

CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

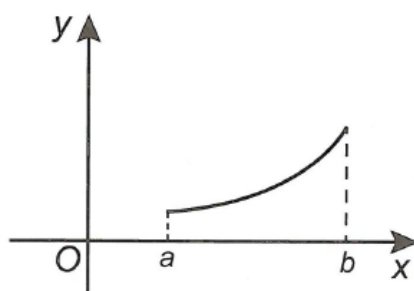
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K .

* Hàm số f gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

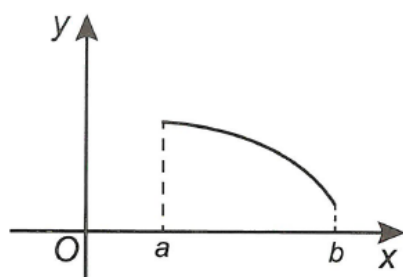


Hàm số đồng biến

Nhận xét:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng lên từ trái sang phải.

* Hàm số f gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Hàm số nghịch biến

Nhận xét:

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng xuống từ trái sang phải.

2. Định lý

Định lý thuận

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

Định lý đảo

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số cho bởi công thức $y = f(x)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D .

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm các giá trị x mà $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 5. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = (1 - x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \cdot (1 - x^2)' = 2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \cdot (-2x)$

Vì $2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của đạo hàm cùng dấu với $(-x)$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Chú ý: Dấu hiệu mở rộng khi kết luận khoảng đồng biến $(-\infty; 0)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + 8x + \cos x$. Với hai số thực a, b sao cho $a < b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(a) = f(b)$.

B. $f(a) > f(b)$.

C. $f(a) < f(b)$.

D. $f(a) \geq f(b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x + 8 - \sin x = (3x^2 + 2x + 1) + (7 - \sin x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Bài tập 3. Hàm số $y = |x^2 - 2x - 3|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = |x^2 - 2x - 3| = \sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2} \Rightarrow y' = \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 3)}{\sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; y' không xác định nếu $x = -1; x = 3$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	4	0	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Chú ý: - Vì $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên có thể xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{f^2(x)}$ để suy ra kết quả.

- Đạo hàm $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ khi cho hàm số $y = f'(x)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo ba bước như sau:

Bước 1. Tìm các giá trị x mà $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 2. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 3. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 0); (1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$

$f'(x)$	–	0	–	0	+	0	–
---------	---	---	---	---	---	---	---

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0;3)$ có tính chất

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;3) \text{ và } f'(x) = 0, \forall x \in (1;2).$$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
- B. Hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $(1;2)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
- D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì $f'(x) = 0, \forall x \in (1;2)$ nên $f(x)$ là hàm hằng trên khoảng $(1;2)$.

Trên các khoảng $(0;2), (1;3), (0;3)$ hàm số $y = f(x)$ thỏa $f'(x) \geq 0$ nhưng $f'(x) = 0, \forall x \in (1;2)$ nên $f(x)$ không đồng biến trên các khoảng này.

2. Bài tập:

Dạng 3: Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên tập xác định

1. Phương pháp giải

* Đối với hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ (1).

Bước 2. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $a = 0$, thay trực tiếp vào (1) để xét.

Trường hợp 2: $a \neq 0$, tính $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

* Đối với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Bước 2. Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$

Bước 3. Kết luận.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 2]$ để hàm số $y = x^3 - x^2 + 3mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 20.

B. 2.

C. 3.

D. 23.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 3m$

Hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3m \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{9}$$

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 2]$ nên có $m = 1; m = 2$.

