

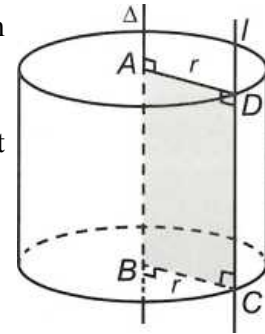
BÀI 2: MẶT TRỤ

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

MẶT TRỤ TRÒN XOAY

Trong mp (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng r . Khi quay mp (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

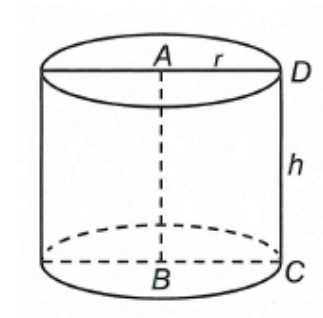
- Đường thẳng Δ được gọi là trục.
- Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
- Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ đó.



HÌNH TRỤ TRÒN XOAY

Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB , thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

- Đường thẳng AB được gọi là trục.
- Đoạn thẳng CD được gọi là độ dài đường sinh.
- Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ (độ dài đường sinh bằng chiều cao của hình trụ).
- Hình tròn tâm A , bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B , bán kính $r = BC$ được gọi là hai đáy của hình trụ.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.



KHOẢNG TRỤ TRÒN XOAY

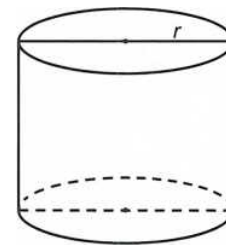
Phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó ta gọi là khối trụ tròn xoay hay ngắn gọn là khối trụ.

Các khái niệm tương tự như hình trụ.

CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Cho hình trụ có chiều cao là h , bán kính đáy r thì ta có:

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rh$.
- Diện tích đáy (hình tròn) $S_{ht} = \pi r^2$.
- Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_D = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- Thể tích khối trụ $V_{kt} = B.h = \pi r^2 h$.



Chú ý: Vẽ hình biểu diễn hình trụ hay khối trụ ta thường vẽ như hình bên.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích thiết diện, chiều cao, bán kính đáy, diện tích đáy của hình trụ

Bài tập 1: Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. $6\pi\sqrt{3}$ B. $6\pi\sqrt{39}$ C. $3\pi\sqrt{39}$ D. $12\pi\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$ và

$OO' \parallel (ABCD)$, gọi I là trung điểm của AB

Ta có

$OI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow d(OO'; (ABCD)) = d(O; (ABCD)) = OI = 1$

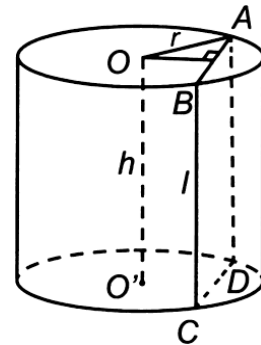
$S_{ABCD} = AB \cdot BC \Leftrightarrow AB \cdot 3\sqrt{3} = 18$

$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AI = \sqrt{3}$

$\Rightarrow r = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = 2$

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi rl = 12\pi\sqrt{3}$.



Bài tập 2: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng

- A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{14}}{9}$

Hướng dẫn giải

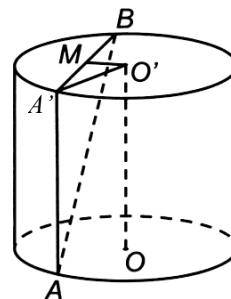
Chọn C.

Gọi r là bán kính đáy.

Do thiết diện qua trục là hình vuông nên độ dài đường sinh bằng $2r$.

Dựng đường sinh AA' .

Gọi M là trung điểm của $A'B$



Lưu ý:

+ $d(OO', AB) = O'M$.

+ Góc giữa AB và mặt đáy là góc $\widehat{ABA'}$.

+ Góc giữa AB và OO' là góc $\widehat{A'AB}$

$$\Rightarrow O'M \perp (AA'B)$$

$$\Rightarrow d(OO', AB) = O'M$$

$$\Rightarrow O'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có } A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{4a^2 - 4r^2}$$

$$\text{Mặt khác } A'M = \sqrt{O'A'^2 - O'M'^2} = \sqrt{r^2 - \frac{3a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4a^2 - 4r^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

Bài tập 3: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$

C. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

D. $\frac{2R}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của OO' .

Khi đó, mặt phẳng $(\alpha) = (IAB)$

Hạ $OH \perp AB, OK \perp IH$. Dễ thấy H là trung điểm của AB và

$OK \perp (IAB)$.

