

TUYỂN CHỌN CÁC CÂU HÀM SỐ MỨC ĐỘ VD-VDC
PHÂN TÍCH DẠNG TOÁN VÀ HƯỚNG SUY LUẬN
(PHẦN 1)

MỤC LỤC

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ	2
DẠNG 2: TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU	12
DẠNG 3: ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀO PT, BPT, HPT, BĐT	21
DẠNG 4: CÂU HỎI LÝ THUYẾT VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU	26
DẠNG 5: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC	28
DẠNG 6: TÌM CỰC TRỊ DỰA VÀO BBT, ĐỒ THỊ	37
DẠNG 7: TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI 1 ĐIỂM X0 CHO TRƯỚC	42
DẠNG 8: TÌM M ĐỂ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN ..	44
DẠNG 9: TÌM M ĐỂ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐK	49
DẠNG 10: TÌM M ĐỂ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÁC HÀM SỐ KHÁC CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN	52
DẠNG 11: GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN	56
DẠNG 12: GTLN, GTNN TRÊN KHOẢNG	63
DẠNG 13: SỬ DỤNG CÁC ĐÁNH GIÁ, BẤT ĐẲNG THỨC CÔ ĐIÊN	64
DẠNG 14: ỨNG DỤNG GTNN, GTLN TRONG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH	65
DẠNG 15: GTLN, GTNN HÀM NHIỀU BIẾN	69
DẠNG 16: BÀI TOÁN ỨNG DỤNG, TỐI ƯU, THỰC TẾ	73
DẠNG 17: CÂU HỎI LÝ THUYẾT VỀ MAX MIN	81
DẠNG 18: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ (KHÔNG CHỨA THAM SỐ) HOẶC BIẾT BBT, ĐỒ THỊ	83
DẠNG 19: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ.	84
DẠNG 20: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN	87
DẠNG 21: NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ	87
DẠNG 22: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH DỰA VÀO ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN	90

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

Câu 1. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-4; 2)$. B. $(-1; 2)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 4)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số tổng dựa vào bảng biến thiên.

2. Hướng giải: Xét $y = g(x) = -2f(x) + 2019$

B1: Tính đạo hàm của của hàm số $g'(x)$.

B2: Lập bảng xét dấu của $g'(x)$ từ đó suy ra khoảng đồng biến (nghịch biến).

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Xét $y = g(x) = -2f(x) + 2019$.

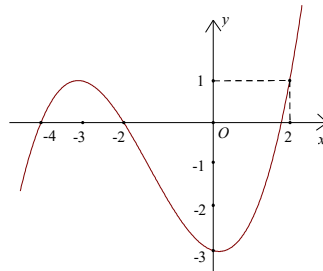
$$\text{Ta có } g'(x) = (-2f(x) + 2019)' = -2f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Câu 2. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số tổng dựa vào đồ thị.

2. Hướng giải: Vì $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên có dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ và $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

B1: Hàm số $f'(x)$ đi qua bốn điểm nên xác định được công thức của hàm số.

B2: Khi đó, để xét tính đồng biến của hàm số cần tìm, ta tính đạo hàm và lập bảng xét dấu.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0); f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

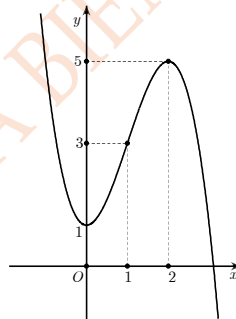
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm $(-4;0), (-2;0), (0;-3), (2;1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -256a + 48b - 8c + d = 0 \\ -32a + 12b - 4c + d = 0 \\ d = -3 \\ 32a + 12b + 4c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{96} \\ b = \frac{7}{24} \\ c = -\frac{7}{24} \\ d = -3 \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x; y' = 3(f'(x) + x^2 - 4x + 3) = 3\left(\frac{5}{24}x^3 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{55}{12}x + 3\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-11;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 3. Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(5-2x) + 4x^2 - 10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?



- A. $(3;4)$. B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số hợp dựa vào đồ thị.

2. Hướng giải: $g(x) = f(5-2x) + 4x^2 - 10x$

B1: Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, có hai điểm đặc biệt trên đồ thị (2 điểm cực trị) có hoành độ x_1, x_2 . Khi đó $f''(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ nên $f'(x)$ chính là nguyên hàm của hàm số $f''(x)$. Từ đây, ta tìm được công thức của hàm số $f'(x)$.

B2: Tính đạo hàm của hàm số $g'(x)$ dựa vào hàm số $f'(x)$.

B3: Lập bảng xét dấu, từ đồ thị suy ra khoảng đồng biến (nghịch biến).

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta suy ra $y = f'(x)$ có hai điểm cực trị $A(0;1), B(2;5)$.

Ta có $f''(x) = ax(x-2) = ax^2 - 2ax$, do đó $y = f'(x) = \frac{ax^3}{3} - ax^2 + b$ (1).

Thay tọa độ các điểm A, B vào (1) ta được hệ: $\begin{cases} b=1 \\ \frac{8a}{3} - 4a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-3 \end{cases}$.

Vậy $f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Đặt $g(x) = f(5-2x) + 4x^2 - 10x$ hàm có TXĐ $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $g'(x) = -2[f'(5-2x) - 4x + 5] = -4(4x^3 - 24x^2 + 43x - 22)$,

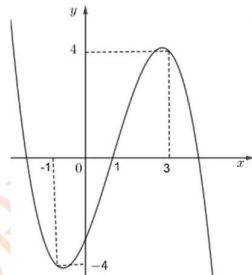
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{4-\sqrt{5}}{2}$	2	$\frac{4+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ BBT ta chọn đáp án **B**.

Câu 4. (SỞ GD&ĐT CẦN THƠ NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1; 2)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số tổng dựa vào đồ thị.

2. Hướng giải: Đặt $y = g(x) = f(x) - x^2 + 2x$.

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g'(x)$

B2: Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$

B3: Nếu trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ thì $g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Nếu trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ thì $g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

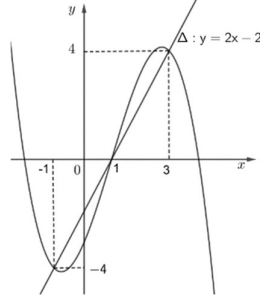
Chọn C

Đặt $y = g(x) = f(x) - x^2 + 2x$.

Ta có: $g'(x) = (f(x) - x^2 + 2x)' = f'(x) - 2x + 2$.

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 2$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ (như hình vẽ dưới).



Dựa vào đồ thị ta thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Dấu của $g'(x)$ trên khoảng $(a; b)$ được xác định như sau:

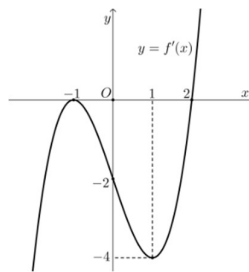
Nếu trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ thì $g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Nếu trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ thì $g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy trên $(-1; 1)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ nên $g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$.

Do đó hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên $(-1; 1)$ mà $(0; 1) \subset (-1; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

Câu 5. (SỞ GD&ĐT CÀ MAU NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 3)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(4; +\infty)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số hợp dựa vào đồ thị.

2. Hướng giải: Đặt $y = g(x) = f(x) - x^2 + 2x$.

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g'(x) = [f(x^2 - 2)]' = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

B2: Dựa vào đồ thị, giải phương trình $g'(x) = 0$.

B3: Lập bảng xét dấu của x , $f'(x^2 - 2)$ và $g'(x)$. Từ đó tìm được khoảng nghịch biến.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = [f(x^2 - 2)]' = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$f'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}, f'(x^2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x^2 - 2)$	+	0	-	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	+

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 6. (Sở GD&ĐT Quảng Bình năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+

A. $(1; +\infty)$

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-1; 3)$.

D. $(-2; 1)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Xét sự biến thiên của hàm số $g(x) = a^{mf(u(x))+n} + b^{cf(u(x))+d}$ khi biết bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp giải: Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$, xét dấu của hàm số $y = g'(x)$, từ đó kết luận khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = a^{mf(u(x))+n} + b^{cf(u(x))+d}$.

2. Hướng giải:

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = a^{mf(u(x))+n} + b^{cf(u(x))+d}$;

$$g'(x) = (mf(u(x)) + n)' \cdot a^{mf(u(x))+n} \ln a + (cf(u(x)) + d)' \cdot b^{cf(u(x))+d} \ln b.$$

B2: Tìm tất cả các giá trị của biến x để $g'(x) > 0$.

B3: Đối chiếu với các phương án và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Từ bảng đạo hàm ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

$$y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$$

$$\Rightarrow y' = -3 \cdot f'(2-x) e^{3f(2-x)+1} - f'(2-x) \cdot 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3$$

$$\Leftrightarrow y' = -f'(2-x) [3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3].$$

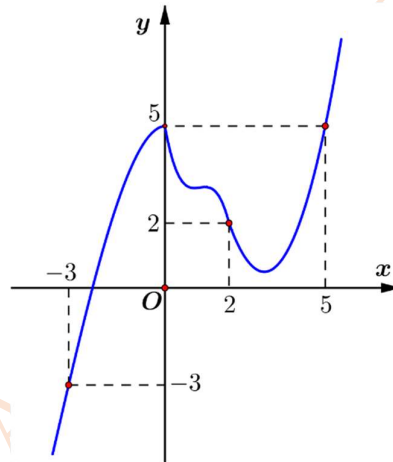
Để hàm số đồng biến thì $y' = -f'(2-x) [3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3] > 0$

$$\Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \text{ (vì } 3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Đối chiếu các đáp án, chọn x thuộc khoảng $(-2; 1)$.

Câu 7. (Sở GD&ĐT Phú Thọ năm 2018-2019 lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Xét sự biến thiên của hàm số $g(x) = f(u(x)) + v(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Phương pháp giải: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét dấu của hàm số $y = g'(x)$, từ đó kết luận tính biến thiên của hàm số $g(x) = f(u(x)) + v(x)$.

2. Hướng giải:

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = f(u(x)) + v(x)$; $g'(x) = u'(x) \cdot f'(u) + v'(x)$.

B2: Đặt $t = -2x+1$, tìm các giá trị t để $y' = -2f'(t) + 2t = 2(t - f'(t)) > 0$, suy ra tất cả các giá trị của biến x để $g'(x) > 0$.

B3: Đối chiếu với các phương án và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

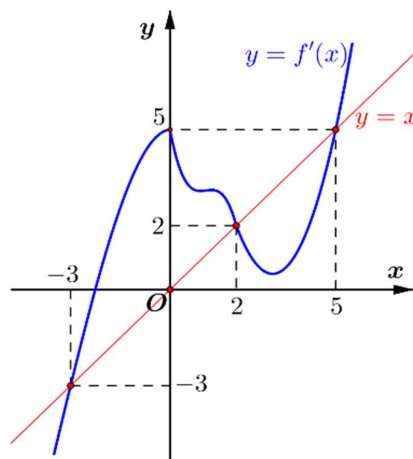
Chọn A

Ta có $y = g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4) = f(-2x+1) - 2x^2 + 2x + 4$.

$$y' = -2f'(-2x+1) - 4x + 2.$$

Đặt $t = -2x+1 \Rightarrow -2x = t-1$. Khi đó $y' = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$ trở thành

$$y' = -2f'(t) + 2t = 2(t - f'(t))$$



Xét $y' = -2f'(t) + 2t = 2(t - f'(t)) > 0 \Leftrightarrow t > f'(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ 2 < t < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < -3 \\ 2 < -2x+1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-2; -\frac{1}{2}\right), (2; +\infty)$.

Câu 8. (Sở GD&ĐT Bình Phước năm 2018-2019 lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Xét sự biến thiên của hàm số $g(x) = f(u(x))$ khi biết bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp giải: Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ xét dấu của hàm số $y = g'(x)$, từ đó kết luận tính biến thiên của hàm số $g(x) = f(u(x))$.

2. Hướng giải:

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = f(u(x))$; $g'(x) = u'(x) \cdot f'(u)$.

B2: Giải phương trình $g'(x) = 0$.

B3: Xét dấu hàm số $y = g'(x)$ (dựa vào dấu của $u'(x)$ và $f'(u)$) và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

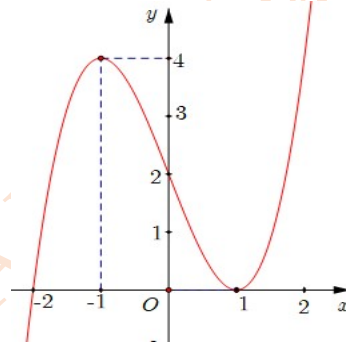
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -2 \\ x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Do các nghiệm của phương trình $y' = 0$ đều là nghiệm bội lẻ, mà $y'(3) = 6f'(7) < 0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+	0	-

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 9. (Sở GD&ĐT Lào Cai năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tìm số điểm cực trị của hàm số $F(x) = f(u(x)) - g(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Phương pháp giải: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tìm số nghiệm của phương trình $F'(x) = 0$ và xét dấu hàm số $y = F'(x)$, từ đó suy ra số cực trị của hàm số $F(x) = f(u(x)) - g(x)$.

2. Hướng giải:

B1: Đặt $t = x - 2017$. Đưa hàm số đã cho về hàm số $y = f(t)$.

B2: Tính đạo hàm của hàm số $y = f(t)$. Giải phương trình $f'(t) = 0$ (dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$).

B3: Xét sự đổi dấu của hàm số $y = f'(t)$ và kết luận số cực trị.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x - 2017 \Rightarrow x = t + 2017$, ta được hàm số $y = f(t) - 2018(t + 2017) + 2019$

$$\Leftrightarrow y = f(t) - 2018t - 2018 \cdot 2017 + 2019.$$

Khi đó: $y' = f'(t) - 2018$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 2018$$

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 2018$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại một điểm duy nhất nên phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất t_0 .

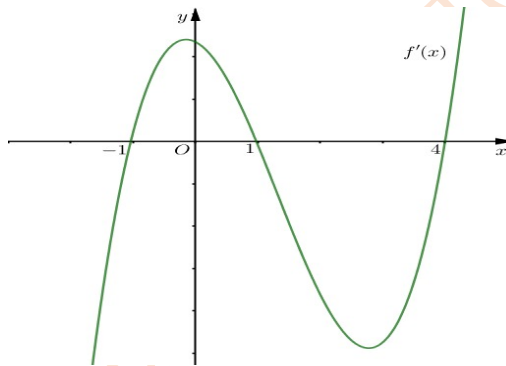
Với $t < t_0$, ta có: $y'(t) < 0$.

Với $t > t_0$, ta có: $y'(t) > 0$.

Vậy hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Câu 10. (Sở GD&ĐT Bà Rịa Vũng Tàu năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(1; 4)$.

D. $(4; +\infty)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Xét sự biến thiên của hàm số $g(x) = f(u(x))$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Phương pháp giải: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét dấu của hàm số $y = g'(x)$, từ đó kết luận tính biến thiên của hàm số $g(x) = f(u(x))$.

2. Hướng giải:

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = f(u(x))$; $g'(x) = u'(x) \cdot f'(u)$.

B2: Giải phương trình $g'(x) = 0$.

B3: Xét dấu hàm số $y = g'(x)$ (dựa vào dấu của $u'(x)$ và $f'(u)$) và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(x^2)$. Ta có: $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có:

$$\begin{aligned}
 +) f'(x^2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \\
 +) f'(x^2) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < -1 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \\
 +) f'(x^2) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^2 < 1 \\ x^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < -2 \\ x > 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 11. (Sở GD-ĐT Nam Định 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2018$ với $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào ?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(0; 3)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(4; +\infty)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm hợp.

2. Hướng giải:

B1: Tìm đạo hàm của hàm hợp đề bài cho theo công thức $f(u) = u' \cdot f'(u)$

B2: Đề bài có yếu tố $f(1-x)$ nên thay x bằng $1-x$. Đề bài yêu cầu tìm khoảng nghịch biến nên tiến hành giải bất phương trình $y' \leq 0$.

Từ đó ta có lời giải cụ thể như sau :

Lời giải

Chọn D

Đặt: $y = h(x) = f(1-x) + 2018x + 2019$.

Ta có: $h'(x) = -f'(1-x) + 2018 = -x(3-x)g(1-x)$.

Xét $h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(3-x) \geq 0$ (vì $g(1-x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$0 \leq x \leq 3$.

Vậy hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $(0; 3)$ nên đáp án đúng là đáp án B.

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

Câu 12. (Sở GD&ĐT Bắc Ninh năm 2018-2019 lần 01) Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m \in [-1; 1]$.

B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $m \in (-1; 1)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tìm tham số để hàm số bậc ba đơn điệu trên một khoảng D cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Liên quan tới tính đơn điệu nên đầu tiên ta đi tính đạo hàm của hàm đã cho.

B2: Đề bài yêu cầu hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Sau đó ta triển khai theo 2 hướng.

