SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÁI BÌNH
TRƯỜNG THPT NGUYỄN ĐỨC CẢNH

ĐỀ KSCL THI THPTQG LỚP 12
LẦN THỨ 03
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: Toán
Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $AA'=2a$, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ là

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** a^3. **C.** $2a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;2;1)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;2;0)$. **B.** $(0;2;1)$. **C.** $(4;2;1)$. **D.** $(4;0;0)$.

Câu 4. Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 5. Với a, b là hai số dương khác không tùy ý, $\log\left(\frac{2a}{b^2}\right)$ bằng.

A. $2(\log a-\log b)$. **B.** $\log(2a)-2\log b$. **C.** $\frac{\log a}{\log b}$. **D.** $\frac{\log(2a)}{2\log b}$.

Câu 6. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3;\ \int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$?

A. 6. **B.** 9. **C.** 15. **D.** -3.

Câu 7. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a

A. $\frac{2\pi a^2}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 8. Số phức thỏa mãn phương trình $z+3\bar{z}=(2+i)^3(2-i)$. Mô đun của số phức $w=z+10i$ là

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{1521}}{4}$. **C.** $\frac{5\sqrt{73}}{4}$. **D.** 4.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-3;0;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $2x+y-2z-1=0$. **B.** $2x+y-2z-10=0$.

C. $2x+y-2z-8=0$. **D.** $2x+y-2z+1=0$.

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ là

A. $x-4\ln|x+1|+C$. **B.** $x+\dfrac{4}{x+1}+C$.

C. $\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{4}{x+1}+C$. **D.** $x-\dfrac{4}{x+1}+C$.

Câu 11. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=25$ đi qua điểm nào dưới đây.

A. $M(6;0;-1)$. **B.** $N(3;-3;-1)$. **C.** $P(-1;-1;-5)$. **D.** $Q(-2;1;-2)$.

Câu 12. Trong khai triển nhị thức $(x+2)^{n+6}$; $(n\in N)$. Có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng:

A. 17. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

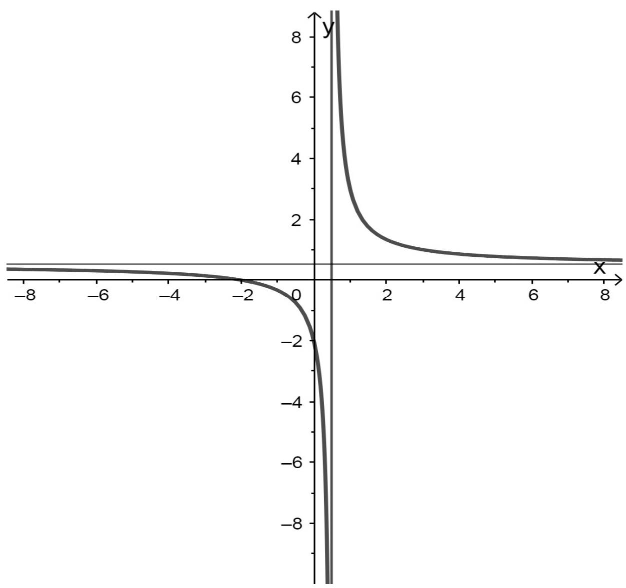
Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=8$, công bội $q=-2$. Tính u_5.

A. 64. **B.** -64. **C.** 128. **D.** -128.

Câu 14. Số phức $z=\dfrac{2-4i}{1+i}$ có điểm biểu diễn là:

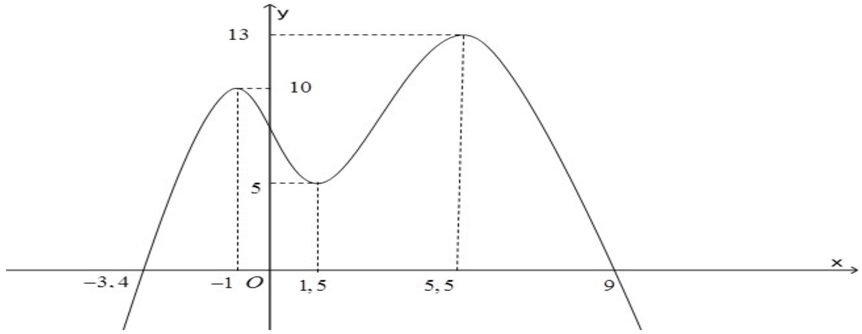
A. $(-1;-3)$. **B.** $(2;-4)$. **C.** $(-3;-1)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 15. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của một trong bốn hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D. Hàm số đó là hàm số nào?



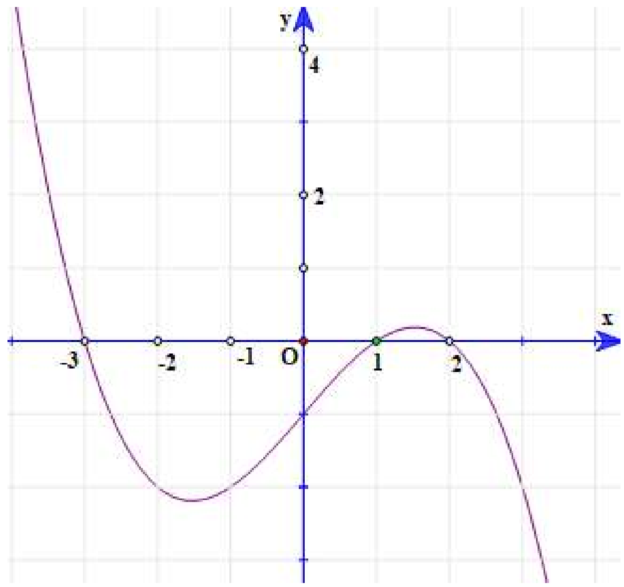
A. $y=\dfrac{3x+2}{1-2x}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{1+2x}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;6]$. Tính giá trị biểu thức $P=2M+3N$.



A. 8. **B.** 41. **C.** 49. **D.** 18.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 18. Tìm hai số thực a và b thỏa mãn $3a + b - 2ai = (1-i)(1+3i)$ với i là đơn vị ảo.

A. $a = 1$, $b = 1$. **B.** $a = -1$, $b = 1$. **C.** $a = -1$, $b = 7$. **D.** $a = 7$, $b = -1$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-1;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) là

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

C. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 3$.

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 20. Hàm số $y = (4x - x^2)^{\pi}$ có tập xác định là:

A. $(2;6)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là?

A. $\int \cos 2x\,dx = 2\sin 2x + C$.

B. $\int \cos 2x\,dx = \dfrac{\sin 2x}{2} + C$.

C. $\int \cos 2x\,dx = \sin 2x + C$.

D. $\int \cos 2x\,dx = -\dfrac{\sin 2x}{2} + C$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-5=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=3+4t\\z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt (P). **B.** $d\subset(P)$. **C.** $d//(P)$. **D.** $d\perp(P)$.