Suy ra

$$(OO', (\alpha)) = (IO, (IAB)) = (OI, KI) = \widehat{KIO} = 30^\circ \text{ (vì)}$$

ΔKIO vuông tại O)

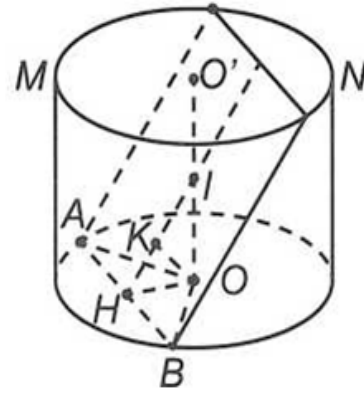
Khi đó $KO = \frac{1}{2}IO = \frac{R}{2}$. Vì ΔHIO vuông tại O nên

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OI^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{R^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{3}{R^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{R^2}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



Bài tập 4: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6$, diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60. Bán kính đáy của hình trụ là

A. 5.

B. $3\sqrt{2}$

C. 4

D. $5\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

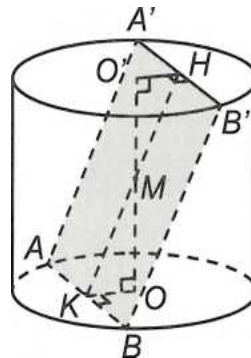
Diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60 (cm^2)

$$\text{nên } AB.BB' = 60 \Leftrightarrow 6.BB' = 60 \Leftrightarrow BB' = 10$$

Ta có $MK = 5$

Chiều cao hình trụ bằng $6\sqrt{2}$ (cm) nên

$$MO = 3\sqrt{2}.$$



Lưu ý: Bài tập 5 và Bài tập 6 tuy đề cho khác nhau nhưng thiết diện giống nhau. Ở Bài tập 7 dưới đây thêm một cách hỏi khác nữa dù thiết diện vẫn là vậy.

$$OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7};$$

$$AB = 6 \Rightarrow KB = 3.$$

$$BO = \sqrt{OK^2 + KB^2} = \sqrt{7 + 9} = 4$$

Bài tập 5: Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Một hình vuông $ABCD$ có AB, CD là hai dây cung của 2 đường tròn đáy và mặt phẳng $ABCD$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\frac{5a^2}{4}$

B. $5a^2$

C. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{5a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $AB = AD = 2x \Rightarrow S_{ABCD} = 4x^2$.

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt đáy của hình trụ.

Xét tam giác $AA'D$ vuông tại A' ta có

$$A'D = \sqrt{AD^2 - AA'^2} = \sqrt{4x^2 - a^2}$$

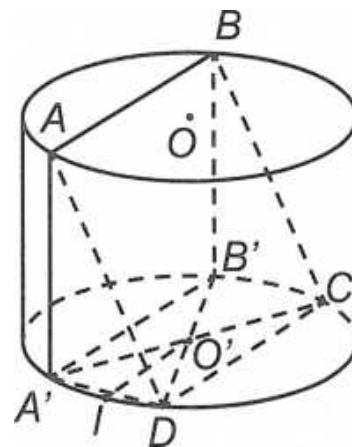
Mặt khác, gọi I là trung điểm của $A'D$ thì ta có:

$$A'D = 2A'I = 2\sqrt{O'A'^2 - O'I^2} = 2\sqrt{O'A'^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}2x\right)^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{4x^2 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - a^2 = 4(a^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = \frac{5a^2}{2}. \text{ Vậy } S_{ABCD} = \frac{5a^2}{2} \text{ (đvdt)}$$



Bài tập 1: Cắt một khối trụ bởi mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DCA} = 30^\circ$. Tính theo a thể tích khối trụ.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$

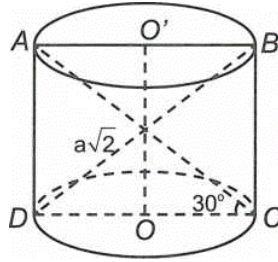
B. $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$

D. $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$.

Mặt khác xét tam giác ADC vuông tại D , ta có

$$AD = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ và}$$

$$CD = AC \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}a \Rightarrow r = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

$$\text{Nên } V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3.$$

Bài tập 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 3AB$. Gọi V_1 là thể tích của khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh AB , V_2 là thể tích khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh AD . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là.

