

51

BÀI TOÁN GTLN - GTNN TRONG ĐỀ THI BGD 2016 - 2021

Luyenthitracnghiem.vn

Câu 1: (Câu 32 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Đợt 2 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

Ⓐ. -2.

Ⓑ. -11.

Ⓒ. -26.

Ⓓ. -27.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$ xác định và liên tục trên đoạn $[0; 9]$.

Ta có

$$f'(x) = 4x^3 - 20x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 9] \\ x = \sqrt{5} \in [0; 9] \\ x = -\sqrt{5} \notin [0; 9] \end{cases}$$

$$f(0) = -2; \quad f(\sqrt{5}) = -27; \quad f(9) = 5749.$$

So sánh 3 giá trị trên và kết luận $\min_{x \in [0; 9]} f(x) = -27$.

Câu 2: (Câu 21 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

Ⓐ. 18.

Ⓑ. -18.

Ⓒ. -2.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$\text{Có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-3; 3] \\ x = 1 \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } f(-3) = -18; f(3) = 18; f(-1) = 2; f(1) = -2.$$

$$\text{Vậy } \min_{[-3; 3]} f(x) = f(-3) = -18.$$

Nguyễn Hoàng Việt

Câu 3: (Câu 19 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

Ⓐ. 18.

Ⓑ. 2.

Ⓒ. -18.

Ⓓ. -2.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = x^3 - 3x$ xác định trên đoạn $[-3; 3]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3] \end{cases}$$

Ta có $f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

Vậy $\max_{[-3; 3]} y = f(3) = 18$.

Câu 4: (Câu 21 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

Ⓐ. -4.

Ⓑ. -16.

Ⓒ. 0.

Ⓓ. 4

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}$$

Khi đó $y(-4) = -16$; $y(-2) = 4$; $y(-1) = 2$.

Nên $\min_{[-4; -1]} y = -16$.

Câu 5: (Câu 18 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

Ⓐ. -259.

Ⓑ. 68.

Ⓒ. 0.

Ⓓ. -4

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 4]$.

Ta có $y' = 3x^2 + 4x - 7$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 4] \\ x = -\frac{7}{3} \notin [0; 4] \end{cases}$$

$$y(0) = 0; y(1) = -4; y(4) = 68.$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;4]} y = -4.$$

Câu 6: (Câu 20 - MĐ 104 - BGD&ĐT - NĂM 2016 - 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ⓐ. $m = \frac{17}{4}$.

Ⓑ. $m = 10$.

Ⓒ. $m = 5$.

Ⓓ. $m = 3$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$\text{Ta có } y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$\text{Khi đó } f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = 5$$

$$\text{Vậy } m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3.$$

Câu 7: (Câu 37 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2020 - 2021) Trên đoạn $[-1; 2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

Ⓐ. $x = 2$.

Ⓑ. $x = 0$.

Ⓒ. $x = -1$.

Ⓓ. $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$y = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$$

$$y(-1) = 3; y(0) = 1; y(2) = 21.$$

Vậy GTNN trên đoạn $[-1; 2]$ của hàm số bằng 1 tại $x = 0$.

Câu 8: (Câu 36 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2020 - 2021) Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

Ⓐ. $x = 1$.

Ⓑ. $x = 0$.

Ⓒ. $x = 3$.

Ⓓ. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin [0; 3] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } y(0) = 4, y(3) = 22, y(1) = 2$$

Vậy hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ tại điểm $x = 1$.

Câu 9: (Câu 35 - MB 102 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2020 - 2021) Trên đoạn $[-2; 1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

Ⓐ. $x = -2$.

Ⓑ. $x = 0$.

Ⓒ. $x = -1$.

Ⓓ. $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-2; 1] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-2) = -21, y(0) = -1, y(1) = -3.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2; 1]} y = -1 \text{ tại } x = 0.$$

Câu 10: (Câu 31 - MB 101 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2020 - 2021) Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

Ⓐ. $x = 0$.

Ⓑ. $x = 3$.

Ⓒ. $x = 1$.

Ⓓ. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y = f(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin [0; 3] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 0; f(1) = 2; f(3) = -18.$$

Vậy hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$.

Câu 11: (Câu 31 - Đề Tham Khảo - BGD&ĐT - Năm 2020 - 2021) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$. Tổng $M + m$ bằng

Ⓐ. 11.

Ⓑ. 14.

Ⓒ. 5.

Ⓓ. 13.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}$$

$$f(0) = 3; f(1) = 2; f(2) = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 11 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 13.$$

Câu 12: (Câu 31 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Đợt 2 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 1$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

- Ⓐ. -28. Ⓑ. -1. Ⓒ. -36. Ⓓ. -37.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 4x^3 - 24x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \notin [0; 9] \end{cases}$$

$$f(0) = -1; f(\sqrt{6}) = -37; f(9) = 5588$$

$$\text{Vậy } \min_{[0; 9]} f(x) = -37$$

Câu 13: (Câu 32 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Đợt 2 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 4$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

- Ⓐ. -39. Ⓑ. -40. Ⓒ. -36. Ⓓ. -4.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Ta có } f'(x) = 4x^3 - 24x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 24x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 6) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{6} \notin (0; 9). \\ x = \sqrt{6} \in (0; 9) \end{cases}$$

+) Ta có:

$$f(0) = -4; f(\sqrt{6}) = -40; f(9) = 5585.$$

$$\text{Vậy } \min_{[0; 9]} f(x) = f(\sqrt{6}) = -40.$$

Câu 14: (Câu 31 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Đợt 2 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

- Ⓐ. -28. Ⓑ. -4. Ⓒ. -13. Ⓓ. -29.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt{5}$	9	$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$		-4		5747	
			-29		

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[0;9]} f(x) = -29$ khi $x = \sqrt{5}$.