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 1$ ta có $y' = -1 < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Với $m = -1$ ta có $y' = -4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

$$\bullet \text{ Với } m \neq \pm 1 \text{ ta có } y' \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$$

Từ các trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài tập 3. Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó là

A. $m \geq -1$.

B. $m > -1$.

C. $m > 1$.

D. $m \geq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\text{Ta có } y = \frac{mx+1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{m-1}{(x+1)^2}$$

Xét $m = 1$, hàm số trở thành $y = 1$. (hàm hằng)

Xét $m \neq 1$, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Lưu ý: Với $m = 1$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Bài tập 4. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định} \Leftrightarrow y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2} < 0 \Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Dạng 4: Xét tính đơn điệu hàm số bậc cao, căn thức, lượng giác có chứa tham số

1. Phương pháp giải

Sử dụng các kiến thức

Điều kiện cần để $y = (x-a)^{2m+1} \cdot g(x)$ ($m \in \mathbb{N}$) không đổi dấu khi x đi qua a là $g(a) = 0$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và $\min_K f(x) = A$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \leq A$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và $\max_K f(x) = B$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \geq B$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số

$$y = x^9 + (3m^2 - m)x^6 + (m^3 - 3m^2 + 2m)x^4 + 2019 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 9x^8 + 5(3m^2 - m)x^4 + 4(m^3 - 3m^2 + 2m)x^3$$

$$\Rightarrow y' = x^3 [9x^5 + 5(3m^2 - m)x + 4(m^3 - 3m^2 + 2m)] = x^3 \cdot g(x)$$

$$\text{với } g(x) = 9x^5 + 5(3m^2 - m)x + 4(m^3 - 3m^2 + 2m).$$

$$\text{Nếu } g(0) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

thì y' sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0 \Rightarrow$ hàm số sẽ có khoảng đồng biến và nghịch biến. Do đó để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện cần là $g(0) = 0$

$$\Leftrightarrow m(m^2 - 3m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Với $m = 0$ có $y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 1$ có $y' = x^4(9x^4 + 10) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 2$ có $y' = x^4(9x^4 + 50) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy với } \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases} \text{ thì hàm số đã cho đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Lưu ý: Nếu $g(0) \neq 0$ thì y' luôn đổi dấu khi x qua 0, do đó nếu $g(x) = 0$ vô nghiệm thì sẽ luôn có một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến.

Bài tập 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -m^2x^5 - mx^3 - (m^2 - m - 20)x^2 + 2019$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. -4 .

B. 1 .

C. -1 .

D. 5 .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5m^2x^4 - 3mx^2 - 2(m^2 - m - 20)x \\ &= x[-5m^2x^3 - 3mx - 2(m^2 - m - 20)] = x.g(x). \end{aligned}$$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Nếu $x = 0$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua $x = 0$, lúc đó điều kiện (*) không được thỏa mãn.

Do đó điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $x = 0$ là nghiệm của

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 5 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Với $m = -4$ thì $f'(x) = -80x^4 + 12x^2 = x^2(12 - 80x^2)$, do đó $m = -4$ không thỏa mãn.

+ Với $m = 5$ thì $f'(x) = -125x^4 - 15x^2 = -x^2(125x^2 + 15) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó $m = 5$ thỏa mãn.

Vậy $S = \{5\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 5.

Lưu ý: $f'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm của phương trình $12 - 80x^2 = 0$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2017.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$$

Theo yêu cầu bài toán $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} > 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	-1		1

Vậy $m \leq -1$ mà $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2018 giá trị nguyên.

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

C. $m \geq \sqrt{2}$.

D. $m > \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \cos x - \sin x + m$

Hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x - \sin x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x \leq m, \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm $f(x) = \sin x - \cos x$ trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) = \sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } f(x) \leq m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$$

Dạng 5. Xét tính đơn điệu của hàm số trên trên khoảng cho trước

1. Phương pháp giải

* Đối với hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Giả sử phương trình $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 . Ta nhắc lại các mối liên hệ nghiệm về tam thức bậc hai

Khi đó

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0.$$

$$\alpha \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \end{cases}.$$

$$x_1 < x_2 \leq \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2\beta \\ (x_1 - \beta)(x_2 - \beta) \geq 0 \end{cases}.$$

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}.$$

* Để hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên đoạn có độ dài bằng k

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = f'(x; m) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bước 2. Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Bước 3. Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng $k \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2$

Bước 4. Giải các điều kiện để suy ra giá trị m cần tìm.

* Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$ cho trước

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Hàm số xác định trên

$$(\alpha; \beta) \Leftrightarrow -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{d}{c} \leq \alpha \\ \frac{c}{d} \geq \beta \end{cases}$$

Bước 2. Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$

Bước 3. Kết luận

2. Bài tập

Bài tập 1. Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m < 2$.