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x-1)>2$ là

A. $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 24. Thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x\ln x;\ y=0;$ $x=2$ quay quanh trục Ox được tính bởi công thức nào?

A. $\pi\int\limits_0^2 x^2\ln^2 x\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int\limits_1^2 x^2\ln^2 x\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_0^2 x^2\ln^2 x\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_1^2 x\ln x\mathrm{d}x$.

Câu 25. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 5 và diện tích đáy 9π. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. 12π. **B.** 15π. **C.** 45π. **D.** 36π.

Câu 26. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+3}$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a góc $ABC=60^0$, chiều cao bằng $3a$ thể tích của khối chóp bằng.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $3a^2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 28. Hàm số $f(x)=10^{x^2-2x}$ có đạo hàm

A. $f'(x)=(2x-2)\ln 10$. **B.** $f'(x)=(x^2-2x)10^{x^2-2x-1}$.

C. $f'(x)=2(x-1)10^{x^2-2x}$. **D.** $f'(x)=(2x-2)10^{x^2-2x}\ln 10$.

Câu 29. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_2^e \ln x dx$ có dạng $a+b\ln 2$. Tích $a.b$ là

A. -4. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 10

Câu 30. Năm nay con ông Mạnh vào lớp 10. Để chuẩn bị tiền cho con đi học đại học đầu mỗi tháng ông gửi ngân hàng 1000000 với lãi suất $0,7\%$ /tháng. Sau ba năm thì số tiền Ông Mạnh nhận được cả gốc lẫn lãi sau khi ngân hàng đã tính lãi tháng cuối cùng là bao nhiêu?

A. 41066470. **B.** 42166470. **C.** 40781000. **D.** 43000000

Câu 31. Thiết diện qua trục của hình trụ tròn xoay là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó?

A. 5π. **B.** 15π. **C.** 20π. **D.** 10π.

Câu 32. Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x}=8$ bằng.

A. -3. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 33. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+4}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=0$ là

A. $y=4x+3$. **B.** $y=\frac{1}{2}x+2$. **C.** $y=-\frac{1}{2}x+2$. **D.** $y=-\frac{1}{2}x-2$.

Câu 34. Khi gọi điện thoại một khách hàng đã quên mất ba chữ số cuối người đó chỉ nhớ rằng đó là ba số khác nhau. Tính xác suất để người đó thực hiện được một cuộc điện thoại.

A. $\frac{1}{648}$. **B.** $\frac{1}{1000}$. **C.** $\frac{1}{720}$. **D.** $\frac{1}{100}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a}{3}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ qua A cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-3}$. **B.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{5}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{3}$.

Câu 37. Bác An có mảnh ruộng hình Elip độ dài trục lớn bằng $100\,\text{m}$, độ dài trục bé bằng $80\,\text{m}$. Với chủ trương xây dựng kinh tế nông thôn mới, bác định chuyển đổi canh tác bằng cách đào một cái ao hình Elip ở chính giữa vườn có trục lớn bằng $90\,\text{m}$ trục bé bằng $70\,\text{m}$ để nuôi tôm, cá. Phần đất còn lại bác làm bờ trồng cây xung quanh. Biết chi phí đào $1\,\text{m}^2$ ao hết 250000 đồng và chi phí làm bờ trồng cây là 100000 đồng/$1\,\text{m}^2$. Hỏi số tiền bác phải chi gần với số nào nhất.

A. 1370519000 đồng. **B.** 1400500000 đồng. **C.** 1500000000 đồng. **D.** 1398212000 đồng.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $A(2;0;0), B(0;2;0)$ và cắt mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+(z-3)^2=4$ theo giao tuyến là đường tròn lớn.

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$. **B.** $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $2x+2y+3z-4=0$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-3;-1)$, $C(-1;0;2)$ và mặt phẳng $(P):2x+y+2z-1=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc mặt phẳng (P), giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ bằng:

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 9.

Câu 40. Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn hai điều kiện $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=2$; $w=iz$. Giá trị lớn nhất của $M=|w-z|$ bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(\sqrt{16-x^2}\right)=2m^2-m$ có nghiệm thực?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=\dfrac{1}{4}$ và $f'(x)=2x.\left[f(x)\right]^2$ với $\forall x\in\mathbb{R}$, tính $f(1)$?

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $-\dfrac{1}{7}$. **D.** 7.

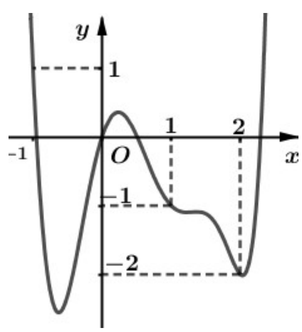
Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(-1;5;7)$, $B(4;2;3)$ và cắt mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}=(5;a;b)$ là một véctơ pháp tuyến của (P). Tính giá trị biểu thức $T=3a-2b$?

A. 9. **B.** 1. **C.** 6. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 44. Cho hàm số $g(x)=2x^3+x^2-8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g\left(g(x)+3\right)-m}=2g(x)+7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. 7. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 25.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$ đạt cực đại tại điểm?

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

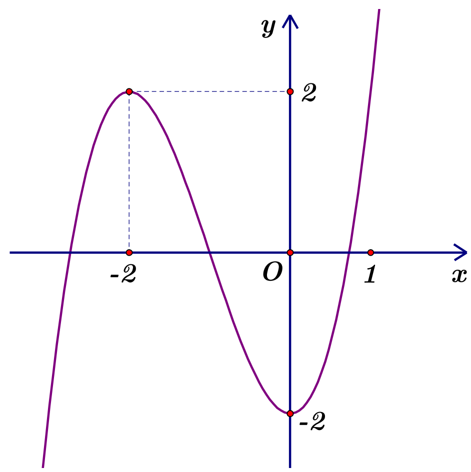
Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^4\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** Vô số.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A, vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 4z + 1 = 0$ và cắt mặt phẳng (P) tại điểm B. Điểm M nằm trong (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB.

A. $\frac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{41}$.

Câu 50. Cho hai hàm số: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m + 5)x - 2019$,

và $g(x) = (m^2 + 2m + 3)x^3 - (3m^2 + 6m + 8)x^2 - 4x + 3$ với m là tham số.

