp 11, 2016-2017). Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn một số ngẫu nhiên từ X tính xác suất để số đó có đúng ba chữ số lẻ. **ĐS:** $\frac{10}{21}$.

Lời giải.
Ta có số phần tử của X là A_9^6.
Số cách số mà trong đó có đúng ba chữ số lẻ là $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 6!$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 6!}{\mathrm{A}_9^6} = \dfrac{10}{21}$. $\square$

Bài 23 (Thi HSG Đà Nẵng lớp 11, 2010-2011). Từ tập hợp các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy chỉ có mặt ba chữ số khác nhau. **ĐS:** $\frac{12600}{9^5}$.

Lời giải.
Số các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0 là 9^5.
Số các số tự nhiên có năm chữ số mà chỉ có mặt ba chữ số khác nhau là $\mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \dfrac{5!}{3!} + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^2 \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = 12600$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{12600}{9^5}$. $\square$

DẠNG 0.3. Liên quan đến vị trí

Bài 24 (Thi HSG Vĩnh Phúc lớp 12, 2017-2018). Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau trong đó hai số đứng kề nhau không là số lẻ? **ĐS:** 37800.

Lời giải.
Gọi số đó là $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_5a_6}$.
Theo đề bài ta thấy A có nhiều nhất là ba số lẻ.
• **Trường hợp 1.** A có một số lẻ.
Nếu a_1 là số lẻ thì số các số A là $\mathrm{C}_5^1 \cdot 5!$.
Nếu a_1 là số chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4!$.
Suy ra có $\mathrm{C}_5^1 \cdot 5! + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4!$ số trong trường hợp này.
• **Trường hợp 2.** A có hai chữ số lẻ.
Nếu a_1 lẻ, suy ra a_2 chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 4!$.
Nếu a_1 chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot 6 \cdot 2! \cdot \mathrm{A}_4^3$.
• **Trường hợp 3.** A có ba chữ số lẻ.
Nếu a_1 lẻ suy ra a_2 chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot 3 \cdot 2! \cdot \mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_4^2$.
Nếu a_1 chẵn thì có một cách chọn để hai số lẻ không đứng liền kề nên số các số A là $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 1 \cdot 3! \cdot \mathrm{A}_4^2$.
Vậy số các số A là 37800. $\square$

Bài 25 (Thi HSG Thái Nguyên lớp 12, 2011-2012). Cho các số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được thành lập từ các số đã cho, trong đó hai chữ số 0 và 1 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 240.

Lời giải.
Số các số có bốn chữ số khác nhau được thành lập từ các số đã cho là $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.
Ta tìm số các số có bốn chữ số khác nhau mà số 0 và số 1 đứng kề.
Nếu $1, 0$ đứng ở hai vị trí đầu thì số các số là $1 \cdot \mathrm{A}_4^2$.
Nếu $1, 0$ không ở hai vị trí đầu thì số các số là $2 \cdot 2! \cdot \mathrm{A}_4^2$.
Vậy có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2! \cdot \mathrm{A}_4^2 = 240$ số thỏa yêu cầu bài. $\square$

Bài 26 (Thi HSG Vĩnh Long lớp 11, 2015-2016). Từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số sao cho trong mỗi số đó có đúng ba chữ số 1, các chữ số còn lại đôi một khác nhau và hai chữ số chẵn không đứng cạnh nhau. **ĐS:** 2400.

Lời giải.
Đầu tiên ta hoán vị 5 số sau $1, 1, 1, 3, 5$ được $\dfrac{5!}{3!}$ số.
Bây giờ ta chèn ba số chẵn $2, 4, 6$ vào các hoán vị trên để được số theo yêu cầu đề.
Do đó số các số thỏa yêu cầu đề là $\dfrac{5!}{3!} \cdot \mathrm{A}_6^3 = 2400$. □

Bài 27 (Thi HSG Lào Cai lớp 11, 2017-2018). Với các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số khác nhau sao cho ba số lẻ không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 2736.

Lời giải.
Ta có số các số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau là $7!$.
Ta tìm số các số tự nhiên mà có ba số lẻ đứng cạnh nhau. Gồm hai trường hợp sau
Trường hợp 1. Bốn số lẻ đứng cạnh nhau.
Số các số có bốn số lẻ đứng cạnh nhau là $4! \cdot 4!$.
Trường hợp 2. Chỉ có ba số lẻ đứng cạnh nhau.
Ta hoán vị ba số chẵn này trước $2, 4, 6$ sau đó chèn ba số lẻ vào cùng một vị trí giữa các hoán vị đó và chèn một số lẻ còn lại vào một vị trí khác. Như vậy ta được số các số là $3! \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3!$.
Vậy số các số cần tìm là $7! - 4! \cdot 4! - 3! \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3! = 2736$. □

Bài 28 (Thi HSG Đông Anh-Hà Nội lớp 11, 2017-2018). Từ hai số 1 và 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số sao cho số tạo thành không có số nào có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau? **ĐS:** 143.

Lời giải.
Ta chia thành các trường hợp sau
• **Trường hợp 1.** Một chữ số 1 và chín chữ số 4.
Ta sắp chín số 4 thành một hàng, sau đó chèn một số 1 vào 10 vị trí tạo ra bởi chín số 4 đó.
Do đó số các số là C_{10}^1.
Tương tự cách làm này cho các trường hợp sau.
• **Trường hợp 2.** Hai chữ số 1 và tám chữ số 4.
Trường hợp này có số các số là C_9^2.
• **Trường hợp 3.** Ba chữ số 1 và bảy chữ số 4, có C_8^3 số.
• **Trường hợp 4.** Bốn chữ số 1 và sáu chữ số 4, có C_7^4 số.
• **Trường hợp 5.** Năm chữ số 1 và năm chữ số 4, có C_6^5 số.
Vậy có $\mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_9^2 + \mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_6^5 = 143$ số. □

Bài 29. Từ các chữ số 1 và 4 thiết lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số sao cho số tạo thành không có số nào có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau? **ĐS:** 143

Lời giải.
Chỉ xảy ra các trường hợp sau:

— **Trường hợp 1:** 1 chữ số 1 và 9 chữ số 4
  - Xếp 9 chữ số 4 thành hàng ngang: có 1 cách xếp.
    Khi đó, ta có 10 vị trí có thể xếp số 1, đó là 8 khoảng trống giữa các số 4 và hai đầu.
  - Xếp số 1 vào một trong 10 vị trí nói trên: có C_{10}^1 cách xếp.
    Suy ra trường hợp 1 có C_{10}^1 cách xếp.

— **Trường hợp 2:** 2 chữ số 1 và 8 chữ số 4
  - Xếp 8 chữ số 4 thành hàng ngang: có 1 cách xếp.
    Khi đó, ta có 9 vị trí có thể xếp số 1, đó là 7 khoảng trống giữa các số 4 và hai đầu.

- Xếp số 1 vào hai trong 9 vị trí nói trên: có C_9^2 cách xếp.
  Suy ra trường hợp 2 có C_9^2 cách xếp.

— **Trường hợp 3:** 3 chữ số 1 và 7 chữ số 4

- Xếp 7 chữ số 4 thành hàng ngang: có 1 cách xếp. Khi đó, ta có 8 vị trí có thể xếp ba số 1, đó là 6 khoảng trống giữa các số 4 và hai đầu.
- Xếp số 1 vào ba trong 8 vị trí nói trên: có C_8^3 cách xếp.
  Suy ra trường hợp 3 có C_8^3 cách xếp.

