

- Câu 1:** Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $M(1;0;-2)$. B. $M(3;1;-3)$. **C. $M(-1;-1;-1)$.** D. $M(5;2;-4)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(1+2t; t; -2-t)$ nên ta có $MA^2 = (-1-2t)^2 + (-1-t)^2 + (5+t)^2 = 6t^2 + 16t + 27$;
 $MB^2 = (-2t)^2 + (-2-t)^2 + (3+t)^2 = 6t^2 + 10t + 13$
 Suy ra $MA^2 + 2MB^2 = 18t^2 + 36t + 53 = 18(t^2 + 2t + 1) + 35 = 18(t+1)^2 + 35 \geq 35$ nên $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = -1$ suy ra $M(-1; -1; -1)$.

- Câu 2:** Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và ba điểm $A(1;3;-2)$, $B(0;4;-5)$, $C(1;2;-4)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?
- A. 0. **B. -1.** C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(t; 1+t; -2-2t)$ nên ta có $MA^2 = (1-t)^2 + (2-t)^2 + (2t)^2 = 6t^2 - 6t + 5$;
 $MB^2 = (-t)^2 + (3-t)^2 + (-3+2t)^2 = 6t^2 - 18t + 18$.
 $MC^2 = (1-t)^2 + (1-t)^2 + (-2+2t)^2 = 6t^2 - 12t + 6 \Rightarrow 2MC^2 = 12t^2 - 24t + 12$
 Suy ra $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 24t^2 - 48t + 35 = 24(t^2 - 2t + 1) + 11 = 24(t-1)^2 + 11 \geq 11$ nên $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 1$ suy ra $M(1; 2; -4)$ nên $a = 1; b = 2; c = -4$. Khi đó $a+b+c = -1$

- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(-1;-1;6)$, $B(2;-1;0)$. Biết điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho biểu thức $MA^2 + 3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $T_{\min}$. Khi đó, $T_{\min}$ bằng bao nhiêu?
- A. $T_{\min} = \frac{1}{2}$. B. $T_{\min} = 25$. C. $T_{\min} = \frac{25}{2}$. **D. $T_{\min} = 39$.**

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(0;0;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; -1)$ nên có



phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Vì M thuộc đường thẳng Δ nên $M(2t; -t; 1-t)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + 3MB^2 &= (2t+1)^2 + (t-1)^2 + (t+5)^2 + 3[(2t-2)^2 + (t-1)^2 + (t-1)^2] \\ &= 24t^2 - 24t + 45 = 6\left(4t^2 - 4t + \frac{45}{6}\right) \\ &= 6\left[(2t-1)^2 + \frac{39}{6}\right] = 6(2t-1)^2 + 39 \geq 39, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $\min(MA^2 + 3MB^2) = 39 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ hay $M\left(1; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 4: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ và $A(1; -1; 0), B(0; -1; 2), C(-1; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **B.** $M(0; 1; -1)$.
C. $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. **D.** $M(2; -1; -4)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M có tọa độ là: $M(1-t; t; -2+t)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (t; -t-1; 2-t), 2\overrightarrow{MB} = (2t-2; -2t-2; 8-2t), \overrightarrow{MC} = (t-2; 1-t; 2-t)$.

Do đó: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (2t; -2t-4; 8-2t)$.

Suy ra: $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|^2 = 4t^2 + (2t+4)^2 + (2t-8)^2 = 12t^2 - 16t + 80 \geq \frac{224}{3}$.

$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \geq \frac{4\sqrt{42}}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ hay $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Câu 5: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 0; 1), B(-1; 1; 2)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+2b+4c$ bằng bao nhiêu?

- A.** 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Do } M \in \Delta \Rightarrow M(2t; -1+t; 1-t)$$

$$\overrightarrow{MA} = (1-2t; 1-t; t)$$

$$\overrightarrow{MB} = (-1-2t; 2-t; 1+t)$$

$$3\overrightarrow{MB} = (-3-6t; 6-3t; 3+3t)$$

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = (4+4t; -5+2t; -3-2t)$$

$$|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}| = \sqrt{24t^2 + 24t + 50} = \sqrt{24(t + \frac{1}{2})^2 + 44} \geq 44$$

$$|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } 44 \text{ khi } t = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó điểm } M \text{ có tọa độ là } M(-1; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) \text{ và } a+2b+4c = -1-3+6=2$$

Câu 6: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và $A(1;1;0)$, $B(3;-1;4)$, $C(-1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 - MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(0;0;0)$. B. $M(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$. C. $M(-2;2;-4)$. D. $M(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Do } M \in \Delta \Rightarrow M(-1+t; 1-t; -2+2t)$$

$$\overrightarrow{MA} = (2-t; t; 2-2t)$$

$$\overrightarrow{MB} = (4-t; -2+t; 6-2t)$$

$$\overrightarrow{MC} = (-t; -1+t; 3-2t)$$

$$MA^2 - MB^2 + 4MC^2 = (2-t)^2 + t^2 + (2-2t)^2 - 4[(4-t)^2 + (t-2)^2 + (6-2t)^2] + [t^2 + (t-1)^2 + (3-2t)^2]$$

$$= 6t^2 - 12t + 8 - (6t^2 - 36t + 56) + 4(6t^2 - 14t + 10)$$

$$= 24t^2 - 32t - 8 = 24[(t - \frac{2}{3})^2 - \frac{7}{9}] \geq -\frac{7}{9}$$

$$MA^2 - MB^2 + 4MC^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } -\frac{7}{9} \text{ khi } t = \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra điểm } M(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$$

Câu 7: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất với } A(2;1;-2), B(6;-1;1), C(1;1;-2).$$

A. $M(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -3)$. B. $M(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. C. $M(-3;3;-6)$. D. $M(-1;1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(-5;3;-5).$$



$$\text{Ta có: } P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{IC}| = |\overrightarrow{MI}| = IM.$$

$$M \in \Delta \Rightarrow M(-1+t; 1-t; -2+2t)$$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{(t+4)^2 + (-t-2)^2 + (2t+3)^2} = \sqrt{6t^2 + 24t + 29} = \sqrt{6(t+2)^2 + 5} \geq \sqrt{5}.$$

$$\text{Do đó } P_{\min} = \sqrt{5} \text{ khi } t = -2 \Rightarrow M(-3; 3; -6).$$

Câu 8: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(2; 1; -1)$. Biết điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $T = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất là $T_{\min}$. Khi đó, $T_{\min}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\min} = 4$.

B. $T_{\min} = 3$.

C. $T_{\min} = \sqrt{14}$.

D. $T_{\min} = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -1\right).$$

$$\text{Ta có: } P = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB}| = |3\overrightarrow{MI}| = 3IM.$$

$$M \in \Delta \Rightarrow M(t; 1-t; -1+t)$$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-t + \frac{1}{3}\right)^2 + t^2} = \sqrt{3t^2 - 4t + \frac{26}{9}} = \sqrt{3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{14}{9}} \geq \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

$$\text{Do đó: } P_{\min} = \sqrt{14} \text{ khi } t = \frac{2}{3}.$$

Nhận xét: Ở Câu 7,8 này, ta có thể giải trực tiếp khi biểu diễn điểm M theo tham số t mà không cần tìm tâm tỉ cự của hệ điểm như

Lời giải trên.

Câu 9: Cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 9 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; -1)$, $C(3; 1; 1)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1; -2; -3)$.

B. $M(-3; 1; -4)$.

C. $M(-3; 2; -5)$.

D. $M(1; -3; -2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả sử } I(x_0; y_0; z_0) \text{ là điểm thỏa mãn: } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x_0) + 3(2-y_0) - 4(3-z_0) = 0 \\ 2(2-y_0) + 3(-y_0) - 4(1-z_0) = 0 \\ 2(-z_0) + 3(-1-z_0) - 4(1-z_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_0 - 4 = 0 \\ -y_0 = 0 \\ -z_0 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = -7 \end{cases} \Rightarrow I(-4; 0; -7)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 - 4\overrightarrow{MC}^2 \\ &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 2(\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} + \overline{IA}^2) + 3(\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IB} + \overline{IB}^2) - 4(\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IC} + \overline{IC}^2) \\
 &= MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2 + 2\overline{MI} \cdot (2\overline{IA} + 3\overline{IB} - 4\overline{IC}) \\
 &= MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0} \\
 &= MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2
 \end{aligned}$$

Khi đó, để $2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì MI có độ dài ngắn nhất

Mà $M \in (\alpha) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên (α) .

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc $(\alpha) \Rightarrow d$ có 1 VTCP $\vec{u} = (1; 2; 2)$

Phương trình đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2t \\ z = -7 + 2t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Giả sử tọa độ điểm $M(-4+t; 2t; -7+2t)$

Do $M \in (\alpha) \Rightarrow (-4+t) + 2.2t + 2(-7+2t) + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(-3; 2; -5)$.

Câu 10: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và $A(1;1;0)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(-1;1;-2)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -3\right)$. **D. $M(1;-1;2)$.**

Lời giải

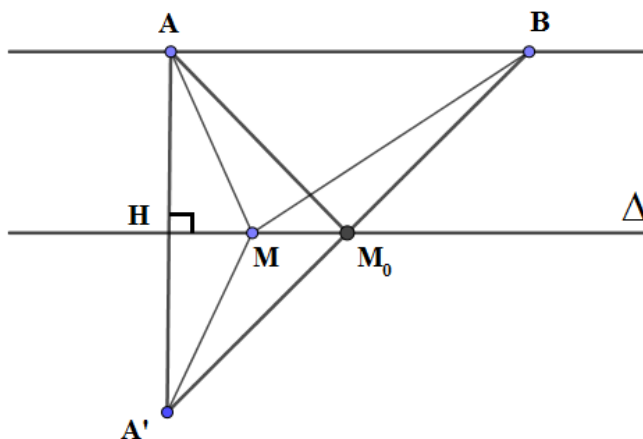
Chọn D

$\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ có 1 VTCP $\vec{u}(1;-1;2)$

$A(1;1;0)$, $B(3;-1;4) \Rightarrow \overline{AB}(2;-2;4)$

Ta có: $\overline{AB}(2;-2;4)$ cùng phương với $\vec{u}(1;-1;2)$ và $A(1;1;0) \notin \Delta$ (do $\frac{1+1}{1} \neq \frac{1-1}{-1}$)

$\Rightarrow AB // \Delta \Rightarrow AB$ và Δ đồng phẳng



* Xét mặt phẳng chứa AB và Δ :

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ ; (α) là mặt phẳng qua A , vuông góc với Δ

Khi đó, giao điểm H của Δ với (α) là trung điểm của AA'

(α) có 1 VTPT $\vec{n}(1;-1;2)$, đi qua $A(1;1;0)$, có phương trình:

$$1(x-1)-1(y-1)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x-y+2z=0$$

$$H \in \Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow \text{Giả sử } H(-1+t; 1-t; -2+2t)$$

$$H \in (\alpha) \Rightarrow (-1+t) - (1-t) + 2(-2+2t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(0; 0; 0)$$

$$H \text{ là trung điểm của } AA' \Rightarrow \begin{cases} 2x_H = x_A + x_{A'} \\ 2y_H = y_A + y_{A'} \\ 2z_H = z_A + z_{A'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.0 = 1 + x_{A'} \\ 2.0 = 1 + y_{A'} \\ 2.0 = 0 + z_{A'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -1 \\ y_{A'} = -1 \\ z_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1; -1; 0)$$

Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B \Rightarrow (MA + MB)_{\min} = A'B$ khi và chỉ khi M trùng với M_0 là giao điểm của $A'B$ và Δ

$$\overline{A'B} = (4; 0; 4) \Rightarrow A'B \text{ có 1 VTCP } (1; 0; 1) \text{ và đi qua } A'(-1; -1; 0), \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = -1 \\ z = t' \end{cases}$$

$$\text{Mà } \Delta: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} -1+t = -1+t' \\ 1-t = -1 \\ -2+2t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ t = 2 \\ -2+2t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0(1; -1; 2)$$

Vậy, để $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $M(1; -1; 2)$.

Câu 11: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ và hai điểm $A(1;1;-2)$, $B(-1;0;-1)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất là $T_{\min}$. Khi đó tính $T_{\min}$.

A. $T_{\min} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$ B. $T_{\min} = \sqrt{2 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$ C. $T_{\min} = \sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$ **D. $T_{\min} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$**

Lời giải

Chọn D

Vì điểm M thuộc Δ nên ta có $M(-t; t+1; t-1)$. Lúc đó

$$\begin{aligned} T = MA + MB &= \sqrt{(t+1)^2 + t^2 + (t+1)^2} + \sqrt{(t-1)^2 + t^2 + (t+1)^2} \\ &= \sqrt{3t^2 + 4t + 2} + \sqrt{3t^2 + 2} \end{aligned}$$



$$= \sqrt{3} \left(\sqrt{\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \sqrt{t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} \right).$$

Đặt $\vec{u} = \left(t + \frac{2}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $\vec{v} = \left(-t; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. Ta có $T = \sqrt{3}(|\vec{u}| + |\vec{v}|) \geq \sqrt{3}|\vec{u} + \vec{v}|$.

Tức là $T \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t + \frac{2}{3}}{-t} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \Leftrightarrow t = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $T_{\min} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Câu 12: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a - b + c$ bằng:

- A. 8. B. $8 + \sqrt{33}$. C. $8 + \frac{\sqrt{33}}{3}$. D. $8 + \frac{4\sqrt{33}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Δ qua $C(-1;1;-2)$, và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;2)$

$\vec{AB} = (-2;-1;1)$; $\vec{AC} = (-2;0;-2)$.

$[\vec{AB}; \vec{u}] \vec{AC} \neq 0$ nên $AB; \Delta$ không đồng phẳng

Vì điểm M thuộc Δ nên ta có $M(-1+t;1-t;-2+2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Lúc đó

$$P = |MA - MB| = \left| \sqrt{(t-2)^2 + t^2 + (2t-2)^2} - \sqrt{(-t)^2 + (t-1)^2 + (2t-3)^2} \right|$$

$$= \left| \sqrt{6t^2 - 12t + 8} - \sqrt{6t^2 - 14t + 10} \right|.$$

$$P = \sqrt{6} \left| \sqrt{(t-1)^2 + \frac{1}{3}} - \sqrt{\left(t - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{6}} \right|$$

Đặt $\vec{u} = \left(t-1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{v} = \left(t - \frac{7}{6}; \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$. Ta có $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} - \vec{v}|$.

Tức là $P \leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}$.



$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{t-1}{t-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} \Leftrightarrow t = 3 + \frac{\sqrt{33}}{3}.$$

$$\text{Với ta có } a-b+c = 4t-4 = 8 + \frac{4\sqrt{33}}{3}.$$

Câu 13: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;1;-3), B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max} = \sqrt{3}$.

B. $T_{\max} = 2\sqrt{3}$.

C. $T_{\max} = 3\sqrt{3}$.

D. $T_{\max} = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 5), \text{ phương trình đường thẳng } AB \text{ là } \begin{cases} x = -t \\ y = 1-t \\ z = -3+5t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Xét vị trí tương đối giữa } AB \text{ và } \Delta \text{ ta có } AB \text{ cắt } \Delta \text{ tại } C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Rightarrow C \text{ là trung điểm } AB.$$

$$T = |MA-MB| \leq AB. \text{ Dấu "}" xảy ra khi } M \equiv A \text{ hoặc } M \equiv B.$$

$$\text{Do đó } T_{\max} = AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Câu 14: Cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z+9=0$ và ba điểm $A(1;2;0), B(2;0;-1), C(3;1;1)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;-2;-3)$.

B. $M(-3;1;-4)$.

C. $M(-3;2;-5)$.

D. $M(1;-3;-2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta đi tìm tọa độ điểm } I(a;b;c) \text{ sao cho } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Ta có

$$\overrightarrow{IA} = (1-a; 2-b; -c); \overrightarrow{IB} = (2-a; -b; -1-c); \overrightarrow{IC} = (3-a; 1-b; 1-c)$$

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = (-4-a; -b; -7-c) = \vec{0} \Rightarrow a = -4; b = 0; c = -7$$

$$\text{Suy ra } I(-4; 0; -7) \notin (\alpha).$$

$$\text{Khi đó } T = 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2 = 2(\overrightarrow{MA})^2 + 3(\overrightarrow{MB})^2 - 4(\overrightarrow{MC})^2$$



$$= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC})$$

$$= MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2$$

Do đó T nhỏ nhất khi MI ngắn nhất, khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α) .

Đường thẳng d qua I và vuông góc với (α) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$

Do đó phương trình của d là
$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2t \\ z = -7 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Khi đó tọa độ M thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2t \\ z = -7 + 2t \\ x + 2y + 2z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(-3; 2; -5).$$

Câu 15: Cho mặt phẳng $(P): 5x - y + z - 2 = 0$ và hai điểm $A(0; -1; 0), B(-2; 1; -1)$. Biết điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó điểm M có hoành độ x_M bằng bao nhiêu?

A. $x_M = 1$.

B. $x_M = 2$.

C. $x_M = -1$

D. $x_M = 3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-4; 3; -2)$.

Khi đó $T = MA^2 - 2MB^2 = -MI^2 + IA^2 - 2IB^2 \Rightarrow T_{\max} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) . Khi đó đường thẳng MI đi qua $I(-4; 3; -2)$ và vuông góc với (P) nên nhận VTPT

$\vec{n}(5; -1; 1)$ của (P) làm VTCP, phương trình là
$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \\ 5x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2; -1) \Rightarrow x_M = 1.$$

Câu 16: Cho mặt phẳng $(P): x + y - 3z + 7 = 0$ và ba điểm $A(2; -1; 0), B(0; -1; 2), C(2; 3; -1)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $T = x_0 + 3y_0 - 2z_0$ bằng bao nhiêu?

A. $T = 0$.

B. $T = -4$.

C. $T = 1$.

D. $T = -14$.

Lời giải



Chọn D

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(-1; -5; 4)$.

