

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

QUAN HỆ SONG SONG

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

1. Mở đầu về hình học không gian

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

Quan hệ thuộc: Trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:

- Điểm A thuộc đường thẳng d , kí hiệu $A \in d$.
- Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có thể xảy ra hai trường hợp:

- Điểm A thuộc mặt phẳng (P) , kí hiệu $A \in (P)$.
- Điểm A không thuộc mặt phẳng, kí hiệu $A \notin (P)$.

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Tính chất thừa nhận 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất thừa nhận 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Tính chất thừa nhận 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất thừa nhận 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Tính chất thừa nhận 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

Có bốn cách xác định trong một mặt phẳng:

Cách 1: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC) .

Cách 2: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d , kí hiệu (A, d) .

Cách 3: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a, b) .

Cách 4: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b song song, kí hiệu (a, b) .

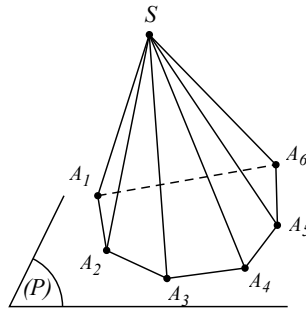
4. Hình chóp và tứ diện

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$.

Trong đó:

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.



Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác,... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,...

Chú ý

- a. Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.
- b. Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP CÂ

Dạng 1: Dạng toán lý thuyết

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
- B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
- D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C

- A sai. Qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.
- B sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 2: Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- A. 6. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Khi đó, với 4 điểm không đồng phẳng ta tạo được tối đa $C_4^3 = 4$ mặt phẳng.

Câu 3: Trong mặt phẳng (α) , cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α) . Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Với điểm S không thuộc mặt phẳng (α) và 4 điểm A, B, C, D thuộc mặt phẳng (α) , ta có C_4^2 cách chọn 2 trong 4 điểm A, B, C, D cùng với điểm S lập thành 1 mặt phẳng xác định. Vậy số mặt phẳng tạo được là 6.

Câu 4: Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

- A. 10. B. 12. C. 8. D. 14.

Lời giải

Chọn A

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Ta có C_5^3 cách chọn 3 điểm trong 5 điểm đã cho để tạo được 1 mặt phẳng xác định. Số mặt phẳng tạo được là 10.

Câu 5: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Ba điểm phân biệt. B. Một điểm và một đường thẳng.

C. Hai đường thẳng cắt nhau.

D. Bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Chọn C

- A sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.
- B sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

4 điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ giác, khi đó 4 điểm A, B, C, D đã đồng phẳng và tạo thành 1 mặt phẳng duy nhất là mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 7: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.

B. Nếu A, B, C thẳng hàng và $(P), (Q)$ có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q) .

C. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.

D. Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q) .

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng phân biệt không song song với nhau thì chúng có duy nhất một giao tuyến.

- A sai. Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì 2 mặt phẳng có vô số điểm chung. Khi đó, chưa đủ điều kiện để kết luận A, B, C thẳng hàng.
- B sai. Có vô số đường thẳng đi qua A , khi đó B, C chưa chắc đã thuộc giao tuyến của (P) và (Q) .

- C sai. Hai mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt giao nhau tại 1 giao tuyến duy nhất, nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng thì A, B, C cùng thuộc giao tuyến.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.
- B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Nếu 2 mặt phẳng trùng nhau, khi đó 2 mặt phẳng có vô số điểm chung và chung nhau vô số đường thẳng.

Câu 9: Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. 3 đường thẳng trên đồng quy.
- B. 3 đường thẳng trên trùng nhau.
- C. 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác.
- D. Các khẳng định ở A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

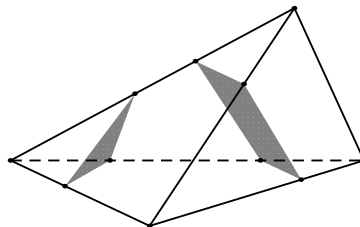
- B sai. Nếu 3 đường thẳng trùng nhau thì chúng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.
- C sai. Nếu 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác khi đó sẽ tạo được 3 điểm phân biệt không thẳng hàng (là 3 đỉnh của tam giác), chúng lập thành 1 mặt phẳng xác định, 3 đường thẳng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.

Câu 10: Thiết diện của 1 tứ diện có thể là:

- A. Tam giác.
- B. Tứ giác.
- C. Ngũ giác.
- D. Tam giác hoặc tứ giác.

Lời giải

Chọn D



Khi thiết diện cắt 3 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 3 giao tuyến. Ba giao tuyến lập thành 1 hình tam giác.

Khi thiết diện cắt cả 4 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 4 giao tuyến. Bốn giao tuyến lập thành 1 hình tứ giác.

Thiết diện không thể là ngũ giác vì thiết diện có 4 mặt, số giao tuyến tối đa là 4.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt ta tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là tứ giác lồi $ABCD$ có các cạnh đối không song song với nhau. Gọi M là điểm trên cạnh SA . Tìm giao điểm của các cặp mặt phẳng:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. (SAC) và (SBD) | b. (SAB) và (SCD) |
| c. (SBC) và (SAD) | d. (BCM) và (SAD) |
| e. (CDM) và (SAB) | f. (BDM) và (SAC) |

Giải

a. Trong mp $(ABCD)$:

$$\left. \begin{array}{l} AC \cap BD = \{O\} \\ AC \subset (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

Mà $S \in (SAC) \cap (SBD)$ nên $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b. Trong $(ABCD)$ ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB \cap CD = \{F\} \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow F \in (SAB) \cap (SCD)$$

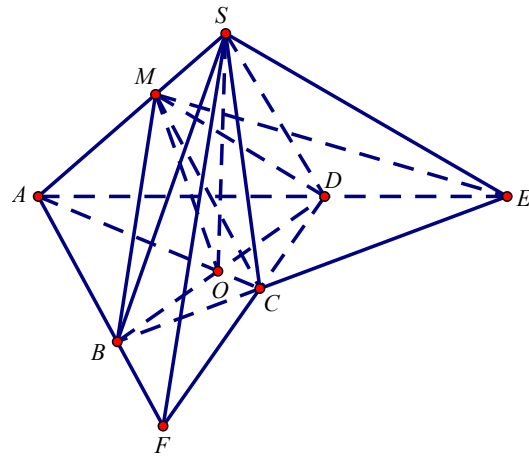
Mà $S \in (SAB) \cap (SCD)$ nên $SF = (SAB) \cap (SCD)$.

c. Trong $(ABCD)$ ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BC \cap AD = \{E\} \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$$

Mà $S \in (SAD) \cap (SBC)$ nên $SE = (SAD) \cap (SBC)$.

d. Ta có: $M \in (MBC) \cap (SAD)$



$$E \in BC \cap AD \Rightarrow E \in (MBC) \cap (SAD)$$

$$\text{Nên } ME = (MBC) \cap (SAD).$$

$$\text{e. Ta có: } M \in (MCD) \cap (SAB)$$

$$F = AB \cap CD \Rightarrow F \in (MCD) \cap (SAB)$$

$$\text{Vậy } MF = (MCD) \cap (SAB).$$

$$\text{f. Ta có: } M \in (BDM) \cap (SAC)$$

$$O \in (BDM) \cap (SAC)$$

$$\text{Do đó } MO = (BDM) \cap (SAC).$$

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, AD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

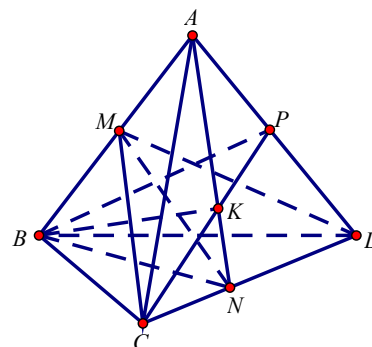
- a. (ABN) và (CDM); b. (ABN) và (BCP).

Giải

a. Ta có M và N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (CDM), nên giao tuyến của hai mặt phẳng này chính là đường thẳng MN.

b. Trong mặt phẳng (ACD): AN cắt CP tại K. Do đó K là điểm chung của hai mặt phẳng (BCP) và (ABN).

Mà B cũng là điểm chung của hai mặt phẳng này nên giao tuyến của chúng là đường thẳng BK.



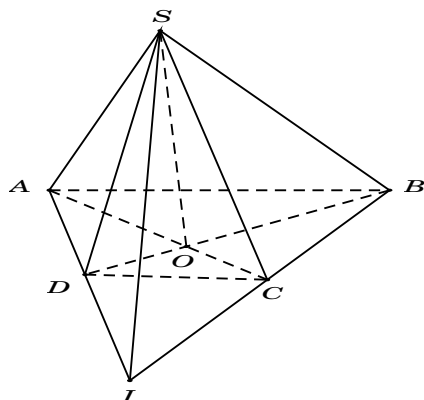
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
- B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
- C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).
- D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Lời giải

Chọn D



• Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$. Do đó A đúng.

• S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

$\longrightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$. Do đó B đúng.

• Tương tự, ta có $(SAD) \cap (SBC) = SI$. Do đó C đúng.

• $(SAB) \cap (SAD) = SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó D sai.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

A. AM (M là trung điểm của AB).

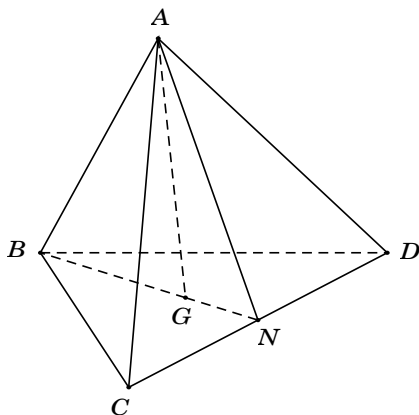
B. AN (N là trung điểm của CD).

C. AH (H là hình chiếu của B trên CD).

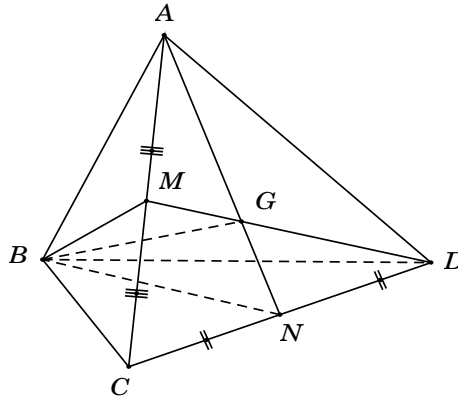
D. AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải

Chọn B



• A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .



- B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) .
- Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD . Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) .

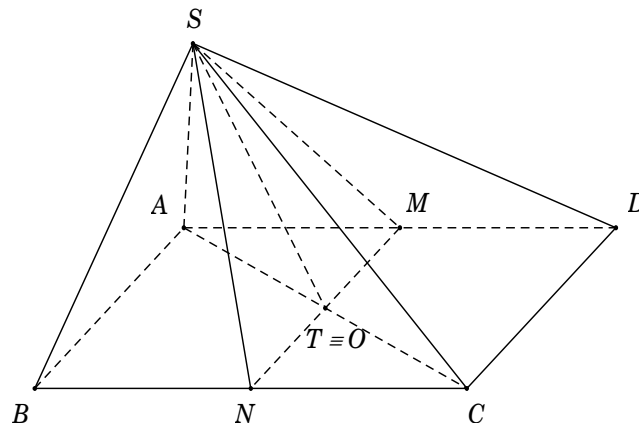
Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

- A. SD .
- B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
- C. SG (G là trung điểm AB).
- D. SF (F là trung điểm CD).

Lời giải

Chọn B



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) .

- Gọi $O = AC \cap BD$ là tâm của hình bình hành.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $T = AC \cap MN$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in MN \subset (SMN) \Rightarrow O \in (SMN) \end{cases} \Rightarrow O \text{ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng } (SMN) \text{ và } (SAC).$$

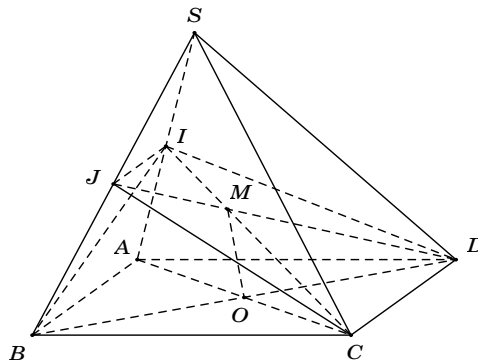
Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $IJCD$ là hình thang. B. $(SAB) \cap (IBC) = IB$.
 C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$. D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Lời giải

Chọn D



- Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD \Rightarrow IJ \parallel CD \Rightarrow IJCD$ là hình thang. Do đó A đúng.
- Ta có $\begin{cases} IB \subset (SAB) \\ IB \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (IBC) = IB$. Do đó B đúng.
- Ta có $\begin{cases} JD \subset (SBD) \\ JD \subset (JBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (JBD) = JD$. Do đó C đúng.
- Trong mặt phẳng $(IJCD)$, gọi $M = IC \cap JD \Rightarrow (IAC) \cap (JBD) = MO$. Do đó D sai.

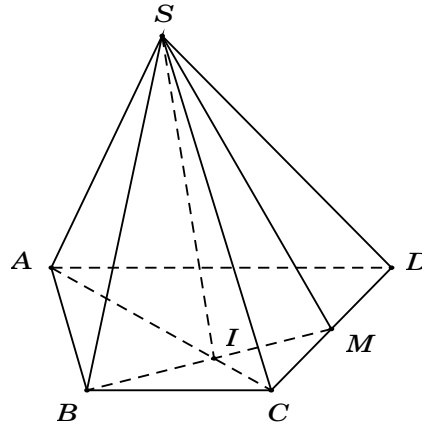
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A. SI (I là giao điểm của AC và BM).
 B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
 C. SO (O là giao điểm của AC và BD).

D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Lời giải

Chọn A



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) .
- Ta có $\begin{cases} I \in BM \subset (SBM) \Rightarrow I \in (SBM) \\ I \in (AC) \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) .

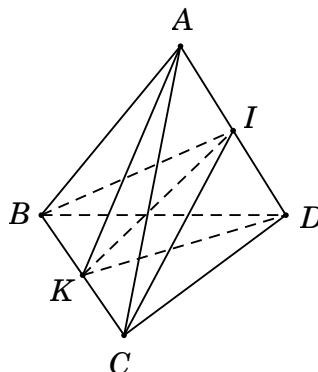
Vậy $(MSB) \cap (SAC) = SI$.

Câu 8: Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

- A. IK . B. BC . C. AK . D. DK .

Lời giải

Chọn A



Điểm K là trung điểm của BC suy ra $K \in (IBC) \Rightarrow IK \subset (IBC)$.

Điểm I là trung điểm của AD suy ra $I \in (KAD) \Rightarrow IK \subset (KAD)$.

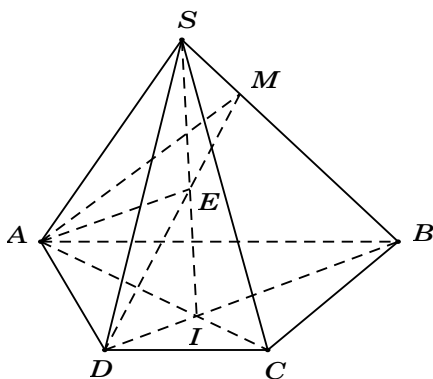
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) là IK .

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Trên cạnh SB lấy điểm M . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SAC) .

- A. SI .
- B. AE (E là giao điểm của DM và SI).
- C. DM .
- D. DE (E là giao điểm của DM và SI).

Lời giải

Chọn B



Ta có A là điểm chung thứ nhất của (ADM) và (SAC) . Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $E = SI \cap DM$.

Ta có:

- $E \in SI$ mà $SI \subset (SAC)$ suy ra $E \in (SAC)$.
- $E \in DM$ mà $DM \subset (ADM)$ suy ra $E \in (ADM)$.

Do đó E là điểm chung thứ hai của (ADM) và (SAC) .

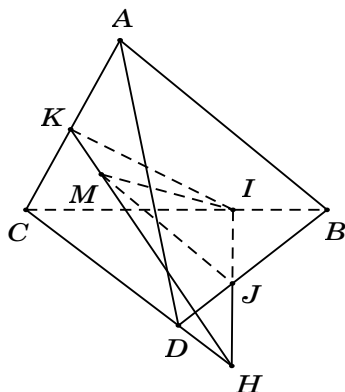
Vậy AE là giao tuyến của (ADM) và (SAC) .

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD . Gọi I và J lần lượt là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD . Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM) là:

- A. KI .
- B. KJ .
- C. MI .
- D. MH .