— **Trường hợp 4:** 4 chữ số 1 và 6 chữ số 4

- Xếp 6 chữ số 4 thành hàng ngang: có 1 cách xếp. Khi đó, ta có 7 vị trí có thể xếp bốn số 1, đó là 5 khoảng trống giữa các số 4 và hai đầu.
- Xếp số 1 vào bốn trong 7 vị trí nói trên: có C_7^4 cách xếp.
  Suy ra trường hợp 4 có C_7^4 cách xếp.

— **Trường hợp 5:** 5 chữ số 1 và 5 chữ số 4

- Xếp 5 chữ số 4 thành hàng ngang: có 1 cách xếp. Khi đó, ta có 6 vị trí có thể xếp năm số 1, đó là 4 khoảng trống giữa các số 4 và hai đầu.
- Xếp số 1 vào năm trong 6 vị trí nói trên: có C_6^5 cách xếp. Suy ra trường hợp 5 có C_6^5 cách xếp.

Vậy có $C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 143$ số. □

Bài 30. Trong hộp chứa các thẻ được ghi dãy số gồm sáu chữ số khác nhau. Tính xác suất để rút được một thẻ có ghi các chữ số 1, 2, 3, 4, trong đó các chữ số 1, 2 không đứng cạnh nhau và các chữ số 3, 4 không đứng cạnh nhau. **ĐS:** $\frac{242}{315}$

Lời giải.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau là $n(\Omega) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 1, 2 đứng cạnh nhau và các chữ số 3, 4 đứng cạnh nhau là $n(A) = 2! \cdot 2! \cdot C_6^2 \cdot 4! = 1440$.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 1, 2 đứng cạnh nhau là $n(B) = 2! \cdot C_8^4 \cdot 5! = 16800$.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 3, 4 đứng cạnh nhau là $n(C) = 2! \cdot C_8^4 \cdot 5! = 16800$.

Vậy xác suất để rút được một thẻ có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 1, 2 không đứng cạnh nhau và các chữ số 3, 4 không đứng cạnh nhau là

$$\mathrm{P} = \frac{n(\Omega) - n(B) - n(C) - n(A)}{n(\Omega)} = \frac{242}{315}.$$

□

Bài 31. Gọi E là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập E. Tính xác suất để số được chọn là số chẵn, có đúng hai chữ số 0 và không đứng cạnh nhau, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần. **ĐS:** $\frac{1}{45}$

Lời giải.
Ta có $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \overline{a_1a_2\ldots a_5}$ (a_5 chẵn; đúng 2 chữ số 0, không cạnh nhau).

— **Trường hợp 1:** $a_5 = 0$

- Chọn vị trí xếp số 0 còn lại có 2 cách (loại a_1, a_4).
- Còn 3 vị trí, xếp bởi 5 chữ số nên có A_5^3 cách.
  Trường hợp này có $2 \cdot A_5^3$ số.

— **Trường hợp 2:** $a_5 \neq 0$ suy ra a_5 có hai cách chọn

- Chọn ra 2 vị trí không cạnh nhau từ $\overline{a_2a_3a_4}$ để xếp số 0 có 1 cách (vào a_2 và a_4).
- Còn 2 vị trí, xếp bởi 4 chữ số nên có A_4^2 cách.
  Trường hợp này có $2 \cdot \mathrm{A}_4^2$ số.

Do đó xác suất cần tìm là: $\mathrm{P} = \dfrac{2 \cdot A_5^3 + 2 \cdot A_4^2}{5 \cdot 6^4} = \dfrac{144}{6480} = \dfrac{1}{45}$. □

Loại 4. Liên quan đến lớn hơn, nhỏ hơn.

Bài 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $a \leq b \leq c < d$? **ĐS:** 330

Lời giải.

— **Trường hợp 1:** $a = b = c < d$ thì có $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ số thỏa mãn.

— **Trường hợp 2:** $a = b < c < d$ thì có $\mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_7^2 + \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_2^2 = 84$ số thỏa mãn.

— **Trường hợp 3:** $a < b = c < d$ thì có $1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 84$ số thỏa mãn.

— **Trường hợp 4:** $a < b < c < d$ thì có $\mathrm{C}_9^4 = 126$ số thỏa mãn.

Vậy có 330 số thỏa mãn. □

Bài 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không lớn hơn 2503. **ĐS:** 202

Lời giải.
Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 là $\overline{abcd}$.
Số $\overline{abcd}$ không lớn hơn 2503 ta có 3 trường hợp

— **Trường hợp 1:** Số có dạng $\overline{250d}$ thì có 2 số: 2501, 2503.

— **Trường hợp 2:** Số có dạng $\overline{2bcd}$ thì $b \in \{0; 1; 3; 4\}$ nên có $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ số.

— **Trường hợp 3:** Số có dạng $\overline{1bcd}$ thì có $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ số.

Vậy có $2 + 80 + 120 = 202$ số thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 3. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 lập các số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được một số lớn hơn 2012. **ĐS:** $\dfrac{7}{10}$

Lời giải.
Gọi số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 là $\overline{abcd}$.

— **Trường hợp 1:** Nếu $d = 0$ thì có $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ số.

— **Trường hợp 2:** Nếu $d \neq 0$ thì có thể là 2 hoặc 4, trường hợp này có $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ số.

Do đó có 60 số chẵn theo giả thiết bài toán.
Trong 60 số trên các số nhỏ hơn 2012 phải có dạng $\overline{1bcd}$.
Vì d chỉ có thể là 0, 2, 4 nên có $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ số như vậy, suy ra các số lớn hơn 2012 là 42.
Từ đó suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{42}{60} = \dfrac{7}{10}$. □

Bài 4. Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau và có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$. **ĐS:** $\dfrac{37}{34020}$

Lời giải.
$n(M) = 9 \cdot \mathrm{A}_9^5$ (số có sáu chữ số đôi một khác nhau thì a_1 có 9 cách chọn, $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử nên có A_9^5).
Gọi A là biến cố "chọn ra được một số tự nhiên chẵn từ tập M đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$".
Ta có các trường hợp sau:

— **Trường hợp 1:** $a_6 = 0$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có $\mathrm{C}_9^5 = 126$ cách chọn.

— **Trường hợp 2:** $a_6 = 2$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có $\mathrm{C}_7^5 = 21$ cách chọn.

— **Trường hợp 3:** $a_6 = 4$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có $\mathrm{C}_5^5 = 1$ cách chọn.

$\Rightarrow n(A) = 126 + 21 + 1 = 148$.
Do đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(M)} = \dfrac{148}{9 \cdot A_9^5} = \dfrac{37}{34020}$. □

Bài 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập ra tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên hai số trong các số được lập. Tính xác suất để trong hai số được chọn có ít nhất một số lớn hơn 2015. **ĐS:** $\frac{14299}{14950}$

Lời giải.
Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập ra được $5 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 300$ số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Suy ra $n(\Omega) = \mathrm{C}_{300}^2 = 44850$.
Số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 nhỏ hơn hoặc bằng 2015 là $1 \cdot \mathrm{A}_5^3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 63$.
Gọi A là biến cố "trong hai số được chọn có ít nhất một số lớn hơn 2015" thì $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_{63}^2 = 1953$.
Do đó $n(A) = n(\Omega) - n\left(\overline{A}\right) = 44850 - 1953 = 42897$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{42897}{44850} = \dfrac{14299}{14950}$. □

Bài 6. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu cách chọn một bộ 3 số phân biệt của A (không tính thứ tự) để hiệu của 2 số bất kỳ trong 3 số đó có giá trị tuyệt đối không nhỏ hơn 2. **ĐS:** 56

Lời giải.
Đặt $T = \{(a_1; a_2; a_3)\,|a_1, a_2, a_3 \in A; a_1 < a_2 < a_3; a_2 - a_1 \geq 2, a_3 - a_2 \geq 2\}$.
Với mỗi bộ (a_1, a_2, a_3), xét tương ứng với bộ (b_1, b_2, b_3) cho bởi $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2 - 1$; $b_3 = a_3 - 2$.
Lúc này ta có: $0 \leq b_1 < b_2 < b_3 \leq 7$ và tương ứng này là tương ứng $1 - 1$ do:

— Với mỗi bộ $(a_1; a_2; a_3)$ cho tương ứng với một bộ (b_1, b_2, b_3) bởi công thức $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2 - 1$; $b_3 = a_3 - 2$.