Khi đó $T = MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = 2MI^2 + IA^2 + 3IB^2 - 2IC^2 \Rightarrow T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\max} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P). Khi đó đường thẳng MI đi qua $I(-1; -5; 4)$ và vuông góc với (P)

nên nhận VTPT $\vec{n}(1; 1; -3)$ của (P) làm VTCP, phương trình là
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -5 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -5 + t \\ z = 4 - 3t \\ 5x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 0 \\ y = -4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0; -4; 1) \Rightarrow T = -14.$$

Câu 17: Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + 6y - 3z - 1 = 0$ và ba điểm $A(1; -1; -5), B(0; 1; 2), C(2; 3; -1)$. Biết điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho $P = MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $P_{\min}$. Khi đó $P_{\min}$ bằng bao nhiêu?

A. 16.

B. 17.

C. 18.

D. 19.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(a; b; c)$ sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}.$$

$$\Rightarrow I(-3; -5; -3).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2 + 2(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}) = MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do } IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2 = 36 + 70 - 93 = 13 \text{ không đổi nên } P_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$$

$$\text{Và } MI_{\min} = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot (-3) + 6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-3) - 1|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = 4.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 4 + 13 = 17.$$

Câu 18: Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 3z + 1 = 0$ và ba điểm $A(1; 1; -1), B(-3; 1; 0), C(-2; 1; -1)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $|2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 6\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(0; 1; 0)$.

B. $M(2; -1; 2)$.

C. $M(1; 0; 1)$.

D. $M(-1; 2; -1)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I(a;b;c)$ sao cho $2\vec{IA}+5\vec{IB}-6\vec{IC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{OI} = 2\vec{OA} + 5\vec{OB} - 6\vec{OC}.$$

$$\Rightarrow I(-1;1;4).$$

$$|2\vec{MA}+5\vec{MB}-6\vec{MC}| = |2(\vec{MI} + \vec{IA}) + 5(\vec{MI} + \vec{IB}) - 6(\vec{MI} + \vec{IC})| = MI.$$

Nên $|2\vec{MA}+5\vec{MB}-6\vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I trên (P) .

Do $I \notin (P) \Rightarrow MI \perp (P)$.

$$\Rightarrow MI : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \Rightarrow M(-1 + 2t; 1 - t; 4 - 3t).$$

$$\text{Mà } M \in (P) \Rightarrow 2(-1 + 2t) - (1 - t) - 3(4 - 3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\Rightarrow M(1;0;1).$$

- Câu 19:** Cho mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$ và hai điểm $A(-5;1;2), B(1;-2;2)$. Trong tất cả các điểm M thuộc mặt phẳng (P) , điểm để $|\vec{MA} + 2\vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất có tung độ y_M là
- A. $y_M = 1$. B. $y_M = -2$. C. $y_M = 0$. D. $y_M = -1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-1;-1;2)$.

Khi đó $T = |\vec{MA} + 2\vec{MB}| = 3MI \Rightarrow T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Khi đó đường thẳng MI đi qua $I(-1;-1;2)$ và vuông góc với (P) nên nhận VTPT

$$\vec{n}(1;-1;-1) \text{ của } (P) \text{ làm VTCP, phương trình là } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0;-2;1) \Rightarrow y_M = -2.$$

- Câu 20:** Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 3z - 6 = 0$ và hai điểm $A(0;-1;1), B(1;-2;0)$. Biết điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho $P = |2\vec{MA} - \vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất là $P_{\min}$. Khi đó $P_{\min}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P_{\min} = 2\sqrt{3}$. B. $P_{\min} = \sqrt{14}$. C. $P_{\min} = 3$. D. $P_{\min} = \sqrt{21}$.



Lời giải

Chọn D

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-1; 0; 2)$.

Khi đó $P = |2\vec{MA} - \vec{MB}| = MI \Rightarrow P_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) . Khi

$$\text{đó } P_{\min} = d(I / (\alpha)) = \frac{|-2 - 6 - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{14}.$$

Câu 21: Cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(0; -1; 1), B(1; 1; -2)$. Biết $M \in (\alpha)$ sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hoành độ x_M của điểm M là

A. $x_M = \frac{1}{3}$.

B. $x_M = -1$.

C. $x_M = -2$.

D. $x_M = \frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x_A - y_A + 2z_A - 1)(x_B - y_B + 2z_B - 1) = (0 + 1 + 2 \cdot 1 - 1)(1 - 1 - 4 - 1) < 0$ nên hai điểm A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (α) .

Nên $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M = AB \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng AB : $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{7} \\ x = \frac{2}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \\ z = \frac{1}{7} \end{cases}. \text{ Do đó } M\left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right), x_M = \frac{2}{7}.$$

Câu 22: Cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1; 1; 0), B(3; -1; 4)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (α) sao cho $P = MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của P là:

A. $P = 5$.

B. $P = 6$.

C. $P = 7$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(x_A - y_A + z_A + 1)(x_B - y_B + z_B + 1) = (1 - 1 + 0 + 1)(3 + 1 + 4 + 1) > 0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) .



Phương trình đường thẳng $AH: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

Do đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=t \\ x-y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases}$.

Do đó $H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Gọi A' đối xứng với A qua (α) , suy ra $A'\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Ta có $MA+MB=MA'+MB \geq A'B \Rightarrow P=A'B=6$.

Câu 23: Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-3z-5=0$ và hai điểm $A(1;-1;2), B(-5;-1;0)$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

A. $T=5$.

B. $T=-3$.

C. $T=-7$.

D. $T=-9$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(x_A+y_A-3z_A-5)(x_B+y_B-3z_B-5)=(1-1-3.2-5)(-5-1-3.0-5)>0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) .

Phương trình đường thẳng $AH: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=2-3t \end{cases}$

Do đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=2-3t \\ x+y-3z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$.

Do đó $H(2;0;-1)$.

Gọi A' đối xứng với A qua (α) , suy ra $A'(3;1;-4)$.

Ta có $MA+MB=MA'+MB \geq A'B$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất khi $M=A'B \cap (\alpha)$.



Phương trình đường thẳng $A'B$:
$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = -4 + 3t \end{cases}.$$

Do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = -4 + 3t \\ x + y - 3z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{12}{11} \\ x = -\frac{15}{11} \\ y = -\frac{1}{11} \\ z = -\frac{20}{11} \end{cases}.$$

Do đó $M\left(-\frac{15}{11}; -\frac{1}{11}; -\frac{20}{11}\right)$, $T = a + 2b + 3c = -7$.

Câu 24: Cho $A(1;1;0), B(3;-1;4)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $M(1;3;-1)$. B. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$. C. $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $M(0;2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(x_A - y_A + z_A + 1)(x_B - y_B + z_B + 1) = (1 - 1 + 0 + 1)(3 + 1 + 4 + 1) > 0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α) .

Ta có $|MA - MB| \leq AB = 2\sqrt{6}$, nên $|MA - MB|$ lớn nhất khi và chỉ khi $M = AB \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng AB :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \end{cases}$$
, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{8} \\ x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$
 Do đó $M\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 25: Cho hai điểm $A(1;-1;2), B(0;1;6)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Biết điểm M thuộc

đường thẳng d sao cho biểu thức $T = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $T_{\min}$. Khi đó giá trị $T_{\min}$ bằng bao nhiêu?



A. $T_{\min} = 14.$

B. $T_{\min} = 3.$

C. $T_{\min} = 3\sqrt{2}.$

D. $T_{\min} = 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A

Vì

$$\begin{aligned} M \in d &\Rightarrow M(2t+1; t; -t-1) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM}(2t; t+1; -t-3) \\ &\quad \overrightarrow{BM}(2t+1; t-1; -t-7) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 2t(2t+1) + (t+1)(t-1) + (-t-1)(-t-3) \\ &= 6t^2 + 12t + 20 = 6\left(t+1\right)^2 + 14 \geq 14. \end{aligned}$$

Câu 26: Cho hai điểm $A(0; -1; 2), B(1; 1; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng bao nhiêu?

A. $T = 5.$

B. $T = 3.$

C. $T = 4.$

D. $T = 10.$

Lời giải

Chọn D

$$M \in d \Rightarrow M(t-1; t; t+1) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(t-1; t+1; t-1)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AB}(1; 2; 0) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}.$$

$$[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}] = (2-2t; t-1; t-3)$$

Mà

$$\begin{aligned} S_{\Delta MAB} &= \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}]| = \sqrt{2-2t^2 + t-1^2 + t-3^2} \\ &= 6t^2 - 16t + 14 = 6\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \geq \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } t = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow T = a + 2b + 3c = 10.$$

Câu 27: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(1; 0; -1)$ và tạo với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 6 = 0$ góc lớn nhất.



A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 3 - t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-1)$ tạo với (α) góc lớn nhất $\Leftrightarrow \max(\Delta, (\alpha)) = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta \perp (\alpha)$.

Khi đó đường thẳng Δ đi qua nhận $M(1;0;-1)$ và $\vec{n}_{(\alpha)}(2;-1;3)$ làm véc tơ chỉ phương nên

phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

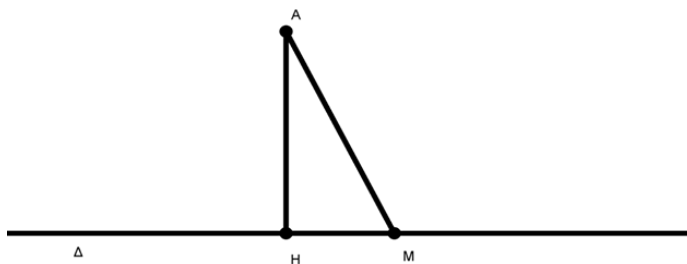
Vậy Chọn A

Câu 28: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x - 4y + z - 12 = 0$ và cách điểm $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D



$\vec{n}_{(\alpha)}(3;-4;1)$, $\vec{AM}(6;-7;1)$

Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng Δ suy ra $d(A; \Delta) = AH$

Ta có: $AH \leq AM \Rightarrow \max(d(A; \Delta)) = AM \Leftrightarrow H \equiv M$. Khi đó

$\vec{u}_{(\Delta)} \perp \vec{AM}$, $\vec{u}_{(\Delta)} \perp \vec{n}_{(\alpha)} \Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)} = [\vec{AM}, \vec{n}_{(\alpha)}] = (-3; -3; -3) = -3(1; 1; 1)$

Đường thẳng Δ đi qua $M(4;-2;1)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1;1;1)$ có dạng: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Vậy Chọn D



Câu 29: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;1)$, vuông góc với đường thẳng $\Delta': \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$

và

cách điểm $B(2;0;1)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-1+t \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Giả sử Δ, Δ' có VTCP lần lượt là $\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{\Delta'} = (1;1;2)$

Do $\Delta \perp \Delta'$ nên $\vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_{\Delta'}$ (1)

Gọi H là hình chiếu của B trên Δ .

Do $A \in \Delta$ nên $BH \leq BA$.

Suy ra Δ cách B một khoảng lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$ hay $\Delta \perp AB$

$\Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{AB} = (1;-1;0)$ (2).

Từ (1) và (2) nên ta chọn một VTCP của $\Delta: \vec{u}_\Delta = [\vec{u}_{\Delta'}, \vec{AB}] = (2;2;-2) = 2(1;1;-1)$.

Vậy $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(1;1;2)$ và vuông góc với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ đồng thời tạo với trục Oz góc lớn nhất.

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=2-2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1-t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

d có VTCP là $\vec{u}_d = (2;1;2)$.

Oz có VTCP là $\vec{k} = (0;0;1)$.

Gọi $\vec{u}_\Delta$ là VTCP của Δ .

Do $\Delta \perp d$ nên $\vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d$ (1)

Δ tạo với Oz một góc lớn nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp Oz$ hay $\vec{u}_\Delta \perp \vec{k}$. (2)



Từ (1) và (2) nên ta chọn một VTCP của Δ : $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d; \vec{k}] = (1; -2; 0)$.

$$\text{Vậy } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(1;1;2)$, nằm trong $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$, đồng thời tạo với trục Oz góc nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Gọi VTCP của Δ là $\vec{u} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

VTPT của (α) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$

Do $\vec{u} \perp \vec{n}$ nên $a + 2b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + 2b$. Từ đó $\vec{u} = (a; b; a + 2b)$.

Trục Oz có VTCP là $\vec{u} = (0; 0; 1)$.

Gọi ϑ là góc tạo bởi Δ và trục Oz .

$$\cos \vartheta = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + 2b)^2}} = \frac{\left| \frac{a}{b} + 2 \right|}{\sqrt{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4\frac{a}{b} + 5}} = \frac{|t + 2|}{\sqrt{2t^2 + 4t + 5}} = \sqrt{\frac{t^2 + 4t + 4}{2t^2 + 4t + 5}}$$

Ta đặt $y = \frac{t^2 + 4t + 4}{2t^2 + 4t + 5}$. Ta đi tìm Min, Max của biểu thức này.

$$y = \frac{t^2 + 4t + 4}{2t^2 + 4t + 5} \Leftrightarrow (2y - 1)t^2 + (4y - 4)t + 5y - 4 = 0. \quad (1)$$

+ TH1: Nếu $y = \frac{1}{2}$ thì $t = -\frac{3}{4}$.

+ TH1: Nếu $y \neq \frac{1}{2}$ thì (1) là phương trình bậc hai. Có $\Delta' = -6y^2 + 5y$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = -6y^2 + 5y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{5}{6}$.

Ta có ϑ min, khi và chỉ khi $\cos \vartheta$ max. Khi đó $t = \frac{1}{2}$



Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. Từ đó chọn $a = 1; b = 2 \Rightarrow c = 5$.

Vậy $\vec{u} = (1; 2; 5)$. **Chọn D**

Câu 32: Cho $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4), d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A , cắt d sao cho $d(B, \Delta)$ là nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 15 + t \\ y = 18 + 4t \\ z = -19 - 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 15t \\ y = 4 + 18t \\ z = 2 - 19t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

d đi qua $M(1; -2; 0)$ và có một VTCP là $\vec{u} = (-1; 1; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa A và d .

Kẻ $BK \perp \Delta$ và $BH \perp (P)$. Ta có $BK \geq BH$. Khi đó $d(B, \Delta) = BK$ đạt GTNN khi $K \equiv H$. Khi đó Δ qua A, H .

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa A và d .

$\vec{n}_p = [\vec{u}; \overrightarrow{AM}] = (10; -2; 6)$. Chọn $\vec{n}_p = (5; -1; 3)$.

Suy ra phương trình $(P): 5x - y + 3z - 7 = 0$.

Ta tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của B lên (P) .

Phương trình đường thẳng $BH: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$

Gọi $H(-1 + 5t; 2 - t; 4 + 3t)$. Cho $H \in (P)$ ta được:

$$5(-1 + 5t) - (2 - t) + 3(4 + 3t) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{35}.$$

Tọa độ điểm H là $H\left(\frac{-5}{7}; \frac{68}{35}; \frac{146}{35}\right)$.

Khi đó phương trình đường thẳng Δ qua A, H là $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 15t \\ y = 4 + 18t \\ z = 2 - 19t \end{cases}$

Câu 33: Cho $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4), d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng a đi qua A , cắt d sao cho $d(B, a)$ là lớn nhất.



A.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 15 + t \\ y = 18 + 4t \\ z = -19 - 2t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + 15t \\ y = 4 + 18t \\ z = 2 - 19t \end{cases}$$

Lời giải

Chọn A

$C(1; -2; 0) \in d$, $\overrightarrow{AC} = (0; -6; -2)$, $\vec{u} = (-1; 1; 2)$ là vectơ chỉ phương của d nên vectơ pháp tuyến của $mp(A, d)$ là $\vec{p} = \left[\vec{u}, -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right] = (-5; 1; -3)$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2) \Rightarrow \vec{n} = \left[-\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \vec{p} \right] = (-2; 8; 6)$$

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (A, d) , K là hình chiếu của H lên a , vậy $d(B, a) = BK$, Dễ thấy BK lớn nhất khi K trùng A , khi đó $BK = AB$. Tại vị trí này, a nằm trong $mp(A, d)$ và vuông góc với AB nên vectơ chỉ phương của a là $-\frac{1}{2} \vec{n} = (1; -4; -3)$. Phương trình đường

thẳng cần tìm là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi d là đường thẳng qua B và cắt Δ tại điểm C sao cho S_{ABC} đạt giá trị nhỏ nhất.

A.
$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 3 + 10t \\ y = 3 - 3t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$$

Lời giải

Chọn D

Ta thấy được S_{ABC} nhỏ nhất khi d đi qua hình chiếu H của A lên $mp(B, \Delta)$.

Ta có phương trình $mp(B, \Delta)$ là $5x + 2y - 4z + 3 = 0$

Hình chiếu của A lên $mp(B, \Delta)$ là $H\left(-1; \frac{21}{5}; \frac{8}{5}\right)$

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = \frac{5}{2} \overrightarrow{BH} = (10; -3; 1)$

Phương trình d là
$$\begin{cases} x = 3 + 10t \\ y = 3 - 3t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxz) và cắt mặt



cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 12$ theo đường tròn có chu vi lớn nhất. Phương trình của (P) là

- A. $x-2y+1=0$. B. $y-2=0$. C. $y+1=0$. D. $y+2=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) theo đề bài có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$.

$(P) // (Oxz) \Rightarrow (P): y+d=0 (d \neq 0)$.

(P) cắt (S) theo một đường tròn có chu vi lớn nhất khi (P) đi qua $I(1;-2;0)$

Suy ra: $d=2$ (nhận).

Vậy $(P): y+2=0$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục Oy và cách điểm M một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (α) là

- A. $x+3z=0$. B. $x+2z=0$. C. $x-3z=0$. D. $x=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $H, K(0;2;0)$ lần lượt là hình chiếu của M trên (α) và trục Oy thì $MH \leq MK = \sqrt{10}$.