Phương trình $g(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 9. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2C	3D	4B	5B	6C	7B	8A	9A	10B	11A	12C	13B	14A	15D
16B	17D	18C	19D	20B	21B	22C	23B	24B	25A	26C	27D	28D	29A	30A
31D	32A	33C	34C	35C	36C	37A	38D	39C	40C	41A	42B	43B	44D	45A
46B	47D	48A	49C	50C										

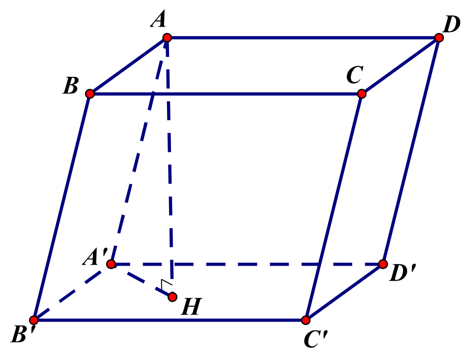
Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $AA'=2a$, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ là

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** a^3. **C.** $2a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

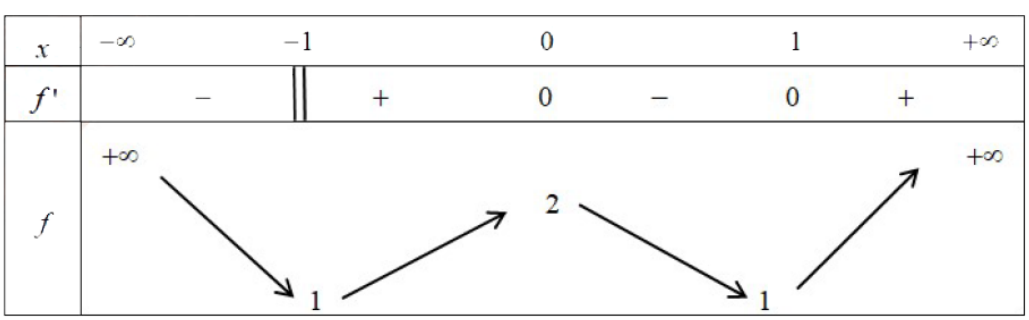
Khi đó góc tạo bởi cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $\widehat{AA'H}=60°$.

Suy ra: $\sin\widehat{AA'H}=\frac{AH}{AA'}\Rightarrow AH=2a.\sin 60°=a\sqrt{3}$.

Nên thể tích khối lăng trụ bằng:

$V=AH.S_{ABCD}=a\sqrt{3}.a^2=\sqrt{3}a^3$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;2;1)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;2;0)$. **B.** $(0;2;1)$. **C.** $(4;2;1)$. **D.** $(4;0;0)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 4. Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0, x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 5. Với a, b là hai số dương khác không tùy ý, $\log\left(\dfrac{2a}{b^2}\right)$ bằng.

A. $2(\log a-\log b)$. **B.** $\log(2a)-2\log b$. **C.** $\dfrac{\log a}{\log b}$. **D.** $\dfrac{\log(2a)}{2\log b}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log\left(\dfrac{2a}{b^2}\right)=\log(2a)-\log b^2=\log(2a)-2\log b$.

Câu 6. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3;\ \int\limits_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x=6$. Tính $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$?

A. 6. **B.** 9. **C.** 15. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=6 \Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=12$.

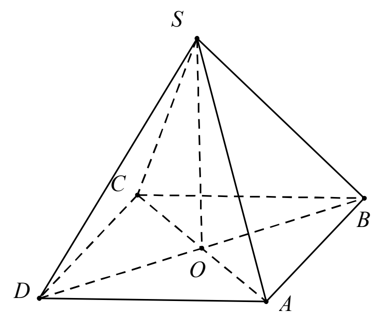
Vậy $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3+12=15$.

Câu 7. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a

A. $\frac{2\pi a^2}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Do là chóp tứ giác đều nên đáy là hình vuông. Gọi O là tâm hình vuông :
$OA = OB = OC = OD$ (1).

Theo giả thiết các cạnh của chóp bằng a nên đường chéo hình vuông $ABCD$ là $BD = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác ΔSBD có $SB = SD = a$.

$\left.\begin{array}{l} SB^2 + SD^2 = 2a^2 \\ BD^2 = 2a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow SB^2 + SD^2 = BD^2$ nên ΔSBD vuông cân tại S nên suy ra

$SO = OB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính cầu là $r = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

Câu 8. Số phức thỏa mãn phương trình $z + 3\bar{z} = (2+i)^3(2-i)$. Mô đun của số phức $w = z + 10i$ là

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{1521}}{4}$. **C.** $\frac{5\sqrt{73}}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow 3\bar{z} = 3x - 3yi$.

Từ $z + 3\bar{z} = (2+i)^3(2-i)$ ta có $4x - 2yi = 15 + 20i \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = -10 \end{cases}$. Hay $z = \frac{15}{4} - 10i$.

Nên $w = z + 10i = \frac{15}{4} \Rightarrow |w| = \frac{15}{4}$.

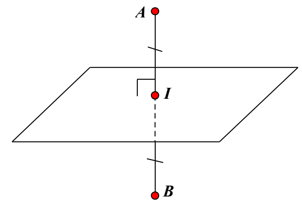
Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-3;0;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $2x + y - 2z - 1 = 0$. **B.** $2x + y - 2z - 10 = 0$.

C. $2x + y - 2z - 8 = 0$. **D.** $2x + y - 2z + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I(-1;1;-1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB qua điểm I và nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;4)$ làm một vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

$-4(x+1)-2(y-1)+4(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z-1=0.$

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ là

A. $x-4\ln|x+1|+C$. **B.** $x+\dfrac{4}{x+1}+C$.

C. $\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{4}{x+1}+C$. **D.** $x-\dfrac{4}{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{4}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=x+\frac{4}{x+1}+C.$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=25$ đi qua điểm nào dưới đây.

A. $M(6;0;-1)$. **B.** $N(3;-3;-1)$. **C.** $P(-1;-1;-5)$. **D.** $Q(-2;1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ điểm $M(6;0;-1)$ vào phương trình cho mặt cầu (S) ta có:

$(6-2)^2+(0-3)^2+(-1+1)^2=25$ nên điểm $M\in(S)$.

Câu 12. Trong khai triển nhị thức $(x+2)^{n+6}$; $(n\in N)$. Có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng:

A. 17. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Khai triển nhị thức $(x+2)^{n+6}$ có tất cả $(n+6+1)=n+7$ số hạng.

Theo bài ra ta có $n+7=17 \Leftrightarrow n=10$.

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=8$, công bội $q=-2$. Tính u_5.

A. 64. **B.** -64. **C.** 128. **D.** -128.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_2=u_1.q \Rightarrow u_1=\dfrac{u_2}{q}=\dfrac{8}{-2}=-4$.