— Ngược lại, với mỗi bộ (b_1, b_2, b_3) cho tương ứng với một bộ $(a_1; a_2; a_3)$ bởi công thức $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2 + 1$; $a_3 = b_3 + 2$.

Đặt $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập các bộ (b_1, b_2, b_3) là các tập con có 3 phần tử của B.
Vậy số tập con $(a_1; a_2; a_3)$ cần tìm là $\mathrm{C}_8^3 = 56$. □

Bài 7. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$. **ĐS:** 0,055

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.
• **Cách 1:**
Xét các số $x = a$, $y = b + 1$, $z = c + 2$, $t = d + 3$.
Vì $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9 \quad (*) \Rightarrow 1 \leq x < y < z < t \leq 12$.
Và mỗi bộ gồm bốn số (x, y, z, t) được chọn từ tập hợp $\{1; 2; 3; \ldots; 12\}$ ta đều thu được bộ số thỏa mãn $(*)$.
Do đó, số cách chọn 4 số trong 12 số là $\mathrm{C}_{12}^4 = 495$ số.
Xác suất cần tìm là $\dfrac{495}{9000} = 0{,}055$.
• **Cách 2:**
Ta chia các trường hợp:

— **Trường hợp 1:** $1 \le a < b < c < d \le 9$ có $\mathrm{C}_9^4 = 126$ cách chọn.

— **Trường hợp 2:** $1 \le a \le b < c < d \le 9$ hoặc $1 \le a < b \le c < d \le 9$ hoặc $1 \le a < b < c \le d \le 9$ có $3 \cdot \mathrm{C}_{12}^3 = 252$ cách chọn.

— **Trường hợp 3:** $1 \le a \le b \le c < d \le 9$ hoặc $1 \le a < b \le c \le d \le 9$ hoặc $1 \le a \le b < c \le d \le 9$ có $3 \cdot \mathrm{C}_9^2 = 108$ cách chọn.

— **Trường hợp 4:** $1 \le a = b = c = d \le 9$ có $\mathrm{C}_9^1 = 9$ cách chọn.

Vậy có tất cả $126 + 252 + 108 + 9 = 195$ cách chọn. Xác suất cần tìm là $\dfrac{495}{9000} = 0{,}055$. □

DẠNG 0.4. Các bài toán đếm số phương án, tính xác suất liên quan người, đồ vật

Bài 1. Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh (trong đó có hai học sinh A và B) mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh A và B nhận được phần thưởng giống nhau. **ĐS:** $\dfrac{5}{18}$

Lời giải.
Để một học sinh nhận được 2 quyển sách thể loại khác nhau, ta chia phần thưởng thành ba loại: Toán + Lý ; Toán + Hóa; Lý + Hóa.
Gọi x, y, z $(x, y, z \in \mathbb{N})$ lần lượt là số học sinh nhận được bộ phần thưởng Toán + Lý ; Toán + Hóa; Lý + Hóa. Khi đó, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 6 \\ y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 2. \end{cases}$$

Số cách phát thưởng ngẫu nhiên cho 9 học sinh: $\mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 1$.
Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_5^3$.
Gọi S là biến cố "hai học sinh A và B có phần thưởng giống nhau".

— **Trường hợp 1:** A và B cùng nhận bộ Toán+Lý có $\mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^3$ cách phát.

— **Trường hợp 2:** A và B cùng nhận bộ Toán+Hóa có $\mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^4$ cách phát.

— **Trường hợp 3:** A và B cùng nhận bộ Lý+Hóa có C_7^4 cách phát.

$\Rightarrow n(S) = \mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_7^4$.
Vậy xác suất của biến cố S là: $\mathrm{P}(S) = \dfrac{\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_7^4}{\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_5^3} = \dfrac{5}{18}$. □

Bài 2. Một trường học có 25 giáo viên nam và 15 giáo viên nữ trong đó có đúng hai cặp vợ chồng. Nhà trường chọn ngẫu nhiên 5 người trong số 40 giáo viên trên đi công tác. Tính xác suất sao cho trong 5 người được chọn có đúng một cặp vợ chồng. **ĐS:** $\dfrac{2\left(\mathrm{C}_{38}^3 - \mathrm{C}_{36}^1\right)}{\mathrm{C}_{40}^5}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{40}^5$.
Giả sử có hai cặp vợ chồng là (A, B) và (C, D) trong đó A, C là chồng.

— **Trường hợp 1:** Chọn cặp vợ chồng (A, B).
Cần chọn 3 người trong số 38 người còn lại (trừ (A, B)) mà không có cặp (C, D).

- Số cách chọn 3 người bất kì trong 38 người là C_{38}^3.
- Số cách chọn 3 người trong số 38 người mà có cặp (C, D) là C_{36}^1.

Suy ra số cách chọn 3 người trong số 38 người mà không có cặp (C, D) là $C_{38}^3 - C_{36}^1$.

— **Trường hợp 2:** Chọn cặp vợ chồng (C, D).
Tương tự ta cũng có số cách chọn là $C_{38}^3 - C_{36}^1$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{2\left(C_{38}^3 - C_{36}^1\right)}{C_{40}^5}$. □

Bài 3. Chi đoàn lớp $12A$ gồm 40 đoàn viên, trong đó có một người tên là An và một người tên là Bình. Ban chấp hành chi đoàn bao gồm một bí thư, một phó bí thư và n ủy viên được bầu từ 40 đoàn viên của chi đoàn.

1. Có thể lập được bao nhiêu ban chấp hành chi đoàn 12A với số ủy viên $n = 7$, còn An và Bình mỗi người giữ một chức vụ là bí thư hoặc phó bí thư?

2. Một ban chấp hành của chi đoàn $12A$ được gọi là đạt chuẩn A_0 nếu An và Bình đều là ủy viên ban chấp hành, đồng thời không giữ chức vụ bí thư và phó bí thư. Xác định giá trị n, biết xác suất lấy ngẫu nhiên được một ban chấp hành đạt chuẩn A_0 là $\dfrac{1}{78}$.

ĐS: $2 \cdot A_{38}^7$, $n = 5$.

Lời giải.

1. Số cách chọn An và Bình giữ chức vụ bí thư hoặc phó bí thư là 2 cách.
Số cách chọn 7 ủy viên là A_{38}^7.
Vậy có tất cả: $2 \cdot A_{38}^7$.