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (BCD) , IJ cắt CD tại $H \Rightarrow H \in (ACD)$.

Điểm $H \in IJ$ suy ra bốn điểm M, I, J, H đồng phẳng.

Nên trong mặt phẳng (IJM) , MH cắt IJ tại H và $MH \subset (IJM)$.

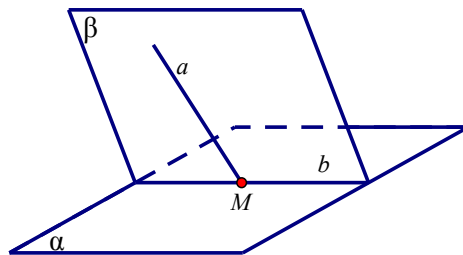
Mặt khác $\begin{cases} M \in (ACD) \\ H \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow MH \subset (ACD)$. Vậy $(ACD) \cap (IJM) = MH$.

Dạng 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng a và mặt phẳng (α) , ta tìm giao điểm của a và một đường thẳng b nằm trong (α) .

$$\left. \begin{array}{l} a \cap b = M \\ b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow M = a \cap (\alpha)$$



Phương pháp:

- Bước 1: Xác định mp (β) chứa a .
- Bước 2: Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Bước 3: Trong (β) : $a \cap b = M$, mà $b \subset (\alpha)$, suy ra $M = a \cap (\alpha)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α) . S là điểm không nằm trên (α) .

- a. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).
- b. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).

c. Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

Giải

a. * Giao tuyến của mặt mp(SAC) và mp(SBD): Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có:

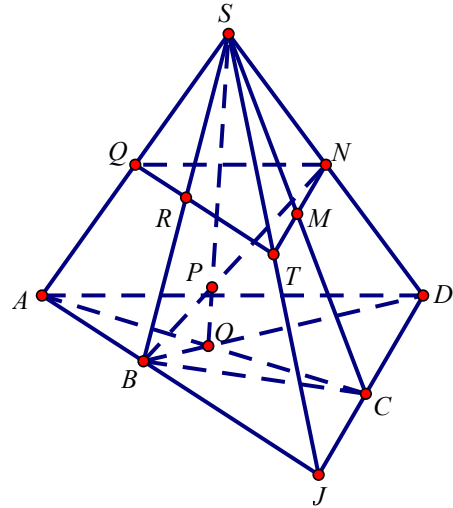
$$\left. \begin{array}{l} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD)$$

Từ (1) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAC) và mp(SBD).

$$\left. \begin{array}{l} O \in AC \\ AC \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \quad \left. \begin{array}{l} O \in BD \\ BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SBD) \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow O \in (SAC) \\ \Rightarrow O \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra O là điểm chung thứ hai của mp(SAC) và mp(SBD).

$$\text{Vậy } SO = (SAC) \cap (SBD).$$



* Giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD): Gọi E là giao điểm của AB và CD. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (3)$$

Từ (3) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAB) và mp(SCD).

$$\left. \begin{array}{l} E \in AB \\ AB \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAB) \quad \left. \begin{array}{l} E \in CD \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SCD) \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow E \in (SAB) \\ \Rightarrow E \in (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \quad (4)$$

Từ (4) suy ra E là điểm chung thứ hai của mp(SAB) và mp(SCD).

$$\text{Vậy: } SE = (SAB) \cap (SCD).$$

b. Trong mp(SBD), hai đường thẳng SO, BN cắt nhau tại P, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} P \in BN \\ P \in SO \subset (SAC) \end{array} \right. \Rightarrow P \in (SAC) \Rightarrow P \text{ là giao điểm của BN và } (SAC).$$

Vậy P là giao điểm cần tìm.

c. Chứng minh bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng:

- Trong mp(SCD), gọi T là giao điểm của MN và SE. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $MN \parallel CD$. Xét tam giác SDE, ta có:

$\left. \begin{array}{l} MN \parallel CD \\ N \text{ là trung điểm của } SD \end{array} \right\} \Rightarrow T \text{ là trung điểm của } SE.$

- Tương tự, QR là đường trung bình của tam giác SAB nên $QR \parallel AB$. Xét tam giác SAE, ta có:

$\left. \begin{array}{l} QR \parallel AB \\ Q \text{ là trung điểm của } SA \end{array} \right\} \Rightarrow QR \text{ đi qua trung điểm } T \text{ của } SE.$

Như vậy, bốn điểm M, N, Q, R nằm trong mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau TN và TQ nên chúng đồng phẳng.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α) , cho tứ giác ABCD. Gọi S là điểm không thuộc (α) , M là điểm nằm trong tam giác SCD.

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).
- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Giải

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD):
Gọi N là giao điểm của SM và CD, gọi E là giao điểm của AN và BD. Rõ ràng $mp(SAM) \equiv mp(SAN)$. Ta có:

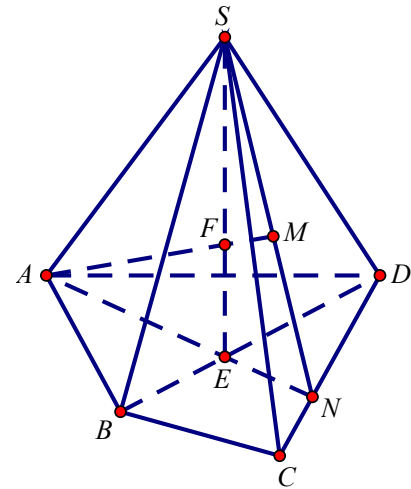
$$\left. \begin{array}{l} E \in AN \Rightarrow E \in (SAM) \\ E \in BD \Rightarrow E \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAM) \cap (SBD) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S \in (SAM) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $SE = (SAM) \cap (SBD)$.

- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD). Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (SAM) \supset AM \\ (SAM) \cap (SBD) = SE \\ F \in AM \cap SE \subset (SAM) \end{array} \right\} \Rightarrow F = AM \cap (SBD)$$



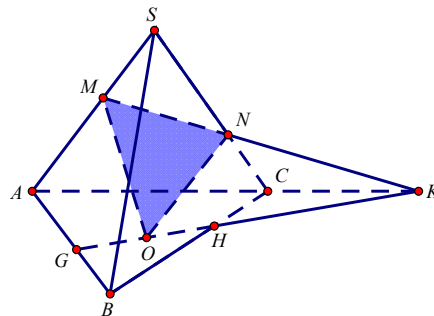
Ví dụ 3. Cho tứ diện SABC. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Giải

Trong mp(SAC): $MN \cap AC = \{K\}$, mà $MN \subset (OMN)$ nên $\{K\} = AC \cap (OMN)$.

Trong mp(ABC): $OK \cap BC = \{H\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{H\} = BC \cap (OMN)$.

Ta có: $OK \cap AB = \{G\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{G\} = AB \cap (OMN)$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

- Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).
- Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

Giải

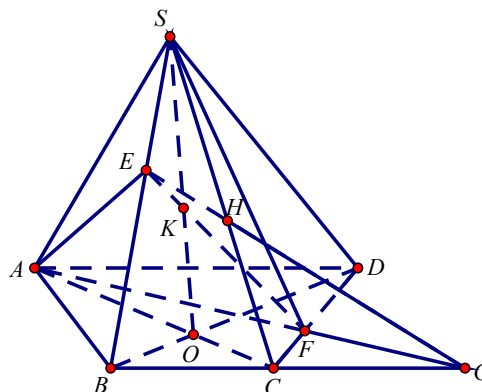
- Ta có $EF \subset (SBF)$.

Trong mp(ABCD): $BF \cap AC = \{O\}$, suy ra $(SAC) \cap (SBF) = SO$.

Trong mp(SBF): $EF \cap SO = \{K\}$, mà $SO \subset (SAC)$, suy ra $\{K\} = EF \cap (SAC)$.

- Trong mp(ABCD): $AF \cap BC = \{G\}$, mà $AF \subset (AEF)$, suy ra $\{G\} = BC \cap (AEF)$.

Khi đó: $(AEF) \equiv (AEG)$.



Trong mp(SBC): $EG \cap SC = \{H\}$, mà $EG \subset (AEF)$, suy ra $\{H\} = SC \cap (AEF)$.

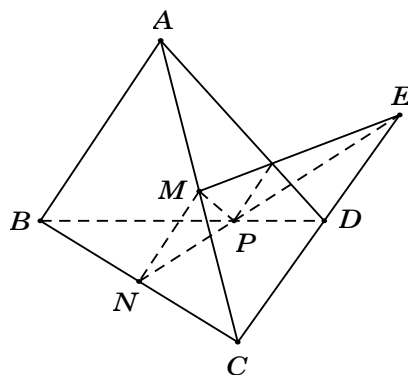
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- A.** CD và NP . **B.** CD và MN . **C.** CD và MP . **D.** CD và AP .

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét mặt phẳng BCD chứa CD . Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E .

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$. Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E .

Cách 2. Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

Vậy giao điểm của CD và $mp(MNP)$ là giao điểm E của NP và CD .

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là:

A. điểm F .

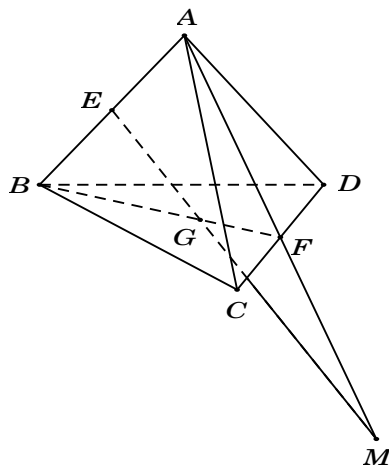
B. giao điểm của đường thẳng EG và AF .

C. giao điểm của đường thẳng EG và AC .

D. giao điểm của đường thẳng EG và CD .

Lời giải

Chọn B



Vì G là trọng tâm tam giác BCD , F là trung điểm của $CD \Rightarrow G \in (ABF)$.

Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow E \in (ABF)$.

Gọi M là giao điểm của EG và AF mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.

Vậy giao điểm của EG và $mp(ACD)$ là giao điểm $M = EG \cap AF$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD) . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$.

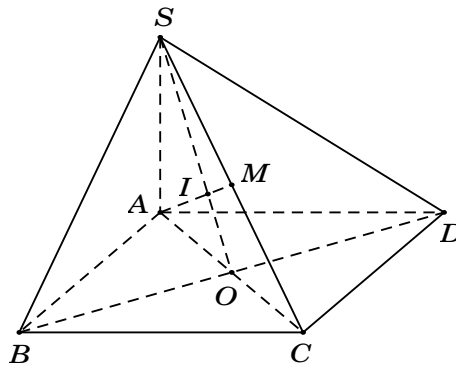
B. $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IM}$.

C. $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM}$.

D. $IA = 2,5IM$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm của AC .

Nối AM cắt SO tại I mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $I = AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có M, O lần lượt là trung điểm của SC, AC .

Mà $I = AM \cap SO$ suy ra I là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM \Leftrightarrow IA = 2IM$.

Điểm I nằm giữa A và M suy ra $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{IM}$.

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là:

A. giao điểm của SD và AB .

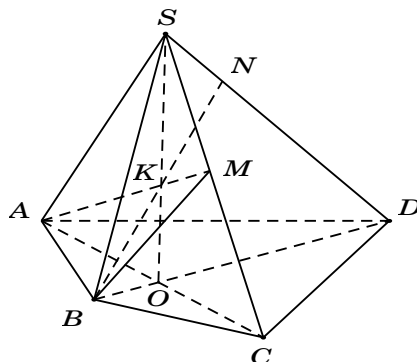
B. giao điểm của SD và AM .

C. giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).

D. giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Lời giải

Chọn C



- Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM) .

Ta có B là điểm chung thứ nhất của (SBD) và (ABM) .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $K = AM \cap SO$.

Ta có:

- $K \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $K \in (SBD)$.
- $K \in AM$ mà $AM \subset (ABM)$ suy ra $K \in (ABM)$.

Suy ra K là điểm chung thứ hai của (SBD) và (ABM) .

Do đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.

- Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $N = SD \cap BK$. Ta có:

- $N \in BK$ mà $BK \subset (ABM)$ suy ra $N \in (ABM)$.
- $N \in SD$.

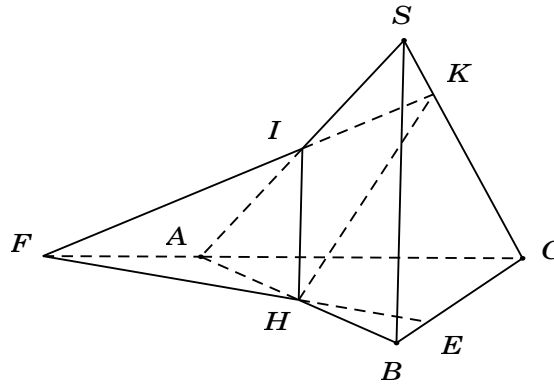
Vậy $N = SD \cap (ABM)$.

Câu 5: Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với AC (K không trùng với các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK) . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. E nằm ngoài đoạn BC về phía B . B. E nằm ngoài đoạn BC về phía C .
- C. E nằm trong đoạn BC . D. E nằm trong đoạn BC và $E \neq B, E \neq C$.

Lời giải

Chọn D



- Chọn mặt phẳng phụ (ABC) chứa BC .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (IHK) .

Ta có H là điểm chung thứ nhất của (ABC) và (IHK) .

Trong mặt phẳng (SAC) , do IK không song song với AC nên gọi $F = IK \cap AC$. Ta có

- $F \in AC$ mà $AC \subset (ABC)$ suy ra $F \in (ABC)$.
- $F \in IK$ mà $IK \subset (IHK)$ suy ra $F \in (IHK)$.

Suy ra F là điểm chung thứ hai của (ABC) và (IHK) .

Do đó $(ABC) \cap (IHK) = HF$.

- Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = HF \cap BC$. Ta có
- $E \in HF$ mà $HF \subset (IHK)$ suy ra $E \in (IHK)$.
- $E \in BC$.

Vậy $E = BC \cap (IHK)$.

Dạng 4. Thiết diện

1. Phương pháp

Tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt cắt với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm. Mỗi đoạn giao tuyến là cạnh của thiết diện.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P là ba điểm nằm trên AB, BC, SO . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) .

Giải

Trong mp(ABCD):

$$\begin{cases} MN \cap AD = \{E\} \\ MN \cap CD = \{F\} \\ NO \cap AD = \{K\} \end{cases}$$

Trong mp(SKN): $NP \cap SK = \{Q\}$.

Trong mp(SAD):

$$\begin{cases} EQ \cap SA = \{G\} \\ EQ \cap SD = \{H\} \end{cases}$$

Khi đó: $(MNP) \equiv (HEF)$

Trong mp(SCD): $HF \cap SC = \{R\}$.

Vậy ta có các đoạn giao tuyến do mp(MNP) cắt các mặt của hình chóp là:

$$\begin{aligned} (MNP) \cap (ABCD) &= MN; & (MNP) \cap (SAD) &= GH; & (MNP) \cap (SAB) &= MG; \\ (MNP) \cap (SCD) &= HR; & (MNP) \cap (SBC) &= RN. \end{aligned}$$

Do đó thiết diện cần tìm là ngũ giác MNRHG.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là một điểm trên cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (AMD).

Giải

Trong mp(ABCD): $AB \cap CD = \{E\}$.

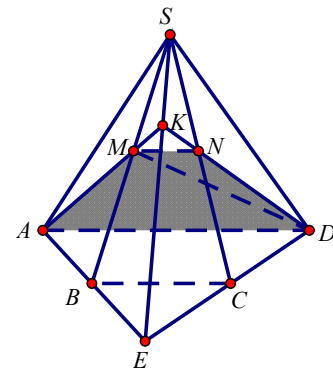
Trong mp(SAB): $AM \cap SE = \{K\}$.

Do đó $mp(AMD) \equiv mp(AKD)$.

Trong mp(SCD): $KD \cap SC = \{N\}$

Do đó $MN = (AMD) \cap (SBC)$, $ND = (AMD) \cap (SCD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác AMND.



Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, E là một điểm trên cạnh BC, F là một điểm trên cạnh SD.

- Tìm giao điểm K của BF và mp(SAC).
- Tìm giao điểm J của EF và mp(SAC).
- Chứng minh ba điểm C, K, J thẳng hàng.
- Xác định thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (BCF).

Giải

a. Ta có: $BF \subset (SBD)$.