Khi đó: $u_5=u_1.q^4=(-4).(-2)^4=-64$.

Câu 14. Số phức $z=\dfrac{2-4i}{1+i}$ có điểm biểu diễn là:

A. $(-1;-3)$. **B.** $(2;-4)$. **C.** $(-3;-1)$. **D.** $(1;1)$.

Lời giải

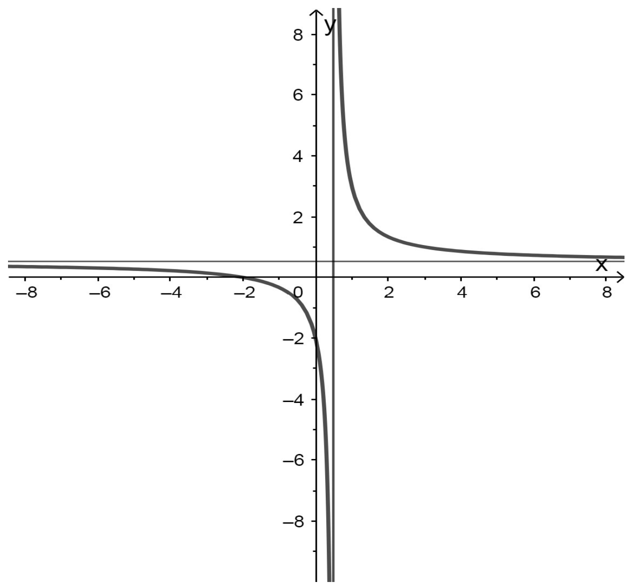
Chọn A

Ta có:

$$z=\frac{2-4i}{1+i}=\frac{(2-4i).(1-i)}{(1+i).(1-i)}=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i.$$

Điểm biểu diễn số phức $z=-1-3i$ là $(-1;-3)$.

Câu 15. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của một trong bốn hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{3x+2}{1-2x}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{1+2x}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Hình vẽ là đồ thị của một hàm số nghịch biến $\Rightarrow$ Hàm số có $y'<0$ trên từng khoảng xác định .

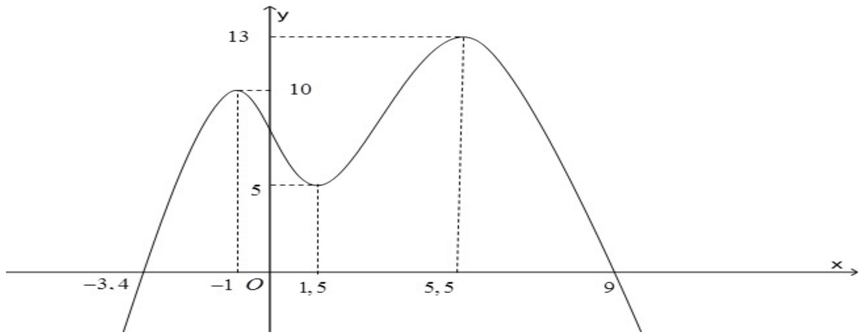
Xét phương án A: $y'=\dfrac{7}{(-2x+1)^2}>0,\forall x\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ loại A.

Xét phương án B: $y'=\dfrac{5}{(2x+1)^2}>0$, $\forall x\neq-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ loại B.

Xét phương án C: $y'=\dfrac{3}{(2x-1)^2}>0$, $\forall x\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ loại C.

Xét phương án D: $y'=\dfrac{-5}{(2x-1)^2}<0$, $\forall x\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ chọn D.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1;6\right]$. Tính giá trị biểu thức $P=2M+3N$.



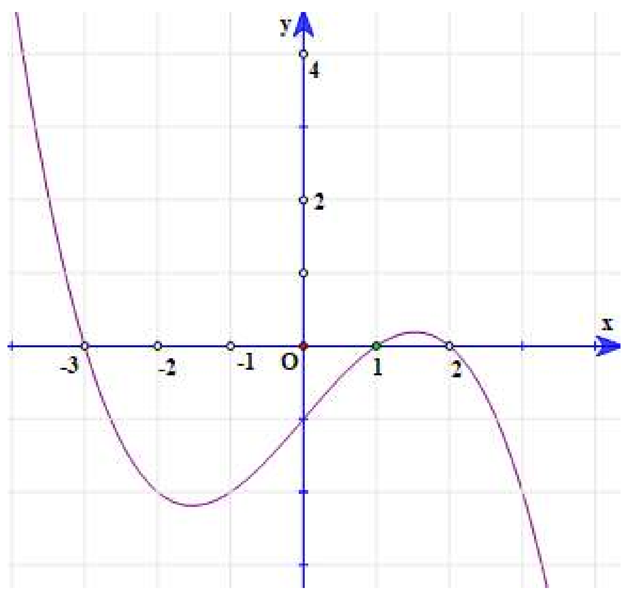
A. 8. **B.** 41. **C.** 49. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy: $M=\max\limits_{[-1;6]} f\left(x\right)=13$ và $N=\min\limits_{[-1;6]} f\left(x\right)=5$. Vậy $P=2M+3N=41$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị $f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 18. Tìm hai số thực a và b thỏa mãn $3a+b-2ai=(1-i)(1+3i)$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=1$, $b=1$. **B.** $a=-1$, $b=1$. **C.** $a=-1$, $b=7$. **D.** $a=7$, $b=-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3a+b-2ai=(1-i)(1+3i) \Leftrightarrow (3a+b)-2ai=4+2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=4 \\ -2a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=7 \end{cases}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-1;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) là

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. **B.** $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có mặt cầu tiếp xúc với mp(P) nên bán kính mặt cầu là $R=d(I,(P))=\dfrac{|2+2+1+1|}{\sqrt{4+4+1}}=2$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;1)$ bán kính $R=2$ là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.

Câu 20. Hàm số $y=(4x-x^2)^{\pi}$ có tập xác định là:

A. $(2;6)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=(4x-x^2)^{\pi}$ có số mũ π không nguyên nên hàm số xác định khi:
$4x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<4$.

Tập xác định của hàm số $y=(4x-x^2)^{\pi}$ là : $D=(0;4)$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$ là?

A. $\int \cos 2x\,dx=2\sin 2x+C$. **B.** $\int \cos 2x\,dx=\dfrac{\sin 2x}{2}+C$.

C. $\int \cos 2x\,dx = \sin 2x + C$. **D.** $\int \cos 2x\,dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C$.

Lời giải

Chọn B

$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d\left(2x\right) = \frac{\sin 2x}{2} + C$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt $\left(P\right)$. **B.** $d \subset \left(P\right)$. **C.** $d // \left(P\right)$. **D.** $d \perp \left(P\right)$.