A. 9

B. 3

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật $ABCD$ quay xung quanh cạnh AB có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_1 = AD = 3AB$; $h_1 = AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = 9\pi AB^3$.

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật $ABCD$ quay xung quanh cạnh AD có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_2 = AB$; $h_2 = AD = 3AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 3\pi AB^3$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9\pi AB^3}{3\pi AB^3} = 3$.

Bài tập 3: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2}a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC . Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành là

A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$

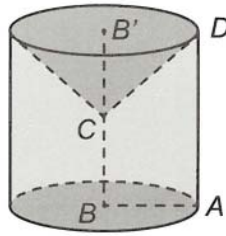
B. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$

C. $V = \pi a^3$

D. $V = \frac{7\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Thể tích $V = V_1 - V_2$. Trong đó V_1 là thể tích khối trụ có bán kính đáy là $BA = a$ và chiều cao $AD = 2a$; V_2 là thể tích khối nón có bán kính đáy là $B'D = a$ và chiều cao $CB' = a$

Khi đó $V = V_1 - V_2 = \pi a^2 \cdot 2a - \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a = \frac{5\pi a^3}{3}$.

Bài tập 4: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a . cắt hình trụ bởi một mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Thể tích khối trụ bằng

A. $3\pi a^3$

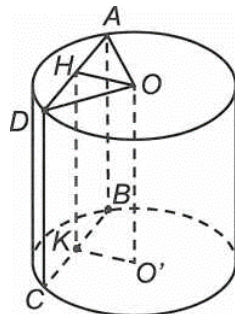
B. $\pi a^3 \sqrt{3}$

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$

D. πa^3

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Giả sử hình vuông $ABCD$ là thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) như hình vẽ.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm AD, BC .

Ta có $OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow d(O; (P)) = OH \Rightarrow OH = \frac{a}{2}$.

Do đó $AD = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $OO' = AB = AD = a\sqrt{3}$.

Vậy nên $V = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \pi a^3 \sqrt{3}$.

Bài tập 5: Cắt một khối trụ cao 18cm bởi một mặt phẳng, ta được khối hình dưới đây. Biết rằng thiết diện là một elip, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8cm và 14cm . Tỉ số thể tích của hai khối được chia ra (khối nhỏ chia khối lớn) là

A. $\frac{2}{11}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{11}$

D. $\frac{7}{11}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

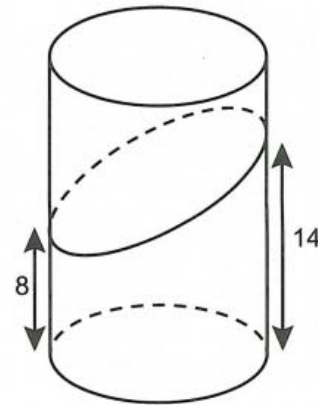
Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích khối nhỏ và khối lớn.

Ta có thể tích khối trụ là $V = \frac{\pi R^2 (8+14)}{2} = 11\pi R^2$

(với R là bán kính khối trụ).

Thể tích $V_2 = \frac{\pi R^2 (8+14)}{2} = 11\pi R^2$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V - V_2}{V_2} = \frac{18\pi R^2 - 11\pi R^2}{11\pi R^2} = \frac{7}{11}$.



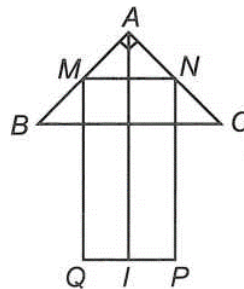
Bài tập 6: Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a\sqrt{2}$ và hình chữ nhật $MNPQ$ với $MQ = 3MN$ được xếp chồng lên nhau sao cho M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục AI , với I là trung điểm PQ .

A. $V = \frac{11\pi a^3}{6}$.

B. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$.

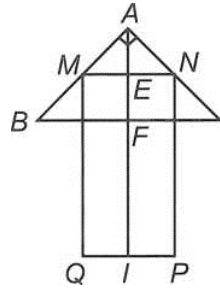
C. $V = \frac{11\pi a^3}{8}$.