Do đó, $d(M, (\alpha)) = MH$ lớn nhất khi $H \equiv K$ hay $(\alpha) \perp MK$.

Khi đó, (α) đi qua $O(0;0;0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KM} = (1;0;3)$.

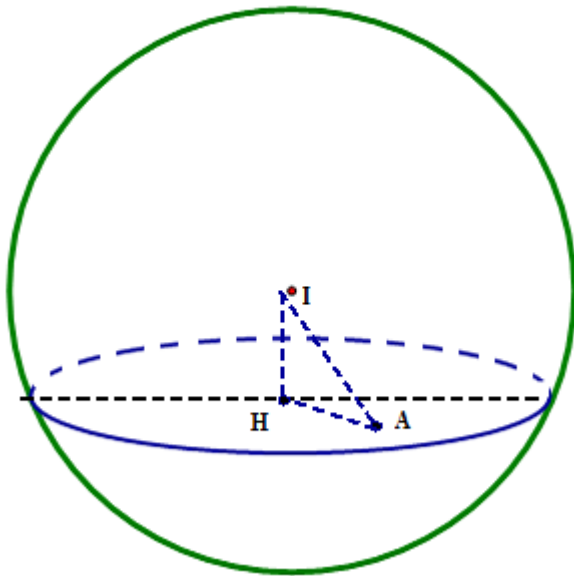
Phương trình mặt phẳng (α) là $x+3z=0$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất là:

- A. $x+2y+3z-6=0$. B. $x+2y+z-2=0$. C. $3x+2y+2z-4=0$. D. $x-2y+3z-6=0$.

Lời giải





Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R=3$.

$\overrightarrow{IA} = (-1; -2; -1) \Rightarrow IA = \sqrt{6} < 3 \Rightarrow$ điểm $A(0;0;2)$ nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I lên (P)

(C) có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi $d[I; (P)] = IH$ lớn nhất.

Ta có: ΔIHA vuông tại $H \Rightarrow IH_{\max} = IA \Rightarrow IA \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{IA} = (-1; -2; -1)$

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(0;0;2)$ và có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (-1; -2; -1)$ là:

$$-1(x-0) - 2(y-0) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 2 = 0$$

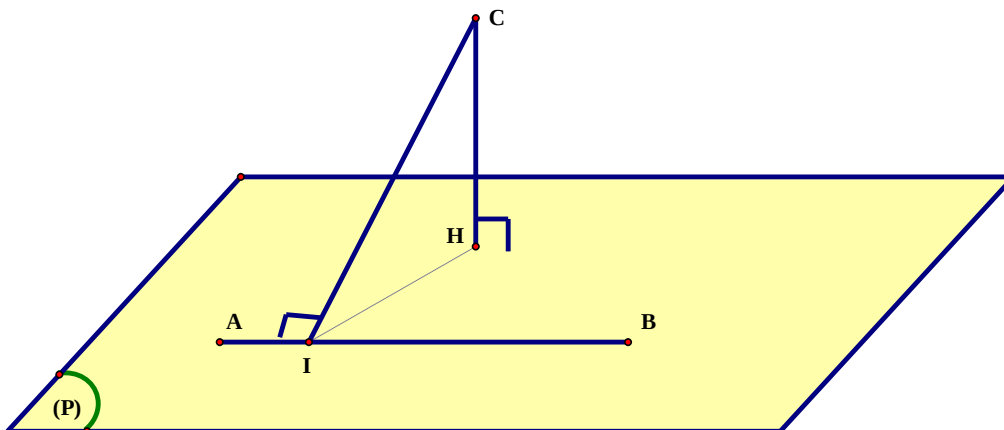
Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;3), B(3;0;2), C(0;-2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách C một khoảng lớn nhất?

A. $3x + 2y + z - 11 = 0$. **B.** $3x + y + 2z - 13 = 0$.

C. $2x - y + 3z - 12 = 0$. **D.** $x + y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$.

Phương trình đường thẳng AB qua: $A(2;1;3)$ có vtcp $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Gọi I là hình chiếu của C lên $AB \Rightarrow I \in AB \Rightarrow I(2+t; 1-t; 3-t)$

$$\overrightarrow{CI} = (2+t; 3-t; 2-t)$$

Ta có: $CI \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2+t-3+t-2+t=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(3;0;2)$

Gọi H là hình chiếu C lên mặt phẳng (P)

$$d[C; (P)] = CH \leq CI \Rightarrow d[C; (P)]_{\max} = CI \Rightarrow CI \perp (P)$$

Phương trình mặt phẳng (P) qua I có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{IC} = (3; 2; 1)$ có dạng:

$$3(x-3) + 2(y-0) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 11 = 0$$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất có phương trình là:

A. $6x + 3y + 2z = 0$. B. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

C. $x + 2y + 3z - 14 = 0$. D. $x + y + z - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $(a, b, c > 0)$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) qua 3 điểm A, B, C có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có: $M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Thể tích tứ diện $OABC$: $V = \frac{1}{6}abc$.

Áp dụng BDT Côsi ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27 \cdot 6}{abc} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27 \Rightarrow V \geq 27$.

V đạt giá trị nhỏ nhất là: $V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$

Vậy $(P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm phẳng B', C', D' sao cho



$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

B. $16x + 40y + 44z - 39 = 0$.

C. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$.

D. $16x - 40y - 44z - 39 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy* ba s ta có: $4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt{\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}}$

$$\Rightarrow \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64} V_{ABCD}$$

Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \Rightarrow B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua $B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-3; -1; -2); \overrightarrow{BD} = (-2; 3; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (4; 10; -11)$

Phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ qua $B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$ có vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (4; 10; -11)$ là:

$16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1;1;1), N(-1;-2;-1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

A. $16x + 10y - 11z - 15 = 0$.

B. $16x + 10y - 11z + 5 = 0$.

C. $x - y + z - 1 = 0$.

D. $24x + 2y - 27z + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $\vec{n} = (a; b; c)$ là vec-tơ pháp tuyến của (α) .

Do mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1;1;1), N(-1;-2;-1)$ nên $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$

$$\Leftrightarrow -2a - 3b - 2c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{2a + 3b}{2}.$$

Gọi φ là góc giữa (α) và Δ . Khi đó

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|2a + b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{|6a + 5b|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8a^2 + 12ab + 13b^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{36a^2 + 60ab + 25b^2}{8a^2 + 12ab + 13b^2}}.$$

φ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \varphi$ đạt giá trị lớn nhất.



Nếu $b = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nếu $b \neq 0$, đặt $t = \frac{a}{b}$ thì $\frac{36a^2 + 60ab + 25b^2}{8a^2 + 12ab + 13b^2} = \frac{36t^2 + 60t + 25}{8t^2 + 12t + 13} = f(t)$.

Khi đó $\max f(t) = \frac{77}{17} \Leftrightarrow t = 12$. Do đó $\frac{a}{b} = 12$. Chọn $a = 24, b = 2 \Rightarrow c = -27$.

Mặt phẳng (α) đi qua $M(1;1;1)$, nhận $\vec{n} = (24;2;-27)$ làm vec-tơ pháp tuyến, nên có phương trình là $24(x-1) + 2(y-1) - 27(z-1) = 0 \Leftrightarrow 24x + 2y - 27z + 1 = 0$.

Câu 42: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và cắt các trục tọa độ lần lượt tại A, B, C . Viết phương trình mặt phẳng (P) biết biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x - 2y + z - 8 = 0$. B. $2x + y - 3z + 9 = 0$.

C. $x - 2y + 3z - 14 = 0$. D. $2x - 4y + z - 10 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi đó $OH \perp (ABC)$.

Do OH là đường cao của tứ diện $O.ABC \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Suy ra $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi OH đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow OH = OM$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với OM nên nhận $\vec{OM} = (1;-2;3)$ làm vec-tơ pháp tuyến, có phương trình là $1(x-1) - 2(y+2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0), B(3;3;6)$ và đường thẳng

$d \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ

nhất. Khi đó tọa độ điểm M và chu vi tam giác MAB là

A. $M(1;0;2); P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$.

B. $M(1;2;2); P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$.

C. $M(1;0;2); P = (\sqrt{11} + \sqrt{29})$.

D. $M(1;2;2); P = (\sqrt{11} + \sqrt{29})$.

Lời giải

Chọn A

Độ dài $AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} = 2\sqrt{11}$.

Chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi $MA + MB$ nhỏ nhất.

Gọi tọa độ của M là $(-1+2a; 1-a; 2a)$.



$$MA + MB = \sqrt{(-2+2a)^2 + (-4-a)^2 + 4a^2} + \sqrt{(-4+2a)^2 + (-2-a)^2 + (2a-6)^2}$$

$$MA + MB = \sqrt{9a^2 + 20} + \sqrt{9a^2 - 36a + 56} = \sqrt{(3a)^2 + (\sqrt{20})^2} + \sqrt{(6-3a)^2 + (\sqrt{20})^2}$$

Xét véc tơ $\vec{u} = (a; b); \vec{v} = (c; d)$.

$$\text{Ta có } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

$$\Rightarrow MA + MB \geq \sqrt{(3a+6-3a)^2 + (\sqrt{20} + \sqrt{20})^2} = 2\sqrt{29}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{3a}{6-3a} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow M(1; 0; 2) \Rightarrow P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$$

Câu 44: Cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$ và $B(7; -2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Gọi I là điểm trên d sao cho $AI + BI$ nhỏ nhất. Tìm tổng các tọa độ của I .

A. 11.

B. 9

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Do điểm $I \in d$ nên tọa độ điểm I có dạng $I(3a-2; -2a+3; 2a+1)$.

$$P = AI + BI = \sqrt{(3a-1)^2 + (1-2a)^2 + (2a-2)^2} + \sqrt{(3a-9)^2 + (5-2a)^2 + (2a-2)^2}$$

$$P = \sqrt{17a^2 - 18a + 6} + \sqrt{17a^2 - 82a + 110}$$

$$P = \sqrt{17} \left(\sqrt{a^2 - \frac{18}{17}a + \frac{6}{17}} + \sqrt{a^2 - \frac{82}{17}a + \frac{110}{17}} \right)$$

$$P = \sqrt{17} \left(\sqrt{\left(a - \frac{9}{17}\right)^2 + \frac{21}{289}} + \sqrt{\left(a - \frac{41}{17}\right)^2 + \frac{189}{289}} \right)$$

$$P = \sqrt{17} \left(\sqrt{\left(a - \frac{9}{17}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{17}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{41}{17} - a\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{21}}{17}\right)^2} \right)$$

Xét véc tơ $\vec{u} = (a; b); \vec{v} = (c; d)$.

$$\text{Ta có } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

$$\text{Do đó } P \geq \sqrt{17} \sqrt{\left(a - \frac{9}{17} + \frac{41}{17} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{17} + \frac{3\sqrt{21}}{17}\right)^2} = \sqrt{17} \sqrt{\frac{32^2}{17^2} + \frac{16 \cdot 21}{17^2}} = 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{a - \frac{9}{17}}{\frac{41}{17} - a} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{17}}{\frac{3\sqrt{21}}{17}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\left(a - \frac{9}{17}\right) = \frac{41}{17} - a \Rightarrow a = 1.$$



Vậy tổng các tọa độ của I là $3.1 - 2 - 2.1 + 3 + 2.1 + 1 = 5$.

Câu 45: Cho $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và các điểm $A(3;0;0)$; $B(0;-6;0)$; $C(0;0;6)$. M là điểm thuộc d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất. Khi đó MA^2 bằng:

- A. 2. B. 3. **C. 4.** D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Điểm $M \in d \Rightarrow M(1+2t; t; t)$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (2-2t; -t; -t)$$

$$\overrightarrow{MB} = (-1-2t; 6-t; -t)$$

$$\overrightarrow{MC} = (-1-2t; -t; 6-t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-6t, -6-3t; 6-3t)$$

$$\text{Do đó: } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(-6t)^2 + (-6-3t)^2 + (6-3t)^2} = \sqrt{54t^2 + 72} \geq \sqrt{72}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; 0; 0)$$

$$\text{Vậy } MA^2 = 4$$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ và ba

điểm $A(1;1;2)$; $B(-1;1;1)$; $C(3;1;0)$. M là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng các tọa độ của M là:

- A. $\frac{36}{7}$.** B. 11. C. 12. D. $\frac{55}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Điểm $M \in d \Rightarrow M(4+3t; 1-t; 5+2t)$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (-3-3t; -t; -3-2t)$$

$$\overrightarrow{MB} = (-5-3t; -t; -4-2t)$$

$$\overrightarrow{MC} = (-1-3t; -t; -5-2t)$$

$$\text{Do đó } P = MA^2 + MB^2 + MC^2 = 42t^2 + 102t + 85 = 42 \left(t + \frac{17}{14} \right)^2 + \frac{323}{14} \geq \frac{323}{14}$$



$$\Rightarrow P_{\min} = \frac{323}{14} \Leftrightarrow t = -\frac{17}{14} \Rightarrow M\left(\frac{5}{14}; \frac{31}{14}; \frac{18}{7}\right)$$

Vậy tổng các tọa độ của M là $\frac{36}{7}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$ và ba

điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. M là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng bình phương các tọa độ của M là:

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa } \vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 6x_I = x_A + 2x_B + 3x_C \\ 6y_I = y_A + 2y_B + 3y_C \\ 6z_I = z_A + 2z_B + 3z_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 1 \\ z_I = 2 \end{cases} \longrightarrow I(1;1;2).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = \vec{MI} + \vec{IA}^2 + 2\vec{MI} + \vec{IB}^2 + 3\vec{MI} + \vec{IC}^2 \\ &= 6IM^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + 3\vec{MI} \cdot \vec{IC} + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 6IM^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2. \end{aligned}$$

Khi đó P đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 6IM^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM^2$ nhỏ nhất.

Vì $M \in d \Rightarrow M(1-t; 2+t; -t)$. Suy ra $\vec{IM} = (-t; 1+t; -t-2)$.

$$\text{Ta có } IM^2 = (-t)^2 + (1+t)^2 + (-t-2)^2 = 3t^2 + 6t + 5 = 3(t+1)^2 + 2 \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = -1$. Suy ra $M(2;1;1)$.

Vậy tổng bình phương các tọa độ của M là: 6.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+t \\ z=2t \end{cases}$ và

hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$. M là điểm thuộc d sao cho diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó hoành độ của M là:

A. $-\frac{12}{7}$.

B. $\frac{12}{7}$.

C. $\frac{11}{7}$.

D. $-\frac{11}{7}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } M \in d \Rightarrow M(1-m; -2+m; 2m) \longrightarrow \vec{AM} = (-m; m-6; 2m-2) \text{ và } \vec{AB} = (-2; -2; 2).$$



Khi đó $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}] = -6m + 16; 2m - 4; -4m + 12$.

Ta có diện tích $\triangle MAB$ là: $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{2} \sqrt{8 \left(\sqrt{7}m - \frac{19}{\sqrt{7}} \right)^2 + \frac{24}{7}} \geq \frac{\sqrt{42}}{7}$.

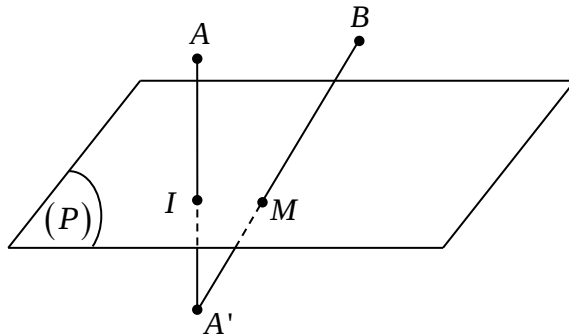
Do đó: $\min S_{\triangle MAB} = \frac{\sqrt{42}}{7}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{7}m - \frac{19}{\sqrt{7}} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{19}{7}$.

Vậy khi diện tích tam giác MAB nhỏ nhất thì hoành độ của M là: $1 - \frac{19}{7} = -\frac{12}{7}$.

Câu 49: Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất, biết $A(1; 0; 0), B(1; 2; 0)$.

- A. $M(1; 1; 2)$ B. $M(0; 1; 3)$ C. $M(2; 0; 2)$ D. $M\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải



Chọn D

Ta thấy rằng điểm A và B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) nên ta sẽ lấy điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) . Vectơ chỉ phương của đường thẳng AA' là $\vec{u}(1; 1; 1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AA' là $AA': \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, tọa độ I là giao điểm của đường

thẳng AA' và mặt phẳng (P) là $I(2; 1; 1) \Rightarrow A'(3; 2; 2)$

Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi điểm $M = A'B \cap (P)$

Ta có phương trình đường thẳng $A'B: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$

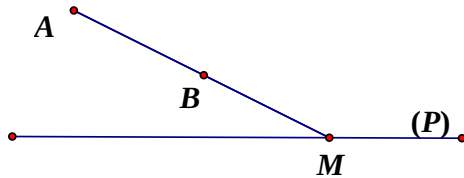
Câu 50: Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất, biết $A(1; 1; 1), B(1; 1; 0)$.

- A. $M(1; 2; 1)$. B. $M(0; 2; 2)$. C. $M(1; 1; 2)$. D. $M(3; 1; 0)$.

Lời giải



Chọn C



Ta có $(1+1+1-4).(1+1+0-4) > 0$ nên $\{M\} = AB \cap (P)$. Minh nghĩ đoạn này thầy giải thích vì sao M là giao của AB với (P) bằng cách sử dụng bất đẳng thức tam giác. Đường thẳng (AB) qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = 0;0;-1$.

Phương trình (AB): $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$. Xét hệ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1-t \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$.

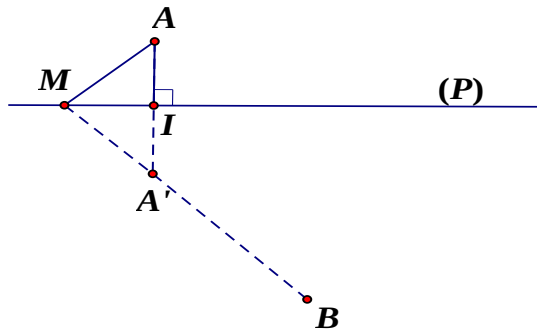
Suy ra $M(1;1;2)$.