Lời giải

Chọn C

Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\left(P\right)$ thỏa mãn phương trình:

$3\left(-1 + 2t\right) - 3\left(3 + 4t\right) + 2\left(3t\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = 17$ (vô nghiệm). Từ đó suy ra đường thẳng d song song với mặt phẳng $\left(P\right)$.

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(2x - 1\right) > 2$ là

A. $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_2\left(2x - 1\right) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 > 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Câu 24. Thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường $y = x\ln x;\ y = 0;$ $x = 2$ quay quanh trục Ox được tính bởi công thức nào?

A. $\pi\int_0^2 x^2 \ln^2 x dx$. **B.** $\pi\int_1^2 x^2 \ln^2 x dx$. **C.** $\int_0^2 x^2 \ln^2 x dx$. **D.** $\int_1^2 x \ln x dx$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $x\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (do $x > 0$).

Thể tích V vật thể tròn xoay cần tìm là: $V = \pi\int_1^2 \left(x\ln x\right)^2 dx = \pi\int_1^2 x^2 \ln^2 x dx$.

Câu 25. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 5 và diện tích đáy 9π. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. 12π. **B.** 15π. **C.** 45π. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn A

Diện tích đáy $9\pi = \pi R^2 \Leftrightarrow R = 3$.

Chiều cao khối nón : $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Thể tích của khối nón đã cho : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}.\pi.3^2.4 = 12\pi$.

Câu 26. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+3}$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^+} \frac{2x-1}{x+3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{2x-1}{x+3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số } y = \frac{2x-1}{x+3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số } y = \frac{2x-1}{x+3}.$$

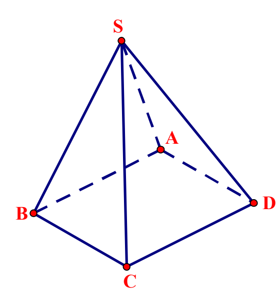
Vậy hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a góc $ABC = 60^0$, chiều cao bằng $3a$ thể tích của khối chóp bằng.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $3a^2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = a^2 \sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.3a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28. Hàm số $f\left(x\right)=10^{x^2-2x}$ có đạo hàm

A. $f'\left(x\right)=\left(2x-2\right)\ln 10$.
B. $f'\left(x\right)=\left(x^2-2x\right)10^{x^2-2x-1}$.
C. $f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)10^{x^2-2x}$.
D. $f'\left(x\right)=\left(2x-2\right)10^{x^2-2x}\ln 10$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x\right)=\left(10^{x^2-2x}\right)'=\left(x^2-2x\right)'10^{x^2-2x}\ln 10=\left(2x-2\right)10^{x^2-2x}\ln 10.$

Câu 29. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_2^e \ln xdx$ có dạng $a+b\ln 2$. Tích $a.b$ là

A. -4. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 10

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_2^e \ln xdx=x.\ln x\big|_2^e-\int\limits_2^e dx=e-2\ln 2-e+2=2-2\ln 2$

Suy ra $a=2;b=-2$

Vậy $ab=-4$.

Câu 30. Năm nay con ông Mạnh vào lớp 10. Để chuẩn bị tiền cho con đi học đại học đầu mỗi tháng ông gửi ngân hàng 1000000 với lãi suất $0,7\%$ /tháng. Sau ba năm thì số tiền Ông Mạnh nhận được cả gốc lẫn lãi sau khi ngân hàng đã tính lãi tháng cuối cùng là bao nhiêu?

A. 41066470. **B.** 42166470. **C.** 40781000. **D.** 43000000

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền mà Ông Mạnh gửi vào hàng tháng là a $\left(a>0\right)$

Và lãi suất hàng tháng của ngân hàng là r

Theo giả thiết: $a=1000000;\ r=0,007$

Sau tháng thứ nhất Ông Mạnh có số tiền là: $T_1=a+ar$

Sau tháng thứ hai Ông Mạnh có số tiền là:

$T_2=\left(a+ar\right)+\left(T_1+T_1r\right)=a\left(1+r\right)+T_1\left(1+r\right)=a\left(1+r\right)+a\left(1+r\right)^2$

Sau tháng thứ ba Ông Mạnh có số tiền là:

$T_3=a\left(1+r\right)+\left(1+r\right)T_2=a\left(1+r\right)+a\left(1+r\right)^2+a\left(1+r\right)^3$

….

Sau tháng thứ 36 Ông Mạnh có số tiền cả gốc lẫn lãi là

$T_{36}=a\left(1+r\right)+a\left(1+r\right)^2+...+a\left(1+r\right)^{36}$

$$=a\left[\left(1+r\right)+\left(1+r\right)^2+...+\left(1+r\right)^{36}\right]=a.\left(1+r\right)\frac{1-\left(1+r\right)^{36}}{1-\left(1+r\right)}=a\left(1+r\right).\frac{1-\left(1+r\right)^{36}}{-r}$$

Thay $a=1000000$ và $r=0,007$ ta được $T_{36}\approx 41066470$

Câu 31. Thiết diện qua trục của hình trụ tròn xoay là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó?

A. 5π. **B.** 15π. **C.** 20π. **D.** 10π.

Lời giải

Chọn D

Thiết diện qua trục của hình trụ tròn xoay là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10.

$\Rightarrow 2R.h=10$.

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq}=2\pi Rh=10\pi$.

Câu 32. Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x}=8$ bằng.

A. -3. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$2^{x^2-2x}=8 \Leftrightarrow x^2-2x=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1. \\ x=3. \end{array}\right.$

$\Rightarrow x_1.x_2=-3$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+4}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=0$ là

A. $y=4x+3$. **B.** $y=\frac{1}{2}x+2$. **C.** $y=-\frac{1}{2}x+2$. **D.** $y=-\frac{1}{2}x-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$.

$y'(0)=-\frac{1}{2}$; $y(0)=2$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=0$ là

$y=y'(0)(x-0)+2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$.

Câu 34. Khi gọi điện thoại một khách hàng đã quên mất ba chữ số cuối người đó chỉ nhớ rằng đó là ba số khác nhau. Tính xác suất để người đó thực hiện được một cuộc điện thoại.

A. $\frac{1}{648}$. **B.** $\frac{1}{1000}$. **C.** $\frac{1}{720}$. **D.** $\frac{1}{100}$.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn ba chữ số cuối khác nhau: A_{10}^3.