D. $V = \frac{17\pi a^3}{24}$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow MN = a, MQ = 2a$.

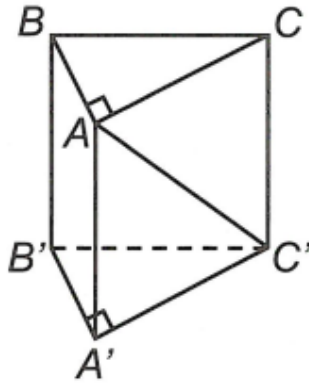
Gọi E, F lần lượt là trung điểm MN và BC .

$$AF = a, EF = \frac{a}{2} \Rightarrow IF = \frac{3}{2}a$$

Vậy thể tích cần tìm là tổng thể tích của khối nón có chiều cao là AF bán kính đáy FB và thể tích khối trụ có chiều cao IF bán kính IQ .

$$V = \frac{1}{3}\pi AF.FB^2 + \pi IF.IQ^2 = \frac{1}{3}\pi.a.a^2 + \pi.\frac{3}{2}a.\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17}{24}\pi a^3.$$

Bài tập 7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A. πa^3

B. $2\pi a^3$

C. $4\pi a^3$

D. $3\pi a^3$

Hướng dẫn giải

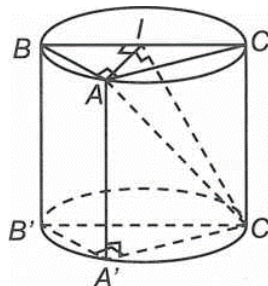
Chọn C.

Gọi bán kính của hình trụ là R .

Ta có $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$

Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A

nên $AI \perp BC$ do đó $AI \perp (BCC'B')$ hay góc giữa



AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác AIC' ta có $IC' = \frac{AI}{\tan \widehat{IC'A}} = R\sqrt{3}$

Xét tam giác CIC' ta có $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Rightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \pi R^2 h = 4\pi a^3$.

Bài tập 8: Trong tất cả các khối trụ có cùng thể tích 330, xác định bán kính đáy của khối trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

A. $\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$

B. $\sqrt{\frac{165}{\pi}}$

C. $\sqrt[3]{\frac{330}{\pi}}$

D. $\sqrt{\frac{330}{\pi}}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$V = 330 \Leftrightarrow h\pi R^2 = 330 \Leftrightarrow h = \frac{330}{\pi R^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của khối trụ là

$$S = h.2\pi.R + 2\pi R^2$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{330}{\pi R^2}.2\pi R + 2\pi R^2 \Leftrightarrow S = \frac{660}{R} + 2\pi R^2$$

Ta xem S là 1 hàm số ẩn R . Xét $S' = -\frac{660}{R^2} + 4\pi R$.

$$S' = 0 \Leftrightarrow -\frac{660}{R^2} + 4\pi R = 0 \Leftrightarrow \frac{-660 + 4\pi R^3}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$$

Lập bảng biến thiên ta có

R	0	$\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$	$+\infty$
S'		- 0 +	
S			

CT

Bài toán hỏi về bán kính đáy nên ta xem bán kính đáy là ẩn, tính diện tích xung quanh theo bán kính đáy.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $R = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$

Bài tập 9: Thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp hình cầu có bán kính R bằng

A. $\frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$

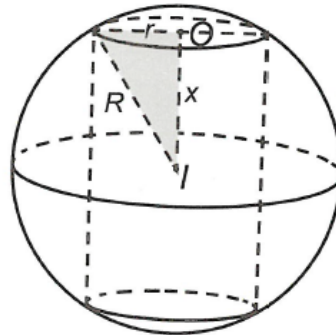
B. $\frac{8\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{8\pi R^3}{27}$

D. $\frac{8\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi X là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt đáy của hình trụ ($0 < X < R$). Bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2x = 2\pi(R^2 - x^2)x = f(x)$

$$f'(x) = 2\pi R^2 - 6\pi x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3} \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	R
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f_{\max}$	

Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính R là

$$V_{\max} = f\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}.$$

Dạng 3: Bài toán thực tế về khối trụ.

Ví dụ: Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,5m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể

tích bằng tổng thể tích của hai bể trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 1,6 m.

B. 2,5 m.

C. 1,8 m

D. 2,1 m.

Hướng dẫn giải

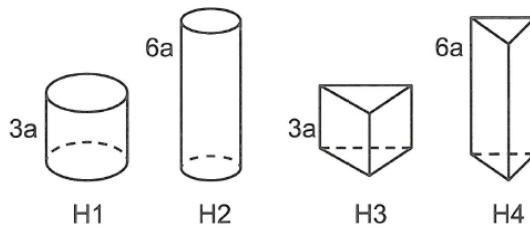
Chọn C.