D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lí).}$$

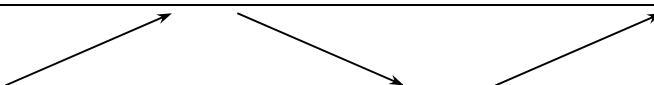
- Trường hợp 2: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 2m - 3 < 0 \\ m(m+1) - 2(2m+1) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m < \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \quad m \in (-\infty; 1]$$

Lưu ý: - Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì sẽ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = y'$ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Bài tập 2. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ là

A. $m \geq \frac{12}{7}$.

B. $m < \frac{12}{7}$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m > \frac{7}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 2(m-1)x + m+3 = g(x)$.

Do y là hàm số bậc ba với hệ số $a < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; 3) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{thỏa mãn } x_1 \leq 0 < 3 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot g(0) \leq 0 \\ -1 \cdot g(3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \geq 0 \\ 7m-12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}.$$

Bài tập 3. Các giá trị thực của tham số m để $f(x) = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 là

A. $m \geq 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $-\frac{5}{4} < m < 0$.

D. $m > -\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x + m - 1$

Hàm số đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_2 - x_1| > 1$.

Để $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 3m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -2$$

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{1-m}{3} \end{cases}$

$$\text{Với } |x_2 - x_1| > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$$

$$\text{Kết hợp, ta được } m > -\frac{5}{4}$$

Bài tập 4. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3 là

A. $m > 6$.

B. $m \in (0; 6)$.

C. $m < 0$.

D. $m < 0; m > 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - m \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ sao cho } |x_1 - x_2| > 3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 2-m \\ |-1-(2-m)| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ |m-3| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases}.$$

Bài tập 5. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1.

B. 3.

C. vô số.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-4m\}$

Để hàm số xác định trên $(2; +\infty)$ thì $-4m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

Ta có $y' = \frac{4m-3}{(x+4m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{4m-3}{(x+4m)^2} < 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 4m-3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$

Vậy có một số nguyên $m = 0$ thỏa mãn.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$

Ta có $y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty; -10) \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Bài tập 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - 4}{(m-x)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ m \notin (-3;1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$$

Do $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = 1$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 8. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $m \in (-3;1] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in (-3; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -3)$.

D. $m \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\text{Khi đó } y = f(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{m}{2}\right\}.$$

Vì hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ khi và chỉ khi hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Hàm số $y = f(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{-2m-6}{(2t-m)^2} > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6 > 0 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3)$$

Dạng 6: Phương pháp cô lập tham số m, phương pháp hàm số

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = f'(x)$

Bước 2. Chuyển về bài toán tìm tham số về một bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D$.

Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in D$, dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in D$, dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x = x(-4x^2 + 4m - 6)$

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$ khi $y' \leq 0, \forall x \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 4m - 6 \leq 0; \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2}, \forall x \in [1; 2]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2]} \left(x^2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

Kết hợp với m nguyên không âm suy ra $m \in \{0; 1; 2\}$

Vậy có ba giá trị nguyên không âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số luôn xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và

$$\Leftrightarrow x^3 + m + \frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = \frac{3(x^5 - 1)}{x^3}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

$$(1) \Leftrightarrow -m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$$

Mà m là số nguyên âm nên $m \in \{-2; -1\}$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}(8m^3 - 1)x^4 - 2x^3 + (2m - 7)x^2 - 12x + 2018$ với m là tham số. Số các giá trị

nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$ là

A. 2016.

B. 2019.

C. 2010.

D. 2015.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = (8m^3 - 1)x^3 - 6x^2 + 2(2m - 7)x - 12$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$

$$\Leftrightarrow (8m^3 - 1)x^3 - 6x^2 + 2(2m - 7)x - 12 \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow (2mx)^3 + 2(2mx) \geq (x+2)^3 + 2(x+2) \quad (*), \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$$

Xét $f(t) = t^3 + 2t; f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) ta có $2mx \geq x + 2, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4} \right] \Leftrightarrow m \leq \frac{x+2}{2x}, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4} \right]$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4} \right]} \frac{x+2}{2x} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{2}.$$

Do m nguyên và $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2015 giá trị của m thỏa mãn.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1.