Câu 51: Cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất, biết $A(1;1;1)$, $B(0;1;5)$.

A. $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$. B. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $M\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{7}{3}\right)$. D. $M\left(\frac{10}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(1+1+1-4).(0+1+5-4) < 0$ nên A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng với $A(1;1;1)$.

$|MA-MB| \leq |MA'-MB| \leq A'B$ do đó $|MA-MB|$ lớn nhất khi $\{M\} = A'B \cap (P)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $A(1;1;1)$ và vuông góc với P . Phương trình $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$



$$\text{Gọi } I = \Delta \cap P. \text{ Xét hệ } \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Khi đó I là trung điểm AA' suy ra tọa độ $A'\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Đường thẳng BA' qua điểm $B(0;1;5)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BA'} = \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{10}{3}\right)$.

$$\text{Phương trình } BA' : \begin{cases} x=\frac{5}{3}t \\ y=1+\frac{2}{3}t \\ z=5-\frac{10}{3}t \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x=\frac{5}{3}t \\ y=1+\frac{2}{3}t \\ z=5-\frac{10}{3}t \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{7}{3} \\ z=-\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $M\left(\frac{10}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Câu 52: Cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất, biết $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$.

A. $M\left(\frac{5}{9}; \frac{14}{9}; \frac{17}{9}\right)$. **B.** $M\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; 2\right)$. **C.** $M(1;1;2)$. **D.** $M\left(\frac{4}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

- Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I = \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

- Khi đó: $MA^2 + 2MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 = 3MI^2 + 2$
 $\Rightarrow MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) . Khi đó MI là đường thẳng đi qua I và nhận vectơ pháp tuyến của (P) làm vectơ chỉ phương



Suy ra MI có phương trình
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{4}{3} + t \\ z = \frac{5}{3} + t \end{cases}$$

- Điểm M có tọa độ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{4}{3} + t \\ z = \frac{5}{3} + t \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{9} \\ x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{14}{9} \\ z = \frac{17}{9} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{5}{9}; \frac{14}{9}; \frac{17}{9} \right).$$

Câu 53: Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất, biết $A(1; 2; 1)$, $B(0; 1; 4)$.

A. $M\left(\frac{1}{9}; \frac{10}{9}; \frac{25}{9}\right)$. **B.** $M\left(0; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **C.** $M\left(1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. **D.** $M(1; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

- Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I = \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 3\right)$

- Khi đó:

$$MA^2 + 2MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 = 3MI^2 + \frac{22}{3}$$

$\Rightarrow MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) . Khi đó MI là đường thẳng đi qua I và nhận vector pháp tuyến của (P) làm vector chỉ phương

Suy ra MI có phương trình
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{4}{3} + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$



- Điểm M có tọa độ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{4}{3} + t \\ z = 3 + t \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{9} \\ x = \frac{1}{9} \\ y = \frac{10}{9} \\ z = \frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{1}{9}; \frac{10}{9}; \frac{25}{9}\right).$$

Câu 54: Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất, biết $A(1;1;1)$, $B(1;2;0)$, $C(0;0;3)$.

- A. $M(1;1;2)$. B. $M\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. C. $M\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$. D. $M\left(\frac{3}{3}; 1; \frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

- Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right)$

- Khi đó: $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |6\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}| = 6|\overrightarrow{MI}| = 6.IM$

$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) . Khi đó MI là đường thẳng đi qua I và nhận vectơ pháp tuyến của (P) làm vectơ chỉ phương

Suy ra MI có phương trình
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{7}{6} + t \\ z = \frac{7}{6} + t \end{cases}$$

- Điểm M có tọa độ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{7}{6} + t \\ z = \frac{7}{6} + t \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 55: Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất, biết $A(1;2;1)$, $B(1;2;0)$, $C(0;0;3)$.



A. $M(1;1;2)$. B. $M\left(\frac{17}{12}; \frac{7}{12}; 1\right)$. C. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{5}; 3\right)$. D. $M\left(\frac{19}{24}; \frac{31}{24}; \frac{23}{12}\right)$.

Lời giải

Chọn D

- Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{13}{8}\right)$

- Khi đó: $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |8\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}| = 8|\overrightarrow{MI}| = 8IM$

$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) . Khi đó MI là đường thẳng đi qua I và nhận vectơ pháp tuyến của (P) làm vectơ chỉ phương

Suy ra MI có phương trình
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 1 + t \\ z = \frac{13}{8} + t \end{cases}$$

- Điểm M có tọa độ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 1 + t \\ z = \frac{13}{8} + t \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7}{24} \\ x = \frac{19}{24} \\ y = \frac{31}{24} \\ z = \frac{23}{12} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{19}{24}; \frac{31}{24}; \frac{23}{12}\right).$$

Câu 56: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai đường chéo nhau $d_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-11}{-1}$

$d_2: \frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$, Tìm điểm I không thuộc $d_1; d_2$ sao cho $d(I; d_1) + d(I; d_2)$ nhỏ nhất.

A. $I(5; 2; 5)$. B. $I(7; 3; 9)$ C. $I(7; -2; -11)$. D. $I(-7; 2; 11)$

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số d_1 là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 11 - t \end{cases}$; Phương trình tham số d_2 là $\begin{cases} x = -4 - 7u \\ y = 3 + 2u \\ z = 4 + 3u \end{cases}$;

$d_1; d_2$ lần lượt có vtcp là $\vec{u}_1(1; 2; -1), \vec{u}_2(-7; 2; 3)$. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của $d_1; d_2$ với $A(5+t; -1+2t; 11-t); B(-4-7u; 3+2u; 4+3u)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7u-t-9; 2u-2t+4; 3u+t-7)$.



$$\text{Mà } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6u - 6t + 6 = 0 \\ 62u + 6t + 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ suy ra: } A(7;3;9); B(3;1;1).$$

$d(I; d_1) + d(I; d_2) \geq AB$ đẳng thức xảy ra khi I thuộc đoạn AB . Mà với $I(5;2;5)$ thì

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}. \text{ Chọn A}$$

Câu 57: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $A(-1;3;4), B(2;1;2)$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{1}{2}; 2; 3\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{2}; -1; -1\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{2}; 1; 1\right)$. **D.** $M(-3; 2; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của AB suy ra tọa độ $I\left(\frac{1}{2}; 2; 3\right)$.

Ta có: $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI}| = 2MI \geq 0$ đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I$ **Chọn A**

Câu 58: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;0;-3); B(-1;-2;4); C(2;-1;2)$. Tìm điểm E sao cho biểu thức $P = |\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $E(1;1;1)$. **B.** $E(1;-1;1)$. **C.** $E(-1;-2;-1)$. **D.** $E(0;2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;-1;1)$.

Ta có: $P = |\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}| = |3\overrightarrow{EG}| = 3EG \geq 0 \Rightarrow P_{\min} = 0$ khi $E \equiv G(1;-1;1)$.

Câu 59: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho 4 điểm $A(0;1;5); B(2;0;0); C(0;0;6); D(2;4;-3)$. Tìm điểm E sao cho biểu thức $P = |\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $E\left(1; \frac{5}{4}; 2\right)$. **B.** $E\left(0; -3; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $E(-1; -3; 0)$. **D.** $E(2; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G\left(1; \frac{5}{4}; 2\right)$.

Ta có: $P = |\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}| = |4\overrightarrow{EG}| = 4EG \geq 0$

$\Rightarrow P_{\min} = 0$ khi $E \equiv G\left(1; \frac{5}{4}; 2\right)$.



Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$. Tìm M trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất.

A. $M\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. **B.** $M\left(\frac{-11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right)$. **C.** $M\left(\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 10$.

Khoảng cách từ I đến (P) là $d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 6 < R$ nên (P) cắt (S) theo giao

tuyến là một đường tròn (C) .

Với điểm M bất kì trên (S) thì ta có $d(M, (P)) \leq MI + d(I, (P)) = 16$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của (S) và đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P) .

Đường thẳng d vuông góc với (P) nên có VTCP $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (2; -2; -1)$.

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow M(3 + 2t; -2 - 2t; 1 - t) \in d$.

Lại có $M \in (S) \Rightarrow 4t^2 + 4t^2 + t^2 = 100 \Leftrightarrow t = \pm \frac{10}{3}$.

+) Với $t = \frac{10}{3} \Rightarrow M\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ khi đó $d(M, (P)) = 16$ (thỏa mãn).

+) Với $t = -\frac{10}{3} \Rightarrow M\left(\frac{-11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right)$ khi đó $d(M, (P)) = 4$ (không thỏa mãn).

Vậy $M\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 3; 4)$; $B(-2; -3; 0)$; $C(2; 3; 0)$

Gọi I là tâm mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C . Tìm I để mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

A. $I(0; 0; 2)$. **B.** $I(2; 3; 2)$. **C.** $I(0; 0; 0)$. **D.** $I(-2; 3; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB = \sqrt{68}$, $AC = 4$, $BC = \sqrt{52}$.

Ta thấy $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 68$ nên tam giác ABC vuông tại C .

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì J là trung điểm của AB do đó $J(0; 0; 2)$.

Mặt cầu tâm I có bán kính $R = IA \geq JA = \sqrt{17}$ nên mặt cầu có bán kính nhỏ nhất thỏa mãn đề bài có tâm I trùng với điểm J . Vậy $I(0; 0; 2)$.



Câu 62: Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, với $A(0;0;0); B(0;1;0)$
 $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right); A'(0;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc cạnh AA' sao cho diện tích tam giác $MC'D$ đạt giá trị lớn nhất, với D là trung điểm của BB' .

- A.** $M(0;0;0)$. **B.** $M(0;0;2)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A, A' \in Oz$, $M \in AA'$, gọi $M(0;0;m), 0 \leq m \leq 2$.

Do $ABC.A'B'C'$ lăng trụ đứng nên $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.

Suy ra, $B'(0;1;2); C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$. Vì D là trung điểm của BB' nên $D(0;1;1)$.

Suy ra, $\overline{MC'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 2-m\right); \overline{MD} = (0; 1; 1-m)$

$\Rightarrow [\overline{MC'}, \overline{MD}] = \left(\frac{1}{2}m - \frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}m - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, do đó $S_{\Delta MC'D} = \frac{1}{2} \left| [\overline{MC'}, \overline{MD}] \right|$

$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(m-3)^2 + \frac{3}{4}(m-1)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \sqrt{4m^2 - 12m + 15}$.

Xét hàm số $f(m) = 4m^2 - 12m + 15$ trên $[0; 2]$ có $f'(m) = 8m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \in [0; 2]$.

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	15	6	7

Dựa vào bbt có diện tích tam giác $MC'D$ đạt giá trị lớn nhất khi $m = 0$.

Vậy $M(0;0;0)$.

Câu 63: Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và hai điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$

- A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C





$$DC = BD\sqrt{2} = 2AB$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x_C + 1; y_C - 3; z_C - 2) = (4; 4; 2) \Leftrightarrow C(3; 7; 4).$$

Câu 65: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t_1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t_2 \\ z = 0 \end{cases}, d_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t_3 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3; 2; 1)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC .

A. $2x + 2y + z - 11 = 0$. **B.** $x + y + z - 6 = 0$. **C.** $2x + 2y - z - 9 = 0$. **D.** $3x + 2y + z - 14 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(a; 0; 0), B(1; b; 0), C(1; 0; c)$.

$$\overrightarrow{AB} = (1-a; b; 0), \overrightarrow{BC} = (0; -b; c), \overrightarrow{CH} = (2; 2; 1-c), \overrightarrow{AH} = (3-a; 2; 1).$$

H là trực tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bc + 2c(a-1) + (1-c)b(a-1) = 0 \\ a = b+1 \\ c = 2b \end{cases} \Rightarrow 9b^2 - 2b^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Nếu $b = 0$ suy ra $B \equiv C$ (loại).

Nếu $b = \frac{9}{2}$, tọa độ $A\left(\frac{11}{2}; 0; 0\right), B\left(1; \frac{9}{2}; 0\right), C(1; 0; 9)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC)

là $2x + 2y + z - 11 = 0$.

Câu 66: (NGUYỄN KHUYẾN TP HCM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(m; 0; 0), D(0; m; 0), A'(0; 0; n)$ với $m, n > 0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{245}{108}$.

B. $\frac{9}{4}$.

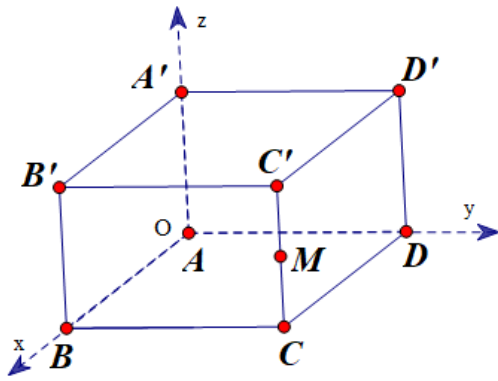
C. $\frac{64}{27}$.

D. $\frac{75}{32}$.

Lời giải

Chọn C





Ta có $A'(0;0;n); B(m;0;0); D(0;m;0); C'(m;m;n); C(m;m;0); M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$ với $0 < m, n < 4$.

Khi

đó

$$\overrightarrow{BD}(-m;m;0); \overrightarrow{BA'}(-m;0;n); \overrightarrow{BM}\left(0;m;\frac{n}{2}\right); [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (mn; mn; m^2); [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}m^2.n$$

khác,

$$V = V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \overrightarrow{BM}| = \frac{1}{4} m^2.n = \frac{1}{4} m^2(4-m) = \frac{1}{4} (-m^3 + 4m^2) \Rightarrow V' = \frac{1}{4} (-3m^2 + 8m)$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy V đạt giá trị lớn nhất là $\frac{64}{27}$ tại $m = \frac{8}{3}, n = \frac{4}{3}$.

Câu 67: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 7 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là

A. $V = \frac{27}{8}$.

B. $V = \frac{81\sqrt{3}}{8}$.

C. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

D. $V = \frac{64}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi a là độ dài của cạnh của hình lập phương.

Gọi $(\alpha): 4x - 4y + 2z - 7 = 0, (\beta): 2x - 2y + z + 1 = 0$.

Cạnh của hình lập phương là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho.

Lấy $A\left(0;0;\frac{7}{2}\right)$ thuộc mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 7 = 0$.

$$\text{Khi đó } a = d(A;(\beta)) = \frac{\left|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + \frac{7}{2} + 1\right|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$



Vậy thể tích hình lập phương là: $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Câu 68: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và

đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ

dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$.

B. 4.

C. 2.

D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Do hai điểm A, B cố định nên chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi $CA+CB$ nhỏ nhất.

Gọi $C(t;0;2-t) \in d$, ta có

$$\overrightarrow{CA} = (2-t; 3; t-2) \Rightarrow |AC| = \sqrt{2t^2 - 8t + 17} = \sqrt{(\sqrt{2}t - 2\sqrt{2})^2 + 9};$$

$$\overrightarrow{CB} = (-t; -\sqrt{2}; t-2) \Rightarrow |CB| = \sqrt{2t^2 - 4t + 6} = \sqrt{(\sqrt{2}t - \sqrt{2})^2 + 4}.$$

Trong mặt phẳng Oxy xét hai vectơ $\vec{u} = (\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}; 3)$ và $\vec{v} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}t; 2)$. Ta luôn có

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2}t - 2\sqrt{2})^2 + 9} + \sqrt{(\sqrt{2}t - \sqrt{2})^2 + 4} \geq \sqrt{(\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + 25}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}t}{\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = \frac{7}{5}.$$

$$\text{Với } t = \frac{7}{5} \text{ thì } C\left(\frac{7}{5}; 0; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{1}{5}; -\sqrt{2}; \frac{7}{5}\right) \Rightarrow |CM| = \sqrt{\frac{1}{25} + 2 + \frac{49}{25}} = 2.$$

Câu 69: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ $(P): x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

B. $N(-2;0;1)$.

C. $N\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -2\right)$.

D. $N\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ khi đó ta có
$$\begin{cases} 2(1-x) - x - 2 - x = 0 \\ 2(1-y) + 1 - y - y = 0 \\ 2(1-z) + 2 - z + 1 - z = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{4} \Rightarrow I\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right) \\ z=\frac{5}{4} \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2(\overline{NI} + \overline{IA})^2 + (\overline{NI} + \overline{IB})^2 + (\overline{NI} + \overline{IC})^2 \\ &= 4NI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overline{NI}(\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC}) = 4NI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Do I, A, B, C cố định nên $S = 4NI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2$ nhỏ nhất khi NI nhỏ nhất hay N là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $I\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) khi đó

$$\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=\frac{3}{4}-t \\ z=\frac{5}{4}+t \end{cases}$$

Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x=t \\ y=\frac{3}{4}-t \\ z=\frac{5}{4}+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-\left(\frac{3}{4}-t\right)+t+\frac{5}{4}+1=0 \\ x=t \\ y=\frac{3}{4}-t \\ z=\frac{5}{4}+t \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right).$$

Câu 70: (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=1, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=2 \\ y=u, u \in \mathbb{R} \\ z=1+u \end{cases}; \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}. \text{ Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc}$$

với cả d_1, d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$

B. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

D. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$



Lời giải

Chọn A

Ta có $M_1(1;1;0) \in d_1$, vec tơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là: $\vec{u}_1(0;0;1)$.

$M_2(2;0;1) \in d_2$, vec tơ chỉ phương của đường thẳng d_2 là: $\vec{u}_2(0;1;1)$.