Câu 15: (Câu 29 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

- Ⓐ. -72. Ⓑ. $-22\sqrt{11}$. Ⓒ. -58. Ⓓ. $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 33$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$

Xét trên $[2; 19]$ ta có $x = \sqrt{11} \in [2; 19]$

Ta có $f(2) = -58$; $f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}$; $f(19) = 6232$.

Vậy $\min_{[2;19]} f(x) = f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}$

Câu 16: (Câu 35 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

- Ⓐ. $20\sqrt{10}$. Ⓑ. -63. Ⓒ. $-20\sqrt{10}$. Ⓓ. -52.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 30$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$.

Hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ liên tục trên đoạn $[2; 19]$ và

$$f(2) = -52; f(\sqrt{10}) = -20\sqrt{10}; f(19) = 6289.$$

So sánh các giá trị trên, ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng $-20\sqrt{10}$

Câu 17: (Câu 26 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

Ⓐ. -36 .

Ⓑ. $-14\sqrt{7}$.

Ⓒ. $14\sqrt{7}$.

Ⓓ. -34 .

Lời giải**Chọn B**

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 21$, $x \in (2; 19)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} & (T/m) \\ x = -\sqrt{7} & (L) \end{cases}.$$

Ta có $f(2) = -34$; $f(\sqrt{7}) = -14\sqrt{7}$; $f(19) = 6460$.

Do vậy $\min_{x \in [2; 19]} f(x) = -14\sqrt{7}$, đạt được khi $x = \sqrt{7}$.

Câu 18: (Câu 36 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

Ⓐ. $32\sqrt{2}$.

Ⓑ. -40 .

Ⓒ. $-32\sqrt{2}$.

Ⓓ. -45 .

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $f(x) = x^3 - 24x$

$$f'(x) = 3x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in [2; 19] \\ x = -2\sqrt{2} \notin [2; 19] \end{cases}.$$

$$f(2) = 2^3 - 24 \cdot 2 = -40; f(2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^3 - 24 \cdot 2\sqrt{2} = -32\sqrt{2}; f(19) = 19^3 - 24 \cdot 19 = 6403.$$

$$\text{Mà } -32\sqrt{2} < -40 < 6403.$$

Kết luận: $\min_{x \in [2; 19]} f(x) = -32\sqrt{2}$ tại $x = 2\sqrt{2}$.

Câu 19: (Câu 28 - ĐTK - BGD&ĐT - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

- Ⓐ. 2. Ⓑ. -23. Ⓒ. -22. Ⓓ. -7.

Lời giải

Chọn C

$$y = x^4 - 10x^2 + 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}.$$

Các giá trị $x = -\sqrt{5}$ và $x = \sqrt{5}$ không thuộc đoạn $[-1; 2]$ nên ta không tính.

$$\text{Có } f(-1) = -7; f(0) = 2; f(2) = -22.$$

Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ là -22.

Câu 20: (Câu 19 - ĐTK - BGD&ĐT - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- Ⓐ. 1 Ⓑ. 37. Ⓒ. 33. Ⓓ. 12.

Lời giải

Chọn C

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1; 2]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = -4x^3 + 24x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \notin [-1; 2] \\ x = -\sqrt{6} \notin [-1; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 1; f(-1) = 12; f(2) = 33$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 2]} f(x) = 33.$$

Câu 21: (Câu 17 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên $[-3; 3]$ bằng

- Ⓐ. 20. Ⓑ. 4. Ⓒ. 0. Ⓓ. -16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Ta có: $f(-3) = -16; f(-1) = 4; f(1) = 0; f(3) = 20$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -16 .

Câu 22: (Câu 20 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

Ⓐ. -16 .

Ⓑ. **20**.

Ⓒ. 0 .

Ⓓ. 4 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

$$\text{Có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Mặt khác: $f(-3) = -16, f(-1) = 4, f(1) = 0, f(3) = 20$.

Vậy $\max_{[-3;3]} f(x) = 20$.

Câu 23: (Câu 22 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

Ⓐ. **25**

Ⓑ. $\frac{51}{4}$

Ⓒ. 13

Ⓓ. 85

Lời giải

Chọn A

$$y = f(x) = x^4 - x^2 + 13$$

$$y' = 4x^3 - 2x$$

$$4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$f(-1) = 13; f(2) = 25; f(0) = 13; f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}$$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 25 .