B. 3.

C. 9.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $g(x) = x^3 - mx + 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Do đó hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ g(x) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ x^3 - mx + 1 \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2, \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq x^2 + \frac{1}{x}, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; +\infty)} (3x^2), \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq \min_{[1; +\infty)} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right), \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}. \end{aligned}$$

Lưu ý: Vì $y = |g(x)| = \sqrt{g^2(x)}$ nên ta có thể chuyển bài toán về xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{g^2(x)}$.

- Tính đạo hàm $y' = \frac{g'(x) \cdot g(x)}{\sqrt{g^2(x)}}$.

- Hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' > 0$ với $\forall x \in [\alpha; +\infty)$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ g(\alpha) \geq 0 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ g(\alpha) \leq 0 \end{cases}$

**Dạng 7. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,
 $y = f(u(x)) \pm h(x)$... khi biết bảng biến thiên của hàm số**

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x)$...

$$y' = u'(x) \cdot f'(u(x)), y' = u'(x) \cdot f'(u(x)) \pm h'(x)$$

Bước 2: Từ bảng biến thiên xác định nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn $y' \geq 0, y' \leq 0$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,
 $y = f(u(x)) \pm h(x)$...

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-3; -2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x)$

Ta có $g'(x) = f'(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2 \\ x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2+2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên $(-\infty; -3)$, $(-2; -1)$ và $(0; 1)$, nên hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Lưu ý: - Thông qua bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ xác định được nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

- Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến $\rightarrow$ đánh giá $y' \geq 0$ với $y' = (2x+2)f'(x^2 + 2x)$ (giải bất phương trình tích)

Chú ý:

Nếu $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$ thì $f(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) = a$.

- Bảng xét dấu $g'(x)$ chính là bảng xét dấu của tích $(2x+2)f'(x^2 + 2x)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = g(x) = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 - 3f'(2-x)$.

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' = g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq f'(2-x) \quad (1).$$

Nhận xét:

• Xét $(2; +\infty)$

Với $x = 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 12 \leq f'(-1) = 0 \Rightarrow$ loại.

• Xét $(0; 2)$

Với $x = \frac{3}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ loại.

• Xét $(-\infty; -2)$

Với $x = -4 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 5 \leq f'(6) < 0 \Rightarrow$ loại.

Xét $(-2; 1)$ thỏa mãn (1) vì

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ f'(2-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ 2-x \leq -1 \\ 1 \leq 2-x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Lưu ý: - Thông qua bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ xác định được nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

- Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến $\rightarrow$ đánh giá $y' \leq 0$.

Với dạng toán này cần tìm những giá trị của x sao cho $\begin{cases} f'(2-x) \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$.

Dạng 8: Tìm khoảng đồng, biến nghịch biến của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$ khi biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x)), y' = u'(x)f'(u(x))$.

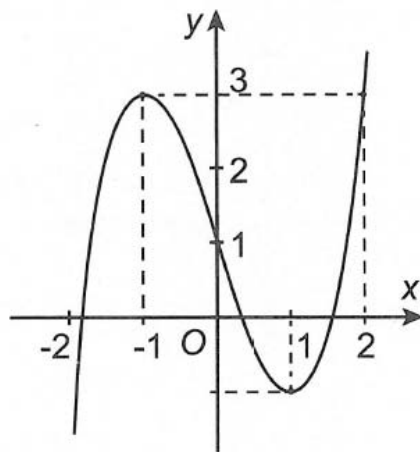
Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định được hàm số $y = f(x)$ hoặc (nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$).

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn $y' \geq 0, y' \leq 0$.

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y = g(x) = f(2x-1)$. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-1; 0)$.

B. $(-8; -1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Hàm số $y = g(x) = f(2x-1)$ có $y' = g'(x) = 2f'(2x-1)$

Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' = 2f'(2x-1) \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Cách 2: Hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị, hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(1; -1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$y = g(x) = f(2x-1) = (2x-1)^3 - 3(2x-1) + 1;$$

$$y' = g'(x) = 6(2x-1)^2 - 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -1 \\ 2x-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$.