Trong mp(ABCD): $AC \cap BD = \{O\}$

Do đó $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Trong mp(SBD): $BF \cap SO = \{K\}$

Do đó $\{K\} = BF \cap (SAC)$.

b. Ta có $EF \subset (SED)$

Trong mp(ABCD): $AC \cap ED = \{H\}$

Trong mp(SED): $EF \cap SH = \{J\}$

Mà $SH \subset (SAC)$ nên $\{J\} = EF \cap (SAC)$.

c. Ta có:

$$\begin{cases} \{K\} = BF \cap (SAC) \\ \{J\} = EF \cap (SAC) \\ BF \subset (BCF), EF \subset (BCF) \end{cases} \Rightarrow K, J \in (BCF) \cap (SAC)$$

Mà $C \in (BCF) \cap (SAC)$, nên K, J, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng (BCF) và (SAC), suy ra chúng thẳng hàng.

d. Trong mp(SAC): $CK \cap SA = \{G\}$, suy ra $mp(BCF) \equiv mp(BCFG)$.

Vậy ta có các đoạn giao tuyến của mp(BCF) với các mặt của hình chóp là: $BG = (BCF) \cap (SAB)$, $GF = (BCF) \cap (SAD)$, $FC = (BCF) \cap (SCD)$.

Do đó thiết diện cần tìm là tứ giác BCFG.

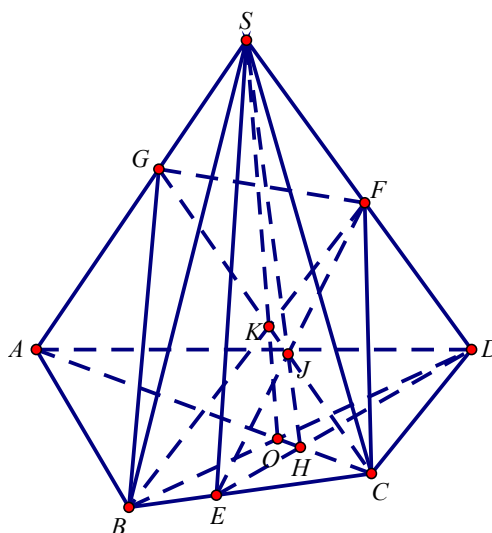
Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AD; G là trọng tâm tam giác SAD. Đường thẳng BN cắt CD tại K.

a. Chứng minh ba điểm M, G, K thẳng hàng.

b. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MCG).

Tính tỉ số mà thiết diện chia đoạn SA. Từ đó cho biết thiết diện là hình gì?

Giải



a. Ta có SN là đường trung tuyến của tam giác SAD.

G là trọng tâm của tam giác SAD nên:

$$\frac{SG}{SN} = \frac{2}{3}.$$

Xét tam giác BCK có: $ND \parallel BC$ và $ND = \frac{1}{2}BC$ (do N là trung điểm của AD) nên SN là đường trung tuyến của tam giác SBK. Mà $\frac{SG}{SN} = \frac{2}{3}$ nên G cũng là trọng tâm của tam giác SBK.

Ta lại có MK là đường trung tuyến của tam giác SBK. Do đó KM đi qua trọng tâm G.

Vậy ba điểm M, G, K thẳng hàng.

b. Do ba điểm M, G, K thẳng hàng nên $mp(MCG) \equiv mp(MCK)$, suy ra $CD \subset (MCG)$ và $DG \subset (MCG)$.

Trong $mp(SAD)$: $DG \cap SA = \{Q\}$, suy ra $DQ = (MCG) \cap (SAD)$ và $MQ = (MCG) \cap (SAB)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MCDQ.

Vì G là trọng tâm tam giác SAD nên DG là đường trung tuyến của tam giác SAD. Do đó Q là trung điểm của SA.

Vậy thiết diện chia đoạn SA theo tỉ số $\frac{QS}{QA} = 1$.

Như vậy MQ là đường trung bình của tam giác SAB.

Do đó $MQ \parallel AB$, mà $AB \parallel CD$ nên $MQ \parallel CD$.

Vậy thiết diện MCDQ là hình thang.

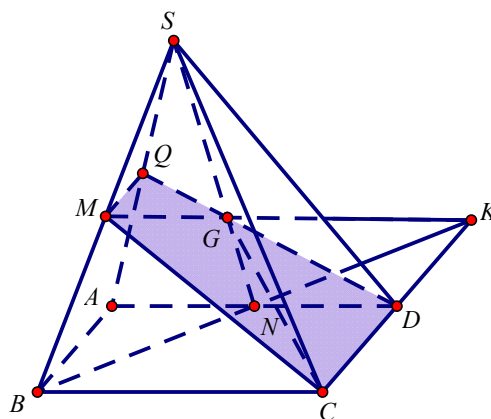
3. Bài tập trắc nghiệm

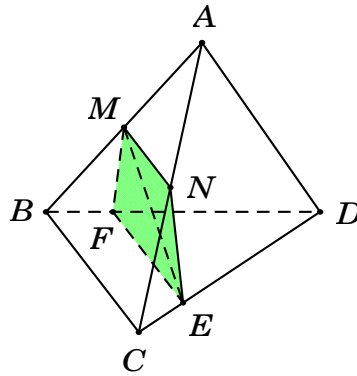
Câu 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD là:

- A. Tam giác MNE.
- B. Tứ giác MNEF với F là điểm bất kì trên cạnh BD.
- C. Hình bình hành MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
- D. Hình thang MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải

Chọn D





Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF \parallel BC$.

Do đó $MN \parallel EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD . Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.
 $HK \parallel MN$.

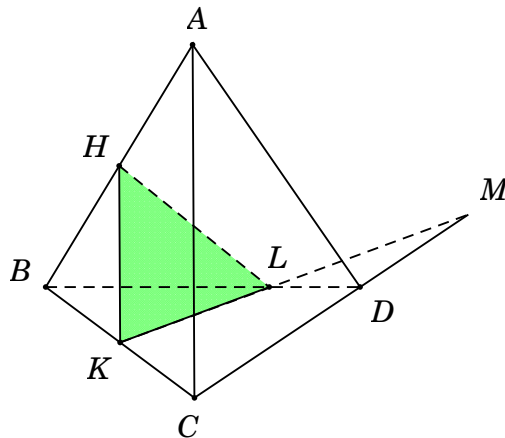
B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và
 $HK \parallel MN$.

C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.

D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải

Chọn C



Ta có HK, KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD) .

Trong mặt phẳng (BCD) , do KM không song song với BD nên gọi $L = KM \cap BD$.

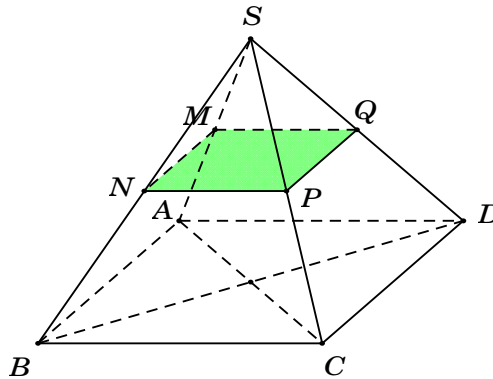
Vậy thiết diện là tam giác HKL .

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a ($a > 0$). Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

- A. a^2 . B. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{4}$. D. $\frac{a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi Q là trung điểm của SD .

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ \parallel AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP \parallel BC$.

Mặt khác $AD \parallel BC$ suy ra $MQ \parallel NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với $mp(MNP)$.

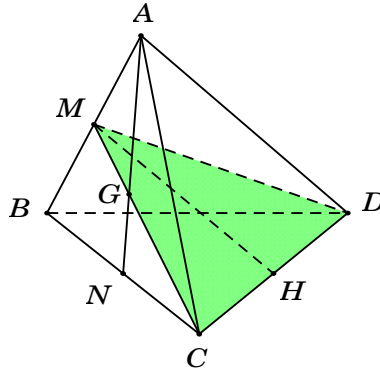
Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{a^2}{4}$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G$.

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M .

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD$.

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot CD$

Với $MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 5: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC ; P là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$.

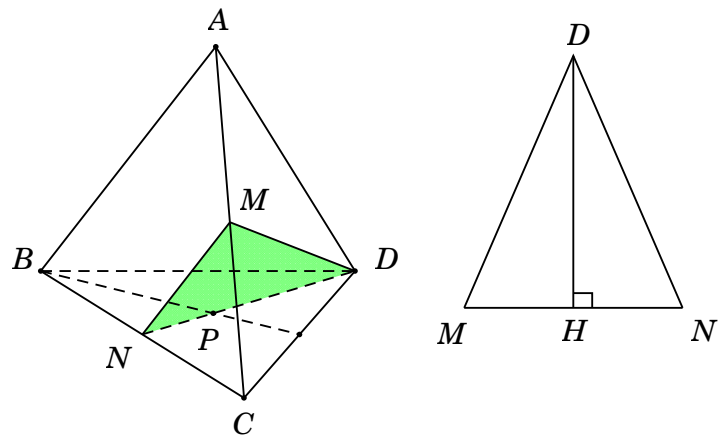
B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC . Suy ra N, P, D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND .

Xét tam giác MND , ta có $MN = \frac{AB}{2} = a$; $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó tam giác MND cân tại D .

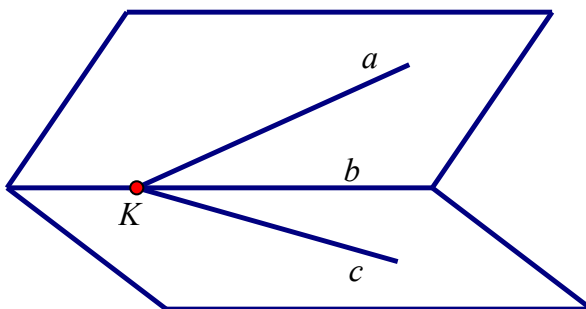
Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH \perp MN$.

Diện tích tam giác $S_{\triangle MND} = \frac{1}{2}MN \cdot DH = \frac{1}{2}MN \cdot \sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

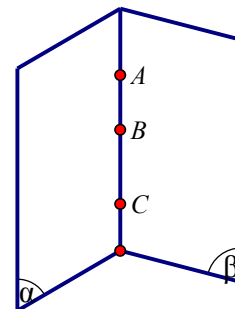
Dạng 5. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy

1. Phương pháp

- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau và giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ 3 (Hình a).
- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (Hình b).



Hình a.



Hình b.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Gọi a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) ; A là điểm không nằm trên cả hai mặt phẳng này; C và D là hai điểm nằm trên (P) . Gọi E là giao điểm của a với CD ; F và G lần lượt là giao điểm của AC , AD với (Q) . Chứng minh rằng ba điểm E , F và G thẳng hàng.

Giải

Ta thấy D và C thuộc $mp(P)$, A không thuộc $mp(P)$ nên A , C và D không thẳng hàng. Do đó, tồn tại mặt phẳng (ACD) . Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} F \in AC \Rightarrow F \in (ACD) \\ F \in (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow F \in (ACD) \cap (Q) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} G \in AD \Rightarrow G \in (ACD) \\ G \in (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow G \in (ACD) \cap (Q) \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} E \in CD \Rightarrow E \in (ACD) \\ E \in a \subset (Q) \Rightarrow E \in (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (ACD) \cap (Q) \quad (3)$$

Như vậy, F , G , E nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (Q) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho ba đường thẳng a , b , c không cùng nằm trong một mặt phẳng, sao cho chúng đôi một cắt nhau. Chứng minh chúng đồng quy.

Giải

Theo giả thiết a và b cắt nhau, giả sử tại O .

Ta chứng minh O thuộc c .

Do a và c cắt nhau nên tồn tại $mp(a,c)$.

Do b và c cắt nhau nên tồn tại $mp(b,c)$. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} O \in a \Rightarrow O \in (a,c) \\ O \in b \Rightarrow O \in (b,c) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (a,c) \cap (b,c)$$

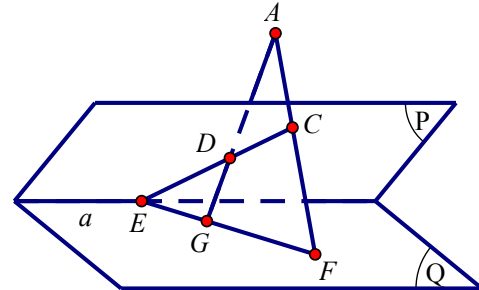
Mà $(a,c) \cap (b,c) = c$ nên $O \in c$.

Vậy ba đường thẳng a , b , c đồng quy tại O .

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, AC và BD cắt nhau tại O . Một mặt phẳng cắt các cạnh SA , SB , SC , SD lần lượt tại A' , B' , C' , D' . Giả sử AD cắt BC tại E ; $A'D'$ cắt $B'C'$ tại E' . Chứng minh:

- S , E , E' thẳng hàng.
- $A'C'$, $B'D'$, SO đồng quy.

Giải

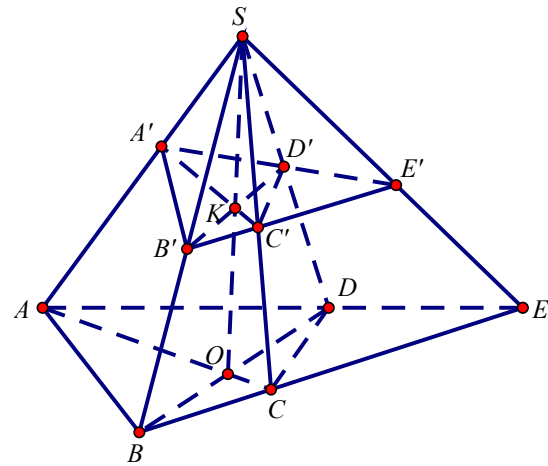


$$a. \begin{cases} BC \cap AD = \{E\} \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow E \in (SBC) \cap (SAD) \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} B'C' \cap A'D' = \{E'\} \\ B'C' \subset (SB'C') \Rightarrow E' \in (SB'C') \cap (SA'D') \\ A'D' \subset (SA'D') \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Mà } S \in (SBC) \cap (SAD) \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2), (3) ta có ba điểm S, E, E' cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD). Do đó ba điểm đó thẳng hàng.



b. Trong mp(A'B'C'D'):

$$\begin{cases} A'C' \cap B'D' = \{K\} \\ A'C' \subset (SAC) \\ B'D' \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD) \quad (i)$$

Mà $(SAC) \cap (SBD) = SO$ (ii) nên từ (i), (ii) suy ra $K \in SO$.

Vậy ba đường thẳng SO, A'C', B'D' đồng quy.

Ví dụ 4. Cho tứ diện SABC. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SB, SC và AB, sao cho IJ không song song với BC, IK không song song với SA.

a. Tìm giao điểm D của (IJK) và BC.

b. Gọi E là giao điểm của DK và AC. Chứng minh ba đường thẳng SA, KI, EJ đồng quy.

Giải

a. Trong mp(SBC): $IJ \cap BC = \{D\}$ (do IJ không song song với BC).

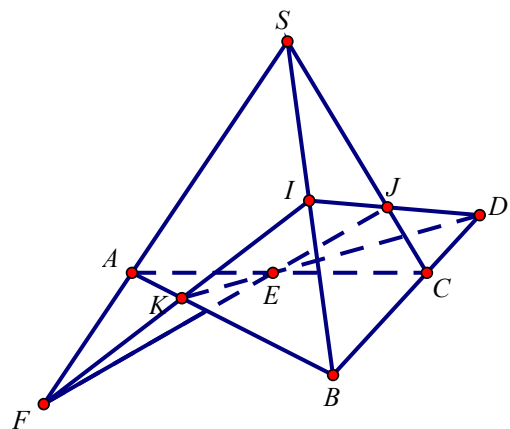
Mà $IJ \subset (IJK)$ nên $D = (IJK) \cap BC$.

b. Ta có IK không song song với SA nên trong mp(ABC): $IK \cap SA = \{F\}$.

Ta có:

$$\begin{cases} IK \cap SA = \{F\} \\ IK \subset (IJK), SA \subset (SAC) \\ EJ = (IJK) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow F \in EJ.$$

Vậy ba đường thẳng SA, IK, EJ đồng quy.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang. Gọi O là giao điểm của AC và BD , K là một điểm trên cạnh SD .

- Tìm giao điểm E của mặt phẳng (ABK) với CD .
- Tìm giao điểm F của mặt phẳng (ABK) với SC .
- Chứng minh các đường thẳng AF , BK và SO đồng quy.

Giải

- Trong $mp(ABCD)$: $AB \cap CD = \{E\}$.

Mà $AB \subset (ABK)$ nên $E \in (ABK) \cap CD$.

- Ta có: $(ABK) \equiv (AEK)$

Trong $mp(SCD)$: $EK \cap SC = \{F\}$.