Câu 24: (Câu 23 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

Ⓐ. 201

Ⓑ. 2

Ⓒ. 9

Ⓓ. 54

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-2) = 9; y(3) = 54; y(0) = 9; y(\pm\sqrt{2}) = 5.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;3]} y = 54.$$

Câu 25: (Câu 18 - ĐTK - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

Ⓐ. 50

Ⓑ. 5

Ⓒ. 1

Ⓓ. 122

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \in [-2; 3];$$

$$f(0) = 5; f(\pm\sqrt{2}) = 1; f(-2) = 5; f(3) = 50$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;3]} y = 50$$

Câu 26: (Câu 15 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

Ⓐ. $m = \frac{51}{4}$.Ⓑ. $m = \frac{49}{4}$.Ⓒ. $m = 13$.Ⓓ. $m = \frac{51}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 2x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}; y(0) = 13, y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}, y(-2) = 25, y(3) = 85.$$

Vậy: $m = \frac{51}{4}$.

Câu 27: (Câu 24 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- Ⓐ. $M = 9$ Ⓑ. $M = 8\sqrt{3}$ Ⓒ. $M = 1$ Ⓓ. $M = 6$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$$

Ta có: $y(0) = 3$; $y(1) = 2$; $y(\sqrt{3}) = 6$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ là $M = y(\sqrt{3}) = 6$

Câu 28: (Câu 23 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$

- Ⓐ. $m = 11$ Ⓑ. $m = 0$ Ⓒ. $m = -2$ Ⓓ. $m = 3$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 14x + 11 \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \notin (0; 2) \\ x = 1 \in (0; 2) \end{cases}$$

$f(0) = -2$; $f(1) = 3$; $f(2) = 0 \Rightarrow \min_{[0; 2]} y = -2$

Câu 29: (Câu 6 - ĐMH - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- Ⓐ. $\min_{[2; 4]} y = 6$ Ⓑ. $\min_{[2; 4]} y = -2$ Ⓒ. $\min_{[2; 4]} y = -3$ Ⓓ. $\min_{[2; 4]} y = \frac{19}{3}$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 4]$

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -1$ (loại)

Suy ra $y(2) = 7; y(3) = 6; y(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2;4]} y = 6$ tại $x = 3$.

Câu 30: (Câu 19 - ĐTK - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ⓐ. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Ⓑ. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$

Ⓒ. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$

Ⓓ. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

$$y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Cách 2:

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$

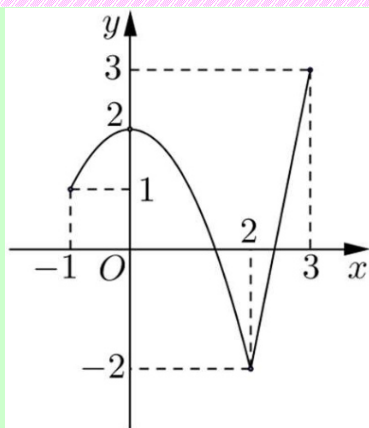
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x		0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$	
y'			-	0	+
y					

<

$$\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$$

Câu 31: (Câu 16 - ĐTK - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $(-1; 3)$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



Ⓐ. 0.

Ⓑ. 1.

Ⓒ. 4.

Ⓓ. 5.

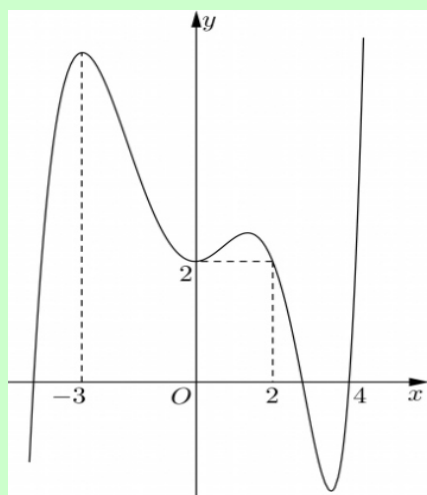
Lời giải

Chọn D

Căn cứ vào đồ thị ta có $M = \max_{[-1;3]} y = 3$, $m = \min_{[-1;3]} y = -2$

Vậy $M - m = 5$.

Câu 32: (Câu 39 - Đề Tham Khảo - BGD&ĐT - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên.

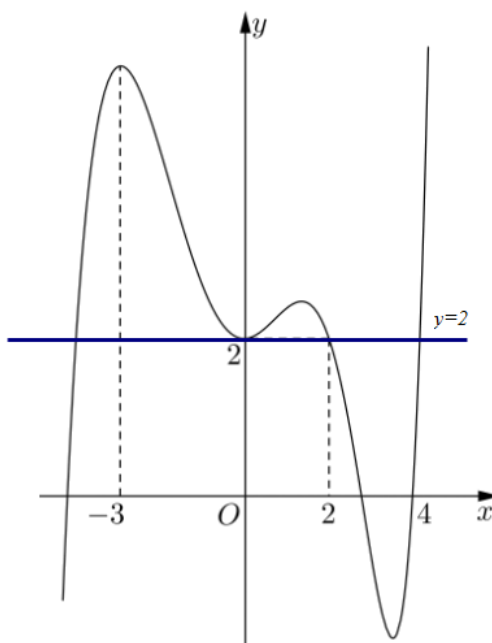


Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng

Ⓐ. $f(0)$.Ⓑ. $f(-3) + 6$.Ⓒ. $f(2) - 4$.Ⓓ. $f(4) - 8$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $g'(x) = 2f'(2x) - 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x_1 < -3 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \\ 2x = x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -\frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x_2 > 2 \end{cases}$$