Lưu ý: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \rightarrow$ xác định hàm $y = f(x)$. và hàm $y = f(2x-1) \rightarrow$ khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.

Chú ý:

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì hàm số $f(mx+n)$:

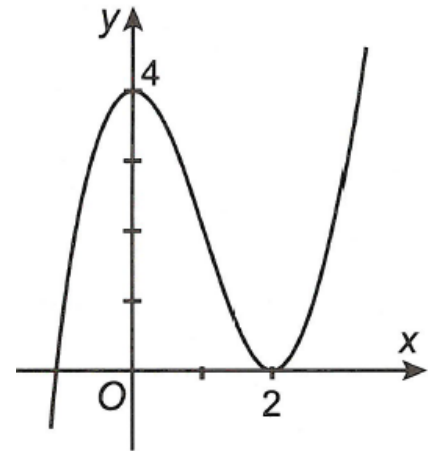
Đồng biến trên $\left(\frac{a-n}{m}; \frac{b-n}{m}\right)$ nếu $m > 0$.

Nghịch biến trên $\left(\frac{b-n}{m}; \frac{a-n}{m}\right)$ nếu $m < 0$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Đặt $y = g(x) = f(x^2 + x + 2)$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
- D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, có đồ thị như hình vẽ.

Nhận xét $A(0; 4)$ và $M(2; 0)$ là hai điểm cực trị của hàm số.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 4 \end{cases}$$

Tìm được hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$

$$\text{Ta có } y = g(x) = (x^2 + x + 2)^3 - 3(x^2 + x + 2)^2 + 4$$

$$y' = g'(x) = (2x+1) \left[3(x^2 + x + 2)^2 - 6(x^2 + x + 2) \right]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lưu ý: - Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định được hàm $y = f(x)$ và hàm $y = f(x^2 + x + 2) \rightarrow$ khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.

- Có thể sử dụng $y' = (2x+1) \cdot f'(x^2 + x + 2)$

$$y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2 + x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2 + x + 2 = 0 \\ x^2 + x + 2 = 2 \end{cases}$$

Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = g(x) = -f(mx+1)$, $m > 0$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên đúng một khoảng có độ dài bằng 3. Giá trị m là

A. 3.

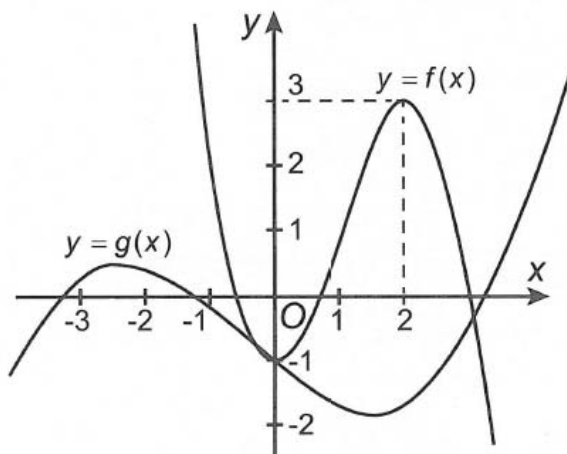
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Hàm số $y = g(x) = -f(mx+1)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3 nên $g'(x) = -mf'(mx+1) \leq 0 \Leftrightarrow f'(mx+1) \geq 0$ trên một khoảng có độ dài bằng 3.

$$\text{Ta có } f'(mx+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx+1=0 \\ mx+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{m} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Bảng xét dấu $f'(mx+1)$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$	
$f'(mx+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$f'(mx+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{m}; \frac{1}{m} \right]$$

$$\text{Yêu cầu của bài toán } \Leftrightarrow 3 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

Lưu ý: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \rightarrow$ xác định hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = f(mx+1)$ kết hợp với phần nhận xét ở Bài tập 1 cho kết quả.