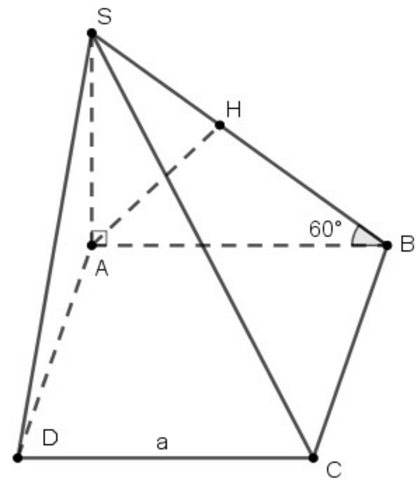
Suy ra xác suất để thực hiện được một cuộc điện thoại: $P=\frac{1}{A_{10}^3}=\frac{1}{720}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

+) $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

+) $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

+) $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = d(A,(SBC))$

+) $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ mà $(SBC) \cap (SAB) = SB$.

Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A,(SBC))$

Tam giác vuông ΔHAB có: $AH = \sin 60^0 . AB = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

Vậy $d(A,(SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(D,(SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ qua A cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-3}$.
B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{5}$.
D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của thẳng d là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1;2;-1)$.

Gọi $B = d \cap \Delta \Rightarrow B(1+t;2+2t;1-t)$.

Véc tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB} = (t;2t;-t-2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{-2}{3};\dfrac{-5}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}(1;2;5) = -\dfrac{1}{3}\vec{v}$.

Phương trình đường thẳng Δ qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$ là: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{5}$.

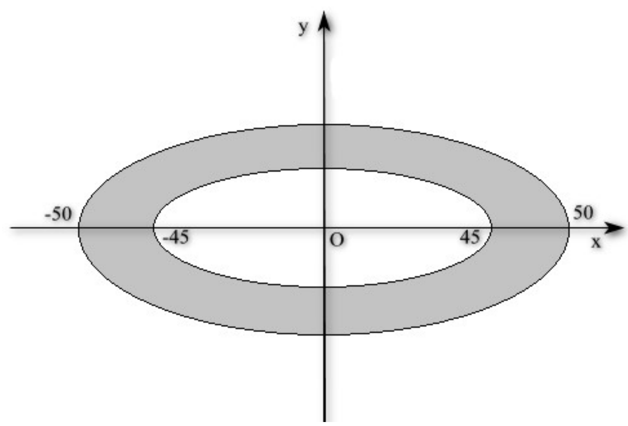
Câu 37. Bác An có mảnh ruộng hình Elip độ dài trục lớn bằng $100\,\text{m}$, độ dài trục bé bằng $80\,\text{m}$. Với chủ trương xây dựng kinh tế nông thôn mới, bác định chuyển đổi canh tác bằng cách đào một cái ao hình Elip ở chính giữa vườn có trục lớn bằng $90\,\text{m}$ trục bé bằng $70\,\text{m}$ để nuôi tôm, cá. Phần đất còn lại bác làm bờ trồng cây xung quanh. Biết chi phí đào $1\,\text{m}^2$ ao hết 250000 đồng và chi phí làm bờ trồng cây là 100000 đồng/$1\,\text{m}^2$. Hỏi số tiền bác phải chi gần với số nào nhất.

A. 1370519000 đồng. **B.** 1400500000 đồng. **C.** 1500000000 đồng. **D.** 1398212000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Phương trình của Elip của mảnh ruộng là $\dfrac{x^2}{50^2} + \dfrac{y^2}{40^2} = 1$. Khi đó mảnh ruộng có diện tích là $S_1 = 50.40.\pi = 2000\pi\,(\text{m}^2)$.

Phương trình của Elip của cái ao là $\dfrac{x^2}{45^2} + \dfrac{y^2}{35^2} = 1$. Khi đó cái ao có diện tích là $S_2 = 45.35.\pi = 1575\pi\,(\text{m}^2)$.

Suy ra diện tích phần bờ trồng cây xung quanh $S_3 = S_1 - S_2 = 2000\pi - 1575\pi = 425\pi\,(\text{m}^2)$

Chi phí đào ao là $T_1 = 1575\pi.250000 = 1237002107$ đồng.

Chi phí trồng cây xung quanh là $T_2 = 425\pi.100000 = 133517687,8$ đồng.

Số tiền bác An phải chi là $T = T_1 + T_2 = 1370519795$ đồng.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $A(2;0;0), B(0;2;0)$ và cắt mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$ theo giao tuyến là đường tròn lớn.

A. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 0$. **B.** $x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$. **C.** $2x + 2y + 3z - 4 = 0$. **D.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Lời giải

Chọn D

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn nên mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(0;0;3)$ của mặt cầu (S).

Vậy (P) đi qua 3 điểm $A(2;0;0), B(0;2;0)$ và $I(0;0;3)$.

Suy ra $(P): \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-3;-1)$, $C(-1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-1=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc mặt phẳng (P), giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ bằng:

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x)+2(3-x)+3(-1-z)=0\\(2-y)+2(-3-y)+3(-y)=0\\(2-z)+2(-1-z)+3(2-z)=0\end{cases}$

$\Rightarrow I\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};1\right)$.

Khi đó $T=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|6\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|=6MI$.

$\Rightarrow$ T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất.

Mà điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng (P) nên MI nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$MI=\mathrm{d}(I,(P))=\frac{\left|2.\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+2-1\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{5}{9}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ bằng $6MI=\frac{10}{3}$.

Câu 40. Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn hai điều kiện $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=2$; $w=iz$. Giá trị lớn nhất của $M=|w-z|$ bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $A(x;y)$.

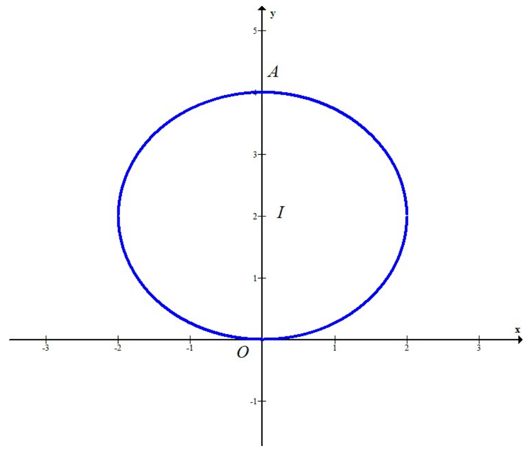
Ta có $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=2 \Leftrightarrow |z-2i|=2 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$.

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm A là đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính $R=2$.

Ta lại có $w = iz \Leftrightarrow w - z = iz - z \Leftrightarrow w - z = z(-1+i)$.

Khi đó $M = |w-z| = |z|\sqrt{2}$.