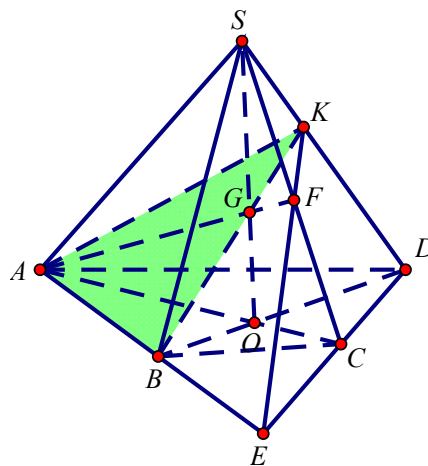
Mà $EK \subset (ABK)$ nên $F \in (ABK) \cap SC$.

- Trong $mp(ABK)$: $AF \cap BK = \{G\}$.

Mà $AF \subset (SAC)$, $BK \subset (SBD)$

nên $G \in (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Vậy ba đường thẳng AF , BK và SO đồng quy.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD , BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I , A , C .

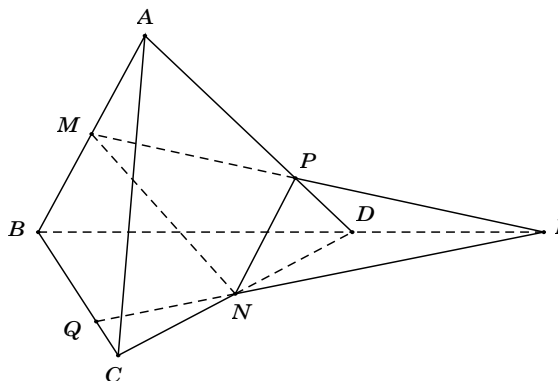
B. I , B , D .

C. I , A , B .

D. I , C , D .

Lời giải

Chọn B



Ta có $(ABD) \cap (BCD) = BD$.

Lại có $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

$\Rightarrow I \in BD \Rightarrow I, B, D$ thẳng hàng.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. K, I, J .

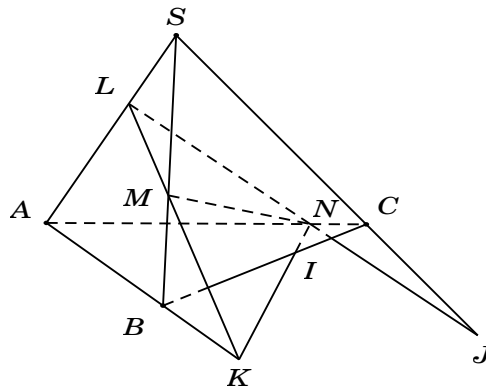
B. M, I, J .

C. N, I, J .

D. M, K, J .

Lời giải

Chọn B



Ta có

- $M \in SB$ suy M là điểm chung của (LMN) và (SBC) .
- I là điểm chung của (LMN) và (SBC) .
- J là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

Vậy M, I, J thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC) .

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$.

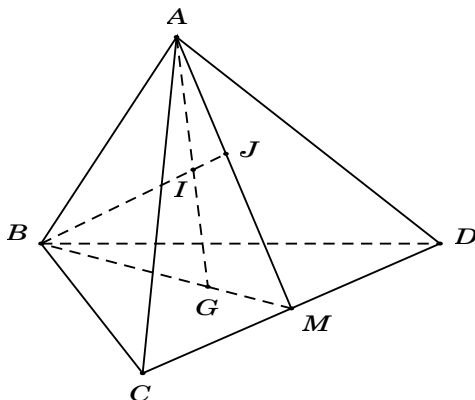
B. A, J, M thẳng hàng.

C. J là trung điểm của AM .

D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

Do $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM \longrightarrow$ A đúng.

Ta có $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$ đồng phẳng.

$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$ thẳng hàng $\longrightarrow$ B đúng.

Ta có $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ) \longrightarrow$ D đúng.

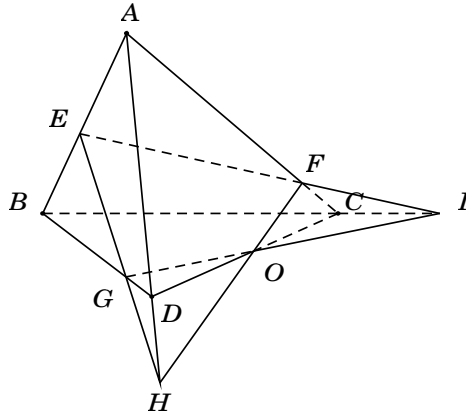
Điểm I di động trên AG nên J có thể không phải là trung điểm của AM
 $\longrightarrow$ C sai.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I , EG cắt AD tại H . Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

A. CD, EF, EG . B. CD, IG, HF . C. AB, IG, HF . D. AC, IG, BD .

Lời giải

Chọn B



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) ; đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β) .

Gọi $O = HF \cap IG$. Ta có

- $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.
- $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$.

Do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mà $(ACD) \cap (BCD) = CD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in CD$.

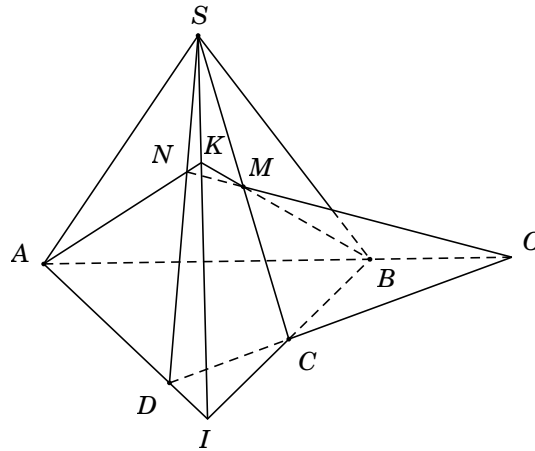
Vậy ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.
- B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.
- C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.
- D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = AD \cap BC$. Trong mặt phẳng (SBC) , gọi $K = BM \cap SI$. Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $N = AK \cap SD$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) .

Gọi $O = AB \cap CD$. Ta có:

- $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.
- $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra $O \in (SCD)$.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$. (1)

Mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng AB , CD , MN đồng quy.

Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng.

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả:
$$\left. \begin{array}{l} I = a \cap b \\ a \subset (P), b \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array} \right\} \Rightarrow I \in c$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K là trung điểm của cạnh BC , H là một điểm cố định trên cạnh AC . Mặt phẳng (P) di động chứa HK , cắt các cạnh BD và AD lần lượt tại M và N .

- Giả sử cho trước điểm M không là trung điểm của BD , hãy xác định điểm N .
- Tìm tập hợp giao điểm I của hai đường HM và KN khi M di động trên cạnh BD .

Giải

a. Trong mp(BCD): $KM \cap CD = \{E\}$.

Trong mp(ACD): $HE \cap AD = \{N\}$.

Mà $HE \subset (P)$ nên $N = AD \cap (P)$ là điểm cần tìm.

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} I = HM \cap KN \\ HM \subset (HBD) \\ KN \subset (AKD) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in (HBD) \cap (AKD) \quad (1)$$

Trong mp(ABC): $BH \cap AK = \{F\}$

$$\Rightarrow F \in (HBD) \cap (AKD)$$

$$\text{Mà } D \in (HBD) \cap (AKD), \text{ nên } DF = (HBD) \cap (AKD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra I chạy trên đường thẳng cố định DF.

Giới hạn:

Cho $M \rightarrow D$ thì $N \rightarrow D$. Khi đó $I \rightarrow D$.

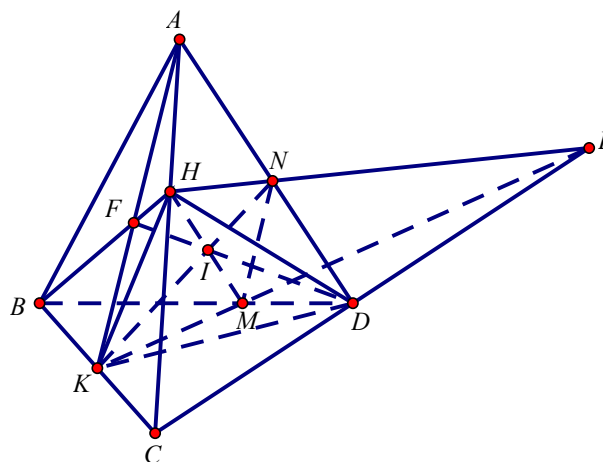
Cho $M \rightarrow B$ thì $N \rightarrow A$. Khi đó $I \rightarrow F$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn DF.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và AC, sao cho MN không song song với BC. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

- Chứng minh EF luôn đi qua điểm cố định.
- Tìm tập hợp giao điểm của ME và NF.
- Tìm tập hợp giao điểm của MF và NE.

Giải



a. Trong $mp(ABC)$: $MN \cap BC = K$.

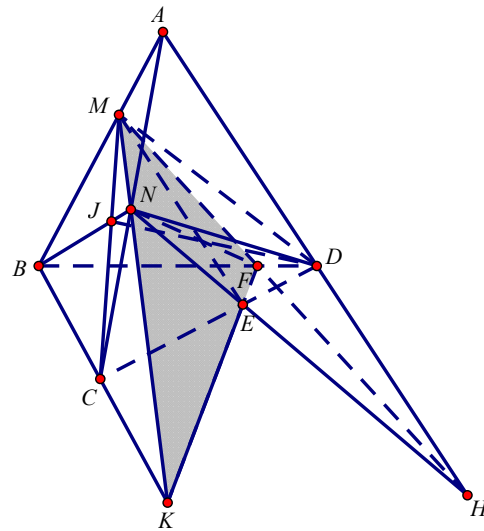
Khi đó K là điểm chung của (BCD) và (P) , mà EF là giao tuyến của (BCD) và (P) nên EF đi qua điểm K cố định.

b. Gọi I là giao điểm của ME và NF thì I là điểm chung của (NBD) và (MCD) , suy ra I thuộc giao tuyến DJ của $mp(MCD)$ và (NBD) .

Giới hạn: Tập hợp cần tìm là đoạn DJ .

c. Gọi H là giao điểm của MF và NE thì H là điểm chung của (ABD) và (ACD) , suy ra H thuộc giao tuyến AD của $mp(ABD)$ và $mp(ACD)$.

Giới hạn: Tập hợp điểm cần tìm là đường thẳng AD trừ đi đoạn AD .



BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng a và b . Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của hai đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. Hai đường thẳng song song: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là

$$a \parallel b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (P); b \subset (P) \\ a \cap b = \emptyset \end{cases}.$$

b. Hai đường thẳng cắt nhau: chỉ có một điểm chung.

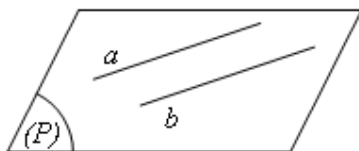
a cắt b khi và chỉ khi $a \cap b = I$.

c. Hai đường thẳng trùng nhau: có hai điểm chung phân biệt.

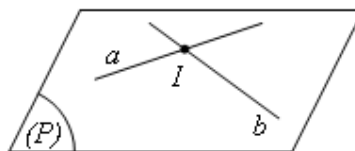
$$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b.$$

d. Hai đường thẳng chéo nhau: không cùng thuộc một mặt phẳng.

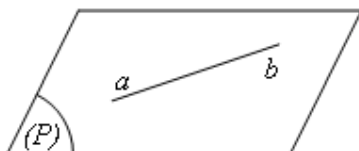
a chéo b khi và chỉ khi a, b không đồng phẳng.



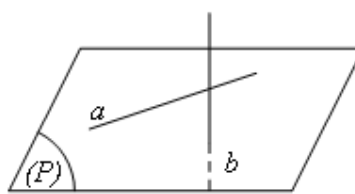
a song song với b



a cắt b tại giao điểm I



a và b cắt nhau tại vô số điểm (trùng)



a và b chéo nhau

2. Hai đường thẳng song song

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý (về giao tuyến của hai mặt phẳng): Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Lời giải

Chọn A

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
- B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
- C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
- D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Lời giải

Chọn D

- A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.
- B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
- B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
- D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Lời giải

Chọn B

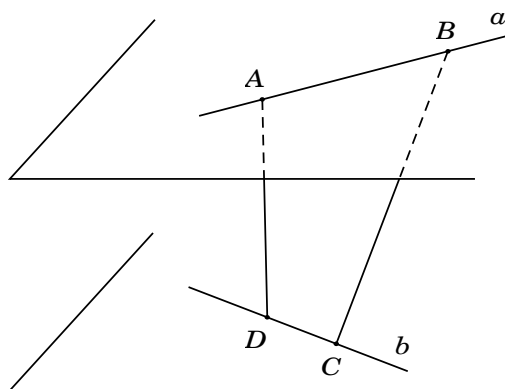
- A sai. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không có điểm chung.
- C sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.
- D sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó song song.

Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây **đúng** khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?

- A. Có thể song song hoặc cắt nhau.
- B. Cắt nhau.
- C. Song song với nhau.
- D. Chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow a$ và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

- Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a; b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I .
- Nếu $AD \parallel BC \Rightarrow a$ và b đồng phẳng (Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α) , (β) , (γ) có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$; $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$; $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 :

- A. Đôi một cắt nhau.
- B. Đôi một song song.

C. Đồng quy.

D. Đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải

Chọn D

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c , biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c :

A. Trùng nhau hoặc chéo nhau.

B. Cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Chéo nhau hoặc song song.

D. Song song hoặc trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Nếu $a \parallel c$ thì $b \parallel c$.

B. Nếu c cắt a thì c cắt b .

C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b .

Lời giải

Chọn B

Nếu c cắt a thì c cắt b hoặc c chéo b .

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b . Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b ?

A. 1.

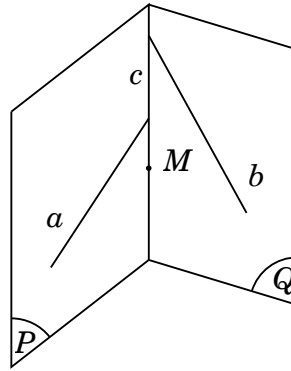
B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A



Gọi (P) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng a và M ; (Q) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng b và M .

Giả sử c là đường thẳng qua M cắt cả a và b .

$$\Rightarrow \begin{cases} c \in (P) \\ c \in (Q) \end{cases} \Rightarrow c = (P) \cap (Q).$$

Vậy chỉ có 1 đường thẳng qua M cắt cả a và b .

Câu 10: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là điểm bất kì nằm trên a .

Giả sử d là đường thẳng qua M cắt cả b và c . Khi đó, d là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi M và b với mặt phẳng tạo bởi M và c .

Với mỗi điểm M ta được một đường thẳng d .

Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c .

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song

1. Phương pháp

Cách 1. (Dùng định nghĩa) chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.

Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng.

Cách 3. Dùng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh ba đoạn nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Giải

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, CD, AD, BC, AC, BD. Ta cần chứng minh các đoạn MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của chúng.

Ta có:

MP là đường trung bình của $\triangle ABD$ nên

$$MP \parallel BD \text{ và } MP = \frac{1}{2}BD \quad (1)$$

NQ là đường trung bình của $\triangle BCD$ nên

$$NQ \parallel BD \text{ và } NQ = \frac{1}{2}BD \quad (2)$$

Vậy tứ giác MPNQ là hình bình hành.

Gọi G là giao điểm của hai đường chéo MN và PQ. Khi đó ta có G là trung điểm của MN và PQ.

Tương tự ta chứng minh được tứ giác PSQR là hình bình hành. Suy ra trung điểm G của đường chéo PQ cũng là trung điểm của đường chéo RS.

Vậy ba đoạn MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đường.

Chú ý: Điểm G nói trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD; E là một điểm trên cạnh AD nhưng không trùng với A và D.

- Xác định thiết diện của tứ diện với mp(IJE).
- Xác định vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện đó là hình bình hành.
- Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện đó là hình thoi.

