

Bài 1. (3,5 điểm) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn $(P(x)-1)(P(x)+1)=3P(x^2-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Bài 2. (3,5 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{7} \\ u_{n+1} = \frac{u_n(1-u_n^8)}{1+u_n} \end{cases} \quad \forall n=1,2,3,\dots$$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

b) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nu_n)$

Bài 3. (3,5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

i) $f(1) = 2022$

ii) $f(x^2) + 2f(xy) = xf(x+y) + yf(x); \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bài 4. (3,5 điểm) Gọi S là tập tất cả các số có 7 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 59. Lấy ngẫu nhiên một số trong S . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 11.

Bài 5. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . E là giao điểm của AB và CD , F là giao điểm của AD và BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC . Chứng minh rằng: đường tròn (MNF) tiếp xúc với EF .

Bài 6. (3,0 điểm). Cho số thực x , ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Với p là số nguyên tố có dạng $4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Tính $\sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{i^2}{p} \right]$ (1,5 điểm)

b) Với p là số nguyên tố lẻ, q là số nguyên dương không chia hết cho p . Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[(-1)^k \cdot k^2 \cdot \frac{q}{p} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}. \quad (1,5 \text{ điểm})$$

..... HẾT.....