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 2) \rightarrow$ Hàm số $y = -f(mx+1)$ nghịch biến trên $\left(\frac{0-1}{m}; \frac{2-1}{m} \right)$ có độ

$$\text{dài bằng } \frac{2}{m} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

**Dạng 9: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,
 $y = f(u(x)) \pm h(x)$... khi biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$**

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$

$$y' = u'(x)f'(u(x)), y' = u'(x).f'(u(x)) \pm h'(x)$$

Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xác định nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

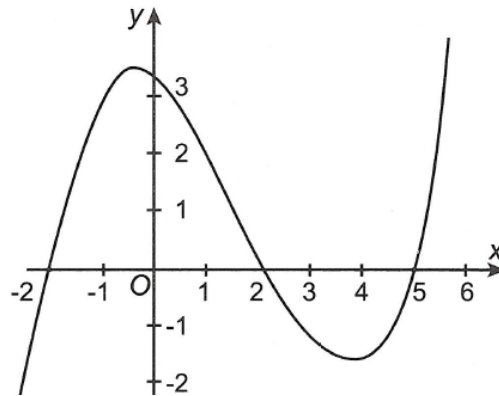
Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn

$$y' \geq 0, y' \leq 0$$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-\infty; -1)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ đồ thị (C): $y = f'(x); f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases} \quad (1)$

Mà $g'(x) = -2.f'(3-2x) \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $(-\infty; -1)$.

Lưu ý: Thông qua đồ thị hàm số $y = f'(x) \rightarrow$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 5 \leq x \end{cases}.$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 2 \leq 5 \leq x \end{cases}.$$

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến $\rightarrow$ đánh giá $y' = -2f'(3-2x) \leq 0$.

Chú ý:

Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành $\rightarrow$ chọn hàm cụ thể thỏa mãn

$$y = f'(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$$

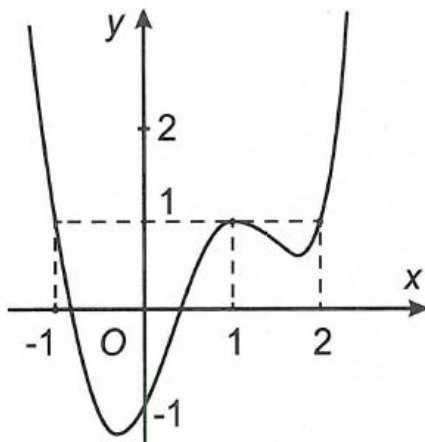
$$\rightarrow y' = -2f'(3-2x).$$

Lập bảng xét dấu.

$\rightarrow$ Kết luận.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018} \text{ trên khoảng nào dưới đây?}$$



A. $(2;3)$.

B. $(0;1)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x-1) - 1$$

$$\text{Do đó } y' > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -1 \\ x-1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

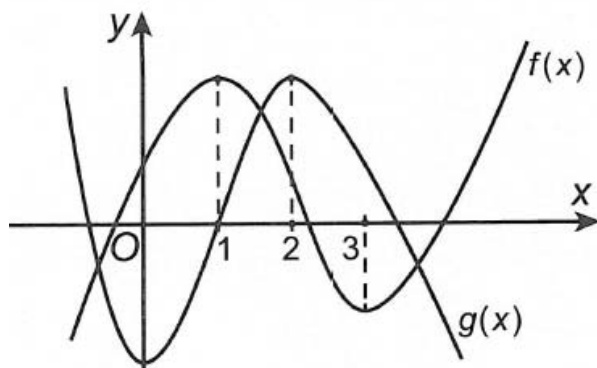
Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Nhận xét: Hàm số $g(x)$ có $g'(x) = f'(x-1) - 1$.

