

Bài 1. (1,5đ) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 12x} + 3x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|3-x|\sqrt{x^2+7} - 4(x-3)}{(x-3)^2}.$

Bài 2. (1đ) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (1-2x)\sqrt{1+x-2x^2}.$

b) $y = \cos^2(1-2x^2).$

Bài 3. (1đ) Chứng minh phương trình $(m^2 + 2m + 3)(x^3 + 3x - 4)^3 + m^2x = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực m.

Bài 4. (1đ) Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x}, & \text{khi } -2 \leq x < 0 \\ m+2x, & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ liên tục trên $[-2; 2]$.

Bài 5. (1,5đ) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$ (C).

- a) Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số (C) và đường thẳng $y = 2x + 1$.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - 3y - 1 = 0$.

Bài 6. (4đ) Hình chóp S.ABCD có O là tâm của hình thoi ABCD, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Dựng $OK \perp SC$ (K thuộc SC).

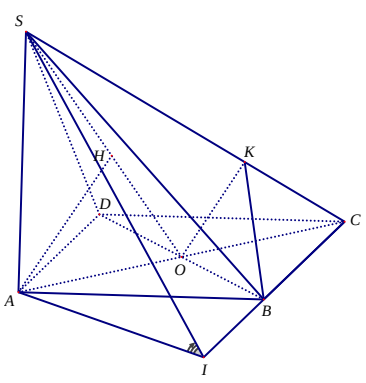
- a) Chứng minh $BD \perp (SAC)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.
b) Tính góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).
c) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).
d) Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (KBC) và (OBC).

HẾT

Đáp án và cho điểm

Bài 1	Tìm giới hạn	
a)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 12x} + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{12x}{\sqrt{9x^2 + 12x} - 3x} \right)$ $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{12}{-\sqrt{9 + \frac{12}{x^2}} - 3} \right)$ $= -2$	
b)	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ 3-x \sqrt{x^2+7}-4(x-3)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{(x-3)}$ $= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}$ $= \frac{3}{4}$	
Bài 2	Tính đạo hàm hàm số $y = (1-2x)\sqrt{1+x-2x^2}.$ $y' = (1-2x)' \sqrt{1+x-2x^2} + (1-2x) \left(\sqrt{1+x-2x^2} \right)'$ $= -2\sqrt{1+x-2x^2} + (1-2x) \frac{1-4x}{2\sqrt{1+x-2x^2}}$ $= \frac{-4(1+x-2x^2) + (1-2x)(1-4x)}{2\sqrt{1+x-2x^2}} = \frac{16x^2 - 10x - 3}{2\sqrt{1+x-2x^2}}$	
	b) $y = \cos^2(1-2x^2)$ $y' = 2\cos(1-2x^2) \cdot (\cos(1-2x^2))'$ $= -2\cos(1-2x^2) \cdot \sin(1-2x^2) \cdot [(1-2x^2)']$ $= 8x\cos(1-2x^2) \cdot \sin(1-2x^2).$ $= 4x \cdot \sin(2-4x^2).$	
Bài 3	Chứng minh rằng phương trình $(m^2 + 2m + 3)(x^3 + 3x - 4)^3 + m^2x = 0$ (1) có ít nhất một nghiệm với mọi số thực m. Đặt $f(x) = (m^2 + 2m + 3)(x^3 + 3x - 4)^3 + m^2x$.	

	Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ $\left. \begin{aligned} f(1) &= m^2 \geq 0 \\ f(-1) &= (-8)^3(m^2 + 2m + 3) - m^2 < 0 \end{aligned} \right\}$ $\Rightarrow f(-1) \cdot f(1) \leq 0, \forall m$ $\Rightarrow \exists x_1 \in [-1;1]$ sao cho $f(x_1) = 0$. Vậy pt (1) có ít nhất 1 nghiệm với mọi m.	
Bài 4	(1đ) Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x}, & \text{khi } -2 \leq x < 0 \\ m + 2x, & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ liên tục trên $[-2;2]$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (m + 2x) = m$ $f(0) = m$ Hàm số liên tục trên $[-2;2]$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ $\Leftrightarrow m = \frac{-1}{\sqrt{2}}$	
Bài 5	Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$ có đồ thị (C). a)Viết pt tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số (C) và đường thẳng $y = 2x + 1$.	
	$y' = f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}.$ Pthđ giao điểm: $\frac{2x+1}{1-x} = 2x+1; \quad (x \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = 0; f'(\frac{-1}{2}) = \frac{4}{3} \\ x = 0 \Rightarrow y = 1; f'(0) = 3 \end{cases}$	

	Tại $M_1\left(\frac{-1}{2};0\right)$, $pttt: y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ Tại $M_2(0;1)$, $pttt: y = 3x + 1$	
	b)Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - 3y - 1 = 0$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. tt song song với (d): $\frac{3}{(1-x_0)^2} = \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x = 4 \Rightarrow y_0 = -3 \end{cases}$ pttt tại $M(-2;-1)$; $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ (loại) pttt tại $M(4;-3)$; $y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$	
Bài 6	(4đ) Hình chóp S.ABCD có O là tâm của hình thoi ABCD, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Dựng $OK \perp SC$ (K thuộc SC). a) Chứng minh $BD \perp (SAC)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC. b) Tính góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD). c) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD). d) Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (KBC) và (OBC). 	
	a) Học sinh chứng minh $BD \perp (SAC)$ * Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC là OK.	

* Tam giác SAC có $SA = AC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SC

$$\text{Suy ra } OK = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}SC = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

Xác định SH là hình chiếu vuông góc của SA lên (SBD), suy ra góc

$$[SA; (SBD)] = ASH = ASO$$

$$\tan ASO = \frac{1}{2} \Rightarrow ASO \approx 26^{\circ}34'$$

c) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).

$$d[C; (SBD)] = d[A; (SBD)]$$

$$AH \perp (SBD) \Rightarrow d[A; (SBD)] = AH$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

d) Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (KBC) và (OBC).

$$\text{Xác định đúng } [(KBC); (OBC)] = [(SBC); (ABC)] = SIA$$

$$AI \cdot BC = AC \cdot BO = 2S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan SIA = \frac{SA}{AI} = 2$$

$$\Rightarrow [(KBC); (OBC)] = [(SBC); (ABC)] = SIA \approx 63^{\circ}26'$$