2. Số phần tử của không gian mẫu là $A_{40}^2 \cdot C_{38}^n$.
Chọn 2 người từ 38 người để giữ chức vụ bí thư hoặc phó bí thư có A_{38}^2.
Chọn thêm ủy viên có C_{36}^{n-2} (trừ bí thư, phó bí thư và An, Bình).
Vậy xác suất để được ban chấp hành đạt chuẩn A_0 là: $\dfrac{A_{38}^2 \cdot C_{36}^{n-2}}{A_{40}^2 \cdot C_{38}^n} = \dfrac{1}{78} \Rightarrow n = 5$.

□

Bài 4. Một đề thi có 10 câu trắc nghiệm, mỗi câu có bốn phương án trả lời, các phương án trả lời đôi một khác nhau, trong đó có một phương án đúng, ba phương án sai, trả lời đúng mỗi câu được 1,0 điểm, trả lời sai không được điểm và không bị trừ điểm. Một thí sinh là cả 10 câu, mỗi câu chọn một phương án ngẫu nhiên. Tính xác suất để thí sinh đó đạt từ 7,0 điểm trở lên. **ĐS:** $\frac{3676}{4^{10}}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4^{10}$.
Gọi A là biến cố "Thí sính đạt từ $7,0$ điểm trở lên".
Thí sinh chọn đúng 7 câu, sai 3 câu có $C_{10}^7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3240$ cách.
Thí sinh chọn đúng 8 câu, sai 2 câu có $C_{10}^8 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 405$ cách.
Thí sinh chọn đúng 9 câu, sai 1 câu có $C_{10}^9 \cdot 1 \cdot 3 = 30$ cách.
Thí sinh chọn đúng 10 câu có 1 cách.
Vậy $n(\mathrm{A}) = 3240 + 405 + 30 + 1 = 3676 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3676}{4^{10}}$. □

Bài 5. Một học sinh tham dự kỳ thi môn Toán. Học sinh đó phải làm một đề trắc nghiệm khách quan gồm 10 cầu hỏi. Mỗi câu có 4 đáp án khác nhau, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Học sinh sẽ được chấm đỗ nếu trả lời đúng ít nhất 6 câu. Vì học sinh đó không học bài nên chỉ chọn ngẫu nhiên đáp án trong cả 10 câu hỏi. Tính xác suất để học sinh thi đỗ. **ĐS:** $\frac{20686}{4^{10}}$

Lời giải.

Trong một câu xác suất trả lời đúng là $\dfrac{1}{4}$.
Trong một câu xác suất trả lời sai là $\dfrac{3}{4}$.
Học sinh đó thi đỗ trong các trường hợp sau:

— **Trường hợp 1:** đúng 6 câu và sai 4 câu.
Số cách chọn 6 câu đúng trong 10 câu là C_{10}^{6}.
Xác suất để trả lời 6 câu đúng đồng thời 4 câu còn lại trả lời sai là: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{6}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{4}$.
Suy ra trường hợp 1 có xác suất là $\mathrm{P}_1=\mathrm{C}_{10}^{6}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{6}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{4}$.
Tương tự:

— **Trường hợp 2:** đúng 7 câu và sai 3 câu có xác suất là: $\mathrm{P}_2=C_{10}^{7}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{7}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}$.

— **Trường hợp 3:** đúng 8 câu và sai 2 câu có xác suất là: $\mathrm{P}_3=\mathrm{C}_{10}^{8}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{8}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}$.

— **Trường hợp 4:** đúng 9 câu và sai 1 câu có xác suất là: $\mathrm{P}_4=\mathrm{C}_{10}^{9}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{9}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

— **Trường hợp 5:** đúng 10 câu có xác suất là: $\mathrm{P}_5=\mathrm{C}_{10}^{10}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}$.

Do mỗi trường hợp trên là 1 biến cố thì các biến cố đó là xung khắc nên xác suất để học sinh thi đỗ là:

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_3+\mathrm{P}_4+\mathrm{P}_5=\frac{20686}{4^{10}}.$$

□

Bài 6. Một công ty nhận được 30 hồ sơ của 30 người muốn xin việc vào công ty, trong đó có 15 người biết tiếng Anh, 8 người biết tiếng Pháp và 14 người không biết tiếng Anh và tiếng Pháp. Công ty cần tuyển 5 người biết ít nhất tiếng Anh hoặc tiếng Pháp. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp. **ĐS:** $\frac{15}{52}$

Lời giải.
Ta có:

— Số người biết ít nhất tiếng Anh hoặc tiếng Pháp là: $30-14=16$ (người).

— Số người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp là: $15+8-16=7$ (người).

— Số người chỉ biết tiếng Anh hoặc tiếng Pháp là: $16-7=9$ (người).

Xét phép thử: "5 người được chọn biết ít nhất tiếng Anh hoặc tiếng Pháp", suy ra $n(\Omega)=\mathrm{C}_{16}^{5}=4368$.
Xét biến cố: "Chọn 5 người trong đó có 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp", suy ra $n(A)=\mathrm{C}_{7}^{3}\cdot\mathrm{C}_{9}^{2}=1260$.
Xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{15}{52}$. □

Bài 7. Thầy X có 15 quyển sách gồm 4 cuốn sách Văn, 5 cuốn sách Sử và 6 cuốn sách Địa. Các cuốn sách đôi một khác nhau. Thầy X chọn ngẫu nhiên 8 cuốn sách để làm phần thưởng cho một học sinh. Tính xác suất để số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn. **ĐS:** $\frac{5949}{6435}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=\mathrm{C}_{15}^{8}$.
Gọi A là biến cố: "Số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn".
Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "7 cuốn sách còn lại của thầy X không có đủ 3 môn"
Xét các khả năng xảy ra:

Khả năng 1: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Văn và Sử. Số cách chọn là: C_9^7.

Khả năng 2: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Văn và Địa. Số cách chọn là: C_{10}^7.

Khả năng 3: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Địa và Sử. Số cách chọn là: C_{11}^7.

Vậy $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{C_9^7 + C_{10}^7 + C_{11}^7}{C_{15}^8} = \dfrac{5949}{6435}$. □

Bài 8. Một đoàn tàu có 4 toa chở khách với mỗi toa còn ít nhất 5 chỗ trống. Trên sân ga có 5 hành khách chuẩn bị lên tàu. Tính xác suất để trong 5 hành khách lên tàu đó có một toa có 3 khách lên, hai toa có một khách lên và một toa không có khách nào lên tàu. **ĐS:** $\frac{15}{64}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 4^5$.
Gọi A là biến cố "trong 5 hành khách lên tàu có một toa có 3 khách lên, hai toa có một khách lên và một toa không có khách nào".
Số cách chọn ba khách để xếp lên cùng một toa là: $C_5^3 = 10$.
Số cách chọn ra một toa tàu để xếp ba người này là: $C_4^1 = 4$.
Số cách xếp hai người (mỗi người một toa) vào ba toa còn lại là: $A_3^2 = 6$.
Suy ra $n(A) = 10 \cdot 4 \cdot 6 = 240$.
Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{240}{4^5} = \dfrac{15}{64}$. □

Bài 9. Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong năm cửa hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào. **ĐS:** $\frac{181}{625}$

Lời giải.
Mỗi người khách có 5 cách chọn một cửa hàng để vào.
Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 5^5 = 3125$.
Gọi A là biến cố: "có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào ".

TH1: Một cửa hàng có 3 khách, một cửa hàng có 2 khách, ba của hàng còn lại không có khách nào.

Trường hợp này có $C_5^1 \cdot C_5^3 \cdot C_4^1 \cdot C_2^2 = 200$ khả năng xảy ra.

TH2: Một cửa hàng có 3 khách, hai cửa hàng có 1 khách, ba cửa hàng còn lại không có khách nào.