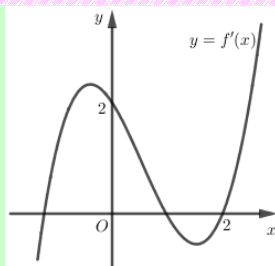
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{3}{2}$	0		1	2	x_2	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+
$g(x)$										

Từ bảng biến thiên ta có: trên $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và

$$\max_{\left[-\frac{3}{2}; 1\right]} y = f(2) - 4.$$

Câu 33: (Câu 37 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



- Ⓐ. $m \leq f(2) - 4$. Ⓑ. $m \leq f(0)$. Ⓒ. $m < f(0)$. Ⓓ. $m < f(2) - 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) > 2x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$

$\Rightarrow m < f(x) - 2x$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$

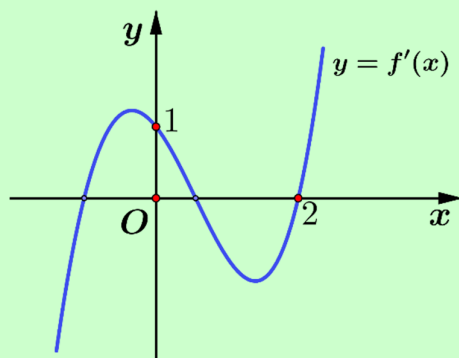
Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ với $x \in (0; 2)$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2 \leq 0$ với mọi $x \in (0; 2)$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Để $m < f(x) - 2x$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ thì $m \leq g(2) = f(2) - 4$

Câu 34: (Câu 38 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- Ⓐ. $m \leq f(2) - 2$. Ⓑ. $m < f(2) - 2$. Ⓒ. $m \leq f(0)$. Ⓓ. $m < f(0)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $f(x) > x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$

$\Leftrightarrow m < f(x) - x$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ (1)

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên khoảng $(0; 2)$

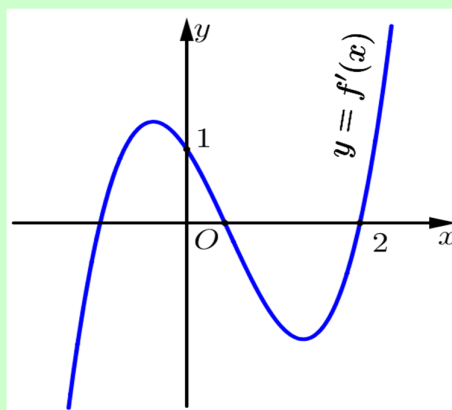
Có $g'(x) = f'(x) - 1 < 0, \forall x \in (0; 2)$

Bảng biến thiên

x	0	2
$g'(x)$		—
$g(x)$	$g(0)$	$g(2)$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 2.$$

Câu 35: (Câu 36 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- Ⓐ. $m \geq f(2) - 2$. Ⓑ. $m \geq f(0)$. Ⓒ. $m > f(2) - 2$. Ⓓ. $m > f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) < x + m, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m > f(x) - x, \forall x \in (0; 2) (*)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có với $x \in (0; 2)$ thì $f'(x) < 1$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0, \forall x \in (0; 2).$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow m \geq g(0) = f(0).$$

Câu 36: (Câu 39 - ĐTK - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- Ⓐ. $m \geq f(1) - e$. Ⓑ. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$. Ⓒ. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$. Ⓓ. $m > f(1) - e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) < e^x + m$, $\forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow f(x) - e^x < m$, $\forall x \in (-1; 1)$ (*).

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - e^x$.

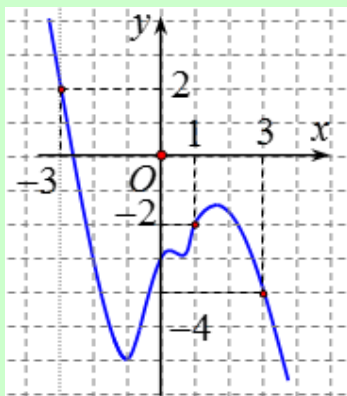
Ta thấy với $\forall x \in (-1; 1)$ thì $f'(x) < 0$, $-e^x < 0$ nên $g'(x) = f'(x) - e^x < 0$, $\forall x \in (-1; 1)$.

Bảng biến thiên

x	-1	1
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có $m \geq g(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Câu 37: (Câu 48 - MĐ 104 - BGD&ĐT - NĂM 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ. $g(1) < g(3) < g(-3)$. Ⓑ. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
 Ⓒ. $g(3) = g(-3) < g(1)$. Ⓓ. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$g'(x) = 2f'(x) + 2(x+1) \Rightarrow g'(-3) = 2f'(-3) - 4, g'(1) = 2f'(1) + 4, g'(3) = 2f'(3) + 8$$

Lại có nhìn đồ thị ta thấy $f'(-3) = 2, f'(1) = -2, f'(3) = -4 \Rightarrow g'(-3) = g'(1) = g'(3) = 0$

Hay phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x - 1$ có 3 nghiệm

x	-3	1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$g(-3)$	$g(1)$	$g(3)$

Nhìn đồ thị ta có bảng biến thiên, suy ra $g(3) > g(1), g(-3) > g(1)$.