Giả sử mặt cầu có tâm là I và bán kính R . Do $I \in \Delta$ suy ra $I(1+t;t;1+t)$. Ta tính được:

$$\overrightarrow{M_1 I}(t-1;-t;0), \overrightarrow{M_2 I}(0;1-t;t-1)$$

Mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 nên ta có

$$d(I, d_1) = d(I, d_2) = R \Leftrightarrow \frac{\|\overrightarrow{M_1 I}, \vec{u}_1\|}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{\|\overrightarrow{M_2 I}, \vec{u}_2\|}{\|\vec{u}_2\|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(t-1)^2 + t^2}}{1} = \frac{\sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $I(1;0;1)$ và bán kính của mặt cầu là: $R=1$.

Vậy phương trình của mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 71: (LANG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;0;2); B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$. **B.** $M\left(-\frac{6}{11}; -\frac{18}{11}; \frac{25}{11}\right)$.

C. $M\left(\frac{7}{6}; \frac{7}{6}; \frac{31}{4}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}; \frac{18}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Dễ kiểm tra được hai điểm A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) .

Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) , ta có:

$$MA+MB = MA'+MB \geq A'B. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } M = A'B \cap (P).$$

Ta có $\vec{n}(1;2;-2)$ là một vtpt của mặt phẳng (P) . Phương trình đường thẳng AA' qua A nhận $\vec{n}(1;2;-2)$ làm vtcp, có dạng:

$$AA': \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 2-2t \end{cases}.$$

Gọi $H = AA' \cap (P)$, suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 2-2t \\ 2x+2y-2z+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 4 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow H(0;-2;4)$$



Do A' đối xứng với điểm A qua $H \Rightarrow A'(-1; -4; 6)$.

Ta có $\overrightarrow{A'B}(1; 3; 4)$ là vtcp của đường thẳng $A'B$, nên phương trình đường thẳng $A'B$ có dạng :

$$A'B: \begin{cases} x = m \\ y = -1 + 3m \\ z = 2 - 4m \end{cases}$$

Do $M = A'B \cap (P)$, nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = m \\ y = -1 + 3m \\ z = 2 - 4m \\ x + 2y - 2z + 12 = 0 \end{cases} \quad \text{giải hệ ta tìm được } M\left(-\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}; \frac{18}{5}\right).$$

Câu 72: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với Δ là

A. $d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

B. $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

C. $d: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

D. $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

Đặt $A = \Delta \cap d \Rightarrow A \in d$ mà $d \subset (P) \Rightarrow A \in (P) \Rightarrow A = \Delta \cap (P)$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \\ x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = -2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-2; -1; 4).$$

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 2)$. Gọi $\vec{u}_1$ là vectơ chỉ phương của d .

Ta có: $\begin{cases} d \subset (P) \\ d \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \perp \vec{u} \\ \vec{u}_1 \perp \vec{n} \end{cases}$, chọn $\vec{u}_1 = [\vec{n}, \vec{u}] = (-4; 3; -1)$.



Phương trình đường thẳng d qua $A(-2;-1;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-4;3;-1)$:

$$\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 73: Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C mà $OA=OB=OC \neq 0$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, điều kiện: $abc \neq 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$OA=OB=OC \Leftrightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} = \sqrt{c^2} \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| (*)$$

⊙ Trường hợp 1: a, b, c cùng dấu.

Từ $(*) \Rightarrow a=b=c \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow x+y+z-a=0$.

$M(1;-3;2) \in (P) \Rightarrow 1-3+2-a=0 \Leftrightarrow a=0$ (loại). Do đó: không tồn tại mặt phẳng (P) trong trường này.

⊙ Trường hợp 2: a cùng dấu b và trái dấu với c .

Từ $(*) \Rightarrow a=b=-c \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow x+y-z-a=0$.

$$M(1;-3;2) \in (P) \Rightarrow 1-3-2-a=0 \Leftrightarrow a=-4 \Rightarrow (P): x+y-z+4=0.$$

⊙ Trường hợp 3: a cùng dấu c và trái dấu với b .

Từ $(*) \Rightarrow a=c=-b \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow x-y+z-a=0$.

$$M(1;-3;2) \in (P) \Rightarrow 1+3+2-a=0 \Leftrightarrow a=7 \Rightarrow (P): x-y+z-7=0.$$

⊙ Trường hợp 4: b cùng dấu c và trái dấu với a .

Từ $(*) \Rightarrow b=c=-a \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(P): -\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow -x+y+z-a=0$.

$$M(1;-3;2) \in (P) \Rightarrow -1-3+2-a=0 \Leftrightarrow a=-2 \Rightarrow (P): -x+y+z+2=0.$$

Vậy từ các trường hợp trên có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 74: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $E(8;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC



A. $x + y + 2z - 11 = 0$. B. $8x + y + z - 66 = 0$. C. $2x + y + z - 18 = 0$. **D. $x + 2y + 2z - 12 = 0$.**

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), a, b, c > 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (α) đi qua điểm $E(8; 1; 1)$ nên ta có $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$.

$$OG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\text{Ta có } 1 = \frac{4^2}{2a} + \frac{1^2}{b} + \frac{1^2}{c} \geq \frac{(4+1+1)^2}{2a+b+c} \Rightarrow 2a+b+c \geq 36.$$

$$\text{Ta có } (2^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (2a+b+c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36^2}{6}.$$

$$\text{Vậy } OG \text{ nhỏ nhất khi } \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \\ 2a+b+c=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=6 \\ c=6 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $x + 2y + 2z - 12 = 0$.

Câu 75: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có $I(1; 2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} IM \perp d \\ IN \perp d \end{cases} \Rightarrow (IMN) \perp d.$$

Phương trình mặt phẳng (IMN) là $2(x-1) - (y-2) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 4z - 4 = 0$.

Mặt phẳng (IMN) cắt đường thẳng d tại P . Khi đó tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} 2x - y + 4z - 4 = 0 \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4} \end{cases} \Leftrightarrow P(2; 0; 0).$$



Trong mặt phẳng ($IMPN$), gọi $K = MN \cap IP$.

$$\text{Ta có } IP = \sqrt{6}; IM = \sqrt{2} \Rightarrow PM = 2 \Rightarrow MK = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Câu 76: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C khác O . Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54

B. 6

C. 9.

D. 18

Lời giải

Chọn C

Giả sử $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$. Do cắt các tia nên: $a; b; c > 0$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. (P) đi qua $M(1;2;1)$ nên: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{6V}} \Rightarrow V \geq 9$

$$\text{thức Cauchy ta có: } 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{6V}} \Rightarrow V \geq 9$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$. Vậy, **Chọn C**

Câu 77: (THTT - 477) Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều

hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $x + 5y + 2z + 12 = 0$. B. $x + 5y - 2z + 12 = 0$.

C. $x - 5y + 2z - 12 = 0$. **D. $x + 5y + 2z - 12 = 0$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có d_1 đi qua $M_1(2;1;0)$ có vtcp $\vec{u}_1(1;-1;2)$, đường thẳng d_2 đi qua $M_2(2;3;0)$

có vtcp $\vec{u}_2(-2;0;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với d_1 và d_2

thì $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-1;-5;-2) \Rightarrow (P): x + 5y + 2z + D = 0$. Mặt phẳng (P) cách đều d_1 và d_2

$$\text{thì } d(M_1, (P)) = d(M_2, (P)) \Leftrightarrow \frac{|D+7|}{\sqrt{30}} = \frac{|D+17|}{\sqrt{30}} \Leftrightarrow D = -12. \text{ Vậy } (P): x + 5y + 2z - 12 = 0. \text{ Chọn D}$$

Câu 78: (THTT - 477) Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là



A. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Vì (d) cách đều A và B nên (d) nằm trên mặt phẳng trung trực (β) của AB. Gọi M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right) \in mp(\beta)$ đi qua M và vuông góc với AB nên có vtp $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 0)$, phương trình $mp(\beta): 3x + y - 7 = 0$. Đường thẳng (d) là giao tuyến của (α) và (β) nên tập hợp các điểm thuộc (d) có tọa độ $(x; y; z)$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}). \text{ Vậy, } \text{Chọn A}$$

Câu 79: (SỞ GD HÀ NỘI) Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(-2; 0; 3)$, $M(0; 0; 1)$ và $N(0; 3; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P) . Có bao nhiêu mặt phẳng (P) thỏa mãn điều kiện?

A. Có vô số mặt phẳng (P) .

B. Chỉ có một mặt phẳng (P) .

C. Không có mặt phẳng (P) nào.

D. Có hai mặt phẳng (P) .

Lời giải

Chọn A

Giả sử (P) có phương trình là: $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

Vì $M \in (P) \Rightarrow c + d = 0 \Leftrightarrow d = -c$.

Vì $N \in (P) \Rightarrow 3b + c + d = 0$ hay $b = 0$ vì $c + d = 0 \Rightarrow (P): ax + cz - c = 0$.

Theo bài ra: $d(B, (P)) = 2d(A, (P))$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2a + 3c - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 2 \frac{|a - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} \Leftrightarrow |a - c| = |a - c| \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy có vô số mặt phẳng (P) thỏa mãn đề bài. **Chọn A**

Câu 80: Trong không gian, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S = \sqrt{7}$.

B. $S = 4$.

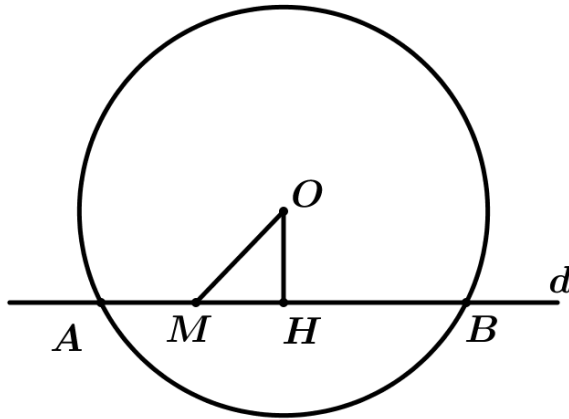
C. $S = 2\sqrt{7}$.

D. $S = 2\sqrt{2}$.



Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2} = OA = OB$.

Kẻ $OH \perp AB$ (H trung điểm AB). Ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = OH \cdot AH = OH \sqrt{R^2 - OH^2}$.

Đặt $OH = x$, ta có $OH \leq OM = 1 \Rightarrow x \in (0;1] \Rightarrow S_{OAB} = x\sqrt{8-x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$, $x \in (0;1]$

$$f'(x) = \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} > 0 \quad \forall x \in (0;1] \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } (0;1].$$

$\Rightarrow \max_{(0;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{7}$ tại $x=1$. Vậy diện tích S_{OAB} lớn nhất $S = \sqrt{7}$.

Câu 81: Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C khác gốc tọa độ sao cho $OA = OB = OC$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ có dạng:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \text{ Vì } M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1 \quad (*).$$

$$\text{Ta có } OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c| \Rightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = c \\ a = -b = -c \end{cases}.$$

Thử lại cả 4 trường hợp vào điều kiện $(*)$ thấy thỏa mãn. Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn

Câu 82: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz



sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P) .

- A. 2017. B. $\frac{2014}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2016}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Lời giải:

Chọn B

Mặt cầu ngoại tiếp $OABC$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

Tâm mặt cầu là $I(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2})$ luôn nằm trên mặt phẳng $(P): \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 1$ hay $x + y + z - 2 = 0$

Do đó khoảng cách $d(M; (P)) = \frac{2014}{\sqrt{3}}$

Câu 83: (SỞ BÌNH PHƯỚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

- A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = \frac{6\sqrt{2}}{7}$

Do mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$d(I; (ABC)) = R \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{7}{2}$$

Theo BĐT bunhiacopski ta có $\frac{7}{2} = \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 \right] \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)^2}{(1^2 + 2^2 + 3^2)} = \frac{7}{2}$

Do đó dấu bằng xảy ra khi $a = 2; b = 1; c = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{OABC} = \frac{abc}{6} = \frac{2}{9}$

Câu 84: Phương trình mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ là nhỏ nhất.



- A. $6x + 3y + 2z + 18 = 0$ B. $6x + 3y + 3z - 21 = 0$
 C. $6x + 3y + 3z + 21 = 0$ D. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(-a; b; 0)$ và $\overrightarrow{AC}(-a; 0; c)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc, ac, ab)$

Suy ra diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$ (1)

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là: $h = d(O, (ABC)) = \frac{|1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra thể tích tứ diện $OABC$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{6} abc \quad (3)$$

Vì điểm $M \in (ABC)$ nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow abc \geq 162 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $V = \frac{1}{6} abc \geq 27$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 3; b = 6; c = 9$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$

Câu 85: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x + y - z + 5 = 0$ và hai điểm $A(1; 0; 2)$, $B(2; -1; 4)$. Tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

- A. $\begin{cases} x - 7y - 4z + 7 = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 7y - 4z + 14 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x - 7y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 3x - 7y - 4z + 5 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$; véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) : $\overrightarrow{n_p} = (3;1;-1)$.

Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0$ suy ra AB song song với mặt phẳng (P) và hai điểm A, B nằm về cùng một phía với mặt phẳng (P) . Điểm $M \in (P)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất, suy

ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(M; AB)$ là nhỏ nhất hay $d(M, AB)$ là nhỏ nhất.

Suy ra $M \in \Delta = (P) \cap (Q)$, với (Q) là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với (P) .

Véctơ pháp tuyến của (Q) là: $\overrightarrow{n_{(Q)}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}] = (-1; 7; 4)$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là:

$$-1(x-1) + 7y + 4(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 7y - 4z + 7 = 0$$

Vậy quỹ tích điểm M là
$$\begin{cases} x - 7y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Câu 86: (CHUYÊN ĐH VINH) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$,

$A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u} = (2;1;6)$. B. $\vec{u} = (1;0;2)$. C. $\vec{u} = (3;4;-4)$. D. $\vec{u} = (2;2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với d là

$$2(x+2) + 2(y+2) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 9 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (α) . Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \\ 2x + 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \text{ Vậy } H(-3; -2; -1).$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với d . Khi đó, $\Delta \subset (\alpha)$. Suy ra khoảng cách từ A đến Δ ngắn nhất khi và chỉ khi Δ đi qua H .

Ta có $\overrightarrow{HA} = (4; 4; -2)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ .

Vậy véc-tơ chỉ phương cần tìm là $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

Câu 87: (MINH HÒA LẦN 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m > 0, n > 0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D . Tính bán kính R của mặt cầu đó?



A. $R=1$.

B. $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $R=\frac{3}{2}$.

D. $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu. Khi đó, bán kính $R=ID=d(I,(ABC))$.

Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{1}=1$.

$$\text{Khi đó, } d(I,(ABC))=\frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{1}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}} \text{ và } ID=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2}.$$

$$\text{Từ } m+n=1 \text{ suy ra } \left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+1=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{2}{mn}+1=\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\frac{2}{mn}+1=\left(\frac{1}{mn}-1\right)^2.$$

$$\text{Như thế } d(I,(ABC))=\frac{|an+bm+cmn-mn|}{|1-mn|}=\frac{|an+bm+cmn-mn|}{1-mn} \text{ (vì } mn\leq\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{1}{4}).$$

Nếu $an+bm+cmn-mn\geq 0$ thì

$$\begin{aligned} d(I,(ABC))=R &\Leftrightarrow \frac{an+bm+cmn-mn}{1-mn}=R \\ &\Leftrightarrow a(1-m)+bm+cm(1-m)-m(1-m)=R[1-m(1-m)] \\ &\Leftrightarrow m^2(1-c-R)+m(b+c-a-1+R)+a-R=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Vì đẳng thức (1) đúng với mọi $m\in(0;1)$ nên

$$\begin{cases} 1-c-R=0 \\ b+c-a-1+R=0 \\ a-R=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=R \\ b=R \\ c=1-R \end{cases}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} ID=R &\Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2}=R \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2(1-R)^2+R^2}=R \\ &\Leftrightarrow 2(1-R)^2=0 \\ &\Leftrightarrow R=1 \end{aligned}$$

Tương tự, nếu $an+bm+cmn-mn<0$ thì ta tìm được $R=-1$ (không thỏa mãn $R>0$)

Vậy bán kính mặt cầu cần tìm là $R=1$.

Câu 88: Cho ba điểm $A(3;1;0), B(0;-1;0), C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

A. $(1;0;-2)$.

B. $(2;-3;0)$.

C. $(3;-2;0)$.

D. $(3;-2;1)$.

Lời giải



Chọn A

Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$.

Thì $\overrightarrow{A'G_2} + \overrightarrow{B'G_2} + \overrightarrow{C'G_2} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

Có $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'G_2} + \overrightarrow{B'G_2} + \overrightarrow{C'G_2} + \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + 3\overrightarrow{G_2G_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2G_1} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow G_2 \equiv G_1$.

Nên hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm

$\Rightarrow G(1;0;-2)$ là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

Câu 89: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-2;1), B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua A , vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u} = (2;1;6)$. B. $\vec{u} = (2;2;-1)$. C. $\vec{u} = (25;-29;-6)$. **D. $\vec{u} = (1;0;2)$.**

Lời giải

Chọn D

Gọi $\vec{u} = (a;b;c)$ là VTCP của Δ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

$\Delta \perp d \Rightarrow 2a + 2b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + 2b \Rightarrow \vec{u} = (a;b;2a+2b)$.

$\overrightarrow{AB} = (3;4;-4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = (8a+12b;-10a-6b;-4a+3b)$

Ta có: $d(B;\Delta) = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(8a+12b)^2 + (10a+6b)^2 + (4a-3b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + (2a+2b)^2}} = \sqrt{\frac{180a^2 + 288ab + 189b^2}{5a^2 + 8ab + 5b^2}}$

Nếu $b=0$ thì $d(B;\Delta) = 6$.