Trường hợp này có $C_5^1 \cdot C_5^3 \cdot C_4^2 \cdot P_2 = 600$ khả năng xảy ra.

TH3: Một cửa hàng có 4 khách, một cửa hàng có 1 khách, ba cửa hàng còn lại không có khách nào.

Trường hợp này có $C_5^1 \cdot C_5^4 \cdot C_4^1 = 100$ khả năng xảy ra.

TH4: Một cửa hàng có 5 khách, các cửa hàng khác không có khách nào.

Trường hợp này có $C_5^1 = 5$ khả năng xảy ra.

Suy ra $n(A) = 200 + 600 + 100 + 5 = 905$. Vậy xác suất cần tìm là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{905}{3125} = \dfrac{181}{625}$. □

Bài 10. Một khóa số với mật khẩu là 3 số tăng dần từ 0 đến 9 có tổng bằng 10. Một người không nhớ mật khẩu mà chỉ nhớ tăng dần nên bấm bừa 3 số bất kì tăng dần. Khóa sẽ bị block nếu quá 3 lần bấm sai. Tính xác suất để người này mở được khóa biết rằng người này chỉ nhớ được kết quả bấm của mình ở lần kế trước (trí nhớ ngắn hạn) để tránh kết quả đó cho lần sau. **ĐS:** $\frac{8}{120} + \frac{112}{120} \cdot \frac{8}{119} + \frac{112}{120} \cdot \frac{111}{119} \cdot \frac{8}{118}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.
có 8 dãy mã đúng để mở khóa gồm; $\{0;1;9\}$, $\{0;2;8\}$, $\{0;3;7\}$, $\{0;4;6\}$, $\{1;2;7\}$, $\{1;3;6\}$, $\{1;4;5\}$ và $\{2;3;5\}$.
Gọi A là biến cố "người này mở được khóa". Ta có ba trường hợp:

TH1: Khóa được mở ở lần thứ nhất. Xác suất của biến cố này là $\dfrac{8}{120}$.

TH2: Khóa được mở ở lần thứ hai. Xác suất của biến cố này là $\dfrac{112}{120} \cdot \dfrac{8}{119}$.

TH3: Khóa được mở ở lần thứ ba. Xác suất của biến cố này là $\dfrac{112}{120} \cdot \dfrac{111}{119} \cdot \dfrac{8}{118}$.

Vậy xác xuất $\mathrm{P}(A) = \dfrac{8}{120} + \dfrac{112}{120} \cdot \dfrac{8}{119} + \dfrac{112}{120} \cdot \dfrac{111}{119} \cdot \dfrac{8}{118}$ □

DẠNG 0.5. Các bài toán đếm số phương án. Tính xác suất liên quan đến đa giác

Bài 11. Cho đa giác đều (H) có n đỉnh $(n \in \mathbb{N}, n > 4)$. Tìm n biết rằng số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) gấp 5 lần số tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng một cạnh là cạnh của (H). **ĐS:** $n = 35$

Lời giải.
Số tam giác có 3 đỉnh thuộc (H) là C_n^3. Số tam giác có 3 đỉnh thuộc (H) và có hai cạnh là cạnh của (H) là n. Số tam giác có 3 đỉnh thuộc (H) và có đúng một cạnh là cạnh của (H) là $n(n-4)$. Suy ra số các tam giác có ba đỉnh thuộc (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) là $\mathrm{C}_n^3 - n - n(n-4)$.

Theo giả thiết ta có $\mathrm{C}_n^3 - n - n(n-4) = 5n(n-4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 35 \\ n = 4 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$. □

Bài 12. Cho đa giác lồi 14 đỉnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong X một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho. **ĐS:** $\dfrac{15}{26}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^3 = 364$.
Gọi A là biến cố: "Tam giác được chọn trong X không có cạnh nào là cạnh của đa giác ".
Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Tam giác được chọn trong X có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác"

TH1: Nếu tam giác được chọn có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác thì có 14 tam giác thỏa mãn.

TH2: Nếu tam giác được chọn có đúng một cạnh là cạnh của đa giác thì có $14 \cdot 10 = 140$ tam giác thỏa mãn.

Suy ra $n\left(\overline{A}\right) = 14 + 140 = 154$. Vậy số phần tử của biến cố A là: $n(A) = n(\Omega) - n\left(\overline{A}\right) = 210$.
Suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{210}{364} = \dfrac{15}{26}$. □

Bài 13. Cho đa giác lồi $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong X một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho. **ĐS:** $\dfrac{5}{12}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.
Gọi A là biến cố: "Tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho".
Các tam giác ở tập X có ba loại: Tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác, tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác, tam giác có hai cạnh là cạnh của đa giác.
Ứng với một cạnh của đa giác thì có đúng $10 - 4$ đỉnh của đa giác tạo thành tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác nên số tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác là: $10(10-4) = 60$.
Có 10 tam giác có hai cạnh là cạnh của đa giác. Do đó $n(A) = 120 - 60 - 10 = 50$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{50}{120} = \dfrac{5}{12}$. □

Bài 14. Cho (H) là đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm O $(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác (H). Chọn ngẫu nhiên một đa giác thuộc tập S, biết rằng xác suất chọn được một tam giác vuông trong tập S là $\dfrac{1}{13}$. Tìm n. **ĐS:** $n = 20$

Lời giải.
Số phần tử của tập S là: C_{2n}^3. Nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{2n}^3$.
Gọi A là biến cố: "Chọn được tam giác vuông ". Đa giác đều $2n$ đỉnh có n đường chéo qua tâm O.
Mỗi tam giác vuông được tạo bởi hai đỉnh nằm trên cùng một đường chéo qua tâm O và một trong $2n-2$ đỉnh còn lại.
Suy ra số tam giác vuông là $n(2n-2)$.
Theo đề bài ta có: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(2n-2)}{\mathrm{C}_{2n}^3} = \dfrac{1}{13} \Rightarrow n = 20$. □

Bài 15. Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Gọi M là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc M, tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều. **ĐS:** $\frac{18}{91}$

Lời giải.
Số phần tử của tập M là: $\mathrm{C}_{15}^3 = 455$. Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{C}_{455}^1 = 455$.
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Xét một đỉnh A bất kì của đa giác: Có 7 cặp đỉnh đối xứng với nhau qua đường thẳng OA, hay có 7 tam giác cân tại đỉnh A. Như vậy với mỗi đỉnh của đa giác có 7 tam giác nhận nó làm đỉnh của tam giác cân.
Số tam giác đều có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác là $\dfrac{15}{3} = 5$ tam giác.
Tuy nhiên, trong các tam giác cân đã xác định ở trên có cả tam giác đều, do mọi tam giác đều thì đều cân tại 3 đỉnh nên các tam giác đều được đếm ba lần.
Suy ra số tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho là: $7 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = 90$.
Vậy xác suất để chọn được một tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều từ tập M là $\mathrm{P} = \dfrac{90}{455} = \dfrac{18}{91}$.
□

Bài 16. Cho đa giác đều H có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của hình H. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông. **ĐS:** $\frac{1}{161}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{24}^4$.
Gọi A là biến cố: "4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông".
Gọi O là tâm của đa giác đều. Vì đa giác đều có số đỉnh là chẵn, nên có 12 cặp điểm đối xứng qua O, tạo thành một đường kính, cứ lấy bất kì 2 đường kính nào chúng cũng là 2 đường chéo của một hình chữ nhật. Do đó số hình chữ nhật là C_{12}^2. Suy ra $n(A) = \mathrm{C}_{12}^2$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_{12}^2}{\mathrm{C}_{24}^4} = \dfrac{1}{161}$. □

Bài 17. Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X. Tính xác suất để chọn được một tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác (H) và một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H). **ĐS:** $\frac{748}{1195}$

Lời giải.
Đầu tiên ta xét các loại tam giác được tạo thành.
Số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 đỉnh của H là: $\mathrm{C}_{22}^3 = 1540$ tam giác, bao gồm 3 loại sau: Loại 1 là tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh của (H), loại 2 là tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của (H), loại 3 là tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H).
Cứ mỗi đỉnh của (H) cùng với 2 đỉnh liên tiếp (kề bên) tạo thành một tam giác loại 1 nên có 22 tam giác loại 1.