Mặt khác diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = -x - 1$ và đồ thị hàm số

$$y = f'(x) \text{ trên 2 miền } [-3; 1] \text{ và } [1; 3], \text{ ta có } \int_{-3}^1 (-x-1-f'(x)) dx > \int_1^3 (f'(x)+x+1) dx$$

$$\Leftrightarrow -\int_{-3}^1 g'(x) dx > \int_1^3 g'(x) dx \Leftrightarrow -g(1) + g(-3) > g(3) - g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

Vậy $g(1) < g(3) < g(-3)$.

Câu 38: (Câu 35 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ. $m \leq 0$

Ⓑ. $m > 4$

Ⓒ. $0 < m \leq 2$

Ⓓ. $2 < m \leq 4$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}.$$

☑ Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Khi đó: } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5.$$

☑ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Khi đó: } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$$

Câu 39: (Câu 33 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ thỏa mãn

$\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ. $m < -1$

Ⓑ. $3 < m \leq 4$

Ⓒ. $m > 4$

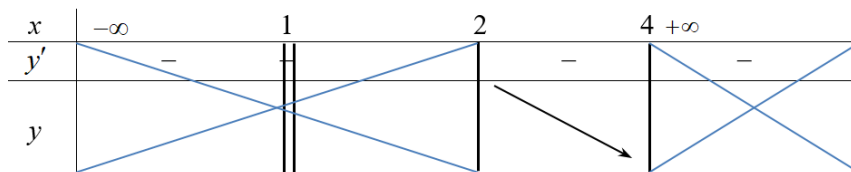
Ⓓ. $1 \leq m < 3$

Lời giải

Chọn C

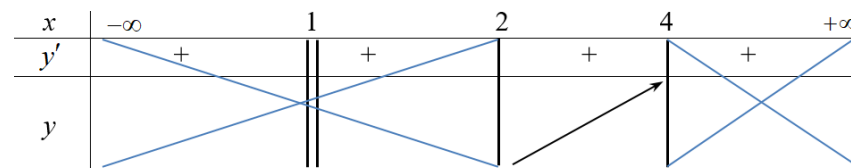
$$y = \frac{x+m}{x-1}, D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$$

TH1: $y' < 0 \Leftrightarrow m > -1$



$$\min_{[2;4]} y = 3 \Leftrightarrow f(4) = 3 \Leftrightarrow \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \quad (n)$$

TH2: $y' > 0 \Leftrightarrow m < -1$



$$\min_{[2;4]} y = 3 \Leftrightarrow f(2) = 3 \Leftrightarrow \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \quad (l)$$

Vậy $m = 5$

Câu 40: (Câu 36 - ĐTK - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

Ⓐ. 1

Ⓑ. 2

Ⓒ. 0

Ⓓ. 6

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2+m$	$2+m$

$$TH 1: 2+m < 0 \Leftrightarrow m < -2. \text{ Khi đó } \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2+m) = 2-m$$

$$2-m = 3 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$TH 2: \begin{cases} 2+m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0. \text{ Khi đó: } |m-2| = 2-m > 2 > 2+m$$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2+m) = 2-m$$

$$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1.$$

$$TH 3: \begin{cases} m > 0 \\ -2+m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2. \text{ Khi đó: } |m-2| = 2-m < 2 < 2+m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2+m$$

$$2+m=3 \Leftrightarrow m=1.$$

$$TH 4: -2+m > 0 \Leftrightarrow m > 2. \text{ Khi đó } \max_{[0;2]} |f(x)| = 2+m$$

$$2+m=3 \Leftrightarrow m=1.$$

Câu 41: (Câu 48 - ĐTK - BGD&ĐT - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của S sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

(A). 6.

(B). 2.

(C). 1.

(D). 4.

Lời giải

Chọn B

a/ Xét $m=1$, ta có $f(x) = 1 \forall x \neq -1$

Dễ thấy $\max_{[0;1]} |f(x)| = 1, \min_{[0;1]} |f(x)| = 1$ suy ra $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$.

Tức là $m=1$ thỏa mãn yêu cầu.

b/ Xét $m \neq 1$ ta có $f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Suy ra $f(x)$ đơn điệu trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f(0) = m; f(1) = \frac{1+m}{2}$

$$\text{Trường hợp 1: } m \cdot \frac{1+m}{2} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[0;1]} |f(x)| = 0 \\ \max_{[0;1]} |f(x)| = \max \left\{ |m|; \left| \frac{m+1}{2} \right| \right\} < 1 \end{cases}$$

Suy ra không thỏa mãn điều kiện $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$

$$\text{Trường hợp 2: } m \cdot \frac{1+m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 (m \neq 1) \\ m \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0;1]} |f(x)| + \max_{[0;1]} |f(x)| = |m| + \left| \frac{m+1}{2} \right| = \left| \frac{3m+1}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 (KTM) \\ m=-\frac{5}{3} (TM) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; -\frac{5}{3}\right\}.$$

Câu 42: (Câu 42 - ĐTK - BGD&ĐT - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tính tổng các phần tử của S bằng

Ⓐ. -16.

Ⓑ. 16.

Ⓒ. -12.

Ⓓ. -2.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$ là hàm số bậc ba không đơn điệu trên đoạn $[0; 3]$ nên ta sẽ đưa hàm số này về hàm bậc nhất để sử dụng các tính chất cho bài tập này.