Nếu $b \neq 0$ thì $d(B;\Delta) = \sqrt{\frac{180x^2 + 288x + 189}{5x^2 + 8x + 5}}$ với $x = \frac{a}{b}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{180x^2 + 288x + 189}{5x^2 + 8x + 5}$, tập xác định $D = \mathbb{R}$

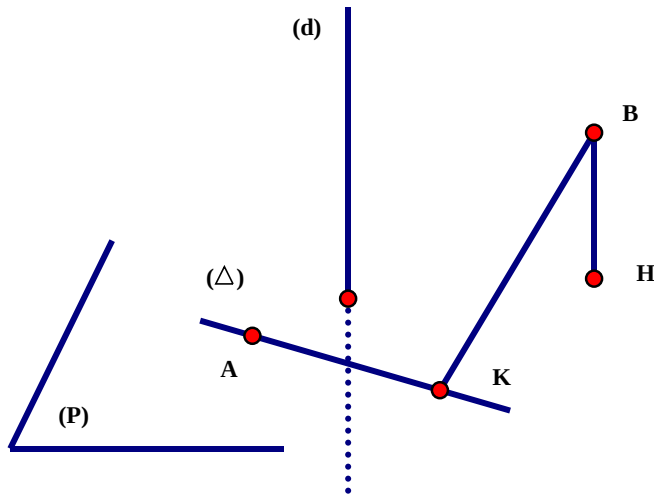
Ta có BBT:

x	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	36	41	36

So sánh hai trường hợp trên ta thấy $d(B;\Delta)$ nhỏ nhất bằng 6 khi $b=0 \Rightarrow c=2a$ nên Δ có 1 VTCP $\vec{u} = (1;0;2)$.



Cách 2: (Nguyễn Trí Chính)



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(-2;-2;1)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{a} = (2;2;-1)$ ($\vec{a} = (2;2;-1)$ là vec tơ chỉ phương của d), nên phương trình (P) là: $2x + 2y - z + 9 = 0$

Gọi (D) là đường thẳng đi qua $B(1;2;-3)$ và vuông góc (P) thì phương trình (D) là:

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Vẽ $BH \perp (P), H \in (P)$.

Giải phương trình: $2(1+2t) + 2(2+2t) - (-3-t) + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t = -18 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3;-2-1)$

Vẽ $BK \perp \Delta, K \in \Delta$, có $d(B, \Delta) = BK$, $d(B, (P)) = BH = \frac{|2+4+3+9|}{3} = 6$

Có $BK \geq BH = 6$.

Do đó BK nhỏ nhất khi $K \equiv H$. Suy ra $K(-3;-2-1)$

Suy ra (Δ) đi qua $A(-2;-2;1)$ và $K(-3;-2-1)$.

Nên vec tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{KA} = (1;0;2)$.

Câu 90: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d .

A. $(P): x + 2y + 5z - 4 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 5z - 5 = 0$.

C. $(P): x + 2y - z - 4 = 0$.

D. $(P): 2x - y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-a;b;0)$

d đi qua $M(2;1;0)$ và có 1 VTCP $\vec{u} = (1;2;-1)$.

$AB \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -a + 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \overrightarrow{AB} = b(-2;1;0) = b \cdot \vec{v}$ với $\vec{v} = (-2;1;0)$.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (1;2;5)$ nên (P) có 1 VTPT $\vec{n} = (1;2;5)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:
 $x + 2y + 5z - 4 = 0$

Câu 91: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN = \sqrt{13}, \angle MON = 60^\circ$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A = m + 2n^2 + p^2$ bằng:

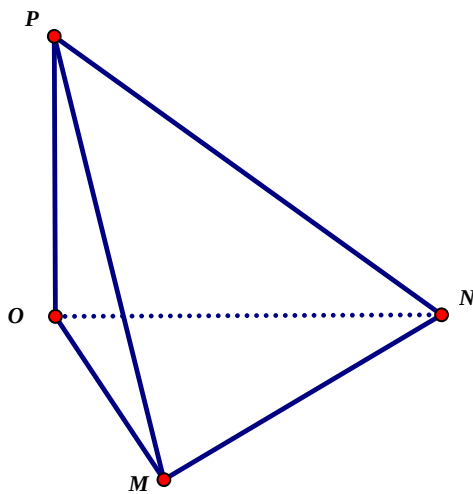
A. 29.

B. 27.

C. 28.

D. 30.

Lời giải



Chọn A

$OM = 3, ON = \sqrt{m^2 + n^2}, OP = |p|, MN = \sqrt{13}$.

Ta có: $MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow 13 = 9 + m^2 + n^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow m^2 + n^2 - 3\sqrt{m^2 + n^2} - 4 = 0, \sqrt{m^2 + n^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + n^2} = 4 \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 16 \quad (1)$.

$MN = \sqrt{13} \Leftrightarrow (m-3)^2 + n^2 = 13 \Leftrightarrow m^2 + n^2 - 6m = 4 \Rightarrow 6m = 12 \Rightarrow m = 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n^2 = 12 \quad (3)$.

Có $OP \perp OM, OP \perp ON$. Suy ra $OP \perp (OMN)$, có $OM = 3, ON = 4, OP = |p|$.

$V_{OMNP} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot OP \cdot \frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin 60^\circ = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6} |p| \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow |p| = \sqrt{3} \Rightarrow p^2 = 3 \quad (4)$.

Từ (2), (3), (4) $A = m + 2n^2 + p^2 = 29$.

Câu 92: Trong không gian $Oxyz$ cho hình vuông $ABCD$; $B(3;0;8); D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc



mặt phẳng Oxy và có tọa độ là số nguyên. Khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng

A. $5\sqrt{10}$.

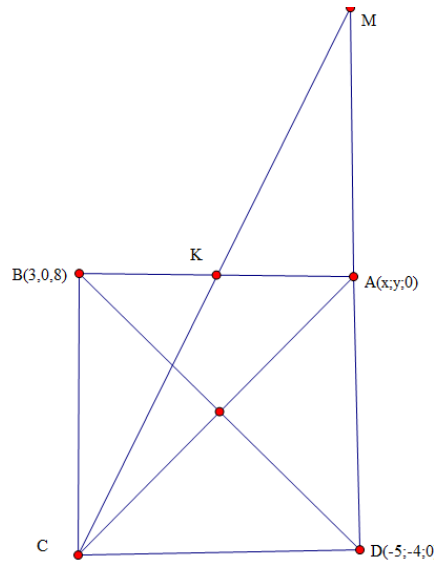
B. $6\sqrt{10}$.

C. $10\sqrt{6}$.

D. $10\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn B



Ta có $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CM}| = 2|\overrightarrow{CK}|$

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-5-3)^2 + (-4-0)^2 + (0-8)^2} = 12$$

$$BD = 12 \Leftrightarrow BC = 6\sqrt{2} \Rightarrow CK = \sqrt{CB^2 + BK^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}CB = 3\sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = 6\sqrt{10}$$

.

Câu 93: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;4;-1); B(1;4;-1); C(2;4;3); D(2;2;-1)$. Biết $M(x; y; z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{MC})^2 + (\overrightarrow{MD})^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \end{aligned}$$



$$= 4MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

Ta có G, A, B, C, D cố định nên $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$ là hằng số.

Để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì MG^2 đạt giá trị nhỏ nhất

$$\min_{MG^2} = 0 \Rightarrow M \equiv G \Rightarrow M \left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0 \right) \Rightarrow x + y + z = 7$$

Câu 94: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6)$, $B(-3;1;8)$, $C(-1;0;7)$, $D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2 .

A. $I(0; -1; -5)$.

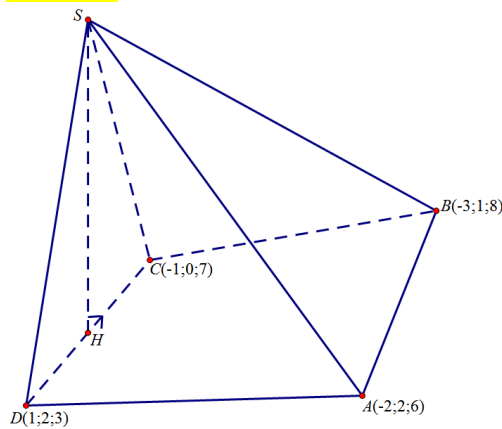
B. $I(1; 0; 5)$.

C. $I(0; 1; 5)$.

D. $I(-1; 0; -5)$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (1; -2; 1) \\ \overrightarrow{AD} = (3; 0; -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (3; 3; 3) \\ [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] = (6; 6; 6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \left(\left\| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right\| + \left\| [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right\| \right) = \frac{1}{2} (3\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

CD có trung điểm $H(0; 1; 5)$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên đường thẳng SH có vtcp $\vec{u} = \vec{n}_{(ABCD)}$

$$= [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (3; 3; 3) \Rightarrow \text{vtcp khác của } SH \text{ là } (1; 1; 1) \Rightarrow SH : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$S \in SH \Rightarrow S(t; 1+t; 5+t) \Rightarrow \overrightarrow{HS} = (t; t; t).$$

$$\text{Theo giả thiết } V_{S.ABCD} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \sqrt{3} |t| \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow |t| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow S_1(3; 4; 8) \\ t = -3 \Rightarrow S_2(-3; -2; 2) \end{cases}. \text{ Vậy } S_1S_2 \text{ có trung điểm } I(0; 1; 5).$$



Câu 95: Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là

A. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2018$.

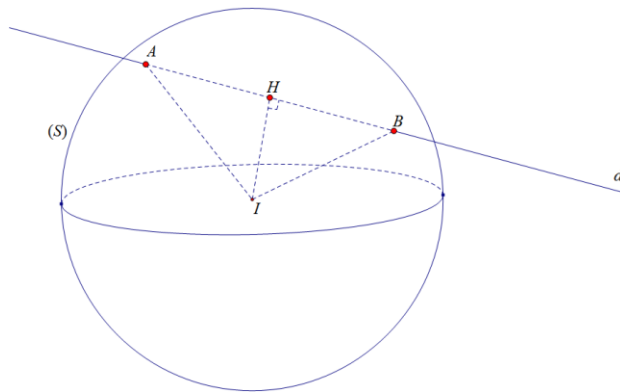
B. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2017$.

C. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2016$.

D. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2019$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow IH \perp AB$.

d có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$ và đi qua $M(1;6;0)$

Ta có $\overrightarrow{IM} = (0; -1; -5) \Rightarrow [\vec{u}; \overrightarrow{IM}] = (8; 10; -2)$.

$$\text{Vậy } IH = d(I; d) = \frac{[\vec{u}; \overrightarrow{IM}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{8^2 + 10^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle IAB} = 2\sqrt{6015} \Leftrightarrow \frac{1}{2} IH \cdot AB = 2\sqrt{6015} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot AB = 2\sqrt{6015} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2005} \\ \Rightarrow HA = \sqrt{2005}.$$

Mặt cầu (S) cần tìm có bán kính $R = IA = \sqrt{HA^2 + IH^2} = \sqrt{2005 + 12} = \sqrt{2017}$

$$\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2017$$

Câu 96: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = 2+t \end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt

đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{2}$.

B. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{3}$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{3}$.

Lời giải



Chọn B

Tam giác IAB là tam giác vuông, mà $IA = IB = R$ nên tam giác IAB vuông cân tại I .

Khi đó $IH = d(I; (d)) = \frac{R}{\sqrt{2}}$ (Với H là hình chiếu của I trên đường thẳng d).

Ta có $H(-1+t; 2t; 2+t)$, $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow H\left(\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow IH = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$.

Câu 97: Cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z+24=0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) . Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H , sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$.

B. $(x+8)^2 + (y+8)^2 + (z-1)^2 = 196$.

C. $(x+16)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 196$.

D. $(x-16)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 196$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng: $\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (d)$.

Khi đó $\{H\} = d \cap (P) \Rightarrow H(-4; 2; 3)$. Ta có $S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 14$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H nên tâm I của mặt cầu thuộc đường thẳng d .

Nên tọa độ $I(2+6t; 5+3t; 1-2t)$ và $IH = 14 \Leftrightarrow (6t+6)^2 + (3+3t)^2 + (-2-2t)^2 = 196 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$.

Khi đó ta được tọa độ điểm $I(8; 8; -1)$. (Tâm $I(-16; -4; 7)$ loại do không thỏa mãn $IA < R$).

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$.

Câu 98: Cho mặt phẳng $(P): x-2y-2z+10=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$,

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1 , tiếp xúc với Δ_2 và mặt phẳng (P) , có phương trình:

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ hoặc $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.



B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ hoặc $\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn A

Tâm $I \in \Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow I(2+t; t; 1-t)$ có $d(I; (P)) = \frac{|t+10|}{3}$

Lấy $M(2; 0; -3) \in \Delta_2 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (t; t; 4-t); \overrightarrow{u_{d_2}} = (1; 1; 4)$ tính $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_{d_2}}] = (5t-4; 4-5t; 0)$

$$d(I; \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_{d_2}}|}{|\overrightarrow{u_{d_2}}|} = \frac{|5t-4|}{3}.$$

Ta có $d(I; \Delta_2) = d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5t-4|}{3} = \frac{|t+10|}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{7}{2} \end{cases}$.

Với $t = -1 \Rightarrow I(1; -1; 2); R = \frac{|-1+10|}{3} = 3$ phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

Với $t = \frac{7}{2} \Rightarrow I\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}; 2\right); R = \frac{\left|\frac{7}{2}+10\right|}{3} = 3$ phương trình mặt cầu: $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

Câu 99: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x+4y-2z-6=0, (Q): x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 4; -2); \overrightarrow{n_{(Q)}} = (1; -2; 4), d = (P) \cap (Q)$ chọn được $\overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}] = (12; -6; -6)$.

Do $O.ABC$ là hình chóp đều nên là $OA=OB=OC$ suy ra tọa độ của $A(m; 0; 0)$ hoặc $A(-m; 0; 0)$; của $B(0; m; 0)$ hoặc $B(0; -m; 0)$ và $C(0; 0; m)$ hoặc $C(0; 0; -m)$ với $m > 0$.

Giả sử $A(m; 0; 0); B(0; m; 0); C(0; 0; m)$ theo phương trình đoạn chắn ta có $(ABC): \frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{m} = 1 \Leftrightarrow x+y+z=m$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (1; 1; 1)$, lập luận tương tự ta có các vectơ pháp tuyến khác là $\overrightarrow{n_2} = (-1; 1; 1), \overrightarrow{n_3} = (1; -1; 1), \overrightarrow{n_4} = (1; 1; -1)$.

Do $(\alpha) \equiv (ABC)$ là mặt phẳng xác định nên chỉ được nhận 1 trong 4 vectơ trên, (α) chứa d



ta có $\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{u}_d = 0$ suy ra $\vec{n}_{(\alpha)} \equiv \vec{n}_1 = (1; 1; 1)$.

Tìm một điểm giao của (P) và (Q) ta có $x=0$ xét hệ
$$\begin{cases} x=0 \\ x+4y-2z-6=0 \\ x-2y+4z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases}$$
 được tọa

độ điểm $M(0; 3; 3)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 1(x-0)+1(y-3)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow x+y+z-6=0$.

Câu 100: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1; 1; 1), B(2; 0; 2), C(-1; -1; 0), D(0; 3; 4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa: $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

B. $16x + 40y + 44z - 39 = 0$.

C. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$.

D. $16x - 40y - 44z - 39 = 0$.

Lời giải

Face: Nguyễn Quân

Chọn A

$$\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AD'}{AD}.$$

$$\text{Mặt khác } 4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'} \cdot \frac{AD}{AD'}}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'} \cdot \frac{AD}{AD'} \leq \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{V'}{V} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V' \geq \frac{27}{64} V$$

$$V_{\min} \Leftrightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{3}{4}.$$

Do đó (P) đi qua trọng tâm $G\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right)$ của tứ diện $ABCD$ và song song với (BCD)

$$\vec{n} = [\vec{BC}, \vec{BD}] = (4; 10; -11)$$

Vậy $(P): 16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng α đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng α có phương trình là:

A. $x + 2y + 3z - 14 = 0$. **B.** $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

C. $3x + 2y + z - 10 = 0$.

D. $x + 2y + 3z + 14 = 0$.

Lời giải



Face: Nguyễn Quân

Chọn A

Tứ diện $OABC$ vuông đỉnh O , M là trực tâm $\triangle ABC$.

$$\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCM) \Rightarrow AB \perp OM \quad (*)$$

$$\begin{cases} AC \perp OB \\ AC \perp BM \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBM) \Rightarrow AC \perp OM \quad (**)$$

Từ đó $(*)$, $(**)$ suy ra $OM \perp (ABC)$

$\Rightarrow (ABC)$ có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 3)$.

$\Rightarrow (ABC)$ có phương trình: $1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 102: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P): x + y + z - 3 = 0$. **B.** $(P): x + y - z + 1 = 0$.

C. $(P): x - y - z + 1 = 0$. **D.** $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

Lời giải

Face: Nguyễn Quân

Chọn A

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

$$N(1;1;1) \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (1)$$

$$\begin{cases} NA = NB \\ NA = NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + 1 + 1 = 1 + (b-1)^2 + 1 \\ (a-1)^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + (c-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = c \end{cases} \quad (2)$$

(do $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn và có tâm đường tròn ngoại tiếp $N(1;1;1)$ nên ta có $a, b, c > 1$)

Từ (1) và (2) ta có: $a = b = c = 3$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$

Câu 103: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x - 2y - 4z = 0$. **B.** $7x - 2y - 4z + 3 = 0$.

C. $2x + y + 3z + 3 = 0$. **D.** $14x - 4y - 8z + 3 = 0$.

Lời giải



Face: Nguyễn Quân

Chọn D

d_1 có vtcp $\vec{u}_1 = (2; 1; 3)$ và đi qua điểm $A_1(2; 2; 3)$.

d_2 có vtcp $\vec{u}_2 = (2; -1; 4)$ và đi qua điểm $A_2(1; 2; 1)$

$$\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (7; -2; -4), \overrightarrow{A_1A_2} = (-1; 0; -2); [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = 1 \neq 0$$

Suy ra d_1, d_2 chéo nhau.