Hướng 1. Nếu cô lập được D sang 1 vế, vế còn lại đặt là $h(x)$ thì so sánh m với $h(x)$ trên D .

Nếu $m \leq h(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in D} h(x)$, nếu $m \geq h(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in D} h(x)$.

Hướng 2. Nếu không cô lập được m thì ta dùng tính chất của hàm bậc ba hoặc dấu tam thức bậc hai.

Từ đó ta có lời giải chi tiết sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm là hàm bậc hai, nên:

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta_{y'} = 36(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-1; 1].$$

Câu 13. (Sở GD&ĐT Quảng Ninh năm 2018-2019 lần 01) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$. Tập hợp tất cả các

giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-\infty; 2]$.

D. $[2; +\infty)$.

Phân tích hướng dẫn giải.

1. Dạng toán: Tìm tham số để hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất đơn điệu trên một khoảng D cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Liên quan tới tính đơn điệu nên đầu tiên ta đi tính đạo hàm của hàm đã cho.

Cách tính nhanh: $\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

B2: Hàm số có tập xác định K . Hàm số chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định nên trước hết phải đảm bảo $D \subset K$.

B3: Đạo hàm của hàm $\frac{u}{v}$ số có dạng $\frac{m}{v^2}$; trong đó $v^2 > 0, \forall x \in K$ nên chỉ cần xét dấu của m .

Nếu hàm đồng biến thì $m > 0$; hàm nghịch biến thì $m < 0$. (lưu ý, không xảy ra dấu “=”)

Từ đó ta có lời giải chi tiết như sau:

Lời giải

Chọn B

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Như vậy $(0; +\infty) \subset D$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2-m}{(x+2)^2}.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (0; +\infty).$

$$\Leftrightarrow 2-m > 0 \Leftrightarrow m < 2 \text{ hay } m \in (-\infty; 2).$$

Câu 14. (Sở GD&ĐT Hà Tĩnh năm 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - mx^2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. 4.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tìm tham số để hàm trùng phương đơn điệu trên một khoảng D cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Liên quan tới tính đơn điệu nên đầu tiên ta đi tính đạo hàm của hàm đã cho.

B2: Đề bài yêu cầu hàm đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên $y' \geq 0 \forall x \in (2; +\infty)$. Theo tính chất hàm trùng phương, phương trình $y' = 0$ luôn có 1 nghiệm bằng 0. Tách x ra còn hàm bậc hai. Sử dụng dấu tam thức bậc hai hoặc lập bảng biến thiên để xét dấu đạo hàm.

Từ đó ta có lời giải chi tiết sau:

Lời giải

Chọn B

$$\text{+ TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có } y' = 4x^3 - 2mx.$$

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty).$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 2mx \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2x(2x^2 - m) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - m \geq 0 \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 2x^2 \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(2; +\infty)} 2x^2$$

Lập bảng biến thiên của hàm bậc hai $y = 2x^2$ và xét trên khoảng $(2; +\infty)$ ta được :

x	2	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	8	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 8$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn YCBT: 8.

Câu 15. (Sở GD&ĐT Điện Biên năm 2018-2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm

số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - (2m-3)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

A. $[0; +\infty)$.

B. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

D. $(-\infty; 0]$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tìm tham số để hàm số bậc ba đơn điệu trên một khoảng D cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Liên quan tới tính đơn điệu nên đầu tiên ta đi tính đạo hàm của hàm đã cho.

B2: Đề bài yêu cầu hàm đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ nên $y' \geq 0 \forall x \in (-1; +\infty)$. Sau đó ta triển khai theo 2 hướng.

Hướng 1. Nếu cô lập được m sang 1 vế, vế còn lại đặt là $h(x)$ thì so sánh m với $h(x)$ trên D .

Nếu $m \leq h(x) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in D} h(x)$, nếu $m \geq h(x) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in D} h(x)$.

Hướng 2. Nếu không cô lập được m thì ta dùng tính chất của hàm bậc ba hoặc tính chất của hàm đạo hàm.

Từ đó ta có lời giải chi tiết sau:

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 + 4x - 2m + 3$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$.

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2m + 3 \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$.

$\Leftrightarrow 2m \leq x^2 + 4x + 3, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow 2m \leq \min_{(-1; +\infty)} (x^2 + 4x + 3) (*)$.

Đặt $g(x) = x^2 + 4x + 3$.

$g'(x) = 2x + 4; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ ta được:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$ 0 $+$		$+$
$g(x)$	$+\infty$		0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, $(*) \Leftrightarrow 2m \leq g(-1) \Leftrightarrow m \leq 0$.

Câu 16. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. 10.

B. 20.

C. 11.

D. 21.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán định m để hàm số đồng nghịch trên khoảng cho trước.

PP chung: Trước tiên ta đạo hàm hàm số.

Sau đó tùy thuộc vào dữ kiện đề bài ta sẽ biện luận tham số m

2. Hướng giải:

B1: Tìm TXĐ, tính đạo hàm $y' = 3(x^2 - 2x + m)$.

B2: Xét phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có $\Delta' = 1 - m$.

B3: Biện luận Δ theo tham số m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3mx + 2019$.

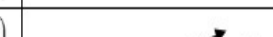
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(x^2 - 2x + m)$.

Xét phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có $\Delta' = 1 - m$.

*Với $m \geq 1$ ta có $\Delta' \leq 0$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó hàm số luôn đồng biến (không thỏa mãn)

*Với $m < 1$ ta có $\Delta' > 0$ nên $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $(1; 2)$ khi và chỉ khi

$$x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3.f'(1) \leq 0 \\ 3.f'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$$

Kết hợp yêu cầu bài toán ta có $m \in \{-10; -9; \dots; -1; 0\}$.

Câu 17. (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} + \frac{x^2}{2} - mx + 2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m| \leq 2020$.

A. 4041.

B. 2027.

C. 2026.

D. 2015.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán định m để hàm số đồng biến trên khoảng cho trước.

PP chung: Trước tiên ta đạo hàm hàm số.

Sau đó tùy thuộc vào dữ kiện đề bài ta sẽ biện luận tham số m (độc lập tham số m nếu được)

2. Hướng giải:

B1: Tìm TXĐ, tính đạo hàm $y' = x^3 - mx^2 + x - m = x^3 - m(x^2 + 1) + x \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$.

B2: Độc lập tham số m :

B3: Đặt $f(x)$ là biểu thức độc lập tham số m . Khi đó ta sẽ tìm $\min f(x), \forall x \in (6; +\infty)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$.

$$y' = x^3 - mx^2 + x - m = x^3 - m(x^2 + 1) + x \geq 0, \forall x \in (6; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x, \forall x \in (6; +\infty).$$

Đặt $f(x) = x$ thì $m \leq f(x), \forall x \in (6; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min f(x), \forall x \in (6; +\infty)$.

$\Leftrightarrow m \leq 6$.

Mà $|m| \leq 2020$ nên $m \in \{-2020; -2019; \dots, 6\}$, có 2027 phần tử. Ta chọn B.

Câu 18. Do câu 18 trùng với câu 16 nên không làm lại câu này ạ.

Câu 19. (SỞ GD&ĐT CÀ MAU NĂM 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m

để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán định m để hàm số đồng nghịch trên khoảng cho trước đối với hàm nhất biến.

PP chung: Tìm tập xác định, đạo hàm hàm số.

Sau đó tùy thuộc vào dữ kiện đề bài ta sẽ biện luận tham số m , và nghiệm mẫu nằm ngoài khoảng đồng biến hoặc nghịch biến mà đề yêu cầu.

2. Hướng giải:

B1: Tìm TXĐ, tính đạo hàm $y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

B2: Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -3) \end{cases}$

B3: Giải và giao nghiệm để tìm ra tham số m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \\ m \leq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (1; 3]$. Vì m nguyên dương nên $m \in \{2; 3\}$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. (SỞ GD&ĐT LẠNG SƠN NĂM 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3(m+2)x^2 - 3(m^2+4m)x + 1$ đồng biến trong khoảng $(0; 1)$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán định m để hàm số đồng nghịch trên khoảng cho trước.

PP chung: Trước tiên ta đạo hàm hàm số.

Sau đó tùy thuộc vào dữ kiện đề bài ta sẽ biện luận tham số m (độc lập tham số m nếu được)

2. Hướng giải:

B1: Tìm TXĐ, tính đạo hàm $\Rightarrow y' = -3x^2 + 6(m+2)x - 3(m^2+4m)$.

B2: Do bài này việc độc lập tham số m phức tạp nên ta dự đoán nghiệm của bài toán

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 4 \end{cases}$$

B3: Ta lập bảng biến thiên dựa vào nghiệm vừa tìm được và so sánh với khoảng đề bài cho để tìm được tham số m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

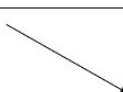
Chọn D

Ta có $y = -x^3 + 3(m+2)x^2 - 3(m^2 + 4m)x + 1$

$$\Rightarrow y' = -3x^2 + 6(m+2)x - 3(m^2 + 4m) = -3[x^2 - 2(m+2)x + m(m+4)]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$m+4$	$+\infty$		
y'		—	0	+	0	—
y						

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì $\Leftrightarrow m \leq 0 < 1 \leq m+4 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Câu 21. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Gọi S là tập hợp các số nguyên

m để hàm số $y = f(x) = \frac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$. Tính tổng T của

các phần tử trong S ?

A. $T = -10$.

B. $T = -9$.

C. $T = -6$.

D. $T = -5$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để hàm số phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất đơn điệu trên một khoảng cho trước (cố gắng đưa ra phương pháp chung cho dạng toán này nếu được)

2. Hướng giải:

B1: Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3m-2\}$

B2: Tính đạo hàm $f'(x) = \frac{-5m+5}{(x-3m+2)^2}$

B3: Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -14)$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên $(-\infty; -14)$ và $f'(x) \geq 0 \forall x \in (-\infty; -14)$ ($f'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm thuộc $(-\infty; -14)$).

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3m-2\}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-5m+5}{(x-3m+2)^2}.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (-\infty; -14) \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5 > 0 \\ 3m-2 \notin (-\infty; -14) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 3m-2 \geq -14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 1.$$

$$\text{Vậy } S = \{-4; -3; -2; -1; 0\} \Rightarrow T = -4 - 3 - 2 - 1 = -10.$$

Câu 22. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2012 .

B. 2009 .

C. 2011 .

D. 2010 .

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để hàm số hợp đơn điệu trên một khoảng cho trước (cố gắng đưa ra phương pháp chung cho dạng toán này nếu được)

2. Hướng giải:

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = f(1-x)$ là $g'(x) = f'(1-x)$

$$= -(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right] = (x-1)^2(x+1)(x^2 + 4x + m - 5)$$

B2: Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1 \quad (*), \text{ (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).}$$

B3: Đánh giá với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 5 \geq 0, \forall x < -1 \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 4x + 5, \forall x < -1.$$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right]$$

$$= (x-1)^2(x+1)(x^2 + 4x + m - 5).$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1 \quad (*), \text{ (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).}$$

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 5 \geq 0, \forall x < -1$

$$\Leftrightarrow m \geq -x^2 - 4x + 5, \forall x < -1.$$

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

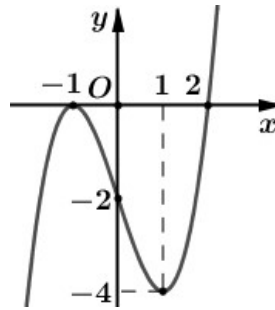
x	$-\infty$	-2	-1
y	$-\infty$	9	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2011 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 23. (SỐ GD&ĐT YÊN BÁI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số hợp (cố gắng đưa ra phương pháp chung cho dạng toán này nếu được)

2. Hướng giải:

B1: Tính đạo hàm $g'(x) = 2x f'(x^2 - 5)$.

B2: Giải phương trình $g'(x) = 0$.

B3: Xét dấu đạo hàm $g'(x)$, từ đó suy ra khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2x f'(x^2 - 5)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{cases}$.

Từ đồ thị ta suy ra $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = -1 \Leftrightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 5 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{7} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	-2	0	2	$\sqrt{7}$	$+\infty$
x	-		-		+		+
$f'(x^2-5)$	+	0	-	0	-	0	+
g'	-	0	+	0	+	0	+
g							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 24. (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	4	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Giá trị của tham số m để hàm số $y = g(x) = f(1-x) + \frac{1}{x^2 + mx + m^2 + 1}$ chắc chắn luôn đồng biến trên $(-3;0)$.

A. $m \in (-2; -1)$. **B.** $m \in (-\infty; -2)$. **C.** $m \in [-1; 0]$. **D.** $[0; +\infty)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để hàm số hợp đơn điệu trên một khoảng cho trước (cố gắng đưa ra phương pháp chung cho dạng toán này nếu được)

2. Hướng giải:

B1: Tìm điều kiện xác định: $x^2 + mx + m^2 + 1 \neq 0$

B2: Tính đạo hàm $g'(x) = -f'(1-x) - \frac{2x+m}{(x^2 + mx + m^2 + 1)^2}$

B3: Đặt ẩn phụ $t = 1-x$; $x \in (-3;0)$, $\Rightarrow t \in (1;4)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0 \forall x \in (-3;0)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x^2 + mx + m^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng vì $x^2 + mx + m^2 + 1 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{3m^2}{4} + 1 > 0$)

$$g'(x) = -f'(1-x) - \frac{2x+m}{(x^2 + mx + m^2 + 1)^2}.$$

Đặt $t = 1-x$; $x \in (-3;0) \Rightarrow t \in (1;4) \Rightarrow -f'(1-x), x \in (-3;0)$ chính là $-f'(t), t \in (1;4)$. Do đó từ bảng biến thiên suy ra $-f'(t) > 0, \forall t \in (1;4) \Leftrightarrow -f'(1-x) > 0, \forall x \in (-3;0)$

$$\text{Ycbt } -\frac{2x+m}{(x^2 + mx + m^2 + 1)^2} \geq 0, \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow 2x+m \leq 0, \forall x \in (-3;0)$$

$$\Leftrightarrow m \leq -2x, \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow m \leq \min_{[-3;0]}(-2x) \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Vậy $m \in [0; +\infty)$.

DẠNG 3: ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀO PT, BPT, HPT, BDT

Câu 25. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

- A. $(3, 8; 3, 9)$. B. $(3, 6; 3, 7)$. C. $(3, 7; 3, 8)$. D. $(3, 5; 3, 6)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số (cố gắng đưa ra phương pháp chung cho dạng toán này nếu được)

2. Hướng giải:

B1: Tìm điều kiện: $x > -1$.

B2: Biến đổi phương trình tương đương với

$$\begin{cases} m = \frac{x+2}{\ln(x+1)} & (2) \\ x = \frac{1}{e} - 1 < 0 \end{cases}$$

B3: Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, lập bảng biến thiên. Từ đó kết luận về điều kiện của m để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Vì $x = 0$ không thỏa mãn phương trình nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow [m \ln(x+1) - x - 2][\ln(x+1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ln(x+1) = x + 2 \\ \ln(x+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x+2}{\ln(x+1)} & (2) \\ x = \frac{1}{e} - 1 \end{cases}$$

Do nghiệm $x = \frac{1}{e} - 1 < 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt sao cho $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $f'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} = 0 \quad (3).$$

Xét hàm số $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$ có $h'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \forall x > 0$, nên $h(x)$ đồng

biến trên $(0; +\infty)$ do đó phương trình $f'(x) = 0$ có không quá một nghiệm.

Mà $f'(2)f'(4) < 0$ và $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[2; 4]$ suy ra phương trình (3) có duy nhất một nghiệm $x_0 \in (2; 4)$. Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0	2	x_0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{\ln 3}$	$\frac{6}{\ln 5}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$0 < x_1 < 2 < 4 < x_2 \text{ khi và chỉ khi } m > \frac{6}{\ln 5} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{6}{\ln 5}; +\infty \right).$$

$$\text{Vậy } a = \frac{6}{\ln 5} \in (3, 7; 3, 8).$$

Câu 26. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		$\frac{15}{13}$		$\frac{15}{13}$		$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$.

A. e^5 .

B. $e^{\frac{15}{13}}$.

C. e^3 .

D. e^4 .

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm tham số m để phương trình có nghiệm

2. Hướng giải:

B1: Lập bảng biến thiên

B2: Dựa vào bảng biến thiên tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}}$ trên $[0; 2]$.

B3: Kết luận về giá trị lớn nhất của m

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2} = \ln m.$$

$$\text{Đặt } g(x) = 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}.$$

$$g'(x) = f'(x)(6f^2(x) - 13f(x) + 7).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = -3 \\ x = 1; x = a > 3 \\ x = b < 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[0; 2]$:

x	$-\infty$	b	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		0	+	0	-	0	
$g(x)$				4			

Giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ là: $\ln m = 4 \Leftrightarrow m = e^4$.