Đặt $t = x^3 - 3x$, do $[0; 3]$ nên ta tìm được miền giá trị $t \in [-2; 18]$. Khi đó $y = t + m$ đơn điệu trên $[-2; 18]$.

Ta có

$$\max_{x \in [0; 3]} y = \max_{t \in [-2; 18]} |t + m| = \max \{|m - 2|; |m + 18|\} = \frac{|m - 2 + m + 18| + |m - 2 - m - 18|}{2} = |m + 8| + 10$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } \max_{x \in [0; 3]} y = 16 \Leftrightarrow |m + 8| + 10 = 16 \Leftrightarrow |m + 8| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -14 \end{cases}.$$

Chú ý: Cách giải trên ta đã sử dụng tính chất của hàm số bậc nhất là

$$\max \{|a|; |b|\} = \frac{|a + b| + |a - b|}{2} \quad (1).$$

Tuy nhiên có thể trình bày phần sau bài toán như sau mà không cần công thức (1).

Ta có

$$\max_{x \in [0; 3]} y = \max_{t \in [-2; 18]} |t + m| = \max \{|m - 2|; |m + 18|\}$$

$$+ \text{ Trường hợp 1: } \max_{x \in [0; 3]} y = |m + 18| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 18| = 16 \\ |m - 2| < 16 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \max_{x \in [0; 3]} y = |m - 2| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 2| = 16 \\ |m + 18| < 16 \end{cases} \Leftrightarrow m = -14.$$

Cách 2

Xét $u = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[0; 3]$ có $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 3]$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[0;3]} u = \max \{u(0), u(1), u(3)\} = \max \{m, m-2, m+18\} = m+18 \\ \min_{[0;3]} u = \min \{u(0), u(1), u(3)\} = \min \{m, m-2, m+18\} = m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;3]} f(x) = \max \{|m-2|, |m+18|\} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+18| = 16 \\ |m+18| \geq |m-2| \\ |m-2| = 16 \\ |m-2| \geq |m+18| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -14 \end{cases}.$$

Do đó tổng tất cả các phân tử của S bằng -16 .

Câu 43: (Câu 47 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng

Ⓐ. $\frac{33}{8}$.

Ⓑ. $\frac{9}{8}$.

Ⓒ. $\frac{21}{4}$.

Ⓓ. $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } 2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y-(3-2x)} \geq 3-2x \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3-2x) \cdot 2^{3-2x} \quad (*).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t \cdot 2^t \text{ có } f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \ln 2.$$

Trường hợp 1 : Với $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow (*)$ luôn đúng $\forall y \geq 0$.

$$\text{Ta có : } P = (x+2)^2 + (y+1)^2 - 5 \geq \left(\frac{3}{2}+2\right)^2 + (0+1)^2 - 5 = \frac{33}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 2 : $0 \leq x < \frac{3}{2}$ suy ra $t \geq 0 \Rightarrow f'(t) > 0$ hay hàm số $y = f(t)$ luôn đồng biến nên

$$(*) \Leftrightarrow 2y \geq 3-2x \Leftrightarrow y \geq \frac{3-2x}{2}.$$

$$\text{Ta có : } P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \geq x^2 + \left(\frac{3-2x}{2}\right)^2 + 4x + 3 - 2x$$

$$= 2x^2 - x + \frac{21}{4} = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \geq \frac{41}{8} \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Câu 44: (Câu 45 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2x + y^2 + 4y$.

Ⓐ. $\frac{33}{8}$.

Ⓑ. $\frac{9}{8}$.

Ⓒ. $\frac{21}{4}$.

Ⓓ. $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1 (Thầy Nguyễn Duy Hiếu).

Ta có $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + 2y \cdot 2^{2x+2y-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 3 + 2y \cdot (2^{2x+2y-3} - 1) \geq 0 \quad (1)$

Nếu $2x + 2y - 3 < 0$ thì VT(1) < 0, vô lý, nên từ (1) suy ra $2x + 2y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2}$

$$P = (x+1)^2 + (y+2)^2 - 5 = \frac{1}{2}(1+1) \left[(x+1)^2 + (y+2)^2 \right] - 5$$

$$\geq \frac{1}{2}(x+1+y+2)^2 - 5 \geq \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{2} \right)^2 - 5 = \frac{41}{8}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$. Vậy $\min P = \frac{41}{8}$.

Cách 2 (Trần Văn Trường).

⊙ Ta có $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow y \cdot 4^y \cdot 4^{x-1} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow y \cdot 2^{2y} \geq (3 - 2x) \cdot 2^{2-2x}$

$$\Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3 - 2x) \cdot 2^{3-2x}. (*)$$

Nếu $3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ thì với mọi $x \geq \frac{3}{2}, y \geq 0$ đều thỏa mãn (*) và khi đó

$$P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq \frac{21}{4}.$$

Nếu $3 - 2x > 0$.

⊙ Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t \in (0; +\infty)$.

⊙ Ta có $f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

⊙ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Từ (*) suy ra $2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow 2x + 2y \geq 3$.