Do đó (α) đi qua trung điểm $I\left(\frac{3}{2}; 2; 2\right)$ của A_1A_2 có vtpt là $\vec{n}$

Vậy phương trình (α) là $14x - 4y - 8z + 3 = 0$

Câu 104: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, gọi d đi qua $A(3; -1; 1)$, nằm trong mặt phẳng

$(P): x - y + z - 5 = 0$, đồng thời tạo với $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ một góc 45° . Phương trình đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = -1 - 15t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Gọi $\vec{u}_d = (a; b; c)$ là vtcp của d ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).

$(P): x - y + z - 5 = 0$ có vtpt $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 1)$.

$\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ có vtcp $\vec{u}_\Delta = (1; 2; 2)$.

Vì $d \subset (P)$ nên $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a = b - c. (*)$

Ta có

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_\Delta|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|a + 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &\Leftrightarrow 8c^2 - 15bc = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \vec{u}_d = a(1; 1; 0) \\ 8c = 15b \Rightarrow c = \frac{15}{8}b \Rightarrow a = \frac{-7}{8}b \Rightarrow \vec{u}_d = \frac{-b}{8}(7; -8; -15) \end{cases} \end{aligned}$$



$$\text{Vậy } d: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+t, t \in \mathbb{R} \\ z=1 \end{cases} \text{ hay } d: \begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-15t \end{cases}$$

Câu 105: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với

$(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất.

Phương trình đường thẳng d là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$. B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.
C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}$.

Lời giải

Chọn B

$(P): 2x - y - z + 3 = 0$ có vtpt $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; -1)$.

$\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ có vtcp $\vec{u}_{\Delta} = (1; -2; 2)$.

$(d; \Delta)_{\max} \Leftrightarrow \Delta \perp d$.

Khi đó $d \begin{cases} \text{qua } A(1; -1; 2) \\ \text{vtcp } \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_{\Delta}] = (-4; -5; -3) = -(4; 5; 3) \end{cases}$

Vậy $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

Câu 106: Trong hệ tọa độ $Oxyz$ gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$ cắt $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa d

và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$
C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$ D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

Lời giải

Chọn C

$M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t; 2+t; -2-t), \vec{AM}(2t+2; t+2; -t-1)$

Δ_2 có vtcp $\vec{u}(-1; 2; 2)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $d, \Delta_2: \cos \varphi = \frac{|2t|}{3\sqrt{6t^2 + 14t + 9}}$



$$+) \text{ với } t = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$+) t \neq 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2}{3\sqrt{6 + \frac{14}{t} + \frac{9}{t^2}}} = \frac{2}{3\sqrt{5 + \left(\frac{3}{t} + \frac{7}{3}\right)^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, t = \frac{-9}{7}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\min} \text{ khi } t = \frac{-9}{7} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-1}{7}(4; -5; -2) \Rightarrow d: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Câu 107: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình đường thẳng Δ là:

$$\text{A. } \begin{cases} x = 12 - t \\ y = 5 \\ z = -9 + t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = \frac{-9}{2} + t \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{5}{2} - t \\ z = \frac{-9}{2} + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = \frac{5}{2} + t \\ z = \frac{-9}{2} + t \end{cases}$$

Lời giải

Chọn B

$$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2a; a; -2-a), B \in d_2 \Rightarrow B(1+b; -2+3b; 2-2b).$$

$$\overrightarrow{AB}(b-2a; 3b-a-2; -2b+a+4).$$

$$(P) \text{ có vtpt } \vec{n}(1;1;1).$$

$$\Delta // (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow b = a - 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-a-1; 2a-5; -a+6) \Rightarrow AB^2 = 6a^2 - 30a + 62 \geq 6\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2} \geq \frac{49}{2}$$

$$AB_{\min} \text{ khi } a = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; \frac{-9}{2}\right), \overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}(-1; 0; 1) \Rightarrow \Delta \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = \frac{-9}{2} + t \end{cases} \Rightarrow \text{Chọn B}$$



Câu 108: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}. \text{ Phương trình đường thẳng } d \text{ vuông góc với } (P): 7x + y - 4z = 0 \text{ và cắt hai}$$

đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}$. B. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.
C. $\frac{x+2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$. D. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d với d_1, d_2 ; $\vec{n} = (7; 1; -4)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P) .

$$\text{Do } A \in d_1 \Rightarrow A(2a; 1-a; -2+a), B \in d_2 \Rightarrow B(-1+2b; 1+b; 3).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2b-2a-1; a+b; 5-a).$$

Theo giả thiết ta có đường thẳng d vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương, khi đó

$$\text{tồn tại số thực } k \text{ sao cho } \overrightarrow{AB} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b-1=7k \\ a+b=k \\ 5-a=-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+7k=-1 \\ a+b-k=0 \\ a-4k=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ k=-1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow A(2; 0; -1).$$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(2; 0; -1)$ và nhận $\vec{n} = (7; 1; -4)$ làm một véc tơ chỉ

$$\text{phương có phương trình: } \frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}.$$

Câu 109: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và

$$\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}. \text{ Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ song song với } d: \begin{cases} x=3 \\ y=-1+t \\ z=4+t \end{cases} \text{ và cắt hai}$$

đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ là

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \\ z=3-t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3-t \\ z=-3-t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3+t \\ z=-3+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3+t \\ z=3+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng Δ với Δ_1, Δ_2 ; $\vec{u} = (0; 1; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d .

$$\text{Do } A \in \Delta_1 \Rightarrow A(3a-1; a+2; 2a+1), B \in \Delta_2 \Rightarrow B(1+b; 2b; 3b-1).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3a+b+2; -a+2b-2; -2a+3b-2).$$

Theo giả thiết ta có đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{u}$ cùng phương,

$$\text{khi đó tồn tại số thực } k \text{ sao cho } \overrightarrow{AB} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b+2=0 \\ -a+2b-2=k \\ -2a+3b-2=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b=-2 \\ -a+2b-k=2 \\ -2a+3b-k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ k=-1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow A(2; 3; 3).$$

Vậy đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; 3; 3)$ và nhận $\vec{n} = (0; -1; -1)$ làm một véc tơ chỉ

$$\text{phương có phương trình: } \begin{cases} x=2 \\ y=3-t \\ z=3-t \end{cases}$$

Câu 110: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P) . Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: d qua $A(12; 9; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (4; 3; 1)$.

(P) có VTPT $\vec{n} = (3; 5; -1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc (P) .

$$\Rightarrow (Q) \text{ qua } A(12; 9; 1) \text{ và có VPT } \vec{n}_1 = [\vec{a}; \vec{n}] = (-8; 7; 11).$$

$$\Rightarrow (Q): -8x+7y+11z+22=0.$$

d' là hình chiếu của d lên (P) nên $d' = (P) \cap (Q)$. Phương trình d' là

$$\begin{cases} -8x+7y+11z+22=0 \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}.$$



Câu 111: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+4t \\ z=3+t \end{cases}$. Hình chiếu song song của d lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=3+2t \\ y=0 \\ z=1-4t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=3+t \\ y=0 \\ z=1+2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=0 \\ z=5-4t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=3+2t \\ y=0 \\ z=1-5t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A = d \cap (Oxz) \Rightarrow A\left(2; 0; \frac{7}{2}\right)$.

Lấy $M(1; -2; 3) \in d$. Gọi d' là đường thẳng qua M và song song với Δ .

Phương trình $d': \begin{cases} x=1-t \\ y=-2-t \\ z=3+t \end{cases}$.

Gọi B là hình chiếu song song của M lên (Oxz) theo phương $\Delta \Rightarrow B = d' \cap (Oxz) \Rightarrow B(3; 0; 1)$.

Đường thẳng hình chiếu song song của d lên (Oxz) có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = 2\vec{AB} = (2; 0; -5)$

Phương trình có dạng: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=0 \\ z=1-5t \end{cases}$.

Câu 112: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 2), B(1; 2; 4)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là

A. $x-4y-5z+17=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $x-4y+5z-13=0$. **D.** $3x+2y+z-11=0$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính $R=5$.

$\vec{AB} = (-2; 2; 2); \vec{IA} = (3; 2; 1)$.

$r^2 = R^2 - IH^2$ với H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) .

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB .



$$r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow IK \perp (\alpha).$$

$$\text{Khi đó } (\alpha) \begin{cases} \text{qua } A(3;0;2) \\ \text{vtpt } \vec{n}_{(\alpha)} = [\overrightarrow{AB}, [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IA}]] = -12(3;2;1) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (\alpha): 3x - 2y + z - 11 = 0.$$

Câu 113: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại hai điểm A và B . Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$

B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}.$

C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}.$

D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}.$

Lời giải

Chọn A

(S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

$(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ có vtpt $\vec{n}_{(\alpha)} = (2; -2; 1)$.

$$\overrightarrow{IM} = (-5; 0; -8).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (α) , K là hình chiếu vuông góc của I lên **AB**.

$$AB^2 = 4KB^2 = 4(R^2 - IK^2).$$

$$AB_{\max} \Leftrightarrow IK_{\min} = IH \Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow \Delta \begin{cases} \text{qua } H \\ \text{qua } M \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \Delta \begin{cases} \text{qua } M(-3;3;-3) \\ \text{vtcp } \vec{u}_d = [\vec{n}_{(\alpha)}, [\vec{n}_{(\alpha)}, \overrightarrow{IM}]] = (9; 36; 54) = 9(1; 4; 6) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

Câu 114: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất là

A. $M\left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right).$

B. $M\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right).$

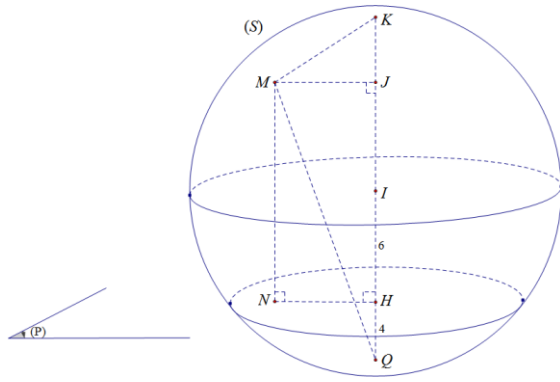
C. $M\left(-\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right).$

D. $M\left(\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{13}{3}\right).$

Lời giải

Chọn B





Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{100} = 10$. Ta có $d(I, (P)) = \frac{|6 + 4 - 1 + 9|}{3} = 6 < R \Rightarrow (P)$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Tia IH cắt mặt cầu (S) tại Q và tia đối của tia IH cắt mặt cầu (S) tại K . Khi ấy, KQ là đường kính của mặt cầu (S) . Gọi N, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và của M trên KQ . $\Delta MQK \perp$ tại M nên J nằm trên cạnh KQ . Ta có $MJHN$ là hình chữ nhật ($N = H = J = 90^\circ$) $\Rightarrow MN = HJ$ và $0 \leq HJ \leq HK$ (Vì $HK = 16 > HQ = 4$) $\Rightarrow \max d(M; (P)) = HK = 16$. Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv K$.

$$(IH) \text{ đi qua } I(3; -2; 1) \text{ và có vtcp } \vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (2; -2; -1) \Rightarrow (IH): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

$$K \in (IH) \Leftrightarrow K(3 + 2t; -2 - 2t; 1 - t). \quad \text{Ta lại có } K \in (S) \Leftrightarrow (2t)^2 + (-2t)^2 + (-t)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{100}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{3} \\ t = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{10}{3} \Rightarrow K\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right) \Rightarrow d(M; (P)) = 16 \text{ (nhận)}.$$

$$\text{Với } t = -\frac{10}{3} \Rightarrow K\left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right) \Rightarrow d(M; (P)) = 4 \text{ (loại)}.$$

Nhận xét: Đề bài ban đầu yêu cầu tìm tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất. Trong quá trình lập luận tôi thấy không phù hợp vì có vô số điểm M nên đã sửa đề lại như trên.

Câu 115: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ ($a > 0, b > 0$). Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Giá trị của tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là



A. $\frac{1}{3}$.

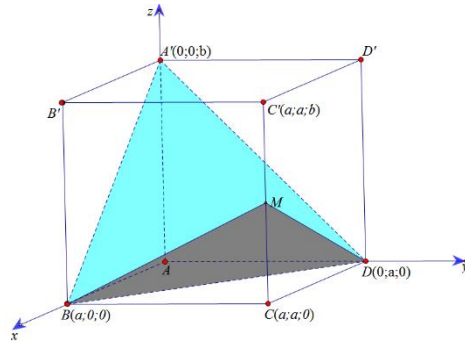
B. $\frac{1}{2}$.

C. -1 .

D. 1.

Lời giải

Chọn D



Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow C(a; a; 0)$.

Và $ACC'A'$ là hình bình hành nên $\overline{CC'} = \overline{AA'} \Rightarrow C'(a; a; b)$.

CC' có trung điểm $M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$

$\overline{BA'} = (-a; 0; b)$ và $\overline{BD} = (-a; a; 0) \Rightarrow (A'BD)$ có vtpt $[\overline{BA'}, \overline{BD}] = (-ab; -ab; -a^2) \Rightarrow$ vtpt khác của $(A'BD)$ là $\vec{n}_1 = \left(1; 1; \frac{a}{b}\right)$ (vì $b > 0$)

$\overline{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right) \Rightarrow (MBD)$ có vtpt $[\overline{BM}, \overline{BD}] = \left(\frac{-ab}{2}; \frac{-ab}{2}; a^2\right) \Rightarrow$ vtpt khác của (MBD) là $\vec{n}_2 = \left(1; 1; -\frac{2a}{b}\right)$ (vì $b > 0$).

Theo giả thiết $(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{a}{b} = -1(l) \end{cases}$.

Câu 116: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$. Giá trị của điểm M trên (S) sao cho $d(M, (P))$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $(1; 1; 3)$.

B. $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{-1}{3}\right)$.

D. $(1; -2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = 2$



$$d(I, (P)) = \frac{|1+2+2+4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3 > R. \text{ Do đó, } (S) \text{ và } (P) \text{ không giao nhau.}$$

Vậy để khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị nhỏ nhất thì M thuộc đường thẳng d đi qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (1; 2; 2)$

Đường thẳng d đi qua I và nhận $\vec{n} = (1; 2; 2)$ là VTCP nên d có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$M \in d \Rightarrow M(1+t; 1+2t; 1+2t)$$

$$M \in (S) \Rightarrow (1+t-1)^2 + (1+2t-1)^2 + (1+2t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 9t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm \frac{2}{3}$$

$$\text{Với } t = \frac{2}{3} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{11}{3}$$

$$\text{Với } t = -\frac{2}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{1}{3}$$

Vậy $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 117: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(10; 2; -1)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (P) là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$.

B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$.

C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu của A trên d , gọi I là hình chiếu của H trên (P) .

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A , song song với đường thẳng d nên $d(d, (P)) = d(H, (P)) = IH$.

Ta có $AH \geq IH$ nên IH lớn nhất $\Leftrightarrow AH = IH \Leftrightarrow A \equiv I$.

Vậy mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán là mặt phẳng đi qua điểm A và nhận vectơ $\overrightarrow{AH}$ làm VTPT.

$$\text{Ta có } H \in d \Rightarrow H(1+2t; t; 1+3t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-9; t-2; 3t+2)$$

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \vec{u}_d = (2; 1; 3)$$

Vì H là hình chiếu của A trên d nên



$$AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow 2(2t-9) + (t-2) + 3(3t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Do đó } H(3;1;4) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-7; -1; 5)$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(10;2;-1)$ và có VTPT là $\overrightarrow{AH} = (-7; -1; 5)$ nên (P) có phương trình là: $-7(x-10) - (y-2) + 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 5z - 77 = 0$

$$\text{Vậy } d(M; (P)) = \frac{|-7 + 2 - 5 \cdot 3 - 77|}{\sqrt{7^2 + 1 + (-5)^2}} = \frac{97\sqrt{3}}{15}.$$

Câu 118: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}. \text{ Gọi } (P) \text{ là mặt phẳng chứa đường thẳng } d \text{ sao cho khoảng cách từ } A$$

đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) .

A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $AH \perp (P)$, $AK \perp d$.

$$\text{Ta có } K \in d \Rightarrow K(1+2t, t, 2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AK} = (2t-1, t-5, 2t-1).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{u_d}(2;1;2).$$

$$AK \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow 2(2t-1) + 1(t-5) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow K(3;1;4), \overrightarrow{AK} = (1; -4; 1). \quad \text{Do}$$

$$AH \perp (P), AK \perp d, d \subset (P) \text{ nên } AH \perp KH \Rightarrow AH \leq AK.$$

$$\Rightarrow \max AH = AK \text{ khi } H \equiv K \text{ hay } AK \perp (P).$$

$$\Rightarrow (P) \text{ đi qua } K(3;1;4) \text{ nhận } \overrightarrow{AK} \text{ làm VTPT nên phương trình } (P) \text{ là: } x - 4y + z - 3 = 0.$$

$$\Rightarrow d(M, (P)) = \frac{11\sqrt{18}}{18}.$$

Câu 119: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2+2t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 3-t' \\ y = 1+t' \\ z = 1-2t' \end{cases}. \text{ Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm:}$$

song song với (P) ; cắt d, d' và tạo với d góc 30° . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi Δ là đường thẳng thỏa mãn YCBT.

Gọi giao điểm của đường thẳng Δ với hai đường thẳng d, d' lần lượt là M, N .