- Câu 27. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{\frac{m}{2} + \frac{4}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}} \sin(x^2 + 2019) = \sin(x^2 + 2019)$ có nghiệm thực?
- A.** 3. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm tham số m để phương trình có nghiệm. Tuy nhiên bài toán không thể cô lập được tham số ngay mà sau khi đặt ẩn phụ đưa về được dạng $f(t) = f(a)$, với $f(t)$ là hàm đơn điệu.

2. Hướng giải:

B1: Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình.

B2: Từ hệ phương trình ta suy ra được $f(t) = f(a)$, với $f(t)$ là hàm đơn điệu. Dựa vào bảng biến thiên tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(t)$.

B3: Kết luận về giá trị lớn nhất của m

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Đặt $\sin(x^2 + 2019) = a$ ($a \in [-1; 1]$)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{m}{2} + \frac{4}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}} a = a$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}} a = t \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}} a = t \\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}} t = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}m + \frac{4}{3} a = t^3 \\ \frac{1}{2}m + \frac{4}{3} t = a^3 \end{cases} \Rightarrow a^3 + \frac{4}{3} a = t^3 + \frac{4}{3} t$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + \frac{4}{3}t$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + \frac{4}{3} > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(t) = t^3 + \frac{4}{3}t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ (*) suy ra $f(t) = f(a) \Leftrightarrow t = a$.

Do đó $\frac{1}{2}m + \frac{4}{3}a = a^3 \Leftrightarrow m = 2a^3 - \frac{8}{3}a$ với $a \in [-1; 1]$. Đặt $g(a) = 2a^3 - \frac{8}{3}a$; $g'(a) = 6a^2 - \frac{8}{3}$.

Ta có $g'(a) = 6a^2 - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Khi đó: $g(1) = -\frac{2}{3}$; $g(-1) = \frac{2}{3}$; $g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$; $g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{27}$

Phương trình có nghiệm khi $\min_{[-1;1]} g(a) \leq m \leq \max_{[-1;1]} g(a) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{32}{27} \leq m \leq \frac{32}{27} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m + \sqrt{2019m + x^2}} = x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 1.

B. 0.

C. Vô số.

D. 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Tuy nhiên ta không thể cô lập được tham số ngay mà sau khi đặt ẩn phụ đưa về được dạng $f(t) = f(a)$, với $f(t)$ là hàm đơn điệu.

2. Hướng giải:

B1: Đưa phương trình về dạng $f(t) = f(a)$ với $f(t)$ là hàm đơn điệu suy ra $f(t) = f(a) \Leftrightarrow t = a$

B2: Từ phương trình $t = a \Leftrightarrow g(x) = h(m)$. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

B3: Kết luận về giá trị lớn nhất của m

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $2019m + x^2 \geq 0$.

Phương trình $\sqrt{2019m + \sqrt{2019m + x^2}} = x^2 \Leftrightarrow 2019m + \sqrt{2019m + x^2} = x^4$

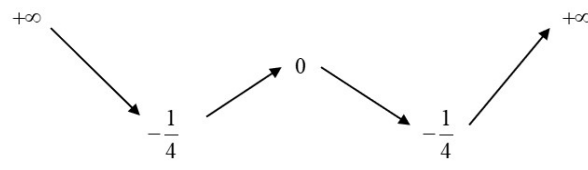
$\Leftrightarrow 2019m + x^2 + \sqrt{2019m + x^2} = x^4 + x^2$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$ suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2019m + x^2}\right) = f(x^2) \Leftrightarrow \sqrt{2019m + x^2} = x^2 \Leftrightarrow 2019m = x^4 - x^2$.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - x^2$ có $g'(x) = 4x^3 - 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

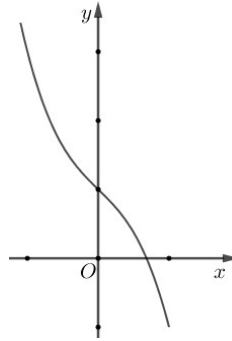
x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2019m = -\frac{1}{4} \\ 2019m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{8076} \\ m > 0 \end{cases}$.

Vì m âm nên $m = -\frac{1}{8076}$. Vậy có 1 giá trị cần tìm.

DẠNG 4: CÂU HỎI LÝ THUYẾT VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU

Câu 29. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng



A. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba.

2. Hướng giải:

B1: Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số suy ra mối quan hệ giữa các hệ số a, b, c, d

B2: Kết luận

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ suy ra $a < 0$

Từ đồ thị ta suy ra $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 3ac < 0$.

Vậy $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Câu 30. (SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NAM NĂM 2018-2019) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 2)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

B. $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$

C. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

D. $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right]$

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm tham số m để hàm số nghịch biến trên một khoảng

2. Hướng giải:

B1: Tìm đạo hàm $f'(x) \leq 0$ cô lập. Tìm GTLN và GTNN của $g(x)$ trên khoảng theo yêu cầu bài toán.

B3: Kết luận về giá trị của m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + (4m - 2)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi $y' = -3x^2 - 12x + (4m - 2) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 2, \forall x \in (-\infty; 0). \text{ Đặt } f(x) = 3x^2 + 12x + 2, \forall x \in (-\infty; 0).$$

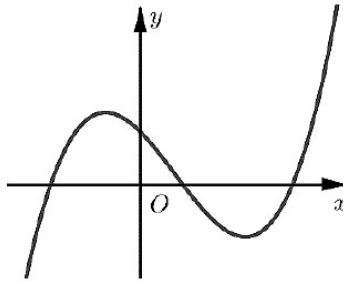
$$f'(x) = 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2. \text{ Ta có bảng biến thiên của } f(x)$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-10	2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $4m \leq 3x^2 + 12x + 2, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow 4m \leq -10 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}$

Vậy $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right]$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 31. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d, (b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $b > 0, c < 0, d > 0.$

B. $b > 0, c > 0, d > 0.$

C. $b < 0, c > 0, d < 0.$

D. $b < 0, c < 0, d > 0.$

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán đồ thị của hàm số bậc 3.

2. Hướng giải: Dựa vào các dấu hiệu như: tính đơn điệu; cực trị; giao của đồ thị với các trục tọa độ; ... để tìm dấu của các hệ số b, c, d . Cụ thể:

B1: Từ vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung ta tìm được dấu hệ số d .

B2: Từ vị trí hai điểm cực trị của đồ thị ta suy ra phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2; |x_1| < |x_2| \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0; x_1 + x_2 > 0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + 2bx + c$.

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy:

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung nằm phía trên trục hoành ta kết luận được $d > 0$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục tung đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại tới trục tung nhỏ hơn khoảng cách từ điểm cực tiểu tới trục tung nên phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$x_1 < 0 < x_2; |x_1| < |x_2| \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0; x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow 3c < 0; -\frac{2b}{3} > 0 \Rightarrow b < 0; c < 0.$$

Vậy $b < 0, c < 0, d > 0$.

DẠNG 5: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC**Câu 32. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-3)^2(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 5. D. 2.

Phân tích hướng dẫn giải**1. Dạng toán:** Đây là dạng toán cực trị của hàm số - tìm số cực trị của hàm số khi cho công thức của $f'(x)$.**2. Hướng giải:** Từ công thức của $f'(x)$ ta suy ra bảng xét dấu của $f'(x)$ rồi kết luận.**Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:****Lời giải****Chọn B**

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)^2(x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	

Vậy hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu

Câu 33. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hàm số nào sau đây không có điểm cực trị?

- A.
- $y = x^3 - 3x - 1$
- . B.
- $y = x^3 + 3x + 1$
- . C.
- $y = x^4 + 4x^2 + 1$
- . D.
- $y = x^2 - 2x$
- .

Phân tích hướng dẫn giải**1. Dạng toán:** Đây là dạng toán cực trị của hàm số - tìm số cực trị của hàm số khi cho công thức của hàm số $y = f(x)$.**2. Hướng giải:** Từ công thức của hàm số $y = f(x)$ ta tính $y' = f'(x)$ rồi suy ra bảng xét dấu của $f'(x)$ và kết luận.**Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:****Lời giải****Chọn B**- Với hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ là hàm số bậc 3; có tập xác định: $D = \mathbb{R}$; có đạo hàm $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ nên hàm số có 2 điểm cực trị.- Với hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ là hàm số bậc 3; có tập xác định: $D = \mathbb{R}$; có đạo hàm $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.- Với hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$ là hàm số bậc 4 trùng phương; có tập xác định: $D = \mathbb{R}$; có đạohàm $y' = 4x^3 + 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên hàm số có 1 điểm cực trị.

- Với hàm số $y = x^2 - 2x$ là hàm số bậc 2; có tập xác định: $D = \mathbb{R}$; có đạo hàm $y' = 2x - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 34. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$.

D. $x = 3$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán cực trị của hàm số - tìm cực trị của hàm số bậc 3.

2. Hướng giải: Từ công thức của hàm số $y = f(x)$ ta tính $y' = f'(x)$ rồi suy ra bảng xét dấu của $f'(x)$ và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ là hàm số bậc 3; có tập xác định: $D = \mathbb{R}$; có đạo hàm

$$y' = x^2 + 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu đạo hàm:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 35. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán cực trị của hàm số - tìm số cực trị của hàm số khi cho công thức của $f'(x)$.

2. Hướng giải: Từ công thức của $f'(x)$ ta suy ra bảng xét dấu của $f'(x)$ rồi kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	0	+

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 36. (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{3x^2}, \forall x \neq 0$.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 1.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm số khi biết đạo hàm.

2. Hướng giải:

B1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm.

B2: Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

B3: Dựa vào bảng biến thiên kết luận

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

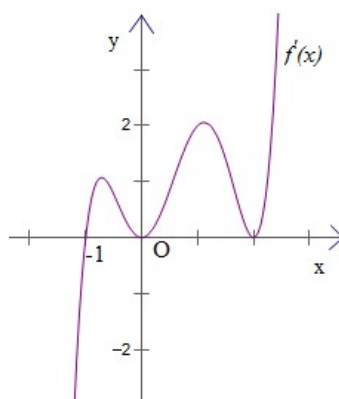
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 37. (SỞ GD&ĐT LÀO CAI 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K , đồ thị hàm số $f'(x)$ trên khoảng K như hình vẽ.



Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm số khi biết đồ thị hàm $f'(x)$.

2. Hướng giải:

B1: Từ đồ thị hàm $f'(x)$ lập bảng biến thiên hàm số $f(x)$, đồ thị hàm nằm dưới trục Ox thì $f'(x) < 0$, đồ thị hàm nằm trên trục Ox thì $f'(x) > 0$.

B2: Dựa vào bảng biến thiên tìm số cực trị của hàm số.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$						

Vậy hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)^2(x+2)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm số khi biết đạo hàm.

2. Hướng giải:

B1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

B2: Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

B3: Dựa vào bảng biến thiên kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua $x = 0$ và $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 39. (SỞ GD&ĐT VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong các khẳng định sau về hàm số

$y = \frac{x-2}{x+1}$ khẳng định nào đúng?

A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Có duy nhất một cực trị.

D. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét chiều biến thiên của hàm số bậc nhất trên bậc nhất.

2. Hướng giải:

B1: Tìm tập xác định, tính y' , ta thấy $y' > 0, \forall x \in \text{TXĐ}$.

B2: Tính giới hạn hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$ và tại các điểm không thuộc tập xác định của hàm số

B3: Lập bảng biến thiên và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y	1	↗ $+\infty$		↘ $-\infty$ ↗ 1	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Vậy khẳng định đúng là B.

Câu 40. (SỞ GD&ĐT VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1, y_2 . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $2y_1 - y_2 = 6$.

B. $y_1 - y_2 = -4$.

C. $2y_1 - y_2 = -6$.

D. $y_1 + y_2 = 4$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm cực trị của hàm số bậc 3

2. Hướng giải:

B1: Tìm tập xác định, tính y' . Giải phương trình $y' = 0$.

B2: Lập bảng biến thiên tìm các cực trị của hàm số.

B3: Kiểm tra xem đẳng thức nào trong các đáp án đưa ra là phù hợp.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗ 2		↘ -2		↗ $+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $y_1 = y_{cd} = 2; y_2 = y_{ct} = -2 \Rightarrow 2y_1 - y_2 = 2.2 - (-2) = 6$.

Câu 41. (SỞ GD&ĐT CẦN THƠ NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và

$$\text{có } f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}, \forall x \neq 0. \text{ Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

- A.** Hàm số có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.
B. Hàm số có ba điểm cực trị.
C. Hàm số có hai điểm cực tiểu.
D. Hàm số có hai điểm cực đại.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán cực trị của hàm số.

+ Để tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta cần tìm được số lần đổi dấu của hàm số $f'(x)$ trên tập xác định.

+ Để xác định cực đại, cực tiểu của hàm số, ta cần lập được bảng xét dấu của hàm số $f'(x)$ trên tập xác định (bảng biến thiên của hàm số $f(x)$). Ở một số bài ta có thể kiểm tra thông qua $f''(x)$.

2. Hướng giải:

B1: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên tập xác định.

B2: Xác định số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

B3: Chọn mệnh đề đúng.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

Vậy hàm số có hai điểm cực tiểu. Chọn đáp án **C**.

Câu 42. (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

- A.** $T = f(0)$. **B.** $T = f(9)$. **C.** $T = f(-3)$. **D.** $T = f(3)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị cực trị của hàm số.

+ Để xác định giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số, ta cần lập được bảng xét dấu của hàm số $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

2. Hướng giải:**B1:** Lập *bảng biến thiên* của hàm số $f(x)$ trên tập xác định.**B2:** Xác định giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

$-\infty \nearrow f(-3) \searrow f(0) \searrow f(3) \nearrow +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.**Câu 43. (SỞ GD&ĐT CÀ MAU NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x) = (x+1)^2(x-2)^3(2x+3), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:}$$

A. 2.**B.** 6.**C.** 1.**D.** 3.*Phân tích hướng dẫn giải***1. Dạng toán:** Đây là dạng toán xác định số điểm cực trị của hàm số.+ Để tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta cần tìm được số lần đổi dấu của hàm số $f'(x)$ trên tập xác định.**2. Hướng giải:****B1:** Giải phương trình $f'(x) = 0$.**B2:** Xác định số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x) = 0$.**B3:** Kết luận về số điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn ATừ công thức đạo hàm của hàm số $f(x)$ ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)^3(2x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Phương trình $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm bội lẻ là $x = 2$ và 1 nghiệm đơn $x = -\frac{3}{2}$, còn nghiệm $x = -1$ là nghiệm bội chẵn (kép) nên số điểm cực trị của hàm số là 2.**Câu 44. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Điểm cực tiểu của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

A. $x = 11$.**B.** $x = 3$.**C.** $x = 7$.**D.** $x = -1$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xác định điểm cực trị của hàm số.

+ Để xác định điểm cực đại, cực tiểu của hàm số, ta cần lập được *bảng xét dấu* của hàm số $f'(x)$ hoặc *bảng biến thiên* của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

+ Có thể sử dụng việc xét dấu của $f''(x)$ tại các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ thỏa mãn $f''(x_0) \neq 0$.

2. Hướng giải:

Cách 1:

B1: Lập *bảng biến thiên* của hàm số $f(x)$ trên tập xác định.

B2: Xác định điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Cách 2:

B1: Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i$.

B2: Xét dấu $f''(x_i)$. Nếu $f''(x_i) < 0$ thì x_i là điểm cực đại. Nếu $f''(x_i) > 0$ thì x_i là điểm cực tiểu.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Cách 2:

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x - 9. \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$y'' = 6x - 6.$$

$$y''(-1) = -12 < 0; \quad y''(3) = 12 > 0.$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 45. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ là:

A. $y_{CT} = 3$.

B. $y_{CT} = -3$.

C. $y_{CT} = 4$.

D. $y_{CT} = -4$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị cực trị của hàm số.

+ Để xác định giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số, ta cần lập được *bảng xét dấu* của hàm số $f'(x)$ hoặc *bảng biến thiên* của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

2. Hướng giải:

B1: Lập *bảng biến thiên* của hàm số $f(x)$ trên tập xác định.

B2: Xác định giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chon D

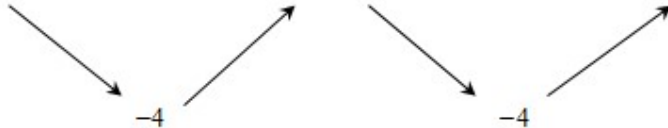
Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

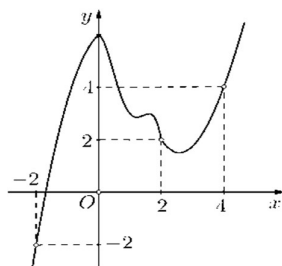
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				-3				$+\infty$



Vậy giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = -4$.