Giải

- Xác định thiết diện của tứ diện với mp(IJE): Ta có IJ là đường trung bình của $\triangle BCD$ nên: $IJ \parallel CD$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} IJ \subset (IJE) \\ CD \subset (ACD) \\ IJ \parallel CD \\ E \in (IJE) \cap (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow (IJE) \cap (ACD) = EF \parallel IJ (F \in AC) \quad (2)$$

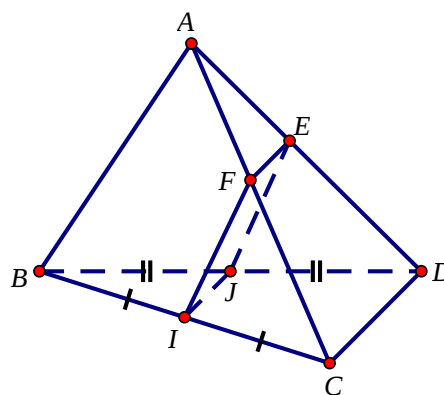
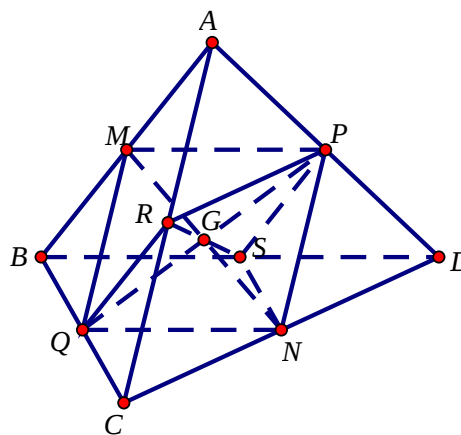
Như vậy, mp(IJE) cắt các mặt của tứ diện theo các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau IJ, JE, EF và FI, nên thiết diện cần tìm là tứ giác IJEF có $EF \parallel IJ$ (theo (2)) nên thiết diện này là hình thang.

- Xác định vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành: IJEF là hình bình hành khi và chỉ khi $JE \parallel IF \parallel AB$, tức là E là trung điểm của AD.
- Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD để thiết diện là hình thoi: IJEF là hình thoi khi và chỉ khi IJEF là hình bình hành và $IJ = JE$, tức là E là trung điểm của AD và $AB = CD$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, AD, SD, SC sao cho $EH \parallel SB$, $EF \parallel AB$, $GH \parallel CD$.

- Chứng minh 4 điểm E, F, G, H đồng phẳng.
- Chứng minh $GF \parallel SA$.
- Gọi I là giao điểm của EH và FG. Chứng minh rằng khi E di động trên BC thì I chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải



a. Chứng minh 4 điểm E, F, G, H đồng phẳng. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel CD \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } GH \parallel CD \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } EF \parallel GH \quad (3)$$

(3) chứng tỏ tồn tại duy nhất mặt phẳng qua hai đường thẳng song song EF và GH. Vậy bốn điểm E, F, G, H đồng phẳng (cùng thuộc $\text{mp}(EF, GH)$).

b. Chứng minh $GF \parallel SA$:

$$\Delta SCD \text{ có } GH \parallel CD \text{ nên: } \frac{DG}{DS} = \frac{CH}{CS} \quad (4)$$

$$\Delta CBS \text{ có } EH \parallel SB \text{ nên: } \frac{CH}{CS} = \frac{CE}{CB} \quad (5)$$

$$\text{Hình bình hành } ABCD \text{ có } EF \parallel AB \parallel CD \text{ nên: } \frac{CE}{CB} = \frac{DF}{DA} \quad (6)$$

$$\text{Từ (4), (5), (6) suy ra: } \frac{DG}{DS} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow GF \parallel SA.$$

c. Chứng minh I chạy trên đường thẳng cố định. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} I \in EH \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SBC) \\ I \in FG \subset (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in (SBC) \cap (SAD)$$

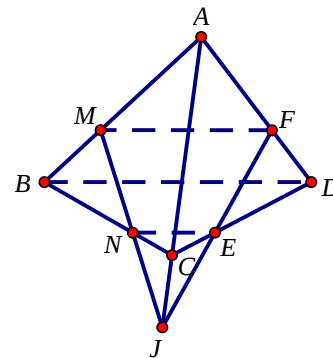
Điều này chứng tỏ I chạy trên giao tuyến cố định Sx của hai mặt phẳng cố định (SBC) và (SAD) khi E chạy trên BC.

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Giả sử MN cắt EF. Chứng minh rằng MN, AC và EF đồng quy.

Giải

Vì MN cắt EF nên bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

Giả sử MN cắt EF tại J. Áp dụng định lý 3 (định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng) cho ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và (NJF), ta có ba giao tuyến MN, AJ và EF đồng quy tại J.



Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD; E là trung điểm của cạnh BC.

a. Chứng minh $MN \parallel BD$.

b. Xác định thiết diện của hình chóp với $\text{mp}(MNE)$.

c. Gọi H và L lần lượt là các giao điểm của $\text{mp}(MNE)$ với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng $LH \parallel BD$.

Giải

a. Chứng minh $MN \parallel BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và AD. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} M \in SP, N \in SQ \\ \frac{PM}{PS} = \frac{QN}{QS} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)} \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel PQ \quad (1)$$

Mặt khác: PQ là đường trung bình của $\triangle ABD$ nên:
 $PQ \parallel BD \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $MN \parallel BD$.

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(MNE).

Theo hệ quả của định lý 3, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (ABCD) \\ MN \parallel BD \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (ABCD) \cap (MNE) = EK \parallel MN \parallel BD \quad (K \in CD)$$

Trong mp(ABCD), gọi $I = AB \cap EK$.

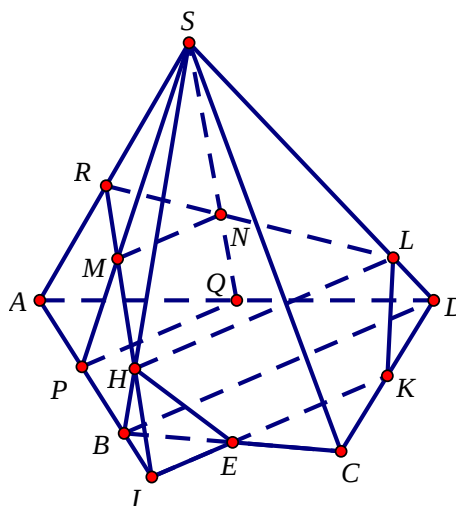
Trong mp(SAB), gọi $R = IM \cap SA, H = IM \cap SB$.

Trong mp(SAD), gọi $L = RN \cap SD$.

Như vậy, mp(MNE) cắt các mặt (ABCD), (SBC), (SAB), (SAD), (SCD) lần lượt theo các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau KE, EH, HR, RL, LK. Do đó thiết diện cần tìm là ngũ giác KEHRL.

c. Chứng minh $LH \parallel BD$:

$$\left. \begin{array}{l} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (SBD) \\ MN \parallel BD \\ (SBD) \cap (MNE) = HL \end{array} \right\} \Rightarrow LH \parallel BD.$$



Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cách 1. Tìm hai điểm chung phân biệt (đã đề cập ở bài 1).

Cách 2. (Dùng hệ quả định lý về giao tuyến của hai mặt phẳng).

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ a \subset (P), b \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array} \right\} \Rightarrow c \parallel a \parallel b$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện SABC. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB, G là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

- (SAC) và (EFG).
- (SAC) và (EFG).

Giải

- Ta có: EF là đường trung bình của tam giác SAB
 $\Rightarrow EF \parallel SA$

Mà

$$\left. \begin{array}{l} EF \subset (EFC), SA \subset (SAC) \\ C \in (EFC) \cap (SAC) \end{array} \right\}$$

Suy ra $(EFC) \cap (SAC) = Cx \parallel EF \parallel SA$

b. Ta có: $EF \parallel SA$

Mà

$$\left. \begin{array}{l} EF \subset (EFG), SA \subset (SAC) \\ G \in (EFG) \cap (SAC) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow (EFG) \cap (SAC) = Gy \parallel EF \parallel SA$

Trong mp(SAC): Gy cắt SC tại H. Vậy $GH = (EFG) \cap (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SB, P là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

- (SBC) và (SAD).
- (SAB) và (SCD).
- (MNP) và (ABCD).

Giải

a. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD$.

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sy \parallel AB \parallel CD$.

c. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AB \\ MN \subset (MNP), AB \subset (ABCD) \\ P \in (MNP) \cap (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow (MNP) \cap (ABCD) = PQ \parallel AB \parallel MN (Q \in AD).$$

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi G và J lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và tam giác ACD.

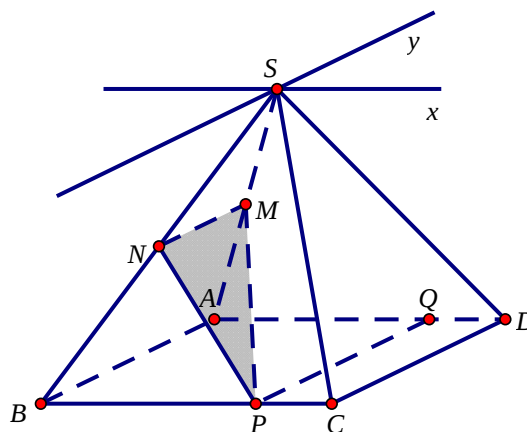
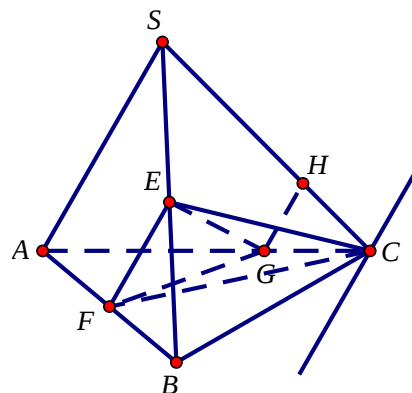
- Chứng minh $GJ \parallel AB$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (GJD).

Giải

a. Gọi K là trung điểm của CD.

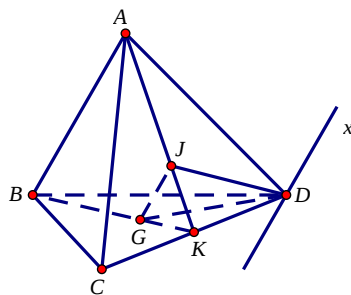
Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có:

$$\frac{KG}{KB} = \frac{KJ}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GJ \parallel AB.$$



b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} GJ \parallel AB \\ GJ \subset (GJD), AB \subset (ABD) \\ D \in (GJD) \cap (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow (GJD) \cap (ABD) = Dx \parallel AB \parallel GJ$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O và I là một điểm trên đoạn SO.

a. Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA và SB. Chứng minh $EF \parallel AB$.

b. Gọi K là giao điểm của DE và CF. Chứng minh $SK \parallel BC$.

Giải

a. Trong mp(SAC): $IC \cap SA = \{E\}$

Trong mp(SBD): $ID \cap SB = \{F\}$

Mà $IC \subset (ICD), ID \subset (ICD)$

nên $E = (ICD) \cap SA, F = (ICD) \cap SB$.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} EF = (SAB) \cap (ICD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel AB \parallel CD.$$

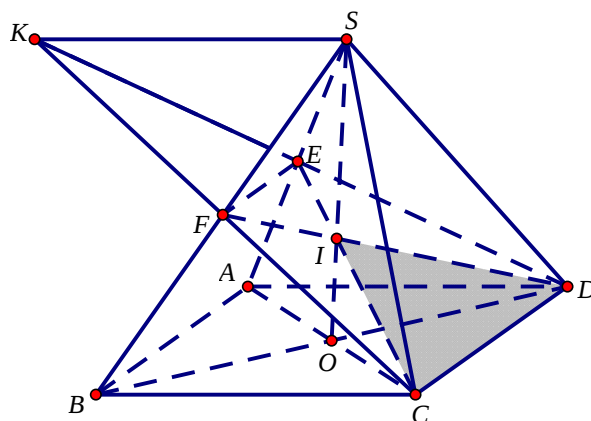
b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} CF \cap DE = \{K\} \\ CF \subset (SBC) \\ DE \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow K \in (SBC) \cap (SAD).$$

Mà $S \in (SBC) \cap (SAD)$ nên $SK = (SBC) \cap (SAD)$.

Vậy:

$$\left. \begin{array}{l} SK = (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow SK \parallel BC \parallel AD.$$



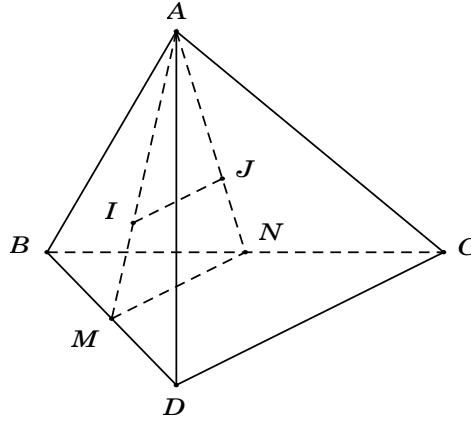
Dạng 4. Bài tập ứng dụng

Câu 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

- A. IJ song song với CD.
- B. IJ song song với AB.
- C. IJ chéo CD.
- D. IJ cắt AB.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN \parallel CD$ (1)

I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $ABD \Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$ (2)

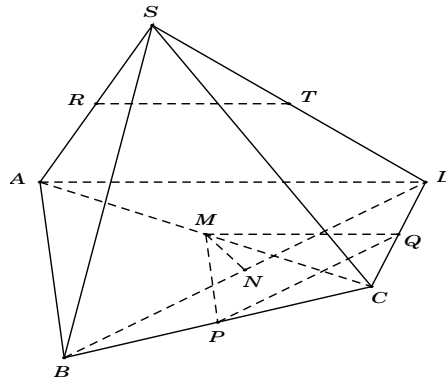
Từ (1) và (2) suy ra: $IJ \parallel CD$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

- A.** MP và RT . **B.** MQ và RT . **C.** MN và RT . **D.** PQ và RT .

Lời giải

Chọn B



Ta có: M, Q lần lượt là trung điểm của AC, CD

$\Rightarrow MQ$ là đường trung bình của tam giác $CAD \Rightarrow MQ \parallel AD$ (1)

Ta có: R, T lần lượt là trung điểm của SA, SD

$\Rightarrow RT$ là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow RT \parallel AD$ (2)

Từ (1),(2) suy ra: $MQ \parallel RT$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

A. EF .

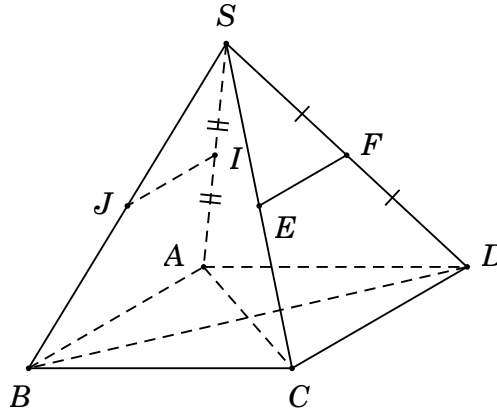
B. DC .

C. AD .

D. AB .

Lời giải

Chọn C



Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).

Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\longrightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .

A. $MP \parallel NQ$.

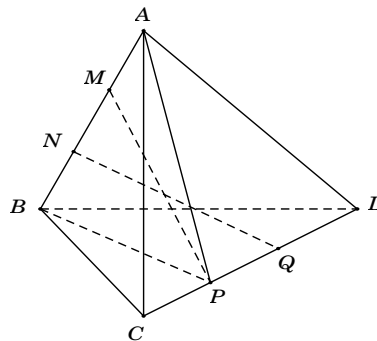
B. $MP \equiv NQ$.

C. MP cắt NQ .

D. MP, NQ chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Xét mặt phẳng (ABP) .

Ta có: M, N thuộc $AB \Rightarrow M, N$ thuộc mặt phẳng (ABP) .

Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P$.

Mà: $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M, N, P, Q$ không đồng phẳng.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. d qua S và song song với BC .

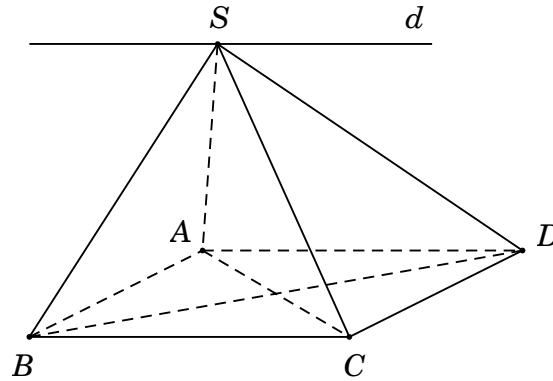
B. d qua S và song song với DC .

C. d qua S và song song với AB .

D. d qua S và song song với BD .

Lời giải

Chọn A



Ta có
$$\begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = S \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \longrightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC \text{ (với } d \equiv Sx \text{)}.$$

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:

A. qua I và song song với AB .

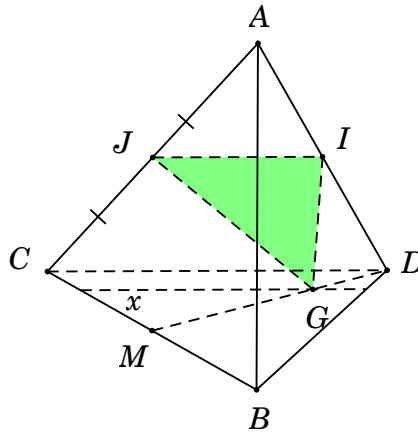
B. qua J và song song với BD .