M lớn nhất $\Leftrightarrow |z|$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ OA lớn nhất $\Leftrightarrow$ $OA = OI + R = 2 + 2 = 4$.



Vậy $M_{\max} = 4\sqrt{2}$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(\sqrt{16-x^2}\right) = 2m^2 - m$ có nghiệm thực?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{16-x^2}$ có $x \in [-4;4] \Leftrightarrow t \in [0;4]$.

Phương trình trở thành $f(t) = 2m^2 - m \quad (1)$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm thuộc $[0;4]$ $\Leftrightarrow 1 \le 2m^2 - m \le 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - m \ge 1 \\ 2m^2 - m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{1}{2} \\ m \ge 1 \end{array}\right. \\ -1 \le m \le \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le m \le -\dfrac{1}{2} \\ 1 \le m \le \dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Có 2 số nguyên m thỏa mãn là $m = 1$; $m = -1$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = \dfrac{1}{4}$ và $f'(x) = 2x.\left[f(x)\right]^2$ với $\forall x \in \mathbb{R}$, tính $f(1)$?

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $-\dfrac{1}{7}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=2x.\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 2x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_1^2 = x^2\Big|_1^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)}=3+\frac{1}{f(2)}=3+\frac{1}{\frac{1}{4}}=7 \Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{7}.$$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(-1;5;7)$, $B(4;2;3)$ và cắt mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}=(5;a;b)$ là một véctơ pháp tuyến của (P). Tính giá trị biểu thức $T=3a-2b$?

A. 9. **B.** 1. **C.** 6. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I=(-1;2;3)$.

Gọi $(P):5x+ay+bz+d=0$.

(P) đi qua điểm $A(-1;5;7)\Rightarrow -5+5a+7b+d=0\ (1)$.

(P) đi qua điểm $B(4;2;3)\Rightarrow 20+2a+3b+d=0\ (2)$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi $d\left(I,(P)\right)$ lớn nhất.

$d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|-5+2a+3b+d\right|}{\sqrt{25+a^2+b^2}}$.

$(2)\Rightarrow 2a+3b+d=-20\Rightarrow d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|-5-20\right|}{\sqrt{25+a^2+b^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{25+a^2+b^2}}$.

Trừ từng vế (1) và (2) ta được $-25+3a+4b=0\Leftrightarrow 3a+4b=25$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $25^2=(3a+4b)^2\le 25\left(a^2+b^2\right)\Rightarrow a^2+b^2\ge 25$.

$\Rightarrow d\left(I,(P)\right)=\dfrac{25}{\sqrt{25+a^2+b^2}}\le\dfrac{25}{\sqrt{25+25}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}3a+4b=25\\ \dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\Rightarrow 3a-2b=1$.

Câu 44. Cho hàm số $g(x)=2x^3+x^2-8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)-m}=2g(x)+7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. 7. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 25.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=g(x)+3\Rightarrow t=2x^3+x^2-8x+3\Rightarrow t'=6x^2+2x-8$.

$t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{4}{3}\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{289}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t\in\left(-2;\dfrac{289}{27}\right)$ sẽ có tương ứng 3 giá trị x.

$$\sqrt{g(g(x)+3)-m}=2g(x)+7\Leftrightarrow\sqrt{g(t)-m}=2(t+3)+7\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq-\dfrac{1}{2}\\g(t)-m=(2t+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq-\dfrac{1}{2}\\m=2t^3+t^2-8t-4t^2-4t-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq-\dfrac{1}{2}\\m=2t^3-3t^2-12t-1\ (1)\end{cases}.$$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $t\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{289}{27}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=2t^3-3t^2-12t-1$ với $t\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{289}{27}\right)$.

$f'(t)=6t^2-6t-12\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.$.

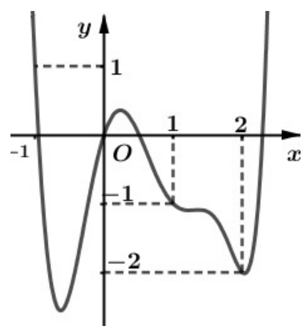
Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{289}{27}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$1979,5$

Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt $m \in \left(-21;4\right]$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-20;-19;-18;...;4\} \Rightarrow$ có 25 số nguyên thỏa mãn.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực đại tại điểm?

A. $x = -1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

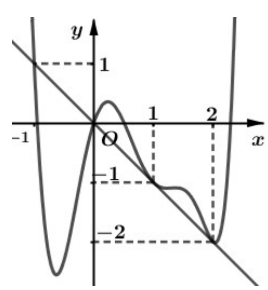
Lời giải

Chọn A

Có $g'(x) = 2f'(x) + 2x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x \quad (1)$

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = -x$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -x$ có $x \in \{-1,0,1,2\}$ là các nghiệm của phương trình (1) (trong đó $x = 1$, $x = 2$ là các nghiệm bội chẵn).

Có bảng dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^4(x^2+mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Có $g'(x)=-f'(3-x)=(x-3)(2-x)^4\left(x^2-6x+18+m(3-x)\right)$

Để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $g'(x)\geq 0$ với mọi $x\in(3;+\infty)$ và dấu đẳng thức xảy ra tại các điểm rời rạc trong khoảng $(3;+\infty)$.

Tương đương với $x^2-6x+18+m(3-x)\geq 0$ với mọi $x\in(3;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\leq x-3+\dfrac{9}{x-3}$ với mọi $x\in(3;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{(3;+\infty)}\left(x-3+\dfrac{9}{x-3}\right)$ (1)

Áp dụng BĐT Cô – si cho 2 số dương $x-3$ và $\dfrac{9}{x-3}$ có $x-3+\dfrac{9}{x-3}\geq 6$ (dấu đẳng thức xảy ra khi $x-3=\dfrac{9}{x-3}\Leftrightarrow x=6$).

Suy ra $\min\limits_{(3;+\infty)}\left(x-3+\dfrac{9}{x-3}\right)=6$ (đạt được khi $x=6$).

$(1)\Leftrightarrow m\leq 6$.

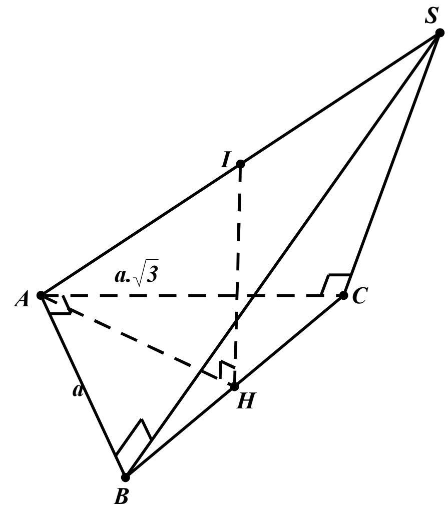
Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên dương của m.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $AB=a$; $AC=a\sqrt{3}$. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi R là bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3 \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi H là trung điểm đoạn thẳng BC và I là trung điểm đoạn thẳng SA.