DẠNG 6: TÌM CỰC TRỊ DỰA VÀO BBT, ĐỒ THỊ

Câu 46. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7

B. 5

C. 6

D. 3

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm ẩn chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Hướng giải: Đặt $h = 2f(x) - x^2$.

B1: Giải phương trình $h'(x) = 0$.

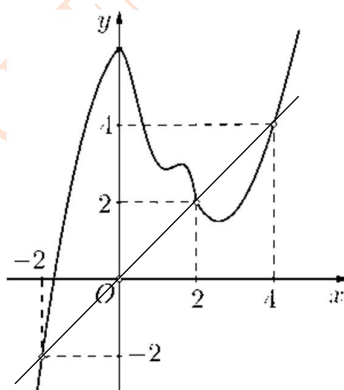
B2: Lập bảng biến thiên của $h(x)$.

B3: Từ BBT của $h(x)$ ta suy ra BBT của $g(x)$ sao cho có nhiều cực trị nhất.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A



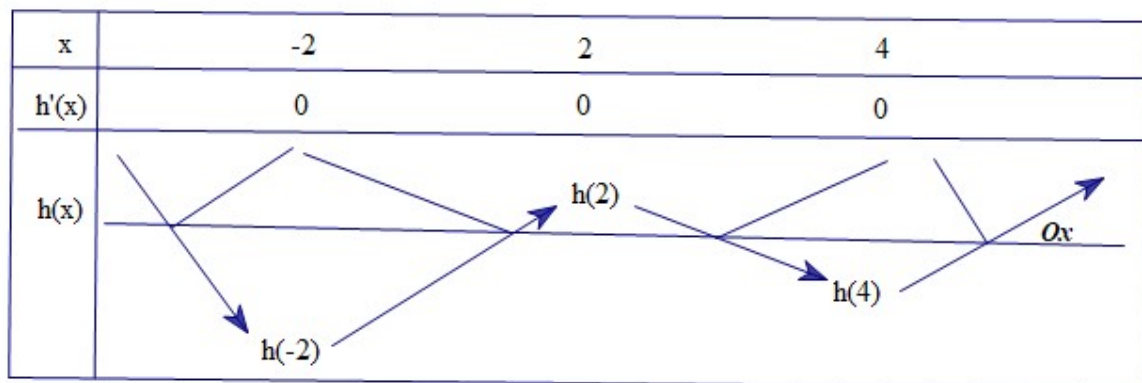
Xét hàm số $h(x) = 2f(x) - x^2 \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2x$.

Từ đồ thị ta thấy $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4$.

$$\int_{-2}^2 (2f'(x) - 2x) dx > \int_2^4 (2x - 2f'(x)) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) \Big|_{-2}^2 > -h(x) \Big|_2^4 \Leftrightarrow h(2) - h(-2) > -(h(4) - h(2)) \Leftrightarrow h(4) > h(-2)$$

Bảng biến thiên



Vậy $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa 7 cực trị.

Câu 47. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$	

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x - 4|) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 9.

D. 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm ẩn chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Hướng giải:

B1: Vẽ BBT hàm số $y = f(x - 4)$ bằng cách dời đồ thị qua phải 4 đơn vị.

B2: Vẽ BBT hàm số $y = f(|x - 4|)$ bằng cách lấy đối xứng qua trục $x = 4$.

B3: Từ BBT hàm số $y = f(|x - 4|)$ ta suy ra số điểm cực trị của hàm số

$$y = g(x) = f(|x - 4|) + 2018^{2019}.$$

Lời giải

Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó hàm số $y = f(x - 4)$ có đồ thị (C') với (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

Từ bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x - 4)$ là :

x	$-\infty$	2	3	7	9	$+\infty$
$y = f(x - 4)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$

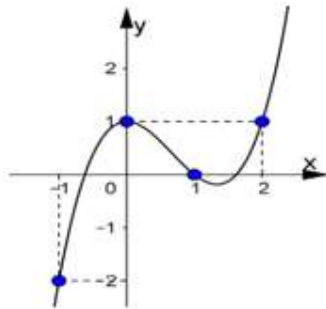
Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x - 4|)$ là

x	$-\infty$	-1	1	4	7	9	$+\infty$
$y = f(x-4)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Vậy hàm số $y = f(|x-4|)$ cho có 5 cực trị.

Do đó hàm số $y = g(x) = f(|x-4|) + 2018^{2019}$ có 5 cực trị.

Câu 48. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x = 2$

B. $x = 0$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm ẩn.

2. Hướng giải:

B1: Giải phương trình $g'(x) = 0$.

B2: Từ đồ thị của $g'(x)$ ta lập bảng biến thiên của $g(x)$.

B3: Từ BBT của $g(x)$ ta suy ra điểm cực đại.

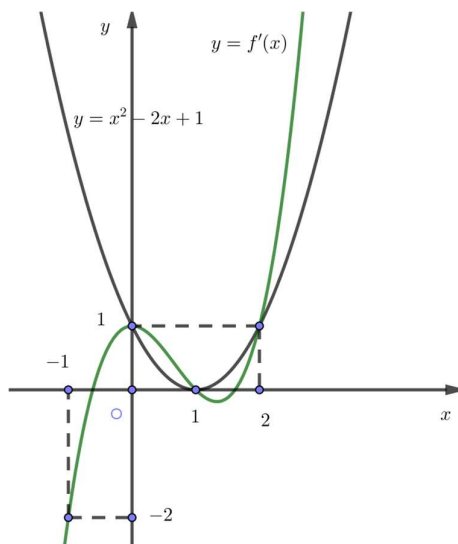
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (Như hình vẽ).}$$

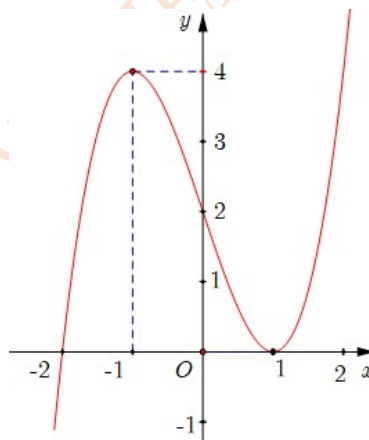


Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$	
$g'(x)$		–	0	+	0	–	0	+

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ ta suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 49. (SỞ GD&ĐT BÀ RỊA VŨNG TÀU NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2018) - 2019x + 2020$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm ẩn.

2. Hướng giải:

B1: Giải phương trình $g'(x) = 0$ bằng cách xét giao điểm của đường thẳng $y = f'(x - 2018)$ và đường thẳng $y = 2019$.

B2: Từ đồ thị của $g'(x)$ ta lập bảng biến thiên của $g(x)$.

B3: Từ BBT của $g(x)$ ta suy ra số điểm cực trị.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x - 2018) - 2019$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x - 2018) = 2019$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x - 2018)$ và đường thẳng $y = 2019$.

Đồ thị $y = f'(x - 2018)$ được vẽ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ về bên phải 2018 đơn vị theo phương của trục Ox . Do đó, số nghiệm của phương trình (1) bằng số nghiệm của phương trình $f'(x) = 2019$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra đường thẳng $y = 2019$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại một điểm duy nhất, tức là phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Phương trình $g'(x) = 0$ không có nghiệm bội chẵn nên hàm số $y = g(x)$ đổi dấu một lần.

Vậy hàm số $g(x) = f(x - 2018) - 2019x + 2020$ có một điểm cực trị.

DẠNG 7: TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI 1 ĐIỂM X0 CHO TRƯỚC

Câu 50. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là

A. 4

B. 9

C. 5

D. 3

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm ẩn.

2. Hướng giải:

B1: Giải phương trình $g'(x) = 0$

B2: Lập bảng biến thiên của $g(x)$.

B3: Từ BBT của $g(x)$ ta suy ra số điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 6f^2(x) \cdot f'(x) + 8f(x) \cdot f'(x) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}, f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 1 \end{cases}$,

$$f(x) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (x_1; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; x_2) \end{cases}.$$

Khi đó ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ là

x		x_1		a		-1		b		0		c		1		d		x_2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó hàm số có 5 điểm cực tiểu.

DẠNG 7:

Câu 51. (Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc năm 2018 - 2019 lần 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

- A. $-3 < m < 1$. B. $-\frac{7}{2} < m < -3$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $-\frac{7}{2} < m < -2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc 3 có các điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Tính y' . Tìm điều kiện để y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $-1 < x_1 < x_2$.

B2:

Cách 1: Đặt ẩn phụ $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$ đưa ra phương trình ẩn t và tìm đk để phương trình đó có 2 nghiệm dương phân biệt.

Cách 2: Dùng định lý đảo về dấu tam thức bậc hai.

Cách 3: Cô lập m với phương trình $y' = 0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Đặt $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$. Khi đó $y' = t^2 + 2(m+2)t + 2m + 7$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow t^2 + 2(m+2)t + 2m + 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m - 3 > 0 \\ S = -2(m+2) > 0 \\ P = 2m + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3.$$

Cách 2

Ta có $y' = f(x) = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 1 - 2(m+3) + 4(m+3) > 0 \\ \frac{-2(m+3)}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m > -\frac{7}{2} \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3. \text{ Chọn B.}$$

DẠNG 8: TÌM M ĐỂ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 52. (Sở GDĐT Quảng Ninh năm 2018 - 2019 lần 1) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $k = -3$.

B. $k = \frac{1}{3}$.

C. $k = 3$.

D. $k = -\frac{1}{3}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số bậc 3 có các điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Tính y' . Tìm điều kiện để y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

B2: Lập BBT để tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(m-1; -3m+2)$.

B3: Khi đó, tìm mối quan hệ giữa hoành độ và tung độ điểm M suy ra phương trình đường thẳng d .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$-3m+2$		$-3m-2$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M(m-1; -3m+2)$.

Nhận xét: $y_M = -3m+2 = -3(m-1) - 1 = -3x_M - 1 \Rightarrow M \in (d): y = -3x - 1, \forall m$.

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y = -3x - 1$.

Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k = -3$.

Câu 53. (Sở GDĐT Ninh Bình năm 2018 - 2019 lần 1) Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. -1 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. 5 .

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc 3 có các điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Tính y' . Tìm điều kiện để y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

B2: Khi đó, nhận xét về dấu các nghiệm của phương trình $y' = 0$ là $x_1 < 0 < x_2$ nên

$$|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 2$$

Từ đó sử dụng định lý Viet với phương trình $y' = 0$ và tìm được $m = \frac{7}{2}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Tính được: $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.

Khi đó $\Delta' = 4(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Nhận xét $a.c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Suy ra:

$$|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2}.$$

Câu 54. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

A. $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in (3; 4)$. **C.** $m \in (1; 3)$. **D.** $m \in (-1; 4)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc 3 có các điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Tính y' . Tìm điều kiện để y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là $m \neq 3$.

B2: Khi đó, nhận xét phương trình $y' = 0$ có các nghiệm là $x_1 = -1; x_2 = -m + 2$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2; 3)$ thì $-2 < -m + 2 < 3$.

Từ đó tìm được m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -m + 2 \end{cases}.$$

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt nằm trong khoảng } (-2; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 \neq -1 \\ -2 < -m + 2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}.$$

Câu 55. (Sở GD&ĐT Quảng Nam năm 2018 - 2019) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$?

A. 1

B. 3

C. 2

D. 0

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số bậc 3 có các điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

2. Hướng giải:

B1: Tính y' . Tìm điều kiện để y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

B2: Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0; \frac{1}{2}m^3\right), B(m; 0)$.

B3: Khi đó, tìm điều kiện để hai điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Từ đó tìm m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Với điều kiện $m \neq 0$, giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0; \frac{1}{2}m^3\right), B(m; 0)$.

$\Rightarrow \overline{AB}\left(m; -\frac{1}{2}m^3\right)$ và $I\left(\frac{m}{2}; \frac{m^3}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{1}{2}m^3 = 0 \\ \frac{m}{2} = \frac{m^3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2} \\ m = 0 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 56. (SỞ GD&ĐT VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

D. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị của tham số thỏa điều kiện cho trước

2. Hướng giải:

B1: Tìm điều kiện (1) của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường Δ thẳng đi qua cực đại và cực tiểu.

B2: $S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot IB \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB}$. Với $0 \leq \sin \widehat{AIB} \leq 1$.

Khi đó S_{IAB} đạt giá trị lớn nhất khi $\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow$ Tam giác IAB vuông cân tại I .

B3: Khi đó $d(I, \Delta) = \frac{IA\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Từ đó tìm giá trị tham số m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

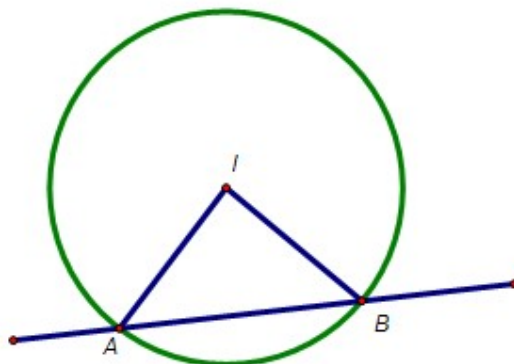
Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$.

Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (1).

Ta có $y = \frac{1}{3}x \cdot y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$.



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow -4m < 0 \text{ luôn đúng do } m > 0.$$

$$\text{Ta có } S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot IB \cdot IA \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{1}{2} \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$$d(I, \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ thỏa mãn đk (1).}$$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Câu 57. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số

$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x + m - 4$. Tìm m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. $-3 < m < -1$.

B. $m > 1$.

C. $m > 4$.

D. $m > 0$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số điểm cực trị của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng $2n+1$ với n là số cực trị dương của hàm số $f(x)$.

2. Hướng giải: Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

B1: Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x)$ có hai điểm cực trị dương.

B2: Khi đó phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

B3: Thiết lập hệ bất phương trình theo tham số m . Giải hệ tìm m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Có $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn. Nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng

$$\text{Xét } y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x + m - 4.$$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x)$ có 2 điểm cực trị phân biệt có hoành độ dương.

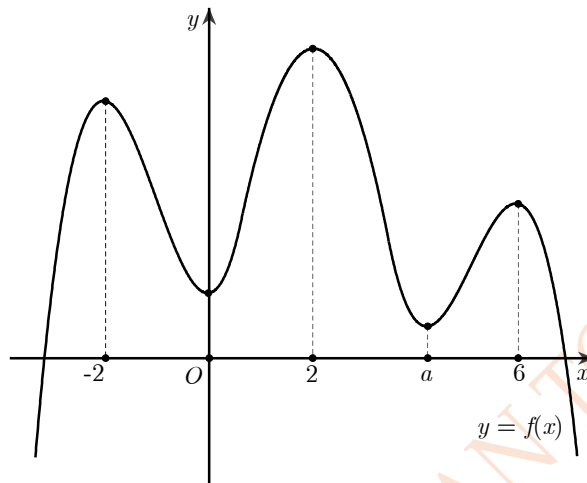
$$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1 > 0; x_2 > 0. \text{ Có } f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + m + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

NHÓM WORD VÀ BIÊN SOẠN TOÁN THPT

DẠNG 9: TÌM MỀ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐK

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là:

A. 8 .

B. 11 .

C. 9 .

D. 7 .

Lời giải

Chọn C

$$g(x) = f(x^6 - 3x^2).$$

$$g'(x) = (f(x^6 - 3x^2))' = (x^6 - 3x^2)' \cdot f'(x^6 - 3x^2) = (6x^5 - 6x) f'(x^6 - 3x^2).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (6x^5 - 6x) f'(x^6 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'(x^6 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2 \quad (1) \\ x^6 - 3x^2 = 0 \quad (2) \\ x^6 - 3x^2 = 2 \quad (3) \\ x^6 - 3x^2 = a \quad (4) \\ x^6 - 3x^2 = 6 \quad (5) \end{cases}.$$

$$x^6 - 3x^2 = -2(1) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$x^6 - 3x^2 = 0(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0(*) \\ x^4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt[4]{3} \end{cases}.$$

$$x^6 - 3x^2 = 2(3) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}.$$

Ta xét bảng biến thiên của hàm số:

$$y = h(x) = x^6 - 3x^2$$

$$y' = h'(x) = 6x^5 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow h(-1) = -2 \\ x = 1 \Rightarrow h(1) = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$		0		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $x^6 - 3x^2 = a$ (4) có một nghiệm biệt khác $\{0; -1; 1\}$ và khác nghiệm của phương trình (2); (3)

Phương trình $x^6 - 3x^2 = 6$ (5) có hai nghiệm phân biệt khác $\{0; -1; 1\}$ và khác nghiệm của phương trình (2); (3); (4). Ta có thể lấy nghiệm gần đúng như sau:

$$x^6 - 3x^2 = 6(5) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = m, m \approx 5,547, m \in (5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 2,355 \\ x \approx -2,355 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^6 - 3x^2 = a(4) \\ 4 < a < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x^6 - 3x^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} n < x^2 < \sqrt{m} \\ n \approx 2,195 \\ m \approx 2,355 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[4]{m} < x < -\sqrt{n} \\ \sqrt{n} < x < \sqrt[4]{m} \end{cases}$$

Vậy $y' = g'(x) = 0$ có:

- +) 2 nghiệm bằng $x = 1 \Rightarrow x = 1$ không là điểm cực trị.
- +) 2 nghiệm bằng $x = -1 \Rightarrow x = -1$ không là điểm cực trị.
- +) 3 nghiệm bằng $x = 0 \Rightarrow x = 0$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt[4]{3} \Rightarrow x = -\sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt[4]{3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt{m} \Rightarrow x = \sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt{m} \Rightarrow x = -\sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm x_1 và $x_1 \in (-\sqrt{m}; -\sqrt{n}) \Rightarrow x_1$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm x_2 và $x_2 \in (\sqrt{n}; \sqrt{m}) \Rightarrow x_2$ là 1 điểm cực trị.