Mỗi cạnh của (H) cùng với một đỉnh trong số $22-4=18$ đỉnh còn lại (trừ hai đầu mút của cạnh đang xét và hai đỉnh kề hai bên của cạnh này) tạo thành một tam giác loại 2. Do đó có $22\cdot 18=396$ tam giác loại 2.
Do đó số tam giác loại 3 là $1540-(22+396)=1122$ tam giác.
Số phần tử của không gian mẫu là: $n\left(\Omega\right)=\mathrm{C}_{1540}^2=1185030$.
Gọi A là biến cố "Chọn được một tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác (H) và một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H) ". Suy ra $n\left(A\right)=396\cdot 1122=444312$.
Vậy $\mathrm{P}(A)=\dfrac{444312}{1185030}=\dfrac{748}{1195}$. □

Bài 18. Một đa giác đều 24 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác, tính xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu. **ĐS:** $\frac{190}{253}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là: $n\left(\Omega\right)=\mathrm{C}_{24}^3=2024$
Gọi A là biến cố "chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu ". Tức là ba cạnh này cùng màu đỏ.
Mỗi cạnh màu xanh của đa giác cùng với một đỉnh trong $24-4=20$ đỉnh còn lại (trừ hai đầu mút của cạnh đang xét và hai đỉnh hai bên cạnh này) sẽ tạo thành một tam giác có đúng một cạnh màu xanh. Do đó có $24\cdot 20=480$ tam giác loại này.
Mỗi đỉnh của đa giác cùng với hai cạnh hai bên sẽ tạo thành một tam giác có đúng 2 cạnh màu xanh. Do đó có 24 tam giác loại này.
Do đó số tam giác không có cạnh nào màu xanh là $2024-480-24=1520$. Do đó $n\left(A\right)=1520$.
Vậy xác suất $\mathrm{P}\left(A\right)=\dfrac{1520}{2024}=\dfrac{190}{253}$. □

Bài 19. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh, lấy ngẫu nhiên một đường chéo của đa giác này, thì xác suất để đường chéo được chọn có độ dài lớn nhất bằng $\dfrac{1}{9}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x}+2\right)^n$. **ĐS:** 480

Lời giải.
Số đường chéo trong đa giác $2n$ cạnh là C_{2n}^2-2n.
Đường chéo có độ dài lớn nhất là đường chéo đi qua tâm của đa giác đều, có n đường chéo như vậy. Từ giả thiết ta có:
$$\frac{n}{\mathrm{C}_{2n}^2-2n}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{n}{(2n-1)n-2n}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{2n-3}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow n=6.$$
Xét khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x}+2\right)^6$ có số hạng tổng quát là: $\mathrm{C}_6^k\cdot\mathrm{C}_k^i\cdot 2^{6-k}\left(x^3\right)^{k-i}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^i=\mathrm{C}_6^k\cdot\mathrm{C}_k^i\cdot 2^{6-k}\cdot x^{3k-4i}$.
Số hạng chứa x^5 trong khai triển ứng với i, k thỏa mãn hệ: $\begin{cases}3k-4i=5\\0\le i\le k\le 6\\i,k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i=1\\k=3.\end{cases}$
Hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot 2^3=480$. □

Bài 20. Có năm đoạn thẳng có độ dài 1, 3, 5, 7, 9. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng từ năm đoạn thẳng đó. Tính xác suất để ba đoạn được chọn có thể xếp thành một hình tam giác. **ĐS:** $\frac{2}{5}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{C}_5^3=10$.
Để ba đoạn thẳng có thể xếp thành một tam giác thì có bốn cách chọn như sau: $\{3,5,7\}$; $\{3,7,9\}$, $\{5,7,9\}$, $\{3,5,9\}$.
Gọi A là biến cố: "chọn được ba đoạn thẳng có thể xếp thành một hình tam giác ". Ta có $n\left(A\right)=4$.
Vậy xác suất $\mathrm{P}\left(A\right)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$. □

Bài 21. Trong không gian có $2n$ điểm phân biệt ($n > 4; n \in \mathbb{N}$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm phân biệt có đúng n điểm thuộc một mặt phẳng. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho từ $2n$ điểm có đúng 505 mặt phẳng phân biệt. **ĐS:** $n = 8$

Lời giải.
Số cách chọn ba điểm từ $2n$ điểm phân biệt là C_{2n}^3.
Trong $2n$ điểm phân biệt có đúng n điểm thuộc một mặt phẳng nên có C_n^3 mặt phẳng trùng nhau.
Vậy số mặt phẳng tạo ra từ $2n$ điểm phân biệt là $C_{2n}^3 - C_n^3 + 1$. Ta có phương trình:

$$\begin{aligned}
& C_{2n}^3 - C_n^3 + 1 = 505 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 505 \\
\Leftrightarrow\ & 7n^3 - 9n^2 + 2n - 3024 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n = 8.
\end{aligned}$$

Vậy $n = 8$. □

DẠNG 0.6. Các bài toán đếm, sắp xếp liên quan đến vị trí, xếp chỗ

Bài 22 (Đề thi học sinh giỏi Bến Tre lớp 12 năm học 2017 – 2018). Trong một lớp học có $2n + 3$ học sinh gồm An, Bình, Chi cùng $2n$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến $2n + 3$, mỗi học sinh ngồi 1 ghế thì xác suất để số ghế của Bình bằng trung bình cộng số ghế An và số ghế của Chi là $\frac{12}{575}$. Tính số học sinh của lớp. **ĐS:** 25

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là số cách sắp xếp $2n + 3$ học sinh vào $2n + 3$ chỗ ngồi đã được đánh số. Suy ra $n(\Omega) = (2n + 3)!$.
Gọi A là biến cố "số ghế của Bình bằng trung bình cộng số ghế của An và số ghế của Chi" thì ta có:

+ Xếp Bình ở ghế số 2 hoặc ghế thứ $2n + 2$ thì mỗi cách có $1 \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.
+ Xếp Bình ở ghế số 3 hoặc ghế thứ $2n + 1$ thì mỗi cách có $2 \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.
+ Xếp Bình ở ghế số 4 hoặc ghế thứ $2n$ thì mỗi cách có $3 \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.
  ......
+ Xếp Bình ở ghế số $n + 1$ hoặc ghế thứ $n + 3$ thì mỗi cách có $n \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.
+ Xếp Bình ở ghế số $n + 2$ mỗi cách có $(n + 1) \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.