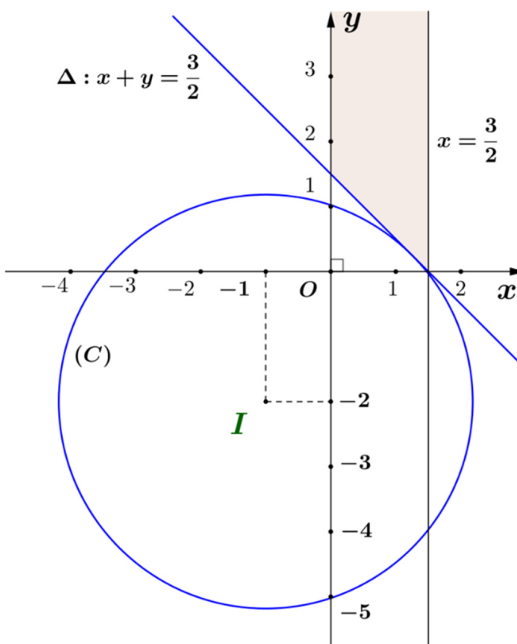
⊙ Xét $P = (x+1)^2 + (y+2)^2 - 5 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = P + 5$.

◎ Ta có hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{3}{2} & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ 2x + 2y - 3 \geq 0 & (3) \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = P+5 & (4) \end{cases}$$

◎ Hệ điều kiện (1), (2), (3) là phần tô màu trên hình vẽ.

◎ (4) coi như là đường tròn tâm $I(-1; -2)$, $R = \sqrt{P+5}$.



◎ Để hệ có nghiệm thì $d(I; \Delta) \leq R = \sqrt{P+5}$, ở đó $\Delta: 2x + 2y - 3 = 0$.

◎ Suy ra $\frac{|2(-1) + 2(-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \leq \sqrt{P+5} \Leftrightarrow P \geq \frac{41}{8}$.

◎ Dấu bằng xảy ra khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = \frac{41}{8} + 5 \end{cases}$$

◎ Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

⊙ Vậy $\min P = \frac{41}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Câu 45: Cách 3 (Nguyễn Kim Duyên)

Câu 46: Giả thiết $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$ (1) $\Leftrightarrow 2x - 2 + y \cdot 2^{2x+2y-2} \geq 1$.

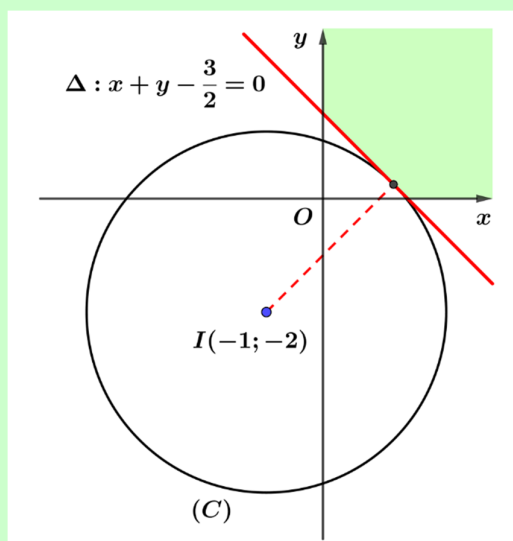
Đặt $a = 2x + 2y - 2; b = 2x - 2 \Rightarrow a \geq b$ và $y = \frac{a-b}{2}$.

(1) viết lại: $b + \frac{a-b}{2} \cdot 2^a \geq 1 \Leftrightarrow 2(b-a) + (a-b)2^a \geq 2 - 2a \Leftrightarrow (a-b)(2^a - 2) \geq 2 - 2a$ (*)

• Nếu $a < 1$ thì $VT(*) \leq 0 < VP(*)$. Vậy không xảy ra $a < 1$.

• Nếu $a \geq 1$ thì $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 2y \geq 3 \end{cases}$ (D).

Biểu diễn được $P + 5 = (x+1)^2 + (y+2)^2$, xem như là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1; -2)$, bán kính $\sqrt{P+5}$.



Ta cần tìm $\min P$ trên miền (D). Khi đó (C) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất chạm miền (D)

$\Leftrightarrow d(I, \Delta) = \sqrt{P+5}$ (trong đó, $\Delta: 2x + 2y - 3 = 0$).

$\Leftrightarrow \frac{9}{2\sqrt{2}} = \sqrt{P+5} \Leftrightarrow P = \frac{41}{8}$. Khi đó Δ tiếp xúc (C) tại điểm $\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Vậy $\min P = \frac{41}{8}$, đạt được khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Cách 4 (NT AG). Ta có $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow 2x + 2y \cdot 2^{2x+2y-3} \geq 3$.

Nếu $2x + 2y - 3 < 0$ thì $3 \leq 2x + 2y \cdot 2^{2x+2y-3} < 2x + 2y \cdot 2^0 = 2x + 2y$. Suy ra $2x + 2y - 3 > 0$. Mâu thuẫn.

Nếu $2x + 2y - 3 \geq 0$ (1). Ta có (1) $\Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x + (y + 1) \geq \frac{5}{2}$. Đặt $t = y + 1$ ($t \geq 1$). Ta có $x + t \geq \frac{5}{2}$.

Khi đó,

$$P = x^2 + 2x + y^2 + 4y = x^2 + (y + 1)^2 + 2x + 2y + 2 - 3 = x^2 + t^2 + 2(x + t) - 3$$

$$\geq \frac{1}{2}(x + t)^2 + 2(x + t) - 3 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) - 3 = \frac{41}{8}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = t = \frac{5}{4}$ hay $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Câu 47: (Câu 48 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

Ⓐ. $\frac{65}{8}$.