Vậy có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 59. (SỞ GD&ĐT LẠNG SƠN NĂM 2018-2019) Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (2;3). B. (-1;0). C. (0;1). D. (1;2).

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương.

Hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

Nếu $-\frac{b}{2a} > 0$ thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lần lượt là $A(0; c)$, $B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; f\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)\right)$, $C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; f\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)\right)$. tạo thành tam giác cân tại A .

2. Hướng giải:

B1: Tìm điều kiện để hàm số có ba điểm cực trị. Tìm tọa độ các điểm cực trị đó.

B2: Các điểm cực trị đó tạo thành tam giác cân. Tính diện tích tam giác cân đó.

B3: Từ điều kiện bài toán suy ra giá trị tham số m .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải**Chọn D**

$$y' = 4mx^3 - 4mx. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases} \text{ với } m > 0.$$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m-1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC , ta có $AH = m^2$, $BC = 2\sqrt{m}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = m^2 \sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{4} \in (1; 2).$$

DẠNG 10: TÌM M ĐỂ HÀM SỐ, ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÁC HÀM SỐ KHÁC CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 60. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số điểm cực trị của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số cực trị của hàm số $f(x)$ và số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

2. Hướng giải:

B1: Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong dấu giá trị tuyệt đối. Hàm này có 3 điểm cực trị.

B2: Suy ra số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$ là 2.

B3: Bài toán quy về tìm m để phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

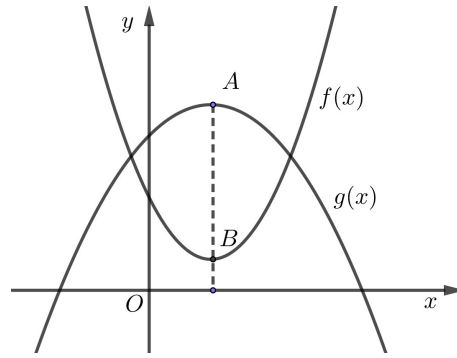
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$			5		32			
	$-\infty$			0				$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} m^2 < 0 \\ 5 < m^2 < 32 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{5} < |m| < \sqrt{32}$.

Vậy $m \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$.

Câu 61. (SỞ GD QUẢNG NAM 2019) Cho hai hàm đa thức $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là B , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là A và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = ||f(x) - g(x)| + m|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm số điểm cực trị của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng **tổng** số cực trị của hàm số $f(x)$ và số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

2. Hướng giải:

B1: Xác định số điểm cực trị của hàm số $f(x) - g(x)$ trong dấu giá trị tuyệt đối. Hàm này có 1 điểm cực trị là x_0 .

Xác định số nghiệm của phương trình $f(x) - g(x) = 0$. Phương trình này có hai nghiệm phân biệt.

Suy ra hàm số $|f(x) - g(x)|$ có $1 + 2 = 3$ điểm cực trị.

B2: Suy ra số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $|f(x) - g(x)| + m = 0$ là 2. Lập bảng biến thiên tìm m .

B3: Kết hợp với điều kiện $m \in (-5; 5)$ và m nguyên suy ra kết quả.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Gọi x_0 là điểm cực trị của $f(x)$ và $g(x)$. Dựa vào đồ thị ta có bảng dấu của $f'(x)$ và $g'(x)$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$; $x \in \mathbb{R}$. Lúc đó, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$.

Ta có BBT của $h(x)$ là:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$

Dựa vào BBT của $h(x)$, phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt a và b ($a < b$).

Lúc đó, ta có BBT của hàm số $y = |h(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	a	x_0	b	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	0	$\frac{7}{4}$	0	$+\infty$

Dựa vào BBT hàm số $y = |h(x)|$ thì hàm số $y = \|f(x) - g(x) + m\|$ có 5 cực trị khi và chỉ khi $m \geq \frac{7}{4}$.

Vì $m \in (-5; 5)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 2, 3, 4$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 62. (SỐ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018-2019) Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 62.

B. 63.

C. 64.

D. 65.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán khảo sát đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) \leq 0 \end{cases}$ có đồ thị

(C') bằng cách:

✓ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên $A(2; -3)$.

✓ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới $y = \frac{ax+1}{cx+d}$ qua $y = \frac{2x-1}{1-x}$ và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

2. Hướng giải:

B1: Khảo sát và lập bảng biến thiên hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$.

B2: Hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

B3: Giải bất phương trình $y_{\min} < 0 < y_{\max} \Rightarrow$ tìm m thỏa yêu cầu

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$.

Ta có: $g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có: $g(-1) = \frac{m}{2}$, $g(3) = \frac{m}{2} - 32$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2}-32$	$+\infty$	

Hàm số $g(x)$ có giá trị cực tiểu là $g(3) = \frac{m}{2} - 32$ và giá trị cực đại là $g(-1) = \frac{m}{2}$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \frac{m}{2} - 32 < 0 < \frac{m}{2} \Leftrightarrow 0 < m < 64$.

Vì m là số nguyên nên có 63 giá trị m thỏa mãn bài toán.

DẠNG 11: GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN

Câu 63. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 .

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ trên đoạn $[a;b]$.

2. Hướng giải:

B1: Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Tính y' , kiểm tra $y' > 0$ hay $y' < 0$ trên $[a;b]$.

B2: Nếu $y' > 0$ thì hàm số đồng biến trên $[a;b] \Rightarrow \max_{[a;b]} y = y(b), \min_{[a;b]} y = y(a)$.

Nếu $y' < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $[a;b] \Rightarrow \max_{[a;b]} y = y(a), \min_{[a;b]} y = y(b)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:**Lời giải****Chọn D**Điều kiện: $x \neq m$.Hàm số đã cho xác định trên $[0;4]$ khi $m \notin [0;4]$ (*).

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x - m)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in [0;4].$$

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;4]$ nên $\max_{[0;4]} y = y(4) = \frac{2-m^2}{4-m}$.

$$\max_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \frac{2-m^2}{4-m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = -3$. Do đó có một giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 64. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ đồ thị (C). Gọi S là tập các giá trị m sao cho đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 8.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tiếp tuyến của hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C).

Kiểm tra hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có bao nhiêu cực trị.

Nếu hàm số có 1 điểm cực trị thì (C) có đúng 1 tiếp tuyến song song hoặc trùng Ox.

Nếu hàm số có 3 điểm cực trị thì (C) có đúng 2 tiếp tuyến song song hoặc trùng Ox.

2. Hướng giải:

B1: Kiểm tra hàm số có 3 điểm cực trị $A(0; m-2), B(-1; m-3), C(1; m-3)$.

B2: Viết được 2 phương trình tiếp tuyến $(d_1): y = m-2$ và $(d_2): y = m-3$.

B3: Yêu cầu của bài toán có đúng 1 tiếp tuyến song song với Ox nên $\begin{cases} d_1 \equiv Ox \\ d_2 \equiv Ox \end{cases}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Giả sử $A(0; m-2), B(-1; m-3), C(1; m-3)$ là ba điểm cực trị của đồ thị (C) .

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(0; m-2)$ là $(d_1): y = m-2$.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $B(-1; m-3)$ và $C(1; m-3)$ là $(d_2): y = m-3$.

Đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox khi và chỉ khi d_1 hoặc d_2 trùng với trục Ox , hay $m = 2$ hoặc $m = 3$.

Vậy $S = \{2; 3\}$, suy ra tổng tất cả các phần tử của S là 5.

Câu 65. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0; 3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương. Tính $S = a + b + c$.

A. 4.**B.** -2.**C.** -22.**D.** 5.**Phân tích hướng dẫn giải**

1. Dạng toán: Đây là dạng toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

2. Hướng giải:

B1: Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Tính y' và cho $y' = 0$ tìm các giá trị $x_i \in [a; b]$.

B2: Tính $y(a), y(b), y(x_i)$.

B3: Khi đó $\min_{[a; b]} y = \min \{y(a), y(b), y(x_i)\}$ và $\max_{[a; b]} y = \max \{y(a), y(b), y(x_i)\}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$f'(x) = \sqrt{x^2+4} + (x-6) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \end{cases}.$$

$$f(0) = -12, f(1) = -5\sqrt{5}, f(2) = -8\sqrt{2}, f(3) = -3\sqrt{13}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0; 3]} y = M = -3\sqrt{13} \text{ và } \min_{[0; 3]} y = m = -12.$$

$M + m = -3\sqrt{13} - 12 = a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương nên $a = -12, b = 3, c = 13$. Do đó $S = a + b + c = 4$.

Câu 66. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x - e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $\max_{[-1;1]} y = \frac{-(\ln 2 + 1)}{2}.$

B. $\max_{[-1;1]} y = 1 - e^2.$

C. $\max_{[-1;1]} y = -(1 + e^{-2}).$

D. $\max_{[-1;1]} y = \frac{\ln 2 + 1}{2}.$

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

2. Hướng giải:

B1: Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Tính y' và cho $y' = 0$ tìm các giá trị $x_i \in [a; b]$.

B2: Tính $y(a), y(b), y(x_i)$.

B3: Khi đó $\min_{[a;b]} y = \min \{y(a), y(b), y(x_i)\}$ và $\max_{[a;b]} y = \max \{y(a), y(b), y(x_i)\}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x) = x - e^{2x}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$$f'(x) = 1 - 2e^{2x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \in [-1; 1].$$

$$f(-1) = -1 - e^{-2}, f\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}, f(1) = 1 - e^2.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;1]} y = \frac{-(\ln 2 + 1)}{2}.$$

Câu 67. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20; 25).$

B. $(5; 6).$

C. $(6; 9).$

D. $(2; 5).$

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Bài toán tham số về Max-Min (cụ thể của hàm phân thức trên đoạn $[a; b]$).

2. Hướng giải:

Xét hàm số phân thức bậc nhất $y = f(x; m)$ tham số m , trên đoạn $[a; b]$.

B1: Tính $y' = f'(x; m)$. Do hàm số là phân thức bậc nhất, lại có đạo hàm đặc biệt, nên dễ thấy $f'(x; m) > 0$ hoặc $f'(x; m) < 0, \forall x \in [a; b]$.

B2: Tính được $\max_{[a;b]} f(x)$, $\min_{[a;b]} f(x)$ chứa tham số m .

B3: YCDB $\Leftrightarrow$ Pt tham số $m \Leftrightarrow$ tham số m cần tìm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3] \Rightarrow$ hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

$$\Rightarrow \min_{[0;3]} f(x) = f(0) = -\frac{m^2}{8}.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \min_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{cases}.$$

$$\text{Mà } m_0 > 0 \Rightarrow m_0 = 2\sqrt{6} \in (2;5).$$

Câu 68. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 17.

B. 15.

C. 18.

D. 16.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Bài toán tham số về Max-Min của biểu thức nhiều biến (cụ thể biểu thức 2 biến).

2. Hướng giải:

Chuyển về bài toán Max-Min của đoạn thẳng dễ giải hơn, trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

B1: Ta có: $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right| = \left| OA - a \right|$, với $OA = \sqrt{x^2 + y^2}, A(x; y), O(0;0), a$ tham số.

B2: Trong đó: $A(x; y) \in (C): x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$.

Sử dụng pp hàm số, rút gọn phương trình $(C) \rightarrow (C)$ là phương trình đường tròn.

Suy ra, GTLN – GTNN của OA .

B3: Biện luận theo a , tìm được GTLN M - GTNN m của T dựa vào GTLN–GTNN của OA .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = 6 + 4x - x^2 + \sqrt{6 + 4x - x^2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$, có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$.

Nên $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, mà $\sqrt{y^2 + 6y + 10} \in [0; +\infty), \sqrt{6 + 4x - x^2} \in [0; +\infty)$

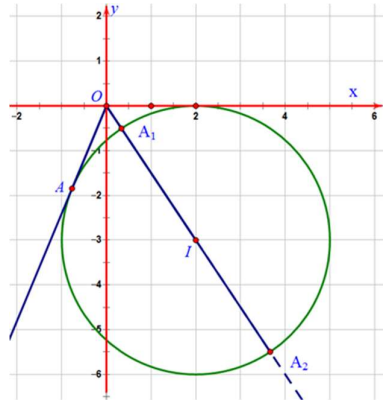
$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{y^2 + 6y + 10}) = f(\sqrt{6 + 4x - x^2}) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 = 6 + 4x - x^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

Xét điểm $A(x; y)$ thuộc đường tròn (C) có phương trình $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

$$\text{Ta có } OA = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 3$ nên điểm $O(0;0)$ nằm ngoài (C) .



Gọi A_1, A_2 là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) .

$$\forall A(x; y) \in (C): OA_1 \leq OA \leq OA_2 \text{ với } OA_1 = OI - R = \sqrt{13} - 3 \text{ và } OA_2 = OI + R = \sqrt{13} + 3.$$

$$\text{Tức là ta có: } \sqrt{13} - 3 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{13} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 - a \leq \sqrt{x^2 + y^2} - a \leq \sqrt{13} + 3 - a.$$

Th1: $\sqrt{13} - 3 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \sqrt{13} - 3$ (1).

$$\text{Khi đó: } \sqrt{13} - 3 - a \leq T \leq \sqrt{13} + 3 - a \Rightarrow m = \sqrt{13} - 3 - a, M = \sqrt{13} + 3 - a.$$

$$\text{Để } M \geq 2m \Leftrightarrow \sqrt{13} + 3 - a \geq 2(\sqrt{13} - 3 - a) \Leftrightarrow a \geq \sqrt{13} - 9$$
 (*).

Mà a nguyên, thuộc đoạn $[-10; 10]$, kết hợp (1), (*) $\Rightarrow a \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Th2: $\sqrt{13} + 3 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{13} + 3$ (2).

$$\text{Khi đó, } |\sqrt{13} - 3 - a| \geq T \geq |\sqrt{13} + 3 - a| \Rightarrow M = a - \sqrt{13} + 3, m = a - \sqrt{13} - 3.$$

$$M \geq 2m \Leftrightarrow a - \sqrt{13} + 3 \geq 2(a - \sqrt{13} - 3) \Leftrightarrow a \leq \sqrt{13} + 9$$
 (**).

Mà a nguyên, thuộc đoạn $[-10; 10]$, kết hợp (2); (**) $\Rightarrow a \in \{7; 8; 9; 10\}$.

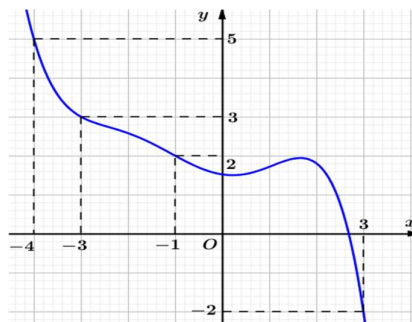
Th3:
$$\begin{cases} \sqrt{13} - 3 - a < 0 \\ \sqrt{13} + 3 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 < a < \sqrt{13} + 3$$
 (3).

Khi đó, $M > 0$ và $m = 0$ ta luôn có $M \geq 2m$.

Mà a nguyên, thuộc đoạn $[-10; 10]$, kết hợp (3) $\Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy $a \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 69. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm.



A. $x_0 = -1$.

B. $x_0 = 3$.

C. $x_0 = -4$.

D. $x_0 = -3$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán về hàm số $g(x)$ mà cho sẵn đồ thị hàm số $f'(x)$.

2. Hướng giải:

B1: Tính $g'(x)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = h(x)$.

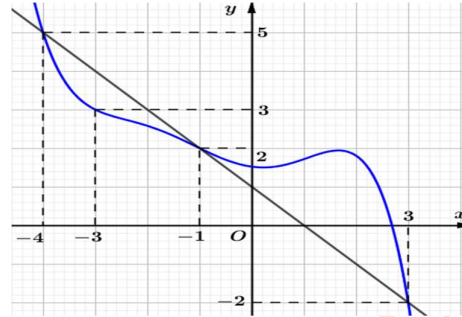
B2: Vẽ đồ thị hàm số $y = h(x)$ lên hệ trục tọa độ có sẵn đồ thị hàm số $f'(x)$. Dựa vào đó xét được dấu $g'(x)$.