Suy ra $2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \cdot 2! + (n + 1) \cdot 2! = (n + 1)^2 \cdot 2!$ cách xếp để số ghế của Bình bằng trung bình cộng số ghế của An và Chi.
Với mỗi cách xếp trên có $(2n)!$ cách xếp các học sinh còn lại.
Vậy ta có $n(A) = 2(n + 1)^2 \cdot (2n)!$.
Theo giả thiết ta có phương trình

$$\frac{2(n+1)^2 \cdot (2n)!}{(2n+3)!} = \frac{12}{575} \Leftrightarrow 48n^2 - 479n - 539 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 11 \\ n = -\frac{49}{48} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Suy ra số học sinh là $2 \cdot 11 + 3 = 25$. □

Bài 23 (Đề thi học sinh giỏi Thanh Hóa lớp 11 năm học 2017 – 2018). Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp $11A$ và 3 học sinh lớp $11B$ và 5 học sinh của lớp $11C$ thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có học sinh nào của cùng một lớp đứng cạnh nhau. **ĐS:** $\frac{1}{126}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$.
Gọi D là biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Xếp 5 học sinh lớp $11C$ vào hàng có $5!$ cách. (Sau khi xếp sẽ có 6 vị trí trống (4 giữa và 2 ở hai đầu), chẳng hạn $(1C2C3C4C5C6)$.

+ Nếu xếp xen kẽ 5 học sinh lớp A và B từ phía tận cùng bên trái (12345) có $5!$ cách xếp, tương tự xếp từ phía bên phải (23456) cũng sẽ có $5!$ cách xếp.

Suy ra $n(D) = 5! \cdot 2 \cdot 5! = 28800$. Vậy xác suất của biến cố D là

$$\mathrm{P}(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{28800}{10!} = \frac{1}{126}.$$

□

Bài 24 (Đề thi học sinh giỏi Bắc Giang lớp 12 năm học 2016 − 2017). Một nhóm học sinh gồm 9 bạn nam, trong đó có bạn Hải và 4 bạn nữ trong đó có bạn Minh xếp vào 13 cái ghế trên một hàng ngang. Tính xác suất để giữa hai bạn nữ có đúng ba bạn nam, đồng thời bạn Hải và bạn Minh nêu ở trên không ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $\frac{1}{858}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 13!$.
Đánh số ghế trên hàng ngang theo thứ tự từ 1 đến 13. Các bạn nữa phải ngồi vào các ghế số 1, 5, 9, 13.
Gọi A là biến cố "Giữa hai bạn nữ ngồi gần nhau có đúng ba bạn nam, đồng thời bạn Hải và bạn Minh không ngồi cạnh nhau ".
Xét các trường hợp sau:

* Bạn Minh ngồi ghế số 1.
  - Số cách xếp ba bạn nữ còn lại là $3!$.
  - Có 8 cách xếp vị trí của bạn Hải.
  - Có $8!$ cách xếp tám bạn nam vào các vị trí còn lại.

  Suy ra số cách sắp xếp là $8 \cdot 3! \cdot 8!$.
* Ban Minh ngồi ghế số 13 cũng có số cách sắp xếp là $8 \cdot 3! \cdot 8!$.
* Bạn Minh ngồi ghế số 5 (tương tự bạn Minh ngồi ghế số 9).
  - Xếp 3 bạn nữ còn lại có $3!$.
  - Có 7 cách xếp vị trí của Hải.
  - Có $8!$ cách xếp 8 bạn nam còn lại.

  Do đó số cách sắp xếp là $7 \cdot 3! \cdot 8!$.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 2 \cdot 3! \cdot 8 \cdot 8! + 2 \cdot 3! \cdot 7 \cdot 8! = 7257600$.
Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{7257600}{13!} = \dfrac{1}{858}$. □

Bài 25 (Đề thi học sinh giỏi Thành phố Hồ Chí Minh lớp 12 năm học 2017 − 2018). Trong một phòng học, có 36 cái bàn rời nhau được đánh số từ 1 đến 36, mỗi bàn dành cho 1 học sinh. Các bàn được xếp thành một hình vuông có kích thước 6×6. Cô giáo xếp tùy ý 36 học sinh của lớp trong đó có hai em là Hạnh và Phúc vào các bàn. Tính xác suất để Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau theo hàng dọc hoặc hàng ngang. **ĐS:** $\frac{2}{21}$

Lời giải.
Số cách sắp xếp 36 học sinh vào 36 cái bàn của lớp cũng chính là số phần tử của không gian mẫu nên $n(\Omega) = 36!$.
Gọi A là biến cố "Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau theo hàng dọc hoặc hàng ngang ".
* Nếu Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau theo hàng ngang.

+ Có 6 cách chọn dãy bàn nằm ngang để hai bạn ngồi cạnh nhau.

+ Coi hai bạn Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau là 1 nhóm X nên có 2 nhóm X khác nhau và có 5 cách xếp chỗ cho nhóm X.

+ Có 34! cách xếp chỗ cho 34 học sinh còn lại vào 34 bàn.

Vậy trong trường hợp này có $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 34! = 60 \cdot 34!$ cách xếp.
* Nếu Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau theo hàng dọc. Tương tự ta có $60 \cdot 34!$ cách xếp.
Số phần tử của A là $n(A) = 120 \cdot 34!$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120 \cdot 34!}{36!} = \dfrac{2}{21}$. □

Bài 26 (Đề thi học sinh giỏi Chu Văn An lớp 11 năm học 2015 – 2016). Trong một cuộc thi chọn học sinh giỏi toán khối 11 trường THPT Chu Văn An, có 52 học sinh đăng ký dự thi trong đó có một em tên Thành và một em tên Đạt. Dự kiến ban tổ chức sắp xếp làm 3 phòng thi (phòng 1 và phòng 2 có 18 thí sinh, phòng 3 có 16 thí sinh). Nếu phòng thi được sắp xếp một cách ngẫu nhiên, hãy tính xác suất để Thành và Đạt ngồi chung một phòng. **ĐS:** $\dfrac{71}{221}$

Lời giải.
Không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18}$.
Nếu Thành và Đạt ngồi chung phòng 1 hoặc phòng 2 thì $n(A_1) = 2 \cdot \mathrm{C}_{50}^{16} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18}$.
Nếu Thành và Đạt ngồi chung phòng 3 thì $n(A_2) = \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{32}^{18}$.
Gọi A là biến cố "Thành và Đạt ngồi chung phòng ".

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2 \cdot \mathrm{C}_{50}^{16} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18} + \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{32}^{18}}{\mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18}} = \frac{71}{221}.$$

□

Bài 27 (Đề thi học sinh giỏi Chuyên Bắc Ninh lớp 11). Có 6 viên bi gồm 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 viên bi thành một hàng sao cho không có hai viên bi cùng màu xếp cạnh nhau? **ĐS:** 30

Lời giải.
Tổng số cách xếp 6 viên bi thành một hàng là $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 = \dfrac{6!}{2^3} = 90$ (cách).
Kí hiệu: A_1 là tập hợp 2 viên bi xanh cạnh nhau; A_2 là tập hợp hai viên bi đỏ cạnh nhau; A_3 là tập hợp hai viên bi vàng cạnh nhau.
Số cách sắp xếp không hợp lệ (có ít nhất 2 viên bi cùng màu cạnh nhau) là

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - (n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3)) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Với $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_3^2 = \dfrac{5!}{2^2} = 30$.
$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_3) = \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 12$ và $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3! = 6$.
Suy ra $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 90 - 3 \cdot 12 + 6 = 60$.
Vậy số cách sắp xếp hợp lí là $n(A_1 A_2 A_3) = 90 - 60 = 30$. □