$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x), \text{ ta có } f'(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Bài tập 3. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng hai hàm số $f(2x-1)$ và $g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến $(m;n)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng



A. 0.

B. -2.

C. -4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

Hàm số $y = f(2x-1)$ có $y' = 2f'(2x-1)$

Với $y' < 0 \Leftrightarrow 2.f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy hàm số $y = f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

Hàm số $y = g(ax+b)$ có đạo hàm $y' = a.g'(ax+b)$

$$y' = a.g'(ax+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b=0 \\ ax+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a} \\ x = \frac{2-b}{a} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < \frac{2-b}{a}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right); \left(\frac{2-b}{a}; +\infty\right)$ (không thỏa mãn).

$$\text{Nếu } a < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > \frac{2-b}{a}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{2-b}{a}; -\frac{b}{a}\right)$

$$\text{Do hàm số có cùng khoảng nghịch biến là } (1;2) \text{ nên } \begin{cases} \frac{2-b}{a} = 1 \\ -\frac{b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = -1 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Vậy $4a+b = -4$.

Dạng 10. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, bất phương trình, tìm điều kiện có nghiệm của phương trình

1. Phương pháp giải

* Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D , ta có

Với mọi $u, v \in D$ mà $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Nhận xét: $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm

* Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D , ta có

Với mọi $u, v \in D: f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v$.

Với mọi $u, v \in D: f(u) \leq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$.

* Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có $\min_D f(x) = A$, $\max_D f(x) = B$ thì phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm thuộc tập hợp $D \Leftrightarrow A \leq g(m) \leq B$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Biết phương trình $27x^3 - 23x + 1 = \sqrt[3]{26x - 1}$ có một nghiệm thực dương $x = \frac{a}{b} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{c}{d}}$ với

b, c, d là các số nguyên tố. Khẳng định đúng là

A. $6(a + d) = b + c + 1$.

B. $6(a + d) = b + c - 1$.

C. $5(a + d) = b + c - 1$.

D. $5(a + d) = b + c + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình

$$27x^3 - 23x + 1 = \sqrt[3]{26x - 1} \Leftrightarrow (3x)^3 + 3x = (26x - 1) + \sqrt[3]{26x - 1}. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1): $f(3x) = f(\sqrt[3]{26x - 1}) \Leftrightarrow 3x = \sqrt[3]{26x - 1} \Leftrightarrow 27x^3 - 26x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 \\ x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}} \text{ là nghiệm có dạng đã cho}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2, c = 23, d = 3$$

$$\Rightarrow 6(a + d) = b + c - 1.$$

Bài tập 2. Biết phương trình $8x^3 - 12x^2 + 10x - 3 = (10x + 1)\sqrt{10x - 1}$ có một nghiệm thực dương

$x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và a, c là các số nguyên tố cùng nhau.

Khẳng định đúng là

A. $2(a + c) = b + 3$.

B. $4(a + c) = b - 3$.

C. $2(a + c) = b - 3$.

D. $4(a + c) = b + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Nhận xét:

- Vế trái là đa thức bậc ba, vế phải chứa căn bậc hai nên ta biến đổi để xuất hiện $(\sqrt{10x - 1})^3$. Ta có

$$(10x + 1)\sqrt{10x - 1} = [(10x - 1) + 2]\sqrt{10x - 1} = (\sqrt{10x - 1})^3 + 2\sqrt{10x - 1}$$

Khi đó phương trình có dạng $(ax + b)^3 + 2(ax + b) = (\sqrt{10x - 1})^3 + 2\sqrt{10x - 1}$

Điều kiện $x \geq \frac{1}{10}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (2x - 1)^3 + 2(2x - 1) = (\sqrt{10x - 1})^3 + 2\sqrt{10x - 1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(2x - 1) = f(\sqrt{10x - 1}) \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{10x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ (2x - 1)^2 = 10x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 7x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{41}}{4}$$

$\Rightarrow a = 7, b = 41, c = 4 \Rightarrow 4(a + c) = b + 3$.

Bài tập 3. Biết phương trình $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3} = \frac{1}{x+2}$, có một nghiệm thực $x = \frac{a + \sqrt{b}}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và c là

số nguyên tố. Khẳng định đúng là

A. $2ac = b + 1$.

B. $ac = b - 2$.

C. $2ac = b - 1$.

D. $ac = b + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

kiện $\begin{cases} x \neq 13 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1} - 2(x+2) = \sqrt[3]{2x+1} - 3$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + \sqrt{x+1} = (\sqrt[3]{2x+1})^3 + \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt[3]{2x+1}) \quad (1)$

với $f(t) = t^3 + t$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, có $f'(t) = 3t^2 + 1, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+1})^6 = (\sqrt[3]{2x+1})^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a=1, b=5, c=2 \Rightarrow 2ac = b-1.$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tất cả các giá trị thực của x để $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2)$ là

A. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$

B. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$

D. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right).$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Bài tập 5. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Tổng $a+b$ có giá trị bằng

A. -2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

Có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}, \forall x \in (-2; 4)$, do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$

So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 4] \Rightarrow a + b = 5$.

