

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (2 điểm)

Giải phương trình $x^2 + \sqrt{2x+5} + \sqrt{4-2x} = 4x-1$.

Lời giải

Điều kiện: $-\frac{5}{2} \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho tương đương

$$x^2 + \sqrt{2x+5} + \sqrt{4-2x} - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} - 3 + \sqrt{4-2x} + x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{2x+5}+3} + \sqrt{2-2x} + x-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} \left[-\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3} + \sqrt{2} + 2-x \sqrt{2-x} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \\ 2-x \sqrt{2-x} + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3} = 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Vì } x \geq -\frac{5}{2} \text{ nên } \sqrt{2x+5} + 3 \geq 3 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3} \geq -\frac{2}{3} \sqrt{2-x} \geq -\frac{2}{3} \sqrt{2 - \left(-\frac{5}{2}\right)} = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3} \geq 0, \forall x \geq -\frac{5}{2} \quad (1).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{5}{2}$.

Mặt khác, do $x \leq 2$ nên $2-x \sqrt{2-x} \geq 0, \forall x \leq 2 \quad (2)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2-x \sqrt{2-x} + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+5}+3} > 0 \text{ (do dấu "=" không đồng thời xảy ra)}.$$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2\}$.

Bài 2. (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \text{ với mọi } n=1,2,\dots$$

Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n \sqrt{2-u_n})$.

Lời giải

$$u_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\frac{3\pi}{8} = 2\cos\frac{3\pi}{2^3}.$$

$$\text{Đặt } u_n = 2\cos\varphi, \varphi \in (0;\pi) \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{2+2\cos\varphi} \Rightarrow u_{n+1} = 2\cos\frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{Do đó ta có: } u_2 = 2\cos\frac{3\pi}{4}, u_3 = 2\cos\frac{3\pi}{8}, \dots, u_n = 2\cos\frac{3\pi}{2^{n+2}}.$$

$$\text{Suy ra } \lim \left(2^n \sqrt{2 - u_n} \right) = \lim \left(2^n \sqrt{2 - 2 \cos \frac{3\pi}{2^{n+2}}} \right) = \lim \left(2^n \cdot 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{2^{n+3}} \right) = \lim \frac{\sin \frac{3\pi}{2^{n+3}}}{\frac{3\pi}{2^{n+3}}} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho đa thức $P(x)$ và $Q(x) = aP(x) + bP'(x)$ với a, b là các số thực và $a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x)$ vô nghiệm thì đa thức $P(x)$ cũng vô nghiệm.

Lời giải

Nếu $b = 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Ta xét các trường hợp sau đây với $b \neq 0$.

Dễ thấy hai đa thức $Q(x), P(x)$ cùng bậc.

Mà $Q(x)$ vô nghiệm nên hai đa thức $Q(x), P(x)$ bậc chẵn.

TH1: Nếu $P(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$ thì x_0 cũng là nghiệm của $Q(x) = aP(x) + bP'(x)$ (mâu thuẫn với giả thiết).

TH2: Nếu $P(x)$ có hai nghiệm đơn liên nhau $x_0 < x_1$ thì $P'(x_0) \cdot P'(x_1) < 0$.

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} Q(x_0) = aP(x_0) + bP'(x_0) = bP'(x_0) \\ Q(x_1) = aP(x_1) + bP'(x_1) = bP'(x_1) \end{cases} \Rightarrow Q(x_0)Q(x_1) = b^2 P'(x_0)P'(x_1) < 0.$$

$Q(x)$ là đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó theo trên suy ra $Q(x)$ có nghiệm $x_2 \in (x_0, x_1)$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy nếu đa thức $Q(x)$ vô nghiệm thì đa thức $P(x)$ cũng vô nghiệm. (đpcm)

Bài 4. (5 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $a^2 + b^2 + c^2$ với a, b, c là các số tự nhiên sao cho $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p .

Lời giải

Nhận xét: do p là số nguyên tố nên trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 2 số không nhỏ hơn 1.