Gọi r là bán kính bể dự định làm, h là chiều cao các bể.

Ta có: $\pi r^2 h = \pi (1^2 + 1,5^2) h \Rightarrow r = \sqrt{1 + 1,5^2} \approx 1,8 (m)$.

Bài tập 1. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước $3a$, $6a$. Người ta muốn tạo tấm bìa đó thành 4 hình không đáy như hình vẽ dưới đây, trong đó có hai hình trụ lần lượt có chiều cao $3a$, $6a$ và hai hình lăng trụ tam giác đều có chiều cao lần lượt $3a$, $6a$.

Lưu ý: Không phải cắt nhỏ tấm bìa để tạo ra 4 hình bên vì nếu vậy không thỏa đề bài mà lấy tấm bìa lần lượt tạo thành 4 hình trong đề bài.



Trong bốn hình H1, H2, H3, H4 lần lượt theo thứ tự có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất là

A. H1, H4.

B. H1, H3.

C. H2, H3.

D. H2, H4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của hai hình trụ ở hình H1, H2.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai hình trụ ở hình H1, H2.

C_1, C_2 lần lượt là chu vi đáy của hai hình trụ ở hình H1, H2.

Ta có: $C_1 = 2\pi R_1 = 6a \Rightarrow R_1 = \frac{3a}{\pi}; C_2 = 2\pi R_2 = 3a \Rightarrow R_2 = \frac{3a}{2\pi}$

$$V_1 = 3a\pi \left(\frac{3a}{\pi} \right)^2 = \frac{27a^3}{\pi}; V_2 = 6a\pi \left(\frac{3a}{2\pi} \right)^2 = \frac{27a^3}{2\pi}$$

Do hai hình H3, H4 là hai hình lăng trụ tam giác đều nên ta có độ dài các cạnh đáy của hai hình H3, H4 lần lượt là $2a; a$.

Thể tích hình H3, H4 lần lượt là:

$$V_3 = 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}a^3; V_4 = 6a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$$

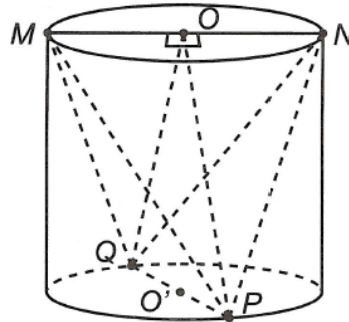
Từ đó ta có hai hình có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt theo thứ tự là H1, H4.

Bài tập 2. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 30 dm^3 . Thể tích lượng đá cắt bỏ là bao nhiêu? (Làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

- A. $101,3 \text{ dm}^3$. B. $111,4 \text{ dm}^3$.
C. $121,3 \text{ dm}^3$. D. $141,3 \text{ dm}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi O, O' lần lượt là tâm đáy trên và đáy dưới của hình trụ.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MN \perp (OPQ) &\Rightarrow V_{MNPQ} = 2V_{N.OPQ} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot NO \cdot S_{\triangle OPQ} \\ &= 2 \cdot S_{\triangle OPQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot 6 = 30 \Rightarrow OO' = 5. \end{aligned}$$

Ta có thể tích khối trụ là: $V_{KT} = OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 5 \cdot 3^2 \cdot \pi = 45\pi$.

Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ là: $45\pi - 30 \approx 111,4 (\text{dm}^3)$.

Bài tập 3. Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $(H_1), (H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn

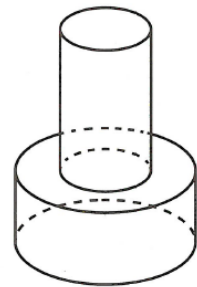
$r_2 = \frac{1}{2}r_1; h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30 cm^3 , thể tích khối trụ (H_1) bằng

- A. 24 cm^3 . B. 15 cm^3 . C. 20 cm^3 . D. 10 cm^3 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là V , thể tích của khối dưới và khối trên lần lượt là V_1 và V_2 .