B3: Lập bảng biến thiên hàm số $g(x)$ và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A



Ta có $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-4		-1		3		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$g(-4)$		$g(-1)$		$g(3)$		

Từ bảng biến thiên, suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$.

Ta có: $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$.

Vì trong đoạn $[-4; -1]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = 1 - x$
 $\Rightarrow f'(x) < 1 - x, \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-4; -1)$
 $\Rightarrow g(-4) > g(-3) > g(-1) (*)$.

Vì trong đoạn $[-1; 3]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = 1 - x$
 $\Rightarrow f'(x) > 1 - x, \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$
 $\Rightarrow g(3) > g(-1) (**)$.

Từ (*) và (**) suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$.

Phân tích hướng dẫn giải

Lời giải

Từ đây, ta suy ra: $3M - m = 3.(-2) + 10 = 4$.

DẠNG 12: GTLN, GTNN TRÊN KHOẢNG

Câu 71. (SỞ GD&ĐT ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ trên đoạn $[0; 3]$.

A. 18.

B. 3.

C. 6.

D. 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

2. Hướng giải:

B1: Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định.

B2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

B2: Tìm số M lớn nhất, số m nhỏ nhất trong các số trên. Ta có:

$$\max_{[a; b]} f(x) = M, \quad \min_{[a; b]} f(x) = m.$$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2x + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [0; 3]$.

$$f(0) = 1; f(3) = 18.$$

Suy ra $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 18$.

DẠNG 13: SỬ DỤNG CÁC ĐÁNH GIÁ, BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN**Câu 72. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4 \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m thỏa

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{4}{3}$.

D. $m = \frac{5}{3}$.

*Phân tích hướng dẫn giải***1. Dạng toán :** Đây là dạng toán cực trị của hàm giá trị tuyệt đối**2. Hướng giải:****B1:** Từ hàm số đề bài đã cho, dùng cách đặt ẩn phụ $t = \sqrt{2x - x^2}$. Tìm miền xác định của ẩn phụ t **B2 :** Vì hàm $f(t) = t - 3m + 4$ luôn tăng nên $\max_{t \in [0;1]} |f(t)| = \max \{ |f(0)|; |f(1)| \} \geq \frac{|f(0)| + |f(1)|}{2}$.**B3:** Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối $|A| + |B| \geq |A + B|$.**Lời giải****Chọn A**Gọi $A = \max y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow t = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ do đó $0 \leq t \leq 1$ Khi đó hàm số được viết lại là $y = |t - 3m + 4|$ với $t \in [0;1]$ suy ra

$$A = \max_{t \in [0;1]} |t - 3m + 4| = \max \{ |-3m + 4|; |5 - 3m| \} \geq \frac{|-3m + 4| + |5 - 3m|}{2}$$

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có:

$$\begin{aligned} A &= \max_{t \in [0;1]} |t - 3m + 4| = \max \{ |-3m + 4|; |5 - 3m| \} \geq \frac{|-3m + 4| + |5 - 3m|}{2} \\ &= \frac{|3m - 4| + |5 - 3m|}{2} \geq \frac{|3m - 4 + 5 - 3m|}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A \geq \frac{1}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \begin{cases} |-3m + 4| = |5 - 3m| \\ (-3m + 4)(5 - 3m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

DẠNG 14: ỨNG DỤNG GTNN, GTLN TRONG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 73. (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'	$+\infty$	-2	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < x^3 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A.** $m > f(x) + 1$. **B.** $m \geq f(-1) - 1$. **C.** $m \geq f(-1) + 1$. **D.** $m > f(1) - 1$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán : Đây là dạng toán ứng dụng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

2. Hướng giải:

B1: Cô lập m . Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng $m > g(x), \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [-1; 1]} g(x)$.

B2 : Khảo sát hàm số $g(x)$ trên $[-1; 1]$ nhằm tìm $\max_{x \in [-1; 1]} g(x)$.

B3 : Kết luận về m .

Lời giải

Chọn C

$$f(x) < x^3 + m \Leftrightarrow m > f(x) - x^3 (1).$$

$$\text{Xét } g(x) = f(x) - x^3, x \in [-1; 1]$$

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2 < 0, \forall x \in (-1; 1) \text{ vì } \begin{cases} f'(x) < f'(1) = 0, \forall x \in (-1; 1) \\ -3x^2 \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

$$\Rightarrow g(1) < g(x) < g(-1), \forall x \in (-1; 1).$$

$$(1) \text{ đúng với mọi } x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq g(-1) = f(-1) + 1.$$

Câu 74. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018-2019) Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$ có nghiệm là

- A.** 2011. **B.** 2012. **C.** 2013. **D.** 2014.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán : Đây là dạng toán kết hợp biện luận số nghiệm của phương trình và tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

2. Hướng giải:

B1. Biến đổi phương trình đã cho nhằm tìm ra các biểu thức giống nhau dẫn đến đặt ẩn phụ để

bài toán đơn giản. Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}}$.

B2. Từ điều kiện xác định của ẩn x , tìm điều kiện chính xác của ẩn phụ t .

B3. Cô lập tham số m , ta thu được phương trình hoành độ giao điểm: $m = f(t)$.

B4. Khảo sát hàm $y = f(t)$. Dựa vào bảng biến thiên, tìm điều kiện của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^3 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

*) Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

*) Với $x > 0$ chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x^3 + 4x}$ ta được:

$$\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} + (m+2)\sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} = m-1. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} = \sqrt{x + \frac{4}{x}} \geq \sqrt{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{4}{x}} = 2. \text{ Vậy } t \geq 2 \text{ với } \forall x > 0.$$

Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - (m-1)t + m+2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 2}{t-1} \Leftrightarrow m = t + 2 + \frac{4}{t-1} \quad (t \geq 2) \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2 + \frac{4}{t-1}$ trên $[2; +\infty)$.

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \in [2; +\infty) \\ t = -1 \notin [2; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	2	3	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	8	7	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [2; +\infty)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \geq 7$. Kết hợp m là số nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ suy ra có 2013 giá trị m .

Câu 75. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Số giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(0; 2020)$ để phương trình $\|x-1\| - |2019-x| = 2020-m$ có nghiệm là

- A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2018.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán cực trị của hàm giá trị tuyệt đối

2. Hướng giải:

B1. Xét hàm $f(x) = \|x-1\| - |2019-x|$. Phá dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét dấu biểu thức.

B2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số của hàm bên trong dấu trị tuyệt đối.

B3. Sử dụng tính chất hàm trị tuyệt đối toàn phần để suy ra được giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \|x-1\| - |2019-x|$.

B4. Vậy phương trình có nghiệm khi $\min f(x) \leq 2020-m \leq \max f(x)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} |x-1| - |2019-x|, & x \notin [1; 2019] \\ |2x-2020|, & x \in [1; 2019] \end{cases}$$

Vì hàm số $h(x) = 2x - 2020$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2019]$ nên ta có

$$\max_{[1; 2019]} h(x) = \max \{h(1), h(2019)\} = 2018, \min_{[1; 2019]} h(x) = \min \{h(1), h(2019)\} = -2018$$

Suy ra $\min_{[1; 2019]} f(x) = 0$ và $\max_{[1; 2019]} f(x) = 2018$. Do đó, ta có $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$ và $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 2018$.

Vì vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq 2020 - m \leq 2018 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2020$.

Suy ra có 2018 giá trị nguyên của m nằm trong khoảng $(0; 2020)$.

Câu 76. (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(x+1)^4 + x^2 - 4x - 5 \geq m^4 + m^2 - 6m$ thỏa mãn với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$. Tính tổng các giá trị của S .

A. 1.

B. -3.

C. 5.

D. 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán : Đây là dạng toán kết hợp biện luận số nghiệm của phương trình và tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

2. Hướng giải:

B1. Cô lập tham số m để dẫn đến $f(m) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(m) \leq \min g(x)$.

B2. Khảo sát hàm số $g(x)$ để tìm ra $\min g(x)$.

B3. Giải bất phương trình $f(m) \leq \min g(x)$ để tìm ra giá trị tham số m .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = (x+1)^4 + x^2 - 4x - 5.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(x+1)^3 + 2x - 4 = 4x^3 + 12x^2 + 14x = x[(2x+3)^2 + 3]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

Xét

$$f(m) = m^4 + m^2 - 6m \Rightarrow f'(m) = 4m^3 + 2m - 6$$

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

m	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(m)$	-	0	+
$f(m)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

$$\min f(x) \geq m^4 + m^2 - 6m \Leftrightarrow m = 1$$

vậy tổng các giá trị của là 1.

Câu 77. (SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH NĂM 2018 - 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Biện luận nghiệm của BPT chứa tham số dựa vào phương pháp hàm số

Xét BPT $f(u) \geq f(v)$ (1) xác định trên khoảng K .

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì ta có (1) $\Leftrightarrow u \geq v$.

- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì ta có (1) $\Leftrightarrow u \leq v$.

2. Hướng giải:

B1: Biến đổi BPT đã cho về dạng $(x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) \geq (mx)^3 + (mx)$ để từ đó ta xét hàm số đặc trưng $f(t) = t^3 + t$ là hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B2: Khi đó BPT đã cho tương đương với $x^2 + 1 \geq mx$.

Bài toán trở thành tìm m để BPT $x^2 + 1 \geq mx$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3] \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x}, \forall x \in [1; 3]$.

B3: Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, x \in [1; 3]$. Bài toán được thỏa mãn nếu $m \leq \min_{[1; 3]} g(x)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2 \geq m^3x^3 + mx$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) \geq f(mx) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq mx$$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $x^2 + 1 \geq mx$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$.

$$x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x} = g(x), \forall x \in [1; 3]$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0, \forall x \in [1; 3] \Rightarrow \min_{[1; 3]} g(x) = g(1) = 2.$$

Vậy để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$ thì $m \leq 2$.

Vì m nguyên dương nên $S = \{1; 2\}$ có 2 phần tử. Tổng các phần tử bằng 3.

DẠNG 15: GTLN, GTNN HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 78. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018 - 2019) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{x + y + 1}. \text{ Tính } M + m.$$

A. $\frac{1}{3}.$

B. $-\frac{2}{3}.$

C. $\frac{1}{2}.$

D. $-\frac{1}{3}.$

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến.

Phương pháp: Biến đổi biểu thức đã cho về dạng hàm phụ thuộc một biến số (chú ý xác định điều kiện cho biến số phụ) và đưa về bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số một biến trên tập hợp đã xác định được (khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn).

2. Hướng giải:

B1: Thế điều kiện của giả thiết vào vế trái của P , ta có $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$

B2: Ta nhận thấy rằng tử và mẫu của P là hai biểu thức đẳng cấp bậc hai đối với hai ẩn x, y .

- Ta tính giá trị của P khi $y = 0$.

- Khi $y \neq 0$, chia cả tử và mẫu của P cho y^2 , ta biến đổi P trở thành biểu thức phụ thuộc một biến số $t = \frac{x}{y}$.

B3: Khi đó bài toán đưa về tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Với điều kiện $x + y \neq -1; x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta có: $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

- Nếu $y = 0$ thì $\begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Khi đó $P = 0$.

- Nếu $y \neq 0$ thì $P = \frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}$. Đặt $t = \frac{x}{y}$. Ta có: $P = \frac{t}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}$.

Xét $f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}$. $f'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t}{t^2 + t + 1} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = 0.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	

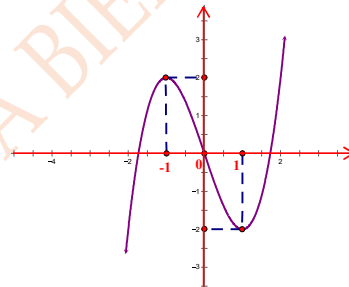
Từ bảng biến thiên:

$$M = \frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -1 \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M + m = -\frac{2}{3}.$$

Câu 79. (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$. Tính $M^2 + m^2$.



- A.** $M^2 + m^2 = 4$. **B.** $M^2 + m^2 = 1$. **C.** $M^2 + m^2 = 25$. **D.** $M^2 + m^2 = 2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến.

Phương pháp: Biến đổi biểu thức đã cho về dạng hàm phụ thuộc một biến số (chú ý xác định điều kiện cho biến số phụ) và đưa về bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số một biến trên tập hợp đã xác định được (khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn).

2. Hướng giải:

B1: Đặt $t = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}$, ta thể điều kiện của giả thiết, tìm được miền giá trị của ẩn t .

B2: Bài toán đưa về dựa vào đồ thị của hàm số để xác định GTLN, GTNN của hàm số trên một miền cho trước.

B3: Kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

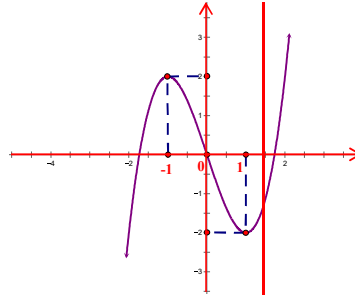
Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4} \Rightarrow P = f(t). \text{ Vì } 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$$

$$\text{nên } t = \frac{x^2 + y^2 - \frac{1}{8}(5x^2 + 6xy + 5y^2)}{x^2 - y^2 - 2xy + \frac{1}{4}(5x^2 + 6xy + 5y^2)} = \frac{3(x^2 + y^2) - 6xy}{18x^2 + 2y^2 - 4xy} = \frac{3(x - y)^2}{2(x - y)^2 + 16x^2}.$$

$$\text{Do đó } 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \Rightarrow P = f(t) \text{ với } t \in \left[0; \frac{3}{2}\right].$$



Dựa vào đồ thị, ta có $M = \max_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} P = f(0) = 0$; $m = \min_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} P = f(1) = -2$.

Suy ra: $M^2 + m^2 = 4$.

Câu 80. (SỞ GD QUẢNG NAM - 2019) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn

$$2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1}). \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x}{y} \text{ bằng}$$

A. $\frac{e + \ln 2}{2}$.

B. $\frac{e - \ln 2}{2}$.

C. $\frac{e \ln 2}{2}$.

D. $\frac{e}{2 \ln 2}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến.

Phương pháp: Biến đổi biểu thức đã cho về dạng hàm phụ thuộc một biến số (chú ý xác định điều kiện cho biến số phụ) và đưa về bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số một biến trên tập hợp đã xác định được (khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn).

2. Hướng giải:

B1: Từ điều kiện của giả thiết, ta có

$$2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1}) \Leftrightarrow 2^y + y = 2x + \log_2(2x + 2^y) - 1 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2(2x + 2^y)$, ta biến đổi (1) về phương trình dạng $f(u) = f(v)$, với hàm số f luôn đơn điệu trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B2: Khi đó ta rút được t theo y và suy được x theo y .

B3: Biến đổi P trở thành hàm một ẩn y và tính GTNN của hàm số trên một khoảng bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng đó.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } 2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1}) \Leftrightarrow 2^y + y = 2x + \log_2(2x + 2^y) - 1. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(2x + 2^y) \Rightarrow 2x + 2^y = 2^t \Rightarrow 2x = 2^t - 2^y.$$

(1) trở thành: $2^y + y = 2^t - 2^y + t - 1 \Leftrightarrow 2^{y+1} + y + 1 = 2^t + t$. (2)

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = 2^x + x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (2) ta có: $t = y + 1 \Leftrightarrow \log_2(2x + 2^y) = y + 1 \Leftrightarrow 2x + 2^y = 2^{y+1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{x}{y} = \frac{2^{y-1}}{y} \Rightarrow P' = \frac{2^{y-1} y \ln 2 - 2^{y-1}}{y^2}.$$

$$\text{Cho } P' = 0 \Leftrightarrow y \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên:

y	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$	
P'		-	0	+
P	$+\infty$		$\frac{e \ln 2}{2}$	$+\infty$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{e \ln 2}{2} \text{ khi } x = \frac{e}{2} \text{ và } y = \frac{1}{\ln 2}.$$

DẠNG 16: BÀI TOÁN ỨNG DỤNG, TỐI ƯU, THỰC TẾ

Câu 81. (Sở GD&ĐT Bà Rịa Vũng Tàu năm 2018-2019) Một công ty bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng (theo qui định trong hợp đồng) thì sẽ có một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

- A. 3.700.000 đồng. B. 3.500.000 đồng. C. 3.900.000 đồng. D. 4.000.000 đồng.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán ứng dụng, tối ưu, thực tế.

2. Hướng giải:

B1: Xác định số căn phòng bị bỏ trống khi tăng giá cho thuê thêm x đồng là $\frac{x}{100.000}$ (phòng).

Suy ra số căn phòng còn lại có người thuê là: $40 - \frac{x}{100.000}$

B2: Tính số tiền công ty thu được trong một tháng (bằng số phòng có người thuê nhân với giá tiền thuê phòng), ta được hàm số một ẩn x .