C. qua G và song song với CD .

D. qua G và song song với BC .

Lời giải

Chọn C



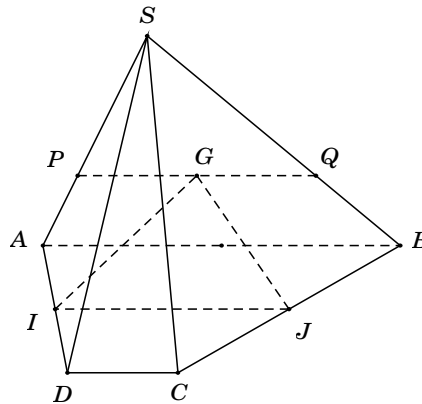
$$\text{Ta có } \begin{cases} (GIJ) \cap (BCD) = G \\ IJ \subset (GIJ), CD \subset (BCD) \\ IJ \parallel CD \end{cases} \longrightarrow (GIJ) \cap (BCD) = Gx \parallel IJ \parallel CD.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- A. SC .
- B. đường thẳng qua S và song song với AB .
- C. đường thẳng qua G và song song với DC .
- D. đường thẳng qua G và cắt BC .

Lời giải

Chọn C



Ta có: I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC

$\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD$.

Gọi $d = (SAB) \cap (IJG)$

Ta có: G là điểm chung giữa hai mặt phẳng (SAB) và (IJG)

Mặt khác: $\begin{cases} (SAB) \supset AB; (IJG) \supset IJ \\ AB \parallel IJ \end{cases}$

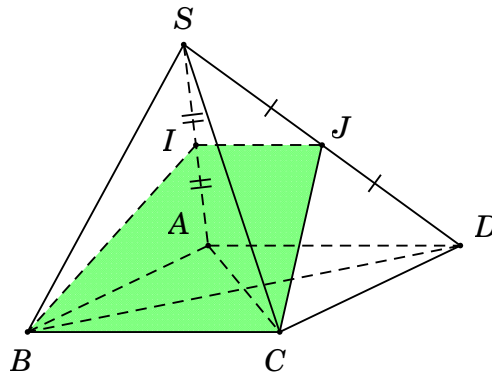
$\Rightarrow$ Giao tuyến d của (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với AB và IJ .

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

- A. Tam giác IBC .
- B. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).
- C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).
- D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} (IBC) \cap (SAD) = IJ \\ BC \subset (IBC), AD \subset (SAD) \longrightarrow (IBC) \cap (SAD) = IJ \parallel BC \parallel AD \\ BC \parallel AD \end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAD) : $IJ \parallel AD$, gọi $IJ \cap SD = J \longrightarrow IJ \parallel BC$

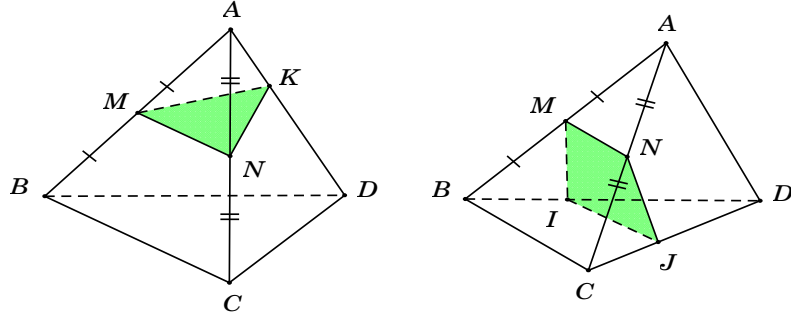
Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình thang $IBCJ$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC . Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T) . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. (T) là hình chữ nhật.
- B. (T) là tam giác.
- C. (T) là hình thoi.
- D. (T) là tam giác; hình thang hoặc hình bình hành.

Lời giải

Chọn D



Trường hợp $(\alpha) \cap AD = K$

$\longrightarrow (T)$ là tam giác MNK . Do đó A và C sai.

Trường hợp $(\alpha) \cap (BCD) = IJ$, với $I \in BD, J \in CD$; I, J không trùng D .

$\longrightarrow (T)$ là tứ giác. Do đó B đúng.

Câu 10: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S , $SB = 8$. Thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng:

A. $6\sqrt{2}$.

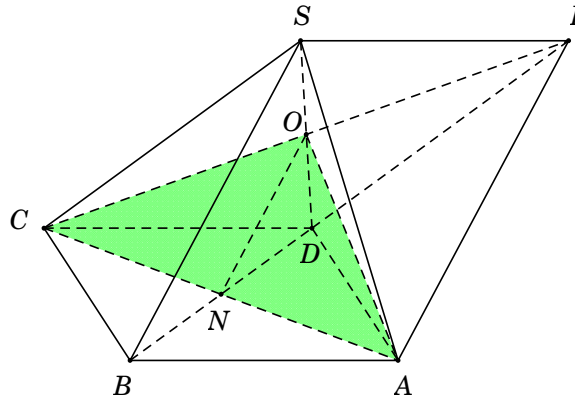
B. $8\sqrt{2}$.

C. $10\sqrt{2}$.

D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = SD \cap CI$; $N = AC \cap BD$.

$\Rightarrow O, N$ lần lượt là trung điểm của $DS, DB \Rightarrow ON = \frac{1}{2}SB = 4$.

Thiết diện của $mp(ACI)$ và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác $\triangle OCA$.

Tam giác $\triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow SC = SA \Rightarrow \triangle SDC = \triangle SDA$

$\Rightarrow CO = AO$ (cùng là đường trung tuyến của 2 định tương ứng) $\Rightarrow \triangle OCA$ cân tại O

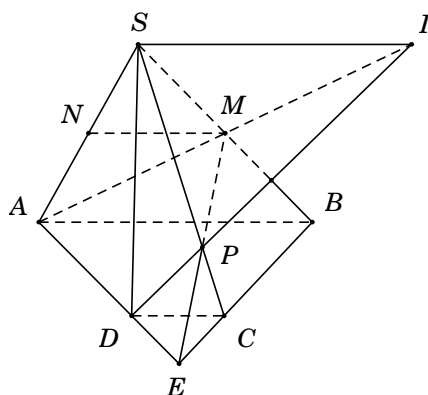
$\Rightarrow S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2}ON.AC = \frac{1}{2}.4.4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (AND) . Gọi I là giao điểm của AN và DP . Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật.
C. Hình vuông. D. Hình thoi.

Lời giải

Chọn A



Gọi $E = AD \cap BC$, $P = NE \cap SC$. Suy ra $P = SC \cap (AND)$.

Ta có

- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) ;
- $I = DP \cap AN \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$. Mà $AB \parallel CD \longrightarrow SI \parallel AB \parallel CD$.

Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB và chứng minh được cũng là đường trung bình của tam giác SAI nên suy ra $SI = AB$.

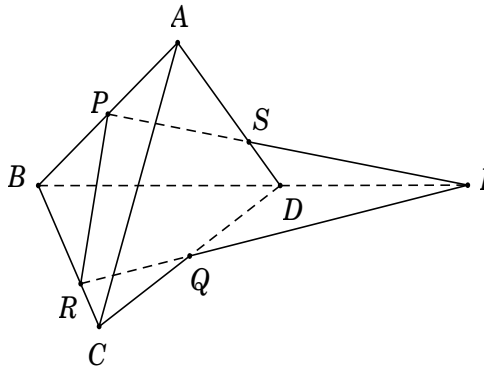
Vậy $SABI$ là hình bình hành.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD . Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

- A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ . Nối P với I , cắt AD tại S .

Xét tam giác BCD bị cắt bởi IR , ta có $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}$.

Xét tam giác ABD bị cắt bởi PI , ta có $\frac{AS}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SD} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SD} = 2$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC . Cho $PR \parallel AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S . Chọn khẳng định **đúng**?

A. $AD = 3DS$.

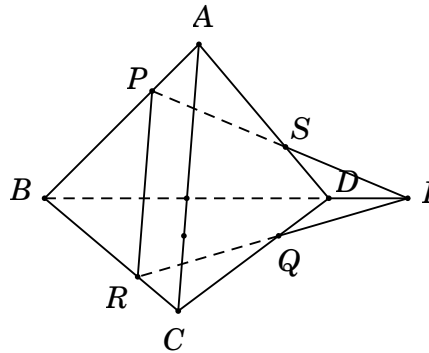
B. $AD = 2DS$.

C. $AS = 3DS$.

D. $AS = DS$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ . Nối P với I , cắt AD tại S .

Ta có $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1$ mà $\frac{CQ}{QD} = 2$ suy ra $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{RC}{BR}$.

Vì PR song song với AC suy ra $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB}$.

Lại có $\frac{SA}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} = 2 \longrightarrow AD = 3DS$.

Câu 14: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD . Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$.

A. 2.

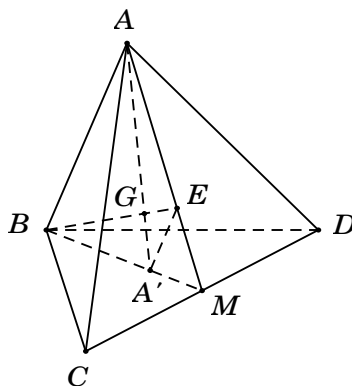
B. 3.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trọng tâm của tam giác ACD , M là trung điểm của CD .

Nối BE cắt AA' tại G suy ra G là trọng tâm tứ diện.

Xét tam giác MAB , có $\frac{ME}{MA} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3}$ suy ra $A'E \parallel AB \Rightarrow \frac{A'E}{AB} = \frac{1}{3}$.

Khi đó, theo định lý Talet suy ra $\frac{A'E}{AB} = \frac{A'G}{AG} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GA'} = 3$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN . Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD) . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. A_1 là tâm đường tròn tam giác BCD .

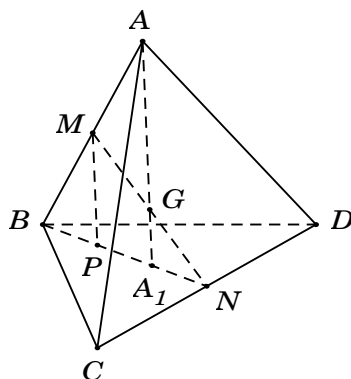
B. A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .

C. A_1 là trực tâm tam giác BCD .

D. A_1 là trọng tâm tam giác BCD .

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (ABN) cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến BN .

Mà $AG \subset (ABN)$ suy ra AG cắt BN tại điểm A_1 .

Qua M dựng $MP \parallel AA_1$ với $M \in BN$.

Có M là trung điểm của AB suy ra P là trung điểm $BA_1 \Rightarrow BP = PA_1$ (1).

Tam giác MNP có $MP \parallel GA_1$ và G là trung điểm của MN .

$\Rightarrow A_1$ là trung điểm của $NP \Rightarrow PA_1 = NA_1$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $BP = PA_1 = A_1N \Rightarrow \frac{BA_1}{BN} = \frac{2}{3}$ mà N là trung điểm của CD .

Do đó, A_1 là trọng tâm của tam giác BCD .

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung, tức là:

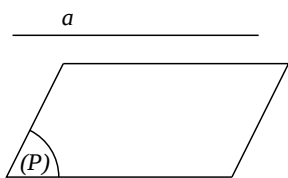
$$a \cap (P) = \emptyset \Leftrightarrow a \parallel (P).$$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) chỉ có một điểm chung, tức là:

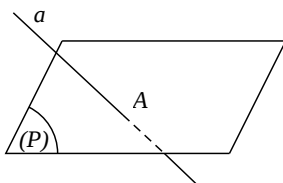
$$a \cap (P) = A \Leftrightarrow a \text{ cắt } (P) \text{ tại } A.$$

c. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có hai điểm chung, tức là:

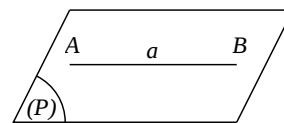
$$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$$



$$a \cap (P) = \emptyset \Leftrightarrow a \parallel (P).$$



$$a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a \text{ cắt } (P).$$



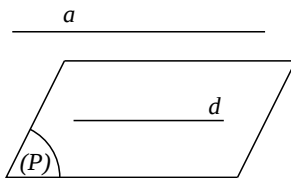
$$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$$

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P) .

Tức là, $a \not\subset (P)$ thì nếu:

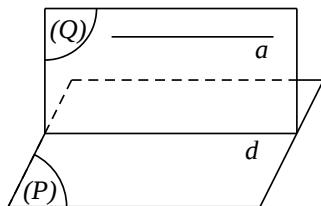
$$a \parallel d \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P).$$



3. Tính chất

Định lý 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với a .

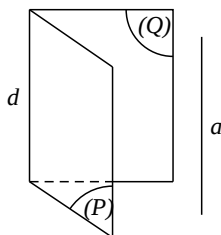
$$\text{Tức là, nếu } \begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \text{ và } [(Q) \cap (P) = d] \Rightarrow a \parallel d.$$



Hệ quả 1: Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với đường thẳng đó.

$$\text{Tức là: } \begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \end{cases} \Rightarrow d \parallel a.$$



Hệ quả 3: Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng song song với b .

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P) ?

A. 2.

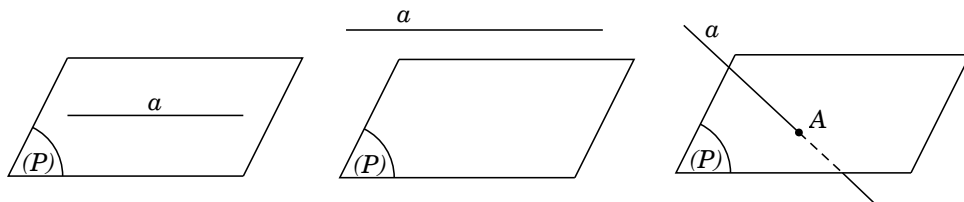
B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B



Có 3 vị trí tương đối của a và (P) , đó là: a nằm trong (P) , a song song với (P) và a cắt (P) .

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. Khi đó:

A. $a // (\alpha)$.

B. $a \subset (\alpha)$.

C. a cắt (α) .

D. $a // (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a // (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

A. $a // b$.

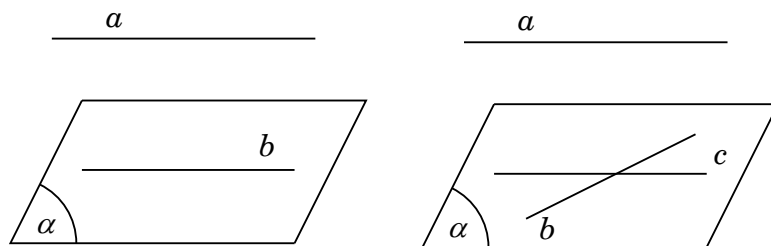
B. a, b chéo nhau.

C. $a // b$ hoặc a, b chéo nhau.

D. a, b cắt nhau.

Lời giải

Chọn C



Vì $a // (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a // c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

- Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a // b$.
- Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Câu 4: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $b // (\alpha)$ thì $b // a$.

B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .

C. Nếu $b // a$ thì $b // (\alpha)$.

D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

Lời giải

Chọn C

- A sai. Nếu $b // (\alpha)$ thì $b // a$ hoặc a, b chéo nhau.
- B sai. Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.
- D sai. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a .

Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a // (\alpha)$ và $b // (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. a và b không có điểm chung.
- B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
- C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
- D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b .
- B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b .
- C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b .
- D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn B

Gọi $(Q) \equiv (a, b)$.

- A sai. Khi $b = (P) \cap (Q) \Rightarrow b \subset (P)$.
- C sai. Khi $(P) \neq (Q) \Rightarrow b // (P)$.
- Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b \subset (P)$ hoặc $b // (P)$. Khi đó, vì $b // a$ nên $a \subset (P)$ hoặc a cắt (P) (mâu thuẫn với giả thiết (P) cắt a).

Vậy khẳng định B đúng.

Câu 7: Cho $d // (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khi đó:

- A. $d // d'$.
- B. d cắt d' .
- C. d và d' chéo nhau.
- D. $d \equiv d'$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d // d'$.

Nếu d cắt d' . Khi đó, d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết).

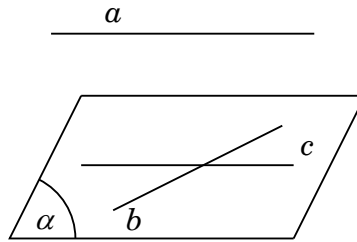
Vậy $d // d'$.