Ta có: $V = V_1 + V_2$

$$\text{Mà } r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1 \text{ nên } V_2 = h_2 \cdot \pi r_2^2 = 2h_1 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot r_1^2 = \frac{1}{2}h_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{2}V_1$$

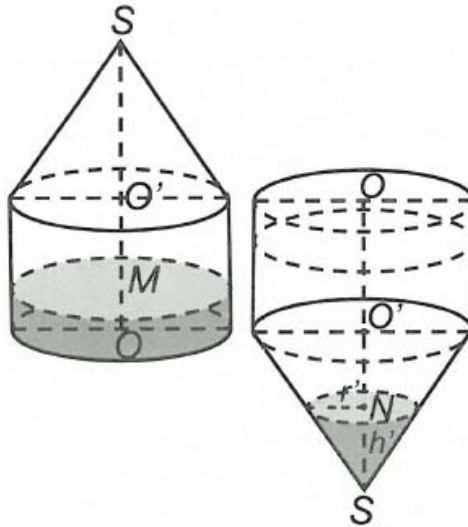
$$\Rightarrow 30 = V_1 + \frac{1}{2}V_1 \Rightarrow V_1 = 20.$$

Bài tập 4. Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình sau. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng h . Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo h là

- A. $\frac{h}{8}$ B. $\frac{3h}{8}$ C. $\frac{h}{2}$ D. $\frac{h}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



$$\text{Thể tích chất lỏng } V = \pi r^2 \cdot \frac{1}{24}h = \frac{1}{24}\pi r^2 \cdot h$$

$$\text{Khi lật ngược bình, thể tích phần hình nón chứa chất lỏng là } V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$$

$$\text{Mà } \frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \Rightarrow r' = \frac{h'}{h} \cdot r. \text{ Do đó } V' = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h'}{h} \cdot r\right)^2 \cdot h' = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h'^3}{h^2}$$

$$\text{Theo bài ra } V' = V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h'^3}{h^2} = \frac{1}{24}\pi r^2 h \Leftrightarrow h'^3 = \frac{1}{8}h^3 \Leftrightarrow h' = \frac{h}{2}.$$

Bài tập 5. Công ty của ông Bình dự định đóng một thùng phi hình trụ (có đáy dưới và nắp dẹt phía trên) bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho 1 m² thép không gỉ là 350000 đồng.

Với chi phí bỏ ra để làm cái thùng phi không quá 6594000 đồng, hỏi công ty ông Bình có thể có được một thùng phi đựng được tối đa bao nhiêu mét khối nước? (Lấy $\pi \approx 3,14$)

- A. 12,56 B. 6,28
C. 3,14 D. 9,52.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi R, h lần lượt là số đo bán kính và chiều cao của thùng phi hình trụ.

Với giả thiết như trên thì diện tích thép không gỉ được dùng tối đa là

$$A = \frac{6594000}{350000} = \frac{471}{25} (\text{m}^2)$$

$$\text{Ta có } S_p = 2\pi R(R + h) = A \Rightarrow h = \frac{A}{2\pi R} - R$$

Thể tích của thùng phi là $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \left(\frac{A}{2\pi R} - R \right) = \frac{A}{2} R - \pi R^3$ (coi V là hàm số biến R).

$$V' = \frac{A}{2} - 3\pi R^2; V' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}, (R > 0)$$

Bảng biến thiên

R	0	$\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$	$+\infty$
V'	+	0	-
V		$\frac{A}{3} \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có, giá trị lớn nhất của thể tích là

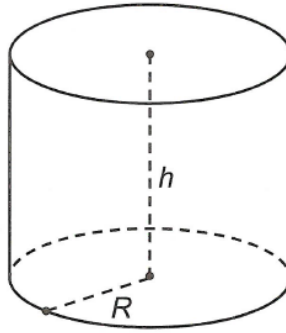
$$\max V = \frac{A}{3} \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \approx 6,28 \text{ m}^3.$$

Bài tập 6. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r . Tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu Sản xuất thùng là nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A. $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ B. $\frac{h}{r} = 2$ C. $\frac{h}{r} = 6$ D. $\frac{h}{r} = 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



$$\text{Ta có } V = \pi h \cdot r^2 \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3}$$

Giá thành vật liệu để làm chiếc thùng là

$$T = (2\pi r h + 6\pi r^2) \cdot A = \left(\frac{2V}{r} + 6\pi \cdot r^2 \right) \cdot A = \left(\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 6\pi r^2 \right) \cdot A, \text{ trong đó } A \text{ là giá của một đơn}$$

vị diện tích vật liệu làm mặt xung quanh của thùng. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số

$$\text{dương } \frac{V}{r}, \frac{V}{r}, 6\pi r^2 \text{ được } T \geq 3\sqrt[3]{6\pi V^2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{V}{r} = 6\pi r^2 \Leftrightarrow \frac{V}{\pi r^3} = 6$$

Vậy chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất khi $\frac{h}{r} = 6$.