Bài 28 (Đề thi học sinh giỏi Triệu Sơn lớp 11 năm học 2017 – 2018). Từ 2012 số nguyên dương đầu tiên lấy ra 6 số xếp thành dãy số có dạng u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6. Hỏi có bao nhiêu dãy số có dạng trên biết u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. **ĐS:** $2012 \cdot 1005 \cdot \mathrm{A}_{2009}^3$

Lời giải.
u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $u_1 + u_3 = 2u_2$. Do đó u_1, u_3 hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Số tất cả các cấp số cộng theo thứ tự đó chính là số các cặp số (có thứ tự) (u_1, u_3).
Chọn u_1 có 2012 cách chọn, chọn u_3 chỉ có 1005 cách chọn số cùng chẵn hoặc cùng lẻ với u_1.
Khi đó $u_2 = \dfrac{u_1 + u_3}{2}$ có duy nhất một cách chọn.
Còn lại 2009 số, ta chọn ra 3 số sắp xếp có thứ tự để hoàn tất việc chọn.
Vì vậy số kết quả là $2012 \cdot 1005 \cdot \mathrm{A}_{2009}^3$. □

Bài 29 (Đề thi giữa kì 2 Yên Phong 1 - Bắc Ninh lớp 12 năm học 2017 − 2018). Có 6 xe xếp cạnh nhau thành hàng ngang gồm: 1 xe màu xanh, 2 xe màu vàng và 3 xe màu đỏ. Tính xác suất để hai xe cùng màu không xếp cạnh nhau. **ĐS:** $\frac{1}{6}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6! = 720$.
Gọi A là biến cố hai xe cùng màu không xếp cạnh nhau. Ta tính $n(A)$.
Xe màu đỏ nhiều nhất nên ta sắp trước để tránh trường hợp chúng cạnh nhau, ta xếp như sau:

+ TH1:

Đ		Đ		Đ	

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, thỏa mái xếp các xe còn lại nên có 3! cách sắp xếp các xe còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 3! = 36$ cách.

+ TH2:

	Đ		Đ		Đ

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, thỏa mái xếp các xe còn lại nên có 3! cách sắp xếp các xe còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 3! = 36$ cách.

+ TH3:

Đ			Đ		Đ

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, có $2 \cdot 2 = 4$ cách sắp xếp 2 xe màu xanh và vàng vào hai ô trống liền kề và ô còn lại xếp xe màu vàng còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 4 = 24$ cách.

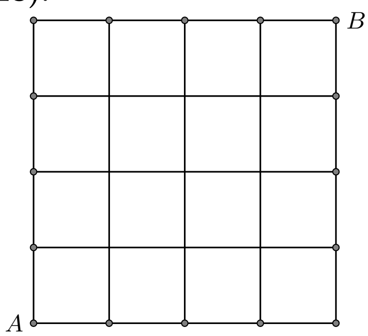
+ TH4:

Đ		Đ			Đ

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, có $2 \cdot 2 = 4$ cách sắp xếp 2 xe màu xanh và vàng vào hai ô trống liền kề và ô còn lại xếp xe màu vàng còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 4 = 24$ cách.

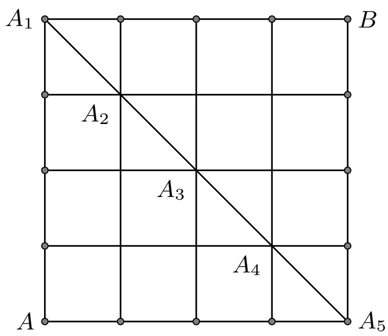
Vậy tổng cộng ta có $n(A) = 36 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 120$.
Do đó xác suất của biến cố A là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{720} = \dfrac{1}{6}$. □

Bài 30 (Đề thi học sinh giỏi Phú Thọ lớp 12 năm học 2017 − 2018).
Cho một lưới ô vuông gồm 16 ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông nhỏ có kích thước 1×1 (mét) như hình vẽ bên. Con kiến thứ nhất ở vị trí A muốn di chuyển lên vị trí B, con kiến thứ hai ở vị trí B muốn di chuyển xuống vị trí A. Biết rằng con kiến thứ nhất chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên phải hoặc lên trên, con kiến thứ hai chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên trái hoặc xuống dưới (theo cạnh của các hình vuông). Hai con kiến xuất phát cùng một thời điểm và có cùng vận tốc di chuyển là 1 mét/phút. Tính xác suất để hai con kiến gặp nhau trên đường đi.



ĐS: $\frac{35}{128}$

Lời giải.
Nhận xét: Để di chuyển đến đích, mỗi con kiến phải có hành trình 8m. Vì hai con kiến xuất phát cùng thời điểm và cùng vận tốc di chuyển nên chúng chỉ có thể gặp nhau khi mỗi con kiến đều di chuyển được 4m (sau 4 phút). Do vậy chúng chỉ có thể gặp nhau tại các giao điểm trên đường chéo chính chạy từ góc trên bên trái đến góc dưới bên phải (A_1A_5).



Xác suất để sau 4 phút, con kiến thứ nhất đi đến vị trí A_1 là $\mathrm{P}_1(A_1) = \dfrac{\mathrm{C}_4^0}{2^4}$;
Xác suất để sau 4 phút, con kiến thứ hai đi đến vị trí A_1 là $\mathrm{P}_2(A_1) = \dfrac{\mathrm{C}_4^0}{2^4}$.
Xác suất để hai con kiến gặp nhau tại vị trí A_1 là

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}_1(A_1) \cdot \mathrm{P}_2(A_1) = \frac{\left(\mathrm{C}_4^0\right)^2}{256}.$$

Tương tự xác suất để hai con kiến gặp nhau tại các vị trí A_2, A_3, A_4, A_5 là

$$\mathrm{P}(A_2)=\frac{\left(\mathrm{C}_4^1\right)^2}{256},\ \mathrm{P}(A_3)=\frac{\left(\mathrm{C}_4^2\right)^2}{256},\ \mathrm{P}(A_4)=\frac{\left(\mathrm{C}_4^3\right)^2}{256},\ \mathrm{P}(A_5)=\frac{\left(\mathrm{C}_4^4\right)^2}{256}.$$

Vậy xác suất hai con kiến gặp nhau là

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_3)+\mathrm{P}(A_4)+P(A_5)=\frac{\left(\mathrm{C}_4^0\right)^2+\left(\mathrm{C}_4^1\right)^2+\left(\mathrm{C}_4^2\right)^2+\left(\mathrm{C}_4^3\right)^2+\left(\mathrm{C}_4^4\right)^2}{256}=\frac{35}{128}.$$

□

Bài 31 (Đề thi học sinh giỏi Hà Tĩnh lớp 11 năm học 2016 − 2017). Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

ĐS: $\frac{397}{1728}$

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=6^3\cdot 2^3=1728$.

Số trường hợp xảy ra để cả 3 lượt tung đó đều thu được súc sắc mặt 1 chấm và đồng xu mặt sấp là 1.

Số trường hợp xảy ra để trong 3 lượt tung đó có đúng 2 lượt được súc sắc mặt 1 chấm và đồng xu sấp là $3\cdot 1\cdot 1\cdot 11=33$.

Số trường hợp xảy ra để trong 3 lượt tung đó có đúng 1 lượt được súc sắc mặt 1 chấm và đồng xu mặt sấp là $3\cdot 1\cdot 11\cdot 11=363$.

Vậy xác suất cần tìm là: $\mathrm{P}=\frac{1+33+363}{1728}=\frac{397}{1728}$. □