Câu 8: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. Vô số.

Lời giải

Chọn D



Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b .

Gọi $(\alpha) \equiv (b, c)$. Do $a \parallel c \Rightarrow a \parallel (\alpha)$.

Giả sử $(\beta) \parallel (\alpha)$. Mà $b \in (\alpha) \Rightarrow b \parallel (\beta)$.

Mặt khác, $a \parallel (\alpha) \Rightarrow a \parallel (\beta)$.

Có vô số mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$. Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
- B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
- C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).
- D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

Lời giải

Chọn A

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

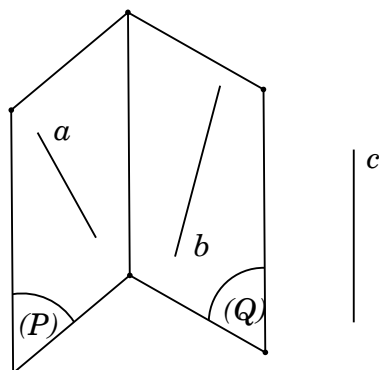
Do đó A sai.

Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .
- B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
- C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) .
- D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

Chọn A



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c , mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c .

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

1. Phương pháp

(Dùng định lí 1)

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Nếu không có sẵn đường thẳng b trong mặt phẳng (P) thì ta tìm đường thẳng b bằng cách chọn một mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) , giao tuyến của (P) và (Q) chính là đường thẳng b cần tìm.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$.

- Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) .
- Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABF . Chứng minh $GG' \parallel (DCEF)$.

Giải

a. Ta có OO' là đường trung bình của tam giác ACE và tam giác BDF nên: $OO' \parallel CE$ và $OO' \parallel DF$.

Mà $CE \subset (BCE)$, $DF \subset (ADF)$ nên $OO' \parallel (BCE)$ và $OO' \parallel (ADF)$.

b. Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta có:

$$\frac{AG}{AO} = \frac{AG'}{AO'} = \frac{2}{3}$$

Vậy $GG' \parallel OO'$ và $OO' \parallel CE$ nên $GG' \parallel CE$.

Mà $CE \subset (CDEF)$ nên $GG' \parallel (CDEF)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD . M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

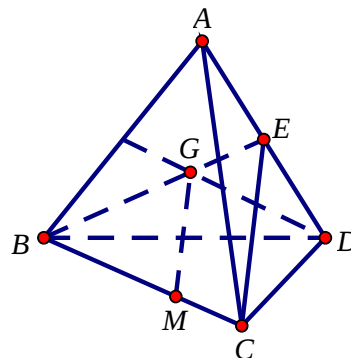
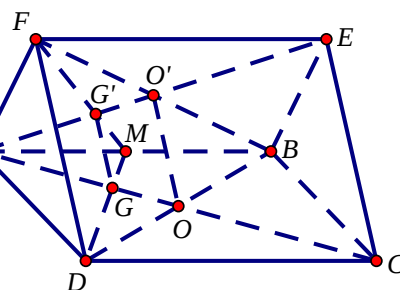
Giải

Gọi E là trung điểm của AD . Ta có: $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$ (do G là trọng tâm của tam giác ABD).

Mà $\frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ (do $MB = 2MC$) nên $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC}$.

Suy ra $MG \parallel CE$.

Mà $CE \subset (ACD)$ do đó $MG \parallel (ACD)$.



Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD . Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

Giải

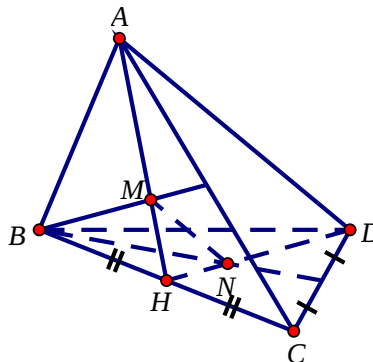
Gọi H là trung điểm của BC , ta có: $M \in AH$, $N \in DH$. Do đó:

$$\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm tam giác)} \Rightarrow MN \parallel AD.$$

Như vậy:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ABD)$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ACD)$$



Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD, cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Giải

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ \text{Ta có: } (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{array} \right\} \Rightarrow MQ \parallel AB \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } NP \parallel AB \quad (2)$$

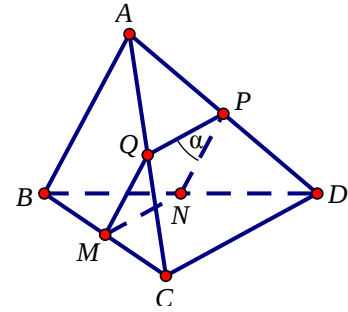
$$\left. \begin{array}{l} CD \parallel (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel CD \quad (3)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } MN \parallel CD \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } MQ \parallel NP \quad (5)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } PQ \parallel MN \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra MNPQ là hình bình hành.



Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành; F, G lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Chứng minh rằng FG song song với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB, SC song song với mặt phẳng (FGE).

Giải

a. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} FG \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow FG \parallel (SAD)$$

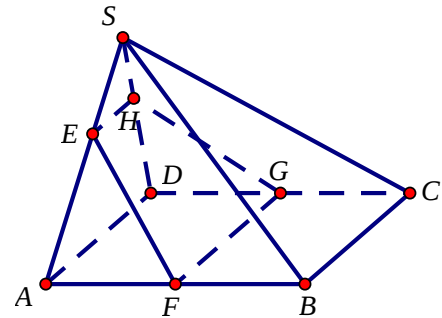
Chứng minh tương tự, ta cũng có: $FG \parallel (SBC)$

b. Gọi $(EFG) \cap SD = H$. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (ABCD) \cap (EFG) = FG \\ (ABCD) \cap (SAD) = AD \\ (SAD) \cap (EFG) = EH \\ FG \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow EH \parallel AD \parallel FG$$

Suy ra H là trung điểm của SD.

Như vậy:



$$\left. \begin{array}{l} GH \parallel SC \text{ (tính chất đường trung bình)} \\ HG \subset (EFG) \end{array} \right\} \Rightarrow SC \parallel (EFG).$$

Tương tự, ta có: $SB \parallel (EFG)$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh SB , song song với cạnh AB , cắt các cạnh SA, SD, SC lần lượt tại Q, P và N . Hãy xác định hình tính của tứ giác $MNPQ$?

Giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ M \in (\alpha) \cap (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel AB \quad (1)$$

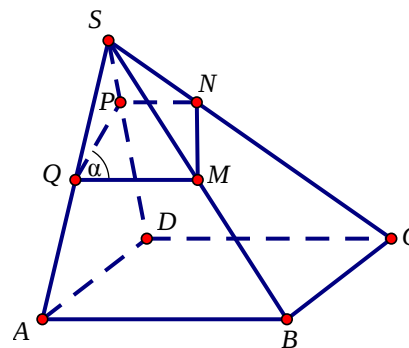
Mặt khác:

$$\left. \begin{array}{l} DC \parallel AB \Rightarrow DC \stackrel{(1)}{\parallel} QM (*) \\ QM \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow DC \parallel (\alpha)$$

Như vậy:

$$\left. \begin{array}{l} DC \parallel (\alpha) \\ PN = (\alpha) \cap (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PN \parallel DC \quad (2)$$

Từ (*) và (2) suy ra $MNPQ$ là hình bình thang.



Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng

1. Phương pháp

Ngoài hai cách đã đề cập ở Bài 1 và Bài 2 ta có hai cách sau để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cách 1. Dùng định lý 2.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Cách 2. Dùng hệ quả 2.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Tìm thiết diện là tìm các đoạn giao tuyến theo phương pháp tìm giao tuyến được nêu ở trên, cho đến khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

- Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $SB \parallel (OMN)$, $SC \parallel (OMN)$.
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN) . Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có $MN \parallel AD$ (MN là đường trung bình của tam giác SAD) và $AD \parallel BC$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành), suy ra $MN \parallel BC$.

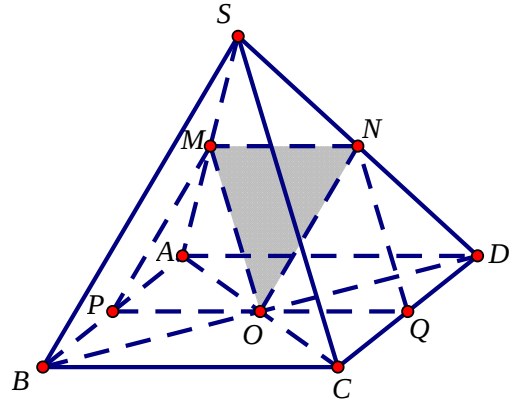
Mà $BC \subset (SBC)$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Ta có: $ON \parallel SB$ (ON là đường trung bình của tam giác SBD) nên $ON \subset (OMN)$.

Do đó: $SB \parallel (OMN)$.

Ta có $OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của $\triangle SAC$) và $OM \subset (OMN)$.

Vậy $SC \parallel (OMN)$.



b. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Từ đó có: $PQ \parallel AD$, suy ra $PQ \parallel MN$.

Vậy MN và PQ đồng phẳng, nghĩa là $(OMN) \equiv (MNPQ)$.

Ta có thiết diện do mp (OMN) cắt hình chóp là hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$).

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M , song song với AB và CD .

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD) .
- Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (P) \cap (ICD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ICD) = Mx \parallel CD.$$

Trong mp(ICD) ta có Mx cắt IC tại E và cắt ID tại F. Suy ra $EF = (P) \cap (ICD)$.

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ E \in (P) \cap (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = Ey \parallel AB.$$

Trong mp(ABC) ta có Ey cắt BC tại P và cắt AC tại S.

Suy ra $PS = (P) \cap (ABC)$.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ F \in (P) \cap (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABD) = Ft \parallel AB.$$

Trong mp(ABD) ta có Ft cắt BD tại Q và cắt AD tại R.

Suy ra $QR = (P) \cap (ABD)$.

Khi đó: $PQ = (P) \cap (CBD)$ và $RS = (P) \cap (ACD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác PQRS.

Theo chứng minh trên ta có thể suy ra được: $PS \parallel AB, QR \parallel AB$ nên $PS \parallel QR$.

(1)

Mặt khác, ta có:

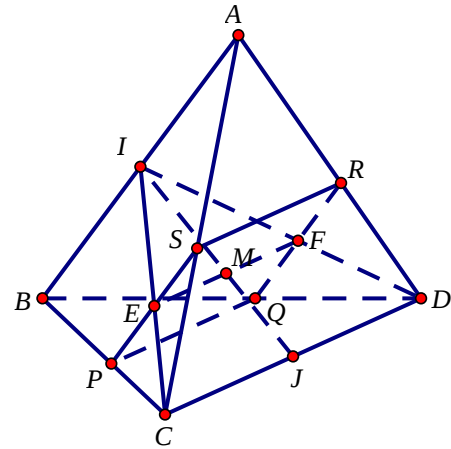
$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ RS = (P) \cap (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel CD$$

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ PQ = (P) \cap (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel CD$$

$$\left. \begin{array}{l} RS \parallel CD \\ PQ \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel PQ$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện PQRS là hình bình hành.



Dạng 4. Bài tập ứng dụng

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $MN \parallel mp(ABCD)$.
B. $MN \parallel mp(SAB)$.
C. $MN \parallel mp(SCD)$.
D. $MN \parallel mp(SBC)$.

Lời giải

Chọn A

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

Suy ra $MN \parallel AC$ mà $AC \subset (ABCD) \longrightarrow MN \parallel mp(ABCD)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

- A. MN nằm trên $mp(ABCD)$.
B. MN cắt $mp(ABCD)$.
C. MN song song $mp(ABCD)$.
D. MN và $mp(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB .

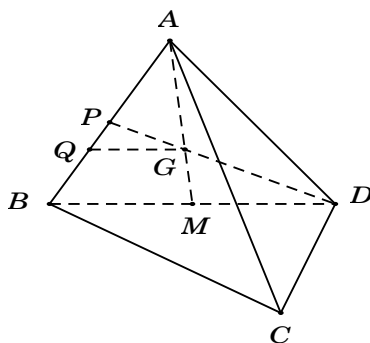
Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN \parallel (ABCD)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $MN \parallel (BCD)$.
B. $GQ \parallel (BCD)$.
C. MN cắt (BCD) .
D. Q thuộc mặt phẳng (CDP) .

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BD .

Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$.

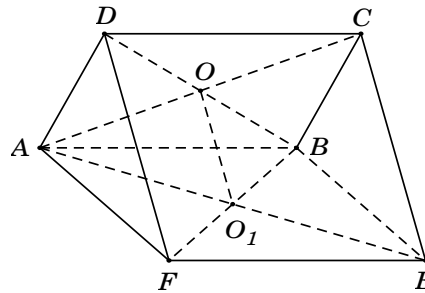
Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ = 2QB \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} \longrightarrow GQ \parallel BD$.

Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ \parallel (BCD)$.

Câu 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $OO_1 \parallel (BEC)$. B. $OO_1 \parallel (AFD)$. C. $OO_1 \parallel (EFM)$. D. MO_1 cắt (BEC) .

Lời giải



Chọn D

Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE .

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 \parallel EC$.

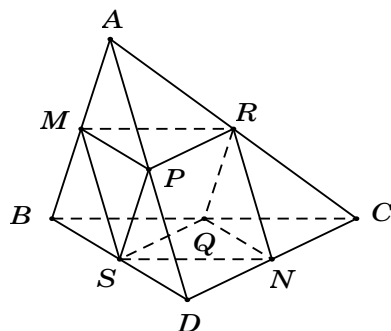
Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$.

Vậy $OO_1 \parallel (BEC)$, $OO_1 \parallel (AFD)$ và $OO_1 \parallel (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC . Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

- A. P, Q, R, S . B. M, P, R, S . C. M, R, S, N . D. M, N, P, Q .

Lời giải



Chọn C

Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS \parallel AC \parallel QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng

Tương tự, ta có được $PM \parallel BC \parallel NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.

Và $NR \parallel CD \parallel SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC , (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD . Mệnh đề nào sau đây **đúng** về thiết diện của (α) của tứ diện?

A. Thiết diện là hình vuông.

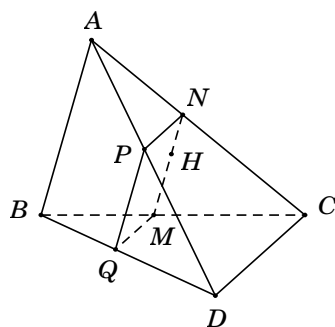
B. Thiết diện

là hình thang cân.

C. Thiết diện là hình bình hành.

D. Thiết diện là hình chữ nhật.

Lời giải



Chọn C

Qua H kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AC lần lượt tại M, N .

Từ N kẻ NP song song với CD ($P \in CD$). Từ P kẻ PQ song song với AB ($Q \in BD$).

Ta có $MN \parallel PQ \parallel AB$ suy ra M, N, P, Q đồng phẳng và $AB \parallel (MNPQ)$.

Suy ra $MNPQ$ là thiết diện của (α) và tứ diện.

Vậy thiết diện là hình bình hành.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:

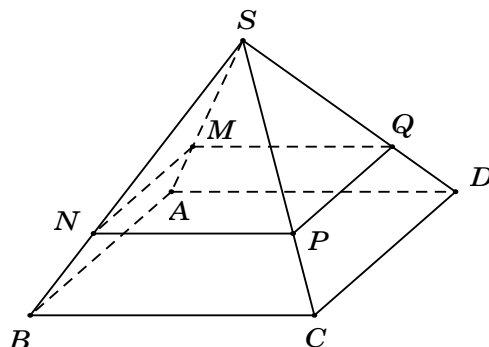
A. $\frac{400}{9}$.

B. $\frac{20}{3}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải



Chọn A

Ta có $(\alpha) \parallel AB$ và CD mà A, B, C, D đồng phẳng suy ra $(\alpha) \parallel (ABCD)$.

Giả sử (α) cắt các mặt bên $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$ lần lượt tại các điểm N, P, Q với $N \in SB, P \in SC, Q \in SD$ suy ra $(\alpha) \equiv (MNPQ)$.

Khi đó $MN \parallel AB \Rightarrow MN$ là đường trung bình tam giác $SAB \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{2}{3}$.

Tương tự, ta có được $\frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} = \frac{2}{3}$ và $MNPQ$ là hình vuông.

Suy ra $S_{MNPQ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABCD} = \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{4}{9} \cdot 10 \cdot 10 = \frac{400}{9}$.