B3: Bài toán đưa về tìm điểm x_0 để hàm số đạt GTLN tại x_0 trên một khoảng cho trước.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Theo bài cứ tăng thêm 100.000 đồng trên một căn thì có 1 căn trống.

Do đó nếu tăng x đồng trên một căn thì có $\frac{x}{100.000}$ căn trống.

Số tiền thu nhập một tháng khi cho thuê căn hộ là

$$(3000.000 + x)(40 - \frac{x}{100.000}) = \frac{-x^2}{100.000} + 10x + 120.000.000 = f(x)$$

Do $f(x)$ là một hàm bậc hai với hệ số $a < 0$ nên $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 500.000$ đ.

Vậy khi đó giá thuê mỗi căn là 3.500.000 đồng.

Câu 82. (Sở GD Quảng Nam 2019) Cho nửa đường tròn đường kính AB và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. 1. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

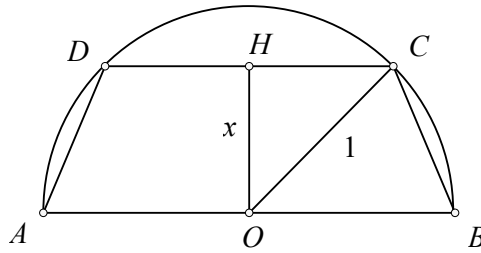
Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm MAX- MIN của bài toán có yếu tố hình học.

Phương pháp: - Tìm cách đặt biến chuyển về phương trình hàm.

- Lập bảng biến thiên và suy ra giá trị MAX- MIN

2. Hướng giải:



B1: Đặt $OH = x$ ($0 < x < 1$). Ta có $CD = 2CH = 2\sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow S = \frac{(AB + CD) \cdot OH}{2} = x^2 + x\sqrt{1-x^2}.$$

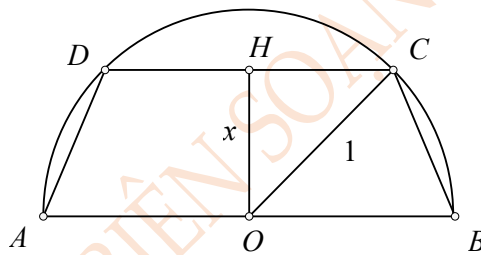
B2: Lập bảng biến thiên: $f(x) = x + x\sqrt{1-x^2}$, với $x \in (0; 1)$.

B3: Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của CD . Đặt $OH = x$ ($0 < x < 1$). Ta có $CD = 2CH = 2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích hình thang $ABCD$ là: $S = \frac{(AB + CD) \cdot OH}{2} = x^2 + x\sqrt{1-x^2}$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x\sqrt{1-x^2}$, với $x \in (0; 1)$.

Ta có $f'(x) = 1 + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$S = f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 83. (Sở GD&ĐT Cà Mau Năm 2018-2019) Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có

nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

- A. $2(m)$. B. $\frac{5}{2}(m)$. C. $1(m)$ D. $\frac{3}{2}(m)$.

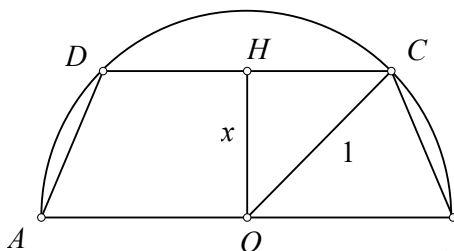
Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm MAX- MIN của các yếu tố hình học.

Phương pháp: - Tìm cách đặt biến chuyển về phương trình hàm.

- Lập bảng biến thiên và suy ra giá trị MAX- MIN

2. Hướng giải:



B1: Đặt x ($x > 0$) là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là

$$3x: V = h.x.3x = h.3x^2 = 18 \quad (x > 0). \Rightarrow h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2},$$

Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$$P = 2hx + 2.h.3x + 3x^2 = 2.\frac{6}{x^2}.x + 2.\frac{6}{x^2}.3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

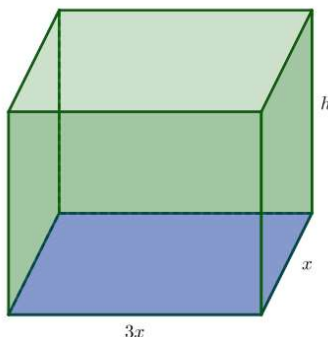
B2: Lập bảng biến thiên : $f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2, (x > 0)$.

B3: Suy ra vật liệu ít nhất khi $h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}(m)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D



Gọi x ($x > 0$) là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$$V = h.x.3x = h.3x^2 = 18 \quad (x > 0).$$

$$\Rightarrow h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2},$$

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật.

Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$$P = 2hx + 2.h.3x + 3x^2 = 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot x + 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot 3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2, (x > 0).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-48}{x^2} + 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$		36	

$$\text{Suy ra vật liệu ít nhất khi } h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} (m).$$

- Câu 84. (Cụm 1 Sở GD&ĐT Bạc Liêu Năm 2018-2019)** Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 300.000 đồng/ m^2 . Chi phí thuê công nhân thấp nhất là A. 51 triệu đồng. B. 75 triệu đồng. C. 46 triệu đồng. D. 36 triệu đồng.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm MAX- MIN của các yếu tố hình học.

Phương pháp: - Tìm cách đặt biến chuyển về một biểu thức.

- Sử dụng bất đẳng thức COSI tìm giá trị MAX- MIN

2. Hướng giải:

B1: Gọi chiều rộng, chiều dài của đáy lần lượt là x và $2x$, chiều cao là y

Diện tích các mặt bên và mặt đáy là $S = 6xy + 2x^2$

$$\text{Thể tích là } V = 2x^2y = 200 \Rightarrow xy = \frac{100}{x}.$$

$$\text{B2: } S = \frac{600}{x} + 2x^2 = \frac{300}{x} + \frac{300}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt{\frac{300}{x} \cdot \frac{300}{x} \cdot 2x^2} = 30\sqrt{180}.$$

$$\text{B3: Khi đó chi phí thấp nhất là } T = 30\sqrt{180} \cdot 300000d = 51 \text{ triệu}$$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều rộng, chiều dài của đáy lần lượt là x và $2x$, chiều cao là y

Diện tích các mặt bên và mặt đáy là $S = 6xy + 2x^2$

$$\text{Thể tích là } V = 2x^2y = 200 \Rightarrow xy = \frac{100}{x}.$$

$$S = \frac{600}{x} + 2x^2 = \frac{300}{x} + \frac{300}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt{\frac{300}{x} \cdot \frac{300}{x} \cdot 2x^2} = 30\sqrt{180}$$

$$\text{Vậy chi phí thấp nhất là } T = 30\sqrt{180} \cdot 300000d = 51 \text{ triệu}$$

- Câu 85. (Sở GD &ĐT Ninh Bình lần 01 Năm 2018-2019)** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có

giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

A. 12.

B. 13.

C. 11.

D. 10.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm MAX- MIN của các yếu tố hình học.

Phương pháp: - Tìm cách đặt biến chuyển về biểu thức.

- Áp dụng bất đẳng thức COSI tìm giá trị MAX- MIN

2. Hướng giải:

B1: Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x ($x > 0$). Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2$$

B2: Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2$$

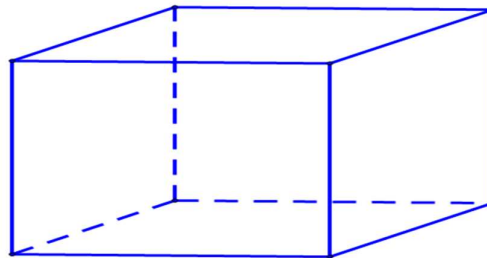
B3: Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt{648(x^2h)^2} = 216$$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x ($x > 0$). Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2$$

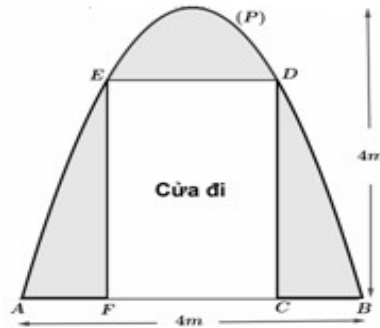
Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2}h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Câu 86. (Sở GD & ĐT Quảng Bình Năm 2018-2019) Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m , $AB = 4\text{ m}$. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ (với $C, F \in AB$; $D, E \in (P)$), phần còn lại (phần tô đậm) dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là $1.000.000\text{ đồng}/\text{m}^2$. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



- A. 4.450.000 đồng. B. 4.605.000 đồng. C. 4.505.000 đồng. **D. 4.509.000 đồng.**

Phân tích hướng dẫn giải

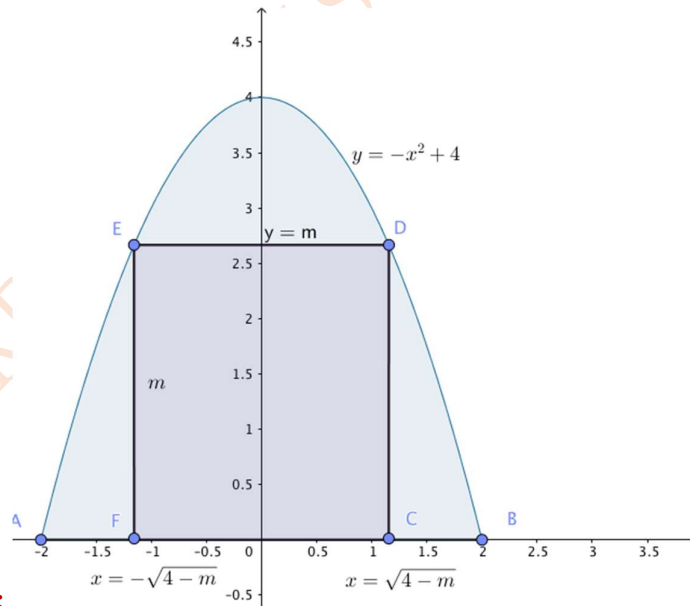
1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm MAX- MIN của các yếu tố hình học.

Phương pháp: - Tìm cách đặt biến chuyển về phương trình hàm.

- Tính diện tích hình học bằng công thức thông thường hoặc bằng tích phân.

Từ đó suy ra giá trị MAX- MIN

2. Hướng giải:



B1:

Phương trình của (P) : $y = -x^2 + 4$

Xét đường thẳng qua E, D : $y = m$ (với $0 < m < 4$).

Khi đó $E(-\sqrt{4-m}; m)$ và $D(\sqrt{4-m}; m)$ là giao điểm của (P) và đường thẳng $y = m$.

* Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED \cdot EF = 2\sqrt{4-m} \cdot m$

B2: Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4-m \Rightarrow m = 4-t^2$ (với $0 < t < 2$)

Khi đó: $S_{CDEF} = f(t) = 2t(4 - t^2) = -2t^3 + 8t$ - Lập bảng biến thiên.

* Mặt khác diện tích của chiếc cổng: $S = \int_{-2}^2 |-x^2 + 4| = \frac{32}{3} (m^2)$

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là:

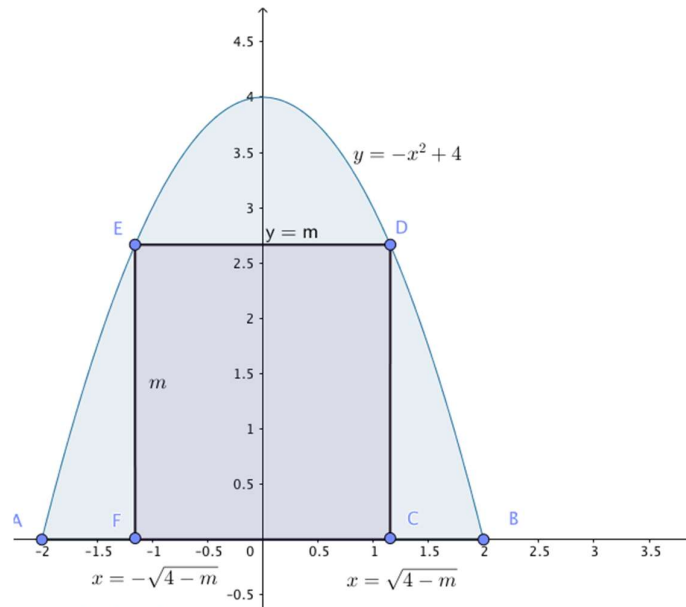
$$S - \text{Max} S_{CDEF} = \frac{32}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4,5083 (m^2)$$

B3: Khi đó Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083 \times 1.000.000 = 4.508.300$ (đồng).

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D



* Xét $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có tọa độ đỉnh $(0; 4)$ và qua điểm có tọa độ $(2; 0)$.

Ta có hoành độ đỉnh: $\frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$; (P) qua điểm $(0; 4) \Rightarrow c = 4$ và (P) qua điểm $(2; 0)$

$\Rightarrow a = -1$

Suy ra: $(P): y = -x^2 + 4$

* Xét đường thẳng qua E, D : $y = m$ (với $0 < m < 4$). Khi đó $E(-\sqrt{4-m}; m)$ và $D(\sqrt{4-m}; m)$ là giao điểm của (P) và đường thẳng $y = m$. Suy ra: $ED = 2\sqrt{4-m}$, $EF = m$.

* Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED \cdot EF = 2\sqrt{4-m} \cdot m$

Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4-m \Rightarrow m = 4-t^2$ (với $0 < t < 2$)

Khi đó: $S_{CDEF} = f(t) = 2t(4 - t^2) = -2t^3 + 8t$

$$f'(t) = -6t^2 + 8 = 0 \Rightarrow t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

t	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	

Suy ra: $MaxS_{CDEF} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{8}{3}$

* Mặt khác diện tích của chiếc cổng: $S = \int_{-2}^2 |-x^2 + 4| = \frac{32}{3} (m^2)$

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S - MaxS_{CDEF} = \frac{32}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4,5083 (m^2)$

* Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083 \times 1.000.000 = 4.508.300$ (đồng).

(Lưu ý: Có thể dùng MTBT để tìm GTLN của S_{CDEF} trên khoảng $0 < m < 4$).

DẠNG 17: CÂU HỎI LÝ THUYẾT VỀ MAX MIN

Câu 87. (Sở GD&ĐT Đà Nẵng 2018-2019) Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \quad \text{Giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$$

bằng

A. 18.

B. 12.

C. 16.

D. 24.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ theo phương pháp hàm số.

2. Hướng giải:

B1: Từ giả thiết $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$ ta thấy vai trò của y và z là như nhau nên đánh giá $x \leq 2(y + z)$.

B2: Đánh giá $P \leq \frac{4}{(y+z)} - \frac{1}{27(y+z)^3}$.

B3: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 4t - \frac{t^3}{27}$ với $t = \frac{1}{(y+z)} > 0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5x^2 + 5(y^2 + z^2) - 9x(y + z) - 18yz = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 9x(y + z) = 18yz - 5(y^2 + z^2) \quad (1).$$

$$\text{Ta lại có: } 7(y - z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 7y^2 - 14yz + 7z^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(y + z)^2 \geq 18yz - 5(y^2 + z^2) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$5x^2 - 9x(y + z) \leq 2(y + z)^2 \Leftrightarrow [x - 2(y + z)](5x + y + z) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2(y + z) \leq 0 \quad (\text{do } 5x + y + z > 0 \forall x, y, z > 0)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2(y + z)$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3} \leq \frac{2(y + z)}{\frac{1}{2}(y + z)^2} - \frac{1}{[2(y + z) + y + z]^3} = \frac{4}{y + z} - \frac{1}{27(y + z)^3}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{y + z} > 0 \text{ khi đó } P \leq 4t - \frac{t^3}{27}; \quad t > 0.$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = 4t - \frac{t^3}{27}; \quad t > 0 \text{ có } f'(t) = 4 - \frac{t^2}{9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \Rightarrow f(6) = 16 \\ t = -6 < 0 \quad (l) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(4t - \frac{t^3}{27} \right) = -\infty.$$

Bảng biến thiên:

t	0	6	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	–
$f(t)$	0	$\nearrow 16$	$\searrow -\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $f(t) = 4t - \frac{t^3}{27} \leq 16 \quad \forall t > 0$.

Suy ra: $P \leq 4t - \frac{t^3}{27} \leq 16 \quad \forall t > 0$

Suy ra $\max P = 16$ Đẳng thức xảy ra khi:
$$\begin{cases} y = z \\ y + z = \frac{1}{6} \\ x = 2(y + z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = \frac{1}{12} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

DẠNG 18: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ (KHÔNG CHỨA THAM SỐ) HOẶC BIẾT BBT, ĐỒ THỊ

Câu 88. (Sở GD&ĐT Ninh Bình lần 1 năm 2018-2019) Tổng số đường tiệm cận ngang và đường

tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2\sqrt{x^2-1}+1}{x}$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm tiệm cận của hàm số $y = f(x)$.