Ta có: $M(1+t, t, 2+2t), N(3-t', 1+t', 1-2t')$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2-t'-t, 1+t'-t, -1-2t'-2t).$$

$$\text{Có } \overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 1; -1), \overrightarrow{u_d} = (1; 1; 2).$$

$$\Delta // (P) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n_{(P)}} = 0 \Rightarrow 4 + 2t' = 0 \Leftrightarrow t' = -2.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (4-t, -1-t, 3-2t).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{u_d}] = (-5, -5, 5).$$

$$(d, \Delta) = 30^\circ \Rightarrow \sin(d, \Delta) = \sin 30^\circ \Rightarrow \frac{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{u_d}]}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{u_d}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6t^2 - 18t - 24 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4, t_2 = -1.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}_1 = (0; -5; -5) = -5(0; 1; 1), \overrightarrow{MN}_2 = (5; 0; 5) = 5(1; 0; 1).$$

Do đó 2 VTCP của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cần tìm là: $\overrightarrow{u}_1 = (0; 1; 1), \overrightarrow{u}_2 = (1; 0; 1).$

$$\Rightarrow \sin(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{[\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2]}{|\overrightarrow{u}_1| \cdot |\overrightarrow{u}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2} \text{ (do góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn)}.$$

Câu 120: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 1), B(3; -2; 0); C(3; -2; 0)$ Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất. Biết rằng (P) không cắt BC . Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $G(-2; 0; 3)$. B. $F(3; 0; -2)$. C. $E(1; 3; 1)$. D. $H(0; 3; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(2; 0; -1)$

Theo giả thiết (P) không cắt BC nên $B; C$ nằm cùng phía với (P) .

$$\text{Do đó } d(B; (P)) + d(C; (P)) = BH + CK = 2IJ \leq 2IA = 2\sqrt{5}$$

Trong đó $H; K; J$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B; C; I$ lên mặt phẳng (P)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow J \equiv A$ hay $(P) \perp IA$.

Suy ra, Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{IA} = (-1; 0; 2)$

Do đó, Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(1; 0; 1)$ và có VTPT $\vec{n} = (-1; 0; 2)$ là:
 $(P): x - 2z + 1 = 0 \Rightarrow E(1; 3; 1) \in (P).$

Câu 121: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$, trong đó $b; c$ dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Biết rằng mặt phẳng $(ABC) \perp (P)$ và



$d(O; (ABC)) = \frac{1}{3}$. Mệnh đề nào **đúng**?

A. $b+c=1$.

B. $b+c=1$.

C. $b+c=1$.

D. $b+c=1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + cy + bz = bc$

Ta có $\vec{n}_p(0;1;-1); \vec{n}_{(ABC)} = (bc; c; b)$. Do mặt phẳng $(ABC) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}_p \perp \vec{n}_{(ABC)}$
 $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_{(ABC)} = 0 \Leftrightarrow b = c (*)$

Mặt khác, $d(O; (ABC)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{|bc|}{\sqrt{(bc)^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{3} (**)$

Thay (*) vào (**) ta được: $3c^2 = \sqrt{c^4 + 2c^2} \Leftrightarrow 8c^4 - 2c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$

Do $b; c$ dương nên $b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy, $b+c=1$.

Câu 122: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$.

Điểm $M \in (P): x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, điểm M cách $(Q): 2x-y-2z+3=0$ một khoảng bằng

A. $\frac{121}{54}$.

B. 24.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{91}{54}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{4}{6}; \frac{4}{6}; -\frac{1}{6}\right)$.

$T = IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 6IM^2 - 2\vec{IM}(\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC}) = IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 6IM^2$.

T nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

$d: \begin{cases} x = \frac{4}{6} + t \\ y = \frac{4}{6} + t \\ z = -\frac{1}{6} + t \end{cases} \quad t \in R$ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) .

$M = d \cap (P) \Rightarrow M\left(\frac{-7}{18}; \frac{-7}{18}; \frac{-22}{18}\right) \Rightarrow d(M, (Q)) = \frac{91}{54}$.



- Câu 123: (Đề minh họa L1)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?
- A. 1. B. 4. **C. 7.** D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (-1;1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;3;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (2;3;4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4;0;-4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$, suy ra bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

Xét mp(P) và hai điểm M, N không nằm trên (P), ta có: (P) cách đều hai điểm M, N khi và chỉ khi (P) song song với MN hoặc (P) đi qua trung điểm của đoạn MN .

Vậy có 7 mặt phẳng cách đều 4 điểm A, B, C, D , trong đó có

- ⊙ 4 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng đi qua trung điểm của ba cạnh chung một đỉnh.
- ⊙ 3 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng song song với hai cạnh đối diện và đi qua trung điểm của bốn cạnh còn lại.

Chọn C

- Câu 124: (Đề minh họa L1)** Cho Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. **B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.**
- C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $B = d \cap \Delta$ tọa độ $B(t+1; t; 2t-1)$, $\overrightarrow{AB} = (t; t; 2t-3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t + t + 2 \cdot 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(2; 1; -1)$

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$, vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

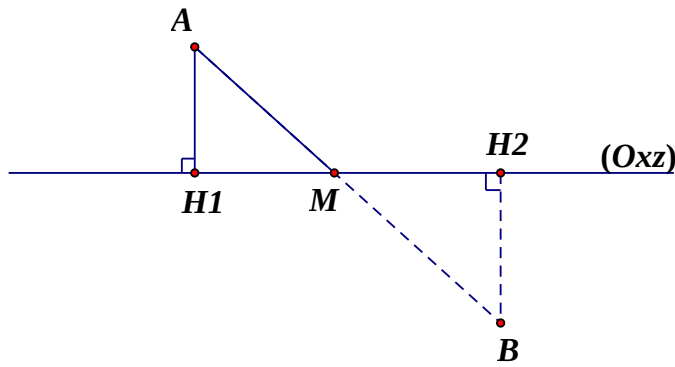
- Câu 125: (Đề thử nghiệm 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oxz tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.** B. $\frac{AM}{BM} = 2$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

Lời giải

Chọn A





Mặt phẳng Oxz có phương trình $y = 0$.

Ta có $\frac{AM}{BM} = \frac{d(A, (Oxz))}{d(B, (Oxz))} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Câu 126: (Đề thử nghiệm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

- A. $2x - 2z + 1 = 0$. B. $2y - 2z + 1 = 0$. C. $2x - 2y + 1 = 0$. D. $2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{u} = (-1; 1; 1)$, $\vec{v} = (2; -1; -1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d_1, d_2 . $[\vec{u}, \vec{v}] = (0; 1; -1)$.

$A(2; 0; 0) \in d_1, B(0; 1; 2) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; 1; 2)$. $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0 \Rightarrow d_1, d_2$ chéo nhau suy ra có duy nhất một mặt phẳng (P) song song và cách đều d_1, d_2 .

(P) đi qua trung điểm $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ của đoạn AB và nhận $[\vec{u}, \vec{v}] = (0; 1; -1)$ làm VTPT.

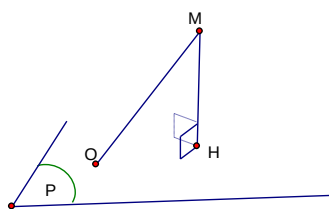
Vậy $(P): 2y - 2z + 1 = 0$. **Chọn B**

Câu 127: (Tạp chí THPT Lần 5) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

- A. $x + 2y - z = 0$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1$. C. $x - y - z = 0$. D. $x + y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A



Gọi (P) là một mặt phẳng đi qua O , H là hình chiếu của M trên (P) . Khi đó $d(M, (P)) = MH$.

Ta có $MH \leq OM \Rightarrow MH$ lớn nhất khi và chỉ khi $MH = OM \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow OM \perp (P)$.

Vậy (α) là mặt phẳng đi qua O và có VTPT $\overrightarrow{OM} = (1; 2; -1) \Rightarrow (\alpha): x + 2y - z = 0$. **Chọn A**

Câu 128: (THPT Hai Bà Trưng Lần 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -2), B(3; -1; -4), C(-2; 2; 0)$. Tìm điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:

A. $D(0; 3; -1)$ **B.** $D(0; -3; -1)$. **C.** $D(0; 1; -1)$. **D.** $D(0; 2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Vì $D \in (Oyz)$ nên $D(0; y; z), z < 0$.

Do $d(D, (Oxy)) = 1$ nên $|z| = 1 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow D(0; y; -1)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2), \overrightarrow{AC} = (-4; 2; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 6; -2); \overrightarrow{AD} = (-2; y; 1)$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |6y - 6| = |y - 1|.$$

$$\text{Theo giả thiết } V_{ABCD} = 2 \Leftrightarrow |y - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(0; 3; -1) \\ D(0; -1; -1) \end{cases}.$$

Câu 129: (THPT Hai Bà Trưng Lần 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm H , cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $(P): 3x + y + 2z - 11 = 0$. **B.** $(P): 3x + 2y + z - 10 = 0$.
C. $(P): x + 3y + 2z - 13 = 0$. **D.** $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Do $OABC$ là tam diện vuông và H là trực tâm tam giác ABC nên $OH \perp (ABC)$. Suy ra (P) đi qua điểm $H(1; 2; 3)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OH} = (1; 2; 3)$ nên (P) có phương trình

$$1(x - 1) + 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0$$

$$\text{Hay } x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Câu 130: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; 4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M \neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM . Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.



A. $R = 2$.

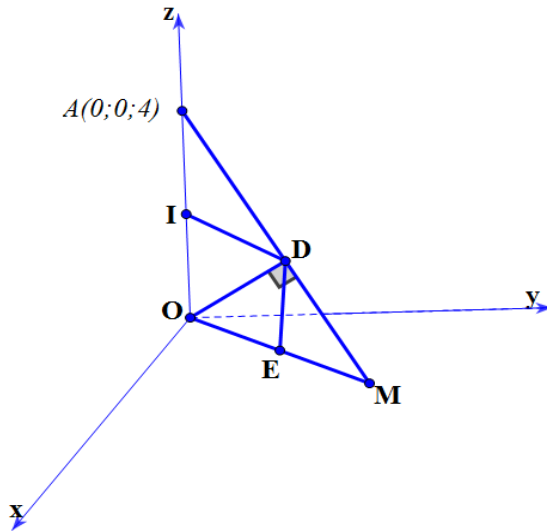
B. $R = 1$.

C. $R = 4$.

D. $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\triangle ODM$ vuông tại D có DE là trung tuyến nên $\triangle OED$ cân tại E , suy ra $\angle EOD = \angle EDO$ (1).

Gọi I là trung điểm của OA , ta có $\triangle ODA$ vuông tại D và có DI là trung tuyến nên $\triangle ODA$ cân tại I , suy ra $\angle IOD = \angle IDO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\angle EDI = \angle EDO + \angle IDO = \angle EOD + \angle IOD = \angle IOE = 90^\circ$ hay $ED \perp DI = \frac{OA}{2} = 2$. Vậy đường thẳng DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính

$$R = \frac{OA}{2} = 2.$$

Câu 131: Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1; m; n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Lúc đó

A. $m.n = 2$.

B. $m.n = -2$.

C. $m.n = 4$.

D. $m.n = -4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt phẳng (P) là: $x + my + nz + d = 0$

Vì $A \in (P)$ nên ta $8m + 2n + d = 0 \Leftrightarrow d = -8m - 2n \Rightarrow (P): x + my + nz - (8m + 2n) = 0$

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5 - 11m + 5n|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} = 6\sqrt{2}$

Ta có: $d(B; (P)) = \frac{|9 - 7m + 23n - 8m - 2n|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} = \frac{|(5 - 11m + 5n) + 4(1 - m + 4n)|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}$



$$\Rightarrow d(B; (P)) \leq \frac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} + 4 \frac{|1-m+4n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{|1-m+4n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$$

$$\stackrel{\text{Cosi-Svac}}{\Leftrightarrow} d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1+1+16)(1+m^2+n^2)}}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 18\sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} 1 = -m = \frac{n}{4} \\ \frac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 4 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Câu 132: Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ và đường thẳng

$d: \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

A. $19x - 17y - 20z - 77 = 0$.

B. $19x - 17y - 20z + 34 = 0$.

C. $31x - 8y - 5z + 91 = 0$.

D. $31x - 8y - 5z - 98 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $(P): ax + by + cz + d = 0$

$$(P) \text{ chứa } \Delta \text{ nên } (P) \text{ đi qua } A(3; 0; -1) \text{ và } \vec{n}_P \perp \vec{u}_\Delta \Rightarrow \begin{cases} 3a - c + d = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2a - 3c \\ d = c - 3a = 10c - 6b \end{cases}$$

$$\sin(d, (P)) = \frac{|5b + 7c|}{\sqrt{5b^2 + 10c + 2bc\sqrt{14}}}$$

$$\text{Nếu } c = 0 \Rightarrow \sin(d, (P)) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$$

$$\text{Nếu } c \neq 0 \Rightarrow \sin(d, (P)) = \frac{\left|5\frac{b}{c} + 7\right|}{\sqrt{5\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 10 + 12\frac{b}{c}\sqrt{14}}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \sqrt{\frac{25t^2 + 70t + 49}{5t^2 + 12t + 10}} = \sqrt{5 + \frac{10t - 1}{5t^2 + 12t + 10}} = \sqrt{g(t)}$$

$$g'(t) = \frac{-50t^2 + 10t + 112}{(5t^2 + 12t + 10)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{5} \\ t = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\max g(t) = \frac{75}{14} \Leftrightarrow t = \frac{8}{5}$$

Chọn $b = 8, c = 5 \Rightarrow a = -31; d = 98$. Vậy **Chọn D**



Câu 133: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó

- A. $a+b+c=5$. B. $a+b+c=6$. **C. $a+b+c=7$.** D. $a+b+c=8$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R=3$.

Ta có: $d(I, (P)) = \frac{4}{3} < R$ vậy (P) cắt (S) . Khi đó $d(M, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \in d$ đi qua I, vuông

góc với (P) và cắt mặt cầu tại 2 điểm M_1, M_2 . PTĐT $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$

d cắt (S) tại M_1, M_2 nên tọa độ M_1, M_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow M_1(3; 0; 4) \Rightarrow d(M_1, (P)) = \frac{13}{3}$$

$$\text{Với } t=-1 \Rightarrow M_2(-1; 4; 2) \Rightarrow d(M_2, (P)) = \frac{5}{3}$$

Vậy khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất bằng $\frac{13}{3}$ khi $M(3; 0; 4) \Rightarrow a+b+c=7$.

Câu 134: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình: $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 18$. Đường thẳng d cắt (S) tại 2 điểm A, B . Tính diện tích tam giác IAB .

- A. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$.** B. $\frac{16\sqrt{11}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{6}$. D. $\frac{8\sqrt{11}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=-3-t \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt (S) tại 2 điểm A, B . Khi đó tọa độ A, B ứng với t là nghiệm của



$$\text{phương trình: } (1-t-1)^2 + (2t-2)^2 + (-3-t+1)^2 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow A(2; -2; -2)$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{14}{3}\right).$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$.

$$\text{Khi đó } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB} \right\| = \frac{8\sqrt{11}}{3}.$$

Câu 135: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

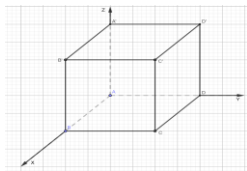
B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(AB'D') \parallel (BC'D)$.

$$d((AB'D'), (BC'D)) = d(A, (BC'D))$$

Gắn hệ trục tọa độ $(Oxyz)$, trong đó $A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 2; 0), C'(2; 2; 2)$

Mặt phẳng $(BC'D)$ qua $B(2; 0; 0)$ có vtcp $\vec{n} = [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}] = (-4; -4; 4)$

$$\Rightarrow pt(BC'D): -4(x-2) - 4y + 4z = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 2 = 0$$

$$d(A, (BC'D)) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Câu 136: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -2), B(3; -1; -4), C(-2; 2; 0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là



A. $D(0;3;-1)$.

B. $D(0;-3;-1)$.

C. $D(0;1;-1)$.

D. $D(0;2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

$$D \in (Oyz) \Rightarrow D(0; y; z), z < 0$$

$$d(D, (Oxy)) = |z| = 1 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow D(0; y; -1)$$

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 6; -2), \overrightarrow{AD} = (-2; y; 1)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |-4 + 6y - 2| = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D(0;3;-1) \\ D(0;-1;-1) \end{cases}$$

Câu 137: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng

$(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $5\sqrt{2}$.

C. $7\sqrt{2}$.

D. $12\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm mặt cầu. Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên ta có

$$d(I; (P)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10|}{m^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| y_0 + z_0 + \frac{2mx_0 - 2z_0 - 10}{m^2 + 1} \right| = \text{const} \text{ với mọi } m$$

$$\text{m suy ra } \begin{cases} 2x_0 = 0 \\ -2z_0 - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = -5 \end{cases} \Rightarrow I(0; y_0; -5) \Rightarrow d(I, (P)) = \frac{1}{\sqrt{2}} |y_0 - 5|$$

Mặt khác mặt cầu đi qua A nên

$$IA = d(I; (P)) \Leftrightarrow \sqrt{4 + (y_0 - 11)^2} = \frac{|y_0 - 5|}{\sqrt{2}} \Rightarrow I(0; 25; -5); I(0; 9; -5)$$

$$\text{Với } I(0; 25; -5) \Rightarrow R = 10\sqrt{2}$$

$$\text{Với } I(0; 9; -5) \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

Câu 138: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;5;0)$, $B(1;2;3)$, $C(3;5;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 5 = 0$. Tính thể tích V của khối tứ diện $S.ABC$ biết đỉnh S thuộc mặt phẳng (P) và $SA = SB = SC$.

A. $V = \frac{145}{6}$.

B. $V = 145$.

C. $V = \frac{45}{6}$.

D. $V = \frac{127}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng đáy trùng với tâm đường



tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Phương trình mặt phẳng $(ABC): 3x - 10y - 6z + 35 = 0$

Phương trình mặt phẳng trung trực cạnh $AB: 4x + 3y - 3z - 18 = 0$

Phương trình mặt phẳng trung trực cạnh $AC: 2x + z - \frac{15}{2} = 0$

Suy ra tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(3; \frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng $SI: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = \frac{7}{2} - 10t, \\ z = \frac{3}{2} - 6t \end{cases}$ do điểm S thuộc mặt phẳng

$$(P) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow S\left(6; -\frac{14}{2}; -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow SI = \sqrt{145}$$

$$AB = \sqrt{34}, BC = \sqrt{29}, AC = \sqrt{5} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{145}{6}.$$