Theo đề bài, ta cần tìm số nguyên tố p có dạng sau:

$$p = a^2 + b^2 + c^2 \text{ với } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Do a, b, c có vai trò như nhau nên không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

Rõ ràng $p \mid (a^2 + b^2 + c^2)^2$. Khai triển ta có $p \mid (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2)$.

Theo giả thiết ban đầu ta có $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p .

Do đó ta suy ra được $p \mid (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2)$. Xảy ra 2 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $p \mid 2$.

Trong trường hợp này, hiển nhiên $p = 2$ là giá trị duy nhất thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ và các hoán vị của chúng là các giá trị thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: $p \mid (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$. (1)

Mà $p = a^2 + b^2 + c^2$ nên ta suy ra được $p \mid c^2(a^2 + b^2 + c^2)$ hay $p \mid (a^2c^2 + b^2c^2 + c^4)$ (2).

Từ (1), (2) ta suy ra được $p \mid (c^4 - a^2b^2)$.

Ta lại có $c^4 - a^2b^2 = (c^2 + ab)(c^2 - ab)$. Để ý rằng $0 < c^2 + ab < p$ và p là số nguyên tố nên $p \mid (c^4 - a^2b^2)$ khi và chỉ khi $p \mid (c^2 - ab)$.

Mặt khác, ta có đánh giá sau: $|c^2 - ab| < |c^2| + |ab| < a^2 + b^2 + c^2 = p$.

Vậy $p \mid (c^2 - ab)$ khi và chỉ khi $c^2 - ab = 0$ hay $c^2 = ab$. Do $c = \min\{a, b, c\}$ nên dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thay $a = b = c$ giả thiết $p = a^2 + b^2 + c^2$ ta được $p = 3a^2$. Do p là số nguyên tố nên giá trị tự nhiên duy nhất của a thỏa yêu cầu bài toán là $a = 1$. Khi đó $p = 3$.

Vậy $p = 2$ hoặc $p = 3$ là 2 số nguyên tố duy nhất thỏa yêu cầu bài toán.

2. Cho bảng ô vuông $2 \times n$ với $n \geq 3$. Hai ô của cột thứ i của bảng được điền bởi 2 số thực không a_i, b_i sao cho $a_i + b_i = 1$. Chứng minh rằng có thể chọn được từ mỗi cột một số sao cho tổng các số được chọn ở mỗi hàng không vượt quá $\frac{n+1}{4}$.

Lời giải

a_1	a_2	a_3	...	...	a_n
b_1	b_2	b_3	...	...	b_n

Giả sử ta có bảng như trên với $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$. Từ đó suy ra $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. Điều này là hợp lệ vì việc đổi chỗ 2 cột cho nhau không ảnh hưởng gì đến kết luận của bài toán.

Khi đó gọi k là số lớn nhất sao cho $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \leq \frac{n+1}{4}$. Ta sẽ chứng tỏ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ và $b_{k+1}, b_{k+2}, b_{k+3}, \dots, b_n$ là các số cần chọn.

Như vậy ta cần chỉ ra rằng $b_{k+1} + b_{k+2} + b_{k+3} + \dots + b_n \leq \frac{n+1}{4}$ (*). Theo định nghĩa của số k thì

ta có $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} > \frac{n+1}{4}$ nên suy ra $(k+1)a_{k+1} > \frac{n+1}{4} \Leftrightarrow a_{k+1} > \frac{n+1}{4(k+1)}$.

Để có (*), ta sẽ chứng minh $(n-k)b_{k+1} \leq \frac{n+1}{4}$ hay $(n-k)(1-a_{k+1}) \leq \frac{n+1}{4}$, ta đưa về

$$(n-k) \left(1 - \frac{n+1}{4(k+1)} \right) \leq \frac{n+1}{4} \Leftrightarrow (n-2k-1)^2 \geq 0$$

BĐT trên là hiển nhiên nên ta có đpcm.