2. Hướng giải:

+ Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

+ Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Từ tập xác định ta thấy hàm số không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$, do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = -2$$

Nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = -2$.

Câu 89. (Sở GD&ĐT Phú thọ lần 2 năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	$+$
y	$+\infty$	2	1	-1	1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xác định các đường tiệm cận của hàm số $y = f(x)$ khi biết bảng biến thiên của hàm số.

2. Hướng giải:

+ Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

+ Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $3f(x) - 2 = 0$ (hay $f(x) = \frac{2}{3}$) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa $x_1 \in (-\infty; -1), x_2 \in (-1; 0), x_3 \in (0; 1), x_4 \in (1; +\infty)$. Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$ có 4 tiệm cận đứng là $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3f(x) - 2} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3f(x) - 2} = 2$ nên $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$ có 2 tiệm cận ngang là $y = 0, y = 2$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$ là 6.

DẠNG 19: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 90. (Sở GD&ĐT Bắc Ninh lần 1 năm 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6; 6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 8.

B. 9.

C. 12.

D. 11.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xác định các đường tiệm cận của hàm số $y = f(x)$ có chứa tham số.

2. Hướng giải:

+ Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

+ Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m} = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó (C) có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) có 3 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m^2 - 2m^2 + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 6m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -1 \\ m > 1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$.

Do $m \in [-6; 6]$, m nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 91. (Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ

thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng 4 đường tiệm cận?

A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. Vô số.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xác định các đường tiệm cận của hàm số $y = f(x)$ có chứa tham số.

2. Hướng giải:

+ Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

+ Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

TH1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, (x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

TH2: $m = 0 \Rightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 4)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4} y = -\infty$. Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

TH3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}.$$

. Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 92. (SỞ GD&ĐT ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị

hàm số $y = \frac{2x-6}{x+1}$ là

A. $x = -1$.

B. $y = -6$.

C. $x = 3$.

D. $y = 2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

2. Hướng giải: Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0$ thì $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

DẠNG 20: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN

- Câu 93. (SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Cho M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là:
- A.** $(4;3)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(1;-3)$. **D.** $(3;5)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm điểm liên quan đến tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

2. Hướng giải:

B1: Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-2}\right) \in (C)$, (với $a > 0$) theo tham số thỏa mãn điều kiện đã cho.

B2: Tìm các đường tiệm cận của hàm số.

B3: Tính khoảng cách từ M đến các tiệm cận.

B4: Tính tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất để tìm được tham số $\Rightarrow M$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ nên $M\left(a; \frac{a+2}{a-2}\right)$ (với $a > 0$).

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là: $\Delta_1: x = 2$ và $\Delta_2: y = 1$.

Suy ra: $d_1 = d_{(M; \Delta_1)} = |a - 2|$ và $d_2 = d_{(M; \Delta_2)} = \left| \frac{a+2}{a-2} - 1 \right| = \left| \frac{4}{a-2} \right| = \frac{4}{|a-2|}$.

Vậy tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là:

$$d = d_1 + d_2 = |a - 2| + \frac{4}{|a - 2|} \geq 2\sqrt{|a - 2| \cdot \frac{4}{|a - 2|}} = 4.$$

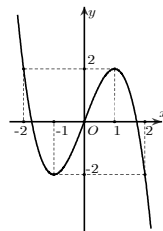
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $|a - 2| + \frac{4}{|a - 2|} \geq 2\sqrt{|a - 2| \cdot \frac{4}{|a - 2|}} = 4.$

Dấu bằng xảy ra khi: $|a - 2| = \frac{4}{|a - 2|} \Leftrightarrow (a - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 2 \\ a - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 0 \end{cases}.$

Mà $a > 0 \Rightarrow a = 4$. Vậy $M(4;3)$.

DẠNG 21: NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ

- Câu 94. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **SAI**?



- A.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 2.

- B.** Hàm số $y = f(x)$ có cực tiểu bằng -1 .
- C.** Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- D.** Nếu $|m| > 2$ thì phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất.

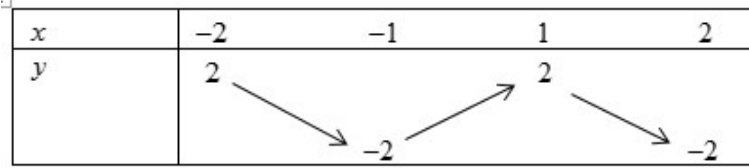
Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán lí thuyết tổng hợp về hàm số.

2. Hướng giải: Xét các mệnh đề và loại trừ các mệnh đề đúng, đồng thời chọn ra mệnh đề sai.

Lời giải**Chọn B**

Dựa vào đồ thị có BBT của hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 2]$ như sau:



- **A** đúng.
- **B** sai vì hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng -2 hay cực tiểu bằng -2 .
- **C** đúng vì hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị $x_{CT} = -1, x_{CD} = 1$.
- **D** đúng vì $|m| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$, phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất.

Câu 95. (SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$ $	$+$
y	-1	$+\infty$	0	1

Bảng biến thiên trên là của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

- A.** $y = \frac{|x|}{x+1}$. **B.** $y = \frac{1}{x(x+1)}$. **C.** $y = \frac{x}{|x+1|}$. **D.** $y = |x|(x+1)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán dựa vào bảng biến thiên để tìm hàm số.

2. Hướng giải: Dựa vào bảng biến thiên tìm các tiệm cận, đồng thời dựa vào các hàm số loại trừ hàm số không thỏa mãn. Chọn được đáp án đúng và kiểm tra lại các điều kiện đúng đã thỏa mãn.

Lời giải**Chọn A**

Dựa vào BBT, suy ra:

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1 \Rightarrow$ Loại đáp án **D**.

Đồ thị hàm số có các đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1 \Rightarrow$ Loại đáp án **B**.

Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0 \Rightarrow$ Loại đáp án **C**.

Xét đáp án **A** ta có:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Suy ra đồ thị hàm số có các đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|x|}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|x|}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1.$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

**DẠNG 22: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH DỰA VÀO ĐỒ THỊ,
BẢNG BIẾN THIÊN**

Câu 96. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (1; 2]$.

B. $m \in [1; 2)$.

C. $m \in (1; 2)$.

D. $m \in [1; 2]$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán biện luận số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên.

2. Hướng giải:

B1: Dựa vào bảng biến thiên tìm giá trị cực tiểu và giá trị cực đại.

B2: Đường thẳng $y = m$ là đường thẳng song song hoặc trùng với Ox .

B3: Suy ra tham số m để phương trình có số nghiệm thỏa mãn.

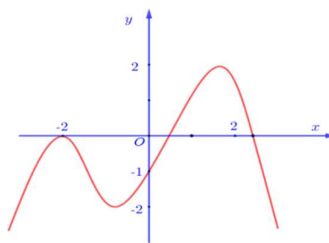
Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ (*). Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

Theo bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $1 < m < 2$.

Câu 97. (SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 9.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán xét sự tương giao của đồ thị hàm số (hàm số hợp) với đường thẳng $y = b$ để ra số nghiệm của phương trình.

2. Hướng giải: $f(f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -1$.

B1: Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt $X_1; X_2; X_3; X_4$. Dựa vào đồ thị, xác định vị trí tương đối của 4 giá trị này.

B2: Thay vai trò của $X_1; X_2; X_3; X_4$ bởi $f(x)$ trong từng trường hợp. Lặp lại quá trình xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = b$, trong đó b là giá trị thỏa mãn vị trí tương đối của $X_1; X_2; X_3; X_4$.

Tuy nhiên, nếu có những trường hợp có hai hoành độ giao điểm nào đó có thể thuộc cùng một khoảng chung (khi đó hai nghiệm có thể trùng nhau) thì ta cần lý luận về tính đơn điệu của hàm số trong khoảng đó để loại trừ khả năng trùng nghiệm.

B3: Khi đó số nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ bằng tổng số giao điểm của cả 4 trường hợp xét trong bước 2.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f(f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a < -2 \\ f(x) = b \in (-2; -1) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = c > 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } f(x) = a < -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -2 \\ x = x_2 > 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } f(x) = b \in (-2; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 < -2 \\ x = x_4 \in (-2; -1) \\ x = x_5 \in (-1; 0) \\ x = x_6 > 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_7 = -2 \\ x = x_8 \in (-2; -1) \\ x = x_9 \in (2; 3) \end{cases}$$

+ Với $f(x) = c > 2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $(-\infty; -2)$, $f(x_1) = a \neq b = f(x_3)$ nên $x_1 \neq x_3$.

Hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $(2; +\infty)$, $f(x_6) = b \neq 0 = f(x_9)$ nên $x_6 \neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 98. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn

$f(0) < \frac{7}{6}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{15}{13}$		$-\infty$	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		
		1				

Giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn

$[0; 2]$ là

A. e^2 .

B. $e^{\frac{15}{13}}$.

C. e^4 .

D. e^3 .

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên một đoạn. Phương pháp chung là tìm GTNN, GTLN của hàm số trên đoạn đó rồi chặn m bởi hai giá trị đó.

2. Hướng giải: Phương trình $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m$

$$\Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2} = \ln m, (m > 0).$$

B1: Đổi biến $t = f(x)$. Từ điều kiện $x \in [0; 2]$ dựa vào BBT để lý luận về điều kiện của t .

B2: Chuyển bài toán về tìm điều kiện của tham số m để phương trình $g(t) = \ln m$ có nghiệm trên miền điều kiện của t . Cụ thể là tính đạo hàm, lập BBT của $g(t)$ rồi tìm $\max g(t)$; $\min g(t)$. Cho $\ln m$ bị chặn giữa $\max g(t)$; $\min g(t)$.

B3: Khi đó m đạt GTLN khi $\ln m$ đạt GTLN $\Leftrightarrow \ln m = \max g(t)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2} = \ln m, (m > 0).$$

Đặt $t = f(x)$. Với $x \in [0; 2]$ và từ bảng biến thiên

$$\Rightarrow t \in [1; \max\{f(0), f(2)\}]$$

$$\text{Vì } f(0) < \frac{7}{6}, f(2) < f(3) = \frac{15}{13} < \frac{7}{6} \text{ nên } \max\{f(0), f(2)\} = M < \frac{7}{6}.$$

$$\text{Do đó } t \in [1; M] \subset \left[1; \frac{7}{6}\right).$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của m để phương trình $\ln m = 2t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 7t - \frac{1}{2}$ (*)

có nghiệm $t \in [1; M]$.

Xét hàm số $g(t) = 2t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 7t - \frac{1}{2}$, $t \in [1; M]$.

$$g'(t) = 6t^2 - 13t + 7$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	1	M	$\frac{7}{6}$	$+\infty$	
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$		$g(1)$		$g(M)$	
				$g\left(\frac{7}{6}\right)$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có nghiệm $g(M) \leq \ln m \leq g(1)$

$$\max \ln m = \max_{[1;M]} g(t) = g(1) = 2 \Rightarrow \max m = e^2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của m để phương trình cho có nghiệm $x \in [0;2]$ là e^2 .

Câu 99. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3.

B. 10.

C. 4.

D. 6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán về đồ thị hàm số có giá trị tuyệt đối dạng $y = f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã có hoặc dễ vẽ.

2. Hướng giải:

B1: Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$ (C).

B2: Để vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ từ đồ thị $y = f(x)$ ta thực hiện:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ (C) gồm các điểm bên phải và các điểm nằm trên trục Oy ; bỏ phần đồ thị bên trái trục Oy . Ta được phần đồ thị P_1 .

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị P_1 qua trục Oy ta được phần đồ thị P_2 .

Khi đó: Đồ thị $y = f(|x|)$ bao gồm đồ thị P_1 và P_2 .

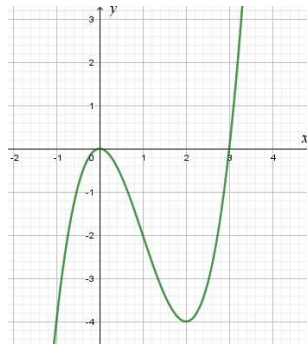
B3: Số giao điểm của (C') với đường thẳng $y = -m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ với trục hoành. Vậy để có 4 giao điểm thì điều kiện của m thuộc khoảng nào đó. Từ đó ta chọn các số nguyên rồi tính tổng.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

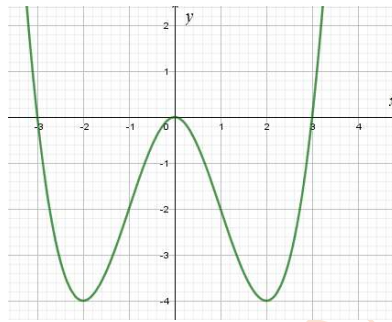
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:



Từ đó ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - 3|x|^2$ như sau:



Để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình

$g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f(|x|) = -m$ có 4 nghiệm phân biệt hay

đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - 3|x|^2$ tại 4 điểm phân biệt.

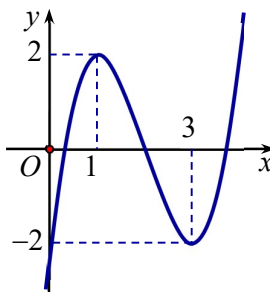
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ suy ra bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi

$$-4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Kết hợp yêu cầu đề bài $m \in \mathbb{Z}$, do đó $m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $1 + 2 + 3 = 6$.

Câu 100. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ như hình vẽ.



Khi đó phương trình $|x^3 - 6x^2 + 9x - 2| = m$ (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi.

A. $-2 \leq m \leq 2$.

B. $0 < m < 2$

C. $0 \leq m \leq 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán về đồ thị hàm số có giá trị tuyệt đối dạng $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã có hoặc dễ vẽ.

2. Hướng giải: Gọi đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ là (C).

B1: Đồ thị hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 9x - 2|$ (C') có được bằng cách biến đổi đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của (C) phần dưới trục hoành qua trục hoành.
- Xóa phần đồ thị còn lại của (C) phía dưới trục hoành.

B2: Số nghiệm của phương trình $|x^3 - 6x^2 + 9x - 2| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị (C') với đường thẳng $y = m$.

B3: Phương trình $|x^3 - 6x^2 + 9x - 2| = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi đồ thị (C') và đường thẳng $y = m$ có 6 giao điểm phân biệt.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

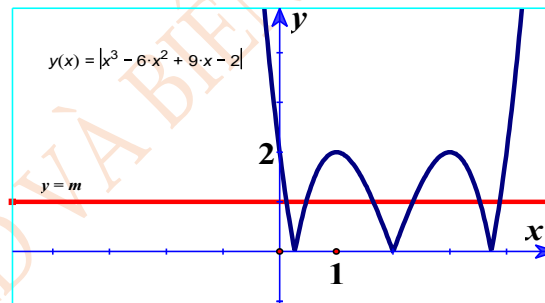
Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ là (C).

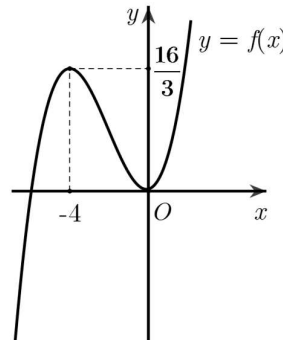
Đồ thị hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 9x - 2|$ (C') có được bằng cách biến đổi đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của (C) phần dưới trục hoành qua trục hoành.
- Xóa phần đồ thị còn lại của (C) phía dưới trục hoành.



+) Số nghiệm của phương trình $|x^3 - 6x^2 + 9x - 2| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ và đồ thị hàm số $y = m$. Để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là $0 < m < 2$.

Câu 101. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f\left(\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right) = f(m^2 + 4m + 4) \quad (1) \quad \text{có nghiệm?}$$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán sử dụng tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ để tìm điều kiện có nghiệm của phương trình $f(U) = f(V) \Leftrightarrow U = V$.

2. Hướng giải:

B1: Đổi biến $t = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}$, sau đó tìm GTNN, GTLN của t bằng cách chuyển về tìm điều kiện để phương trình lượng giác dạng $a.\sin x + b.\cos x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.

B2: Chuyển phương trình về dạng $f(|t|) = f(m^2 + 4m + 4)$. Dựa vào đồ thị $y = f(x)$ khẳng định hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$. Suy ra $|t| = m^2 + 4m + 4$.

B3: Từ điều kiện của t tìm ra điều kiện của m . Sau đó chọn những giá trị nguyên.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Đặt } t = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -1-4t \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow (4t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (-1-4t)^2 \Leftrightarrow -\frac{9}{11} \leq m \leq 1.$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq |t| \leq 1.$$

Từ đồ thị $y = f(x)$ ta có

$$* y = f(x) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty)$$

$$* m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \in [0; +\infty).$$

$$* |t| \in [0; 1]$$

$$\text{Nên } f\left(\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right) = f(m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow f(|t|) = f(m^2 + 4m + 4)$$

$$\Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4. \text{ Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1.$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}.$$