Bài tập 6. Cho $f(x) = x^3 + x - 2^m$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4]$ là

A. 6.

B. 9.

C. 21.

D. 22.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow \begin{cases} t = f(x) \\ f(t) = x \end{cases} \Rightarrow f(t) + t = f(x) + x. \quad (1)$$

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u = u^3 + 2u - 2^m$ có $g'(u) = 3u^2 + 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = 2^m. \quad (2)$

Phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4] \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4] \Leftrightarrow 1^3 \leq 2^m \leq 4^3 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Tổng các giá trị là $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21$.

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x) + m} \Rightarrow f(x) = t^3 - m$, kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3. \quad (1)$$

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 = u^5 + 4u^3 - 4m$

$\Rightarrow g'(u) = 5u^4 + 12u^2 > 0, \forall u \in [1; 2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến đoạn $[1; 2]$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x^3 - m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m \quad (2)$

Với $x \in [1; 2], 3 \leq x^5 + 2x^3 \leq 48$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm trên đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Bài tập 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m + 2\sqrt{m + 2\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

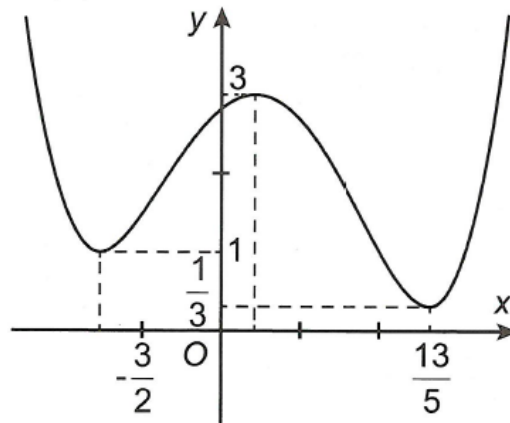
D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**Điều kiện $\sin x \geq 0$.Ta có $\sqrt{m+2\sqrt{m+2\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow m+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x$.

$$\Leftrightarrow m+2\sin x+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x+2\sin x \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t$ $f'(t) = 2t + 2 > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{m+2\sin x}) = f(\sin x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2\sin x} = \sin x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x = m$$

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in [0; 1]$ Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2t = m$ có nghiệm trên $[0; 1]$.Xét hàm số $g(t) = t^2 - 2t, t \in [0; 1]$ Ta có $g'(t) = 2t - 2; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Suy ra $\max_{[0;1]} g(t) = 0; \min_{[0;1]} g(t) = -1$ Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 0$ Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0; m = -1$.**Bài tập 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ.

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\frac{9m^3 + m}{\sqrt{3f^2(x) + 8}} = f^2(x) + 3$ có 3 nghiệm thực phân

biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 27m^3 + 3m = (3f^2(x) + 9)\sqrt{3f^2(x) + 8}$$

$$\Leftrightarrow (3m)^3 + 3m = \left(\sqrt{3f^2(x) + 8}\right)^3 + \sqrt{3f^2(x) + 8}$$

$$\Leftrightarrow g(3m) = g\left(\sqrt{3f^2(x) + 8}\right) \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \sqrt{3f^2(x) + 8} = 3m \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \geq \sqrt{8} \\ f^2(x) = \frac{9m^2 - 8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} \quad (2) \\ f(x) = -\sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} \quad (3) \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ thì phương trình (3) vô nghiệm (vì $f(x) > 0, \forall x$)

Do đó để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có ba nghiệm phân biệt hay

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} = 3 \\ \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{35}}{5} \\ m = \frac{\sqrt{11}}{3} \end{cases}.$$