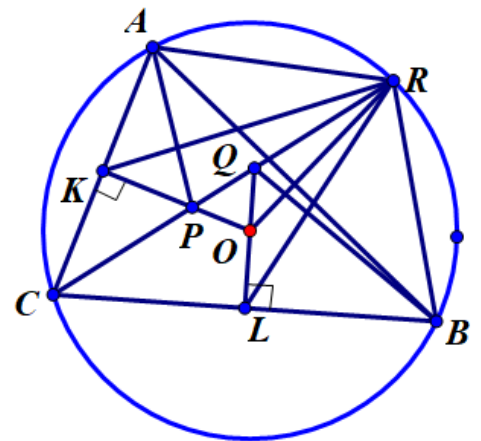
Bài 5. (7 điểm)

1. Cho tam giác ABC ($AC < BC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Phân giác góc C cắt đường tròn (O) tại R . Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AC và BC . Đường vuông góc với AC tại K cắt CR tại P , đường vuông góc với BC tại L cắt CR tại Q . Chứng minh rằng diện tích tam giác RPK và RQL bằng nhau.

Lời giải

Ta có: $S_{RPK} = \frac{1}{2} RP \cdot PK \cdot \sin RPK$; $S_{RQL} = \frac{1}{2} RQ \cdot QL \cdot \sin RQL$

Dễ thấy $\angle PKR = \angle LQR = 90^\circ - \frac{C}{2} \Rightarrow RPK = RQL$.



Vậy $S_{RPK} = S_{RQL} \Leftrightarrow RP.PK = RQ.QL$ (1)

+ Ta sẽ chứng minh $RQ = CP$ và $RP = CQ$

Xét hai tam giác RPA và RQB

Có $RAB = RCA = PAC \Rightarrow RAP = CAB \Rightarrow RAP = QRB; RA = RB$

$APC = 2KPC = 2CQL = CQB \Rightarrow APR = RQB \Rightarrow ARP = RBQ$

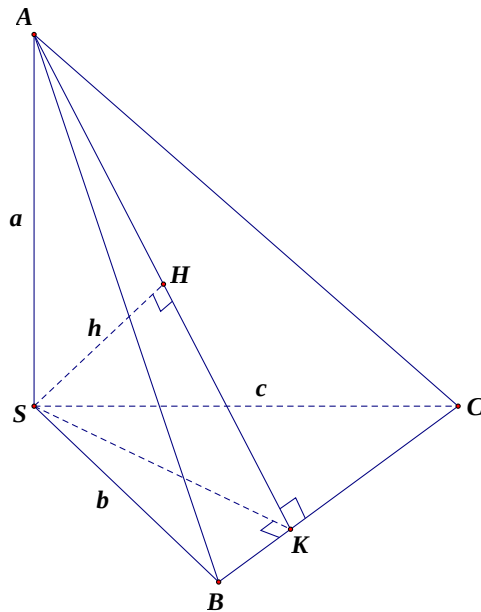
Vậy hai tam giác RPA và RQB bằng nhau (g.c.g), suy ra $RQ = PA \Rightarrow RQ = PC$, từ đó cũng suy ra $RP = CQ$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow CQ.PK = CP.QL \Leftrightarrow \frac{CQ}{CP} = \frac{QL}{PK}$, điều này đúng do hai tam giác vuông

CQL và CPK đồng dạng với nhau, suy ra điều phải chứng minh.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Gọi R, r lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$; V là thể tích khối chóp $S.ABC$ và h là chiều cao của khối chóp $S.ABC$ hạ từ đỉnh S . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{V(h-r)}{R^2hr}$.

Lời giải



Đặt $SA = a, SB = b, SC = c$. Kẻ $SH \perp BC$ tại K , $SH \perp SK$ tại $H \Rightarrow SH = h$.

+) Ta có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

+) Vì $S.ABC$ có ba góc tại đỉnh S là các góc vuông nên ta có: $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ và $V = \frac{1}{6}abc$.

+) Lại có $SK = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow AK = \sqrt{a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC.AK = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

Khi đó $r = \frac{3V}{S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCA} + S_{\triangle ABC}} = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

$$+) \frac{V(h-r)}{R^2hr} = \frac{\frac{1}{6}abc \left(\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} - \frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \right)}{\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \cdot \frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{V(h-r)}{R^2hr} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{2}{3} \text{ vì } ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \forall a,b,c \text{ dương.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$$\text{Vậy } \max \frac{V(h-r)}{R^2hr} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = b = c.$$

----- HẾT -----