Vì tam giác SAB vuông tại B nên ta có $IA = IB = IS$; tam giác SAC vuông tại C nên ta có $IA = IC = IS$. Như vậy $IA = IB = IC = IS$, nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Vì thế $IA = R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra $IH \perp (ABC)$. Mà I là trung điểm của SA nên $d(S,(ABC)) = 2d(I,(ABC)) = 2IH$.

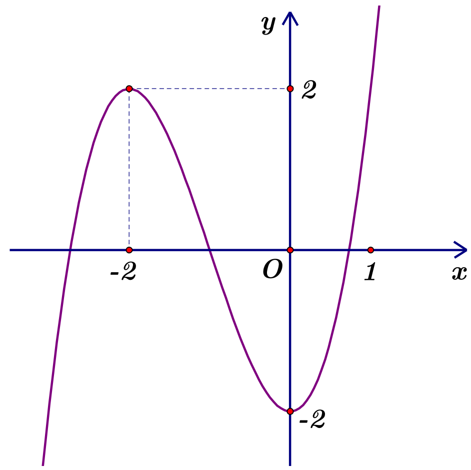
Xét tam giác ABC vuông tại A ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$. Suy ra $AH = \frac{BC}{2} = a$.

Xét tam giác IAH vuông tại H ta có: $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - a^2} = \frac{a}{2}$.

Chiều cao hình chóp $S.ABC$ là $h = d(S,(ABC)) = 2IH = a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.h = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}\right).a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $g'(x)=(-2x+1).f'(-x^2+x)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến khi $g'(x)<0 \Leftrightarrow (-2x+1).f'(-x^2+x)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x+1>0\\ f'(-x^2+x)<0\end{cases}\\ \begin{cases}-2x+1<0\\ f'(-x^2+x)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ -2<-x^2+x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-x^2+x<-2\\ -x^2+x>0\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ x^2-x-2<0\\ x^2-x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x^2-x-2>0\\ x^2-x<0\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ -1<x<2\\ \left[\begin{array}{l}x<0\\ x>1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\\ 0<x<1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

Như vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$; $(2;+\infty)$.

Vì thế, chọn đáp án A.

Cách 2:

Ta có: $g'(x)=(-2x+1).f'(-x^2+x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+1=0\\ f'\left(-x^2+x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ -x^2+x=-2\\ -x^2+x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=-1\\ x=2\\ x=0\\ x=1\end{array}\right..$$

Ta lại có: $f'\left(-x^2+x\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+x>-2\\ -x^2+x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2<0\\ x^2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(1;2)$.

$f'\left(-x^2+x\right)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(2;+\infty)$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$-2x+1$		+	|	+	|	+	0	−	|	−	|	−	
$f'\left(-x^2+x\right)$		+	0	−	0	+	|	+	0	−	0	+	
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(2;+\infty)$.

Vì thế chọn đáp án A.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A, vuông góc với mặt phẳng $(Q):3x+4y-4z+1=0$ và cắt mặt phẳng (P) tại điểm B. Điểm M nằm trong (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB.

A. $\frac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{41}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình chính tắc của đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-4}$.

B là giao điểm của d và (P) nên tọa độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+2y-z+9=0 \\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+3}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow B(-2;-2;1).$$

Gọi $(x;y;z)$ là tọa độ của điểm M thuộc (P).

- Cách 1:

Vì ΔAMB vuông tại M nên $MA^2+MB^2=AB^2$ không đổi.
Suy ra MB đạt GTLN $\Leftrightarrow MA$ đạt GTNN

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (P) (do A cố định, $M\in(P)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\in(P) \\ \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương } \overrightarrow{n_{(P)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-z=-9 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow M(-3;-2;-1).$$

Vậy $MB_{\max}=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$.

- Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-4;4)\Rightarrow AB=\sqrt{41}$.

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{2};0;-1\right)\Rightarrow d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|-1+0+1+9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3$.

Do M luôn nhìn đoạn AB dưới góc vuông nên M thuộc mặt cầu (S) đường kính AB.

Mặt khác, vì M, B cùng thuộc mặt phẳng (P) nên M, B thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).

Suy ra MB đạt GTLN $\Leftrightarrow MB$ là đường kính của (C).

Bán kính của (C): $r=\sqrt{\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2-d^2\left(I,(P)\right)}=\sqrt{\dfrac{41}{4}-9}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $MB_{\max}=2.r=\sqrt{5}$.

Câu 50. Cho hai hàm số: $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m+5)x-2019$,

và $g(x)=(m^2+2m+3)x^3-(3m^2+6m+8)x^2-4x+3$ với m là tham số.

Phương trình $g\left(f(x)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 9. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $g(t)=0\Leftrightarrow (m^2+2m+3)t^3-(3m^2+6m+8)t^2-4t+3=0$

$$\Leftrightarrow (t-3).\left[(m^2+2m+3)t^2+t-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-3=0 \\ (m^2+2m+3)t^2+t-1=0\ (1) \end{array}\right..$$

Xét phương trình (1). Ta có $\Delta = 1 + 4\left(m^2 + 2m + 3\right) = 4m^2 + 8m + 13 > 0 \ \ \forall m$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4m^2 + 8m + 13}}{2\left(m^2 + 2m + 3\right)} \ \ \forall m$.

Mặt khác, vì $\left(m^2 + 2m + 3\right).3^2 + 3 - 1 = 9\left(m^2 + 2m + 3\right) + 2 = 9\left(m + 1\right)^2 + 20 \neq 0 \ \ \forall m$ nên $t = 3$ không là nghiệm của (1).

$\Rightarrow$ Phương trình $g(t) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4m^2 + 8m + 13}}{2\left(m^2 + 2m + 3\right)} \ \ \forall m \end{array}\right.$.

Do đó, phương trình $g\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 3 \\ f(x) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4m^2 + 8m + 13}}{2\left(m^2 + 2m + 3\right)} \ \ \forall m \end{array}\right.$.

Mặt khác, xét hàm số $f(x)$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m + 5$

$$= x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 + 4 = (x - m - 1)^2 + 4 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn cắt mỗi đường thẳng $y = 3$, $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4m^2 + 8m + 13}}{2\left(m^2 + 2m + 3\right)} \ \ \forall m$ tại đúng một điểm duy nhất.

Vậy phương trình $g\left(f(x)\right) = 0$ có đúng 3 nghiệm.