Ⓑ. $\frac{33}{4}$.

Ⓒ. $\frac{49}{8}$.

Ⓓ. $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow y \cdot 2^{2x+2y-2} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3 - 2x) \cdot 2^{3-2x} \quad (*)$$

Hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ (*) ta suy ra $2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow 2x + 2y - 3 \geq 0$ (1)

Ta thấy (1) bất phương trình bậc nhất có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d: 2x + 2y - 3 = 0$ (phần không chứa gốc tọa độ O), kể cả các điểm thuộc đường thẳng d .

$$\text{Xét biểu thức } P = x^2 + y^2 + 6x + 4y \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = P + 13 \quad (2)$$

Để P tồn tại thì ta phải có $P + 13 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq -13$.

Trường hợp 1: Nếu $P = -13$ thì $x = -3; y = -2$ không thỏa (1). Do đó, trường hợp này không thể xảy ra Ⓐ.

Trường hợp 2: Với $P > -13$, ta thấy (2) là đường tròn (C) có tâm $I(-3; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{P + 13}$.

$$\text{Để } d \text{ và } (C) \text{ có điểm chung thì } d(I; d) \leq R \Leftrightarrow \frac{13}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{P + 13} \Leftrightarrow P \geq \frac{65}{8}.$$

Khi $P = \frac{65}{8}$ đường tròn (C) tiếp xúc đường thẳng d tại $N\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ (thỏa mãn vì N thuộc (T)).

$$\text{Vậy } \min P = \frac{65}{8}.$$

Câu 48: (Câu 48 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

Ⓐ. $\frac{33}{4}$.

Ⓑ. $\frac{65}{8}$.

Ⓒ. $\frac{49}{8}$.

Ⓓ. $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Giá trị của x, y thỏa mãn phương trình $2x + y \cdot 4^{x+y-1} = 3(1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Khi đó

$$(1): 2x + y \cdot 4^{x+y-1} = 3 \Leftrightarrow 4^{x+y-1} + \frac{2}{y}(x+y) - 2 - \frac{3}{y} = 0$$

Đặt $a = x + y$, từ (1) ta được phương trình

$$4^{a-1} + \frac{2}{y} \cdot a - 2 - \frac{3}{y} = 0 (*).$$

Xét hàm số $f(a) = 4^{a-1} + \frac{2}{y} \cdot a - 2 - \frac{3}{y}$. Ta có $f'(a) = 4^{a-1} \ln 4 + \frac{2}{y} > 0, \forall y > 0$ nên $f(a)$ hàm số đồng biến.

Mặt khác, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(a) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$.

Do đó, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $a = \frac{3}{2} \Rightarrow x + y = \frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P = (x+y)^2 + 4(x+y) + 2\left(y - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} = \frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min} = \frac{65}{8}$.

Cách khác:

Với mọi x, y không âm ta có

$$2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow x + y \cdot 4^{x+y-\frac{3}{2}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y \cdot \left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu $x + y - \frac{3}{2} < 0$ thì $\left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y \cdot \left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) < 0 + y \cdot (4^0 - 1) = 0$ (vô lí)

Vậy $x + y \geq \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$$P = x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x+3)^2 + (y+2)^2 - 13$$

$$\geq \frac{1}{2}(x+y+5)^2 - 13 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 5\right)^2 - 13 = \frac{65}{8}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ x+3=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{4} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{65}{8}.$$

Câu 49: (Câu 41 - MĐ 103 - BGD&ĐT - NĂM 2016 - 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- Ⓐ. $24(m/s)$. Ⓑ. $108(m/s)$. Ⓒ. $18(m/s)$. Ⓓ. $64(m/s)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = -\frac{3t^2}{2} + 12t;$$

$$v'(t) = -3t + 12; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

$v(0) = 0; v(4) = 24; v(6) = 18$. Suy ra vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong 6 giây đầu là $24(m/s)$.

Câu 50: (Câu 7 - ĐTN - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- Ⓐ. $216 (m/s)$ Ⓑ. $30 (m/s)$ Ⓒ. $400 (m/s)$ Ⓓ. $54 (m/s)$

Lời giải

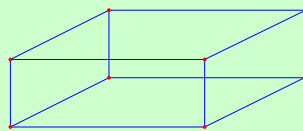
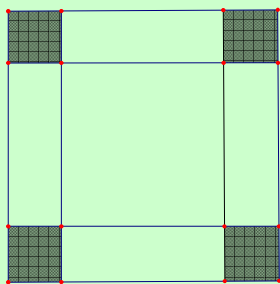
Chọn D

$$\text{Vận tốc tại thời điểm } t \text{ là } v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t \text{ với } t \in [0; 10].$$

$$\text{Ta có: } v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6.$$

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54 (m/s)$.

Câu 51: (Câu 10 - ĐMH - BGD&ĐT - Năm 2017 - 2018) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Ⓐ. $x = 6$

Ⓑ. $x = 3$

Ⓒ. $x = 2$

Ⓓ. $x = 4$

Lời giải**Chọn C**

Ta có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$

Xét hàm số: $y = x.(12 - 2x)^2 \quad \forall x \in (0; 6)$

Ta có : $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$ (loại).

x	0	2	6
y'		+	-
y			

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$.