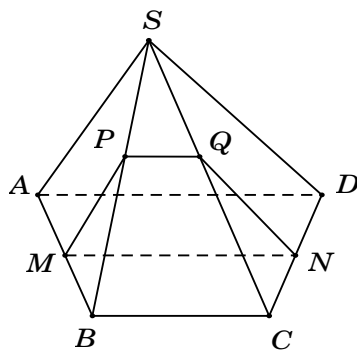
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD . M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD . (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành.

B. Hình thang.

C. Hình chữ nhật. D. Hình vuông

Lời giải



Chọn B

Xét hình thang $ABCD$, có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Suy ra MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN \parallel BC$.

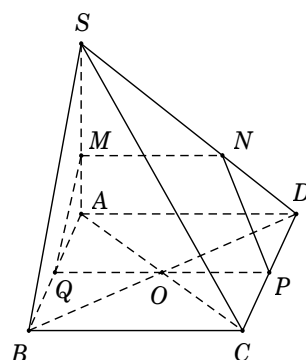
Lấy điểm $P \in SB$, qua P kẻ đường thẳng song song với BC và cắt CD tại Q .

Suy ra $(P) \cap (SBC) = PQ$ nên thiết diện (P) và hình chóp là tứ giác $MNQP$ có $MN \parallel PQ \parallel BC$. Vậy thiết diện là hình thang $MNQP$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD . Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. B. Hình thang. C. Hình chữ nhật. D. Hình tam giác.

Lời giải



Chọn B

Qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel AD$ và cắt SD tại $N \Rightarrow MN \parallel AD$.

Qua O kẻ đường thẳng $PQ \parallel AD$ và cắt AB, CD lần lượt tại $Q, P \Rightarrow PQ \parallel AD$.

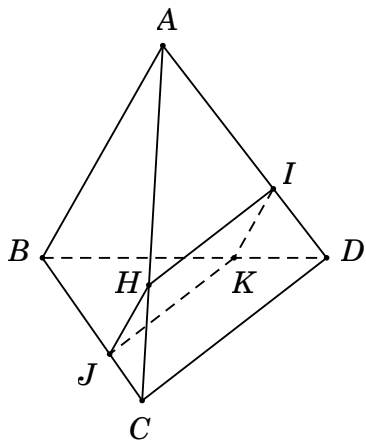
Suy ra $MN \parallel PQ \parallel AD \longrightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng $\Rightarrow (P)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB . Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

- A. Hình thang. B. Hình bình hành. C. Hình tam giác. D. Tam giác đều.

Lời giải

Chọn B



Giả sử (P) cắt các mặt của tứ diện (ABC) và (ABD) theo hai giao tuyến JH và IK .

Ta có $(P) \cap (ABC) = JH$, $(P) \cap (ABD) = IK$

$(ABC) \cap (ABD) = AB$, $(P) \parallel AB \longrightarrow JH \parallel IK \parallel AB$.

Theo định lí Thalet, ta có $\frac{JB}{JC} = \frac{HA}{HC} = 2$ suy ra $\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow IH \parallel CD$.

Mà $IH \in (P)$ suy ra IH song song với mặt phẳng (P) .

Vậy (P) cắt các mặt phẳng (ABC) , (ABD) theo các giao tuyến IH , JK với $IH \parallel JK$.

Do đó, thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành.

BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q) . Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có đường thẳng chung, tức là:

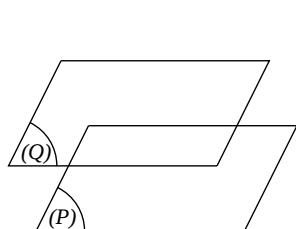
$$(P) \cap (Q) = \emptyset \Leftrightarrow (P) \parallel (Q).$$

b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

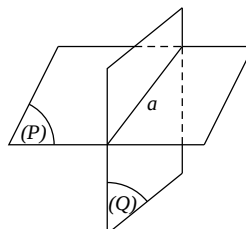
$$(P) \cap (Q) = a \Leftrightarrow (P) \text{ cắt } (Q).$$

c. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

$$(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q).$$



$$(P) \cap (Q) = \emptyset \Leftrightarrow (P) \parallel (Q).$$



$$(P) \cap (Q) = a \Leftrightarrow (P) \text{ cắt } (Q).$$

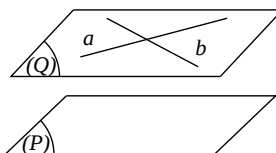


$$(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q).$$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lý 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q) .

$$\text{Tức là: } \begin{cases} a, b \in (P) \\ a \cap b = \{I\} \\ a \parallel (Q), b \parallel (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q).$$



3. Tính chất

Tính chất 1: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

$$\text{Tức là: } O \notin (P) \Rightarrow \exists! (Q): \begin{cases} O \in (Q) \\ (P) \parallel (Q) \end{cases}.$$

Cách dựng:

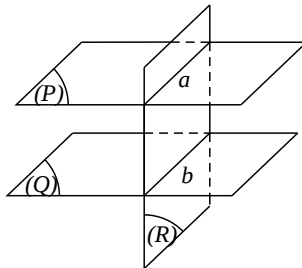
- Trong (P) dựng a, b cắt nhau.
- Qua O dựng $a_1 \parallel a, b_1 \parallel b$.
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với (P) .

Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q) .

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

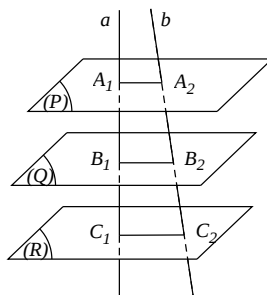
$$\text{Tức là: } \begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ a = (P) \cap (R) \Rightarrow a \parallel b. \\ b = (Q) \cap (R) \end{cases}$$



Định lý Ta – let trong không gian:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$\text{Tức là: } \begin{cases} (P) \parallel (Q) \parallel (R) \\ a \cap (P) = A_1; a \cap (Q) = B_1; a \cap (R) = C_1 \\ b \cap (P) = A_2; b \cap (Q) = B_2; b \cap (R) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$



4. Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ:

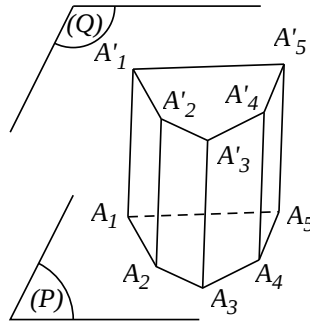
Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai cạnh đáy đều song song với nhau.

Trong đó:

- ☐ Các mặt khác với hai đáy gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
- ☐ Cạnh chung của hai mặt bên gọi là cạnh bên của hình lăng trụ.
- ☐ Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác ...

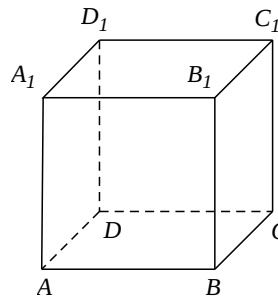
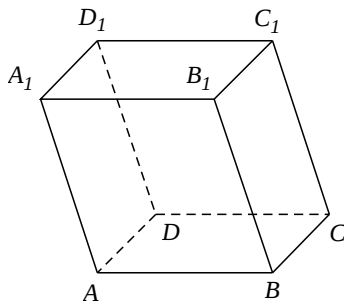
Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

- a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.
- c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.



Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

- Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.
- Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.



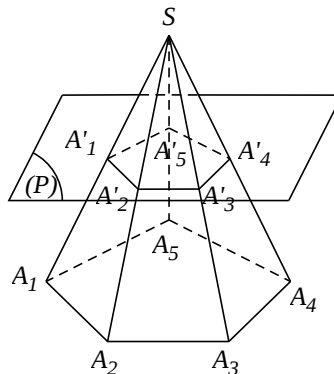
Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

5. Hình chóp cắt

Định nghĩa: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ theo thứ tự tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A'_1A'_2, A_2A_3A'_2A'_3, ..., A_nA_1A'_nA'_1$ gọi là một hình chóp cắt.

Trong đó:

- ☐ Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cắt, còn thiết diện gọi là đáy nhỏ của hình chóp cắt.



- ☐ Các mặt còn lại gọi là các mặt bên của hình chóp cắt.
 - ☐ Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$ gọi là cạnh bên của hình chóp cắt.
- Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... ta có hình chóp cắt tam giác, hình chóp cắt tứ giác, hình chóp cắt ngũ giác, ...

Tính chất: Với hình chóp cắt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cắt đồng quy tại một điểm.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

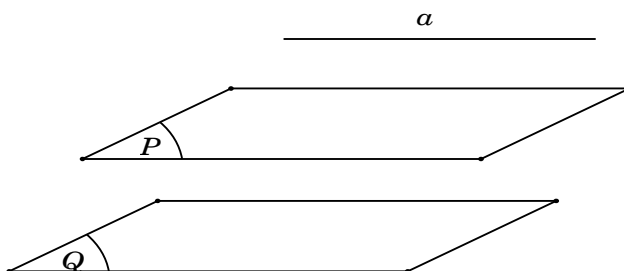
Dạng 1: Bài toán lý thuyết

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
- B. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.
- C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
- D. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Lời giải

Chọn C



Trong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ A là mệnh đề sai.

Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể song song với nhau (hình vẽ) $\Rightarrow$ B là mệnh đề sai.

Ta có: $a \parallel (P), a \parallel (Q)$ nhưng (P) và (Q) vẫn có thể song song với nhau.

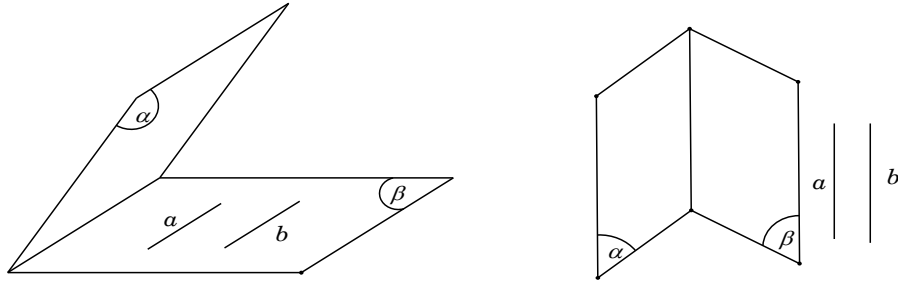
Mệnh đề C là tính chất nên C đúng.

Câu 2: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

- A. $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).
- B. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
- C. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
- D. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .

Lời giải

Chọn D



Trong trường hợp: $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó) thì (α) và (β) có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Loại **A**.

$(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 1) $\Rightarrow$ Loại **B**.

$(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 2) $\Rightarrow$ Loại **C**.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .

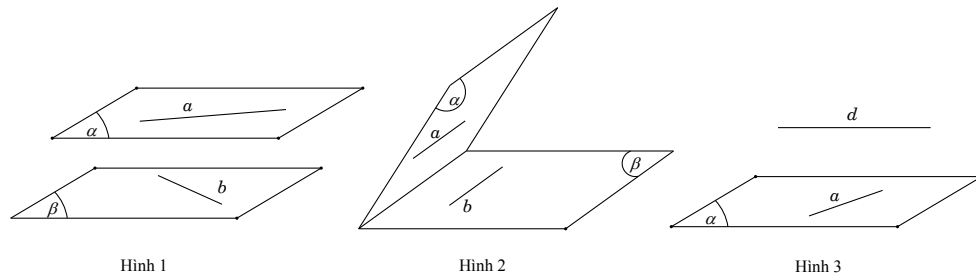
B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β) .

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

D. Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp(\alpha)$.

Lời giải

Chọn A



Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì hai đường thẳng bất kì lần lượt thuộc (α) và (β) có thể chéo nhau (Hình 1) $\Rightarrow$ Loại **B**.

Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì hai mặt phẳng (α) và (β) có thể cắt nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ Loại **C**.

Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó có thể chéo nhau với một đường thẳng nào đó nằm trong (α) . (Hình 3).

Câu 4: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $a \parallel (\alpha)$. Có mấy vị trí tương đối của a và (β) .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

$a \parallel (\alpha)$ mà $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a$ và (α) không thể cắt nhau.

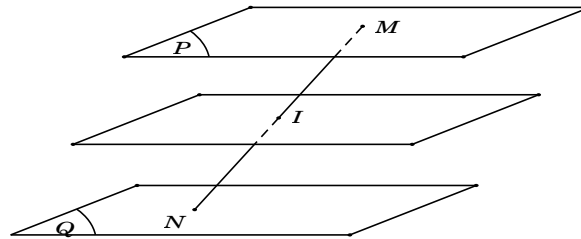
Vậy còn 2 vị trí tương đối.

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) . Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q) . Gọi I là trung điểm của MN . Chọn khẳng định **đúng**.

- A. Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q) .
- B. Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .
- C. Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P) .
- D. Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P) .

Lời giải

Chọn B



Ta có: I là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến (P) bằng khoảng cách từ I đến (Q)

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .

Câu 6: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) ?

- A. $a \parallel b$ và $b \subset (P)$.
- B. $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$.
- C. $a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.
- D. $a \subset (Q)$ và $b \subset (P)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a \parallel b$ và $b \subset (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại A.

$a \parallel b$ và $b \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại B.

$a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại C.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.
- B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau.
- C. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- D. Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$ và $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$ hoặc a chéo $b \Rightarrow$ A, B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b .

Câu 8: Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.

B. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Với đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$

Khi $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau $\Rightarrow$ A sai.

Khi $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$ hoặc $(P), (Q)$ cắt nhau theo giao tuyến song song với a và $b \Rightarrow$ B sai.

a và b có thể chéo nhau, song song hoặc cắt nhau $\Rightarrow$ D sai.

Câu 9: Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp(\alpha)$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$.

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

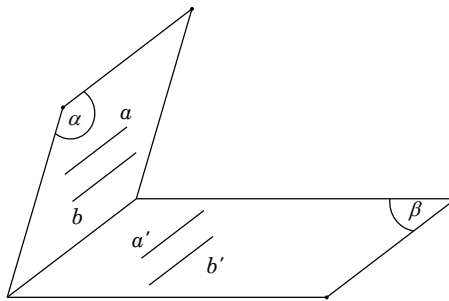
B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

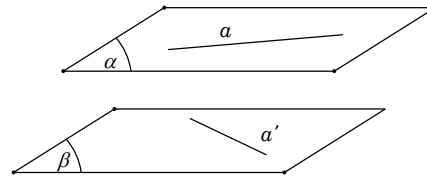
D. Nếu a cắt b và $a \parallel a', b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Lời giải

Chọn D



Hình 1



Hình 2

Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt (β) (Hình 1) $\Rightarrow$ A sai.

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ hoặc a, a' chéo nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt CC' . (Hình 1) $\Rightarrow$ C sai.

Câu 10: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q) . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. p và q cắt nhau.

B. p và q chéo nhau.

C. p và q song song.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng song song

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel c, b \parallel d \\ a, b \subset (P) \\ c, d \subset (Q) \\ a \cap b = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a \subset (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

b. Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD). Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến này, chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.

Vậy tứ giác SKDF là hình bình hành, suy ra $SF \parallel KD$.

Mặt khác $BF \parallel CD$ nên $(SBF) \parallel (KCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a. Chứng minh mặt phẳng (OMN) và mặt phẳng (SBC) song song với nhau.

b. Giả sử hai tam giác SAD và ABC đều là tam giác cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với mặt phẳng (SAD).

Giải

a. Ta có:

$ON \parallel BC$ (ON là đường trung bình của tam giác BCD).

$OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của tam giác SAC)

Vì $OM, ON \subset (OMN)$; $BC, SC \subset (SBC)$ nên $(OMN) \parallel (SBC)$.

b. Từ E kẻ đường thẳng $EP \parallel AD$ (P thuộc AB) (1)

Khi đó theo tính chất đường phân giác và tam giác cân ta có:

$$\frac{PB}{PA} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AS} = \frac{FB}{FA}$$

Do đó: $PF \parallel SA$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $(PEF) \parallel (SAD)$.

Mặt khác $EF \subset (PEF)$ nên $EF \parallel (SAD)$.

Ngoài ra ta có thể dùng định lý Thales để chứng minh $EF \parallel (SAD)$ như sau:

Theo tính chất đường phân giác và tính chất của tam giác cân ta chứng minh được:

$$\frac{AB}{AS} = \frac{AC}{AD} = \frac{FB}{FS} = \frac{EC}{ED}.$$

Theo định lý Thales ta suy ra ba đường thẳng BC, EF và SD nằm trong ba mặt phẳng song song, suy ra EF song song với mặt phẳng chứa BC và song song với mặt phẳng chứa SD. Mặt khác $BC \parallel AD$ nên EF song song với mặt phẳng (SAD).

Ví dụ 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

a. Chứng minh hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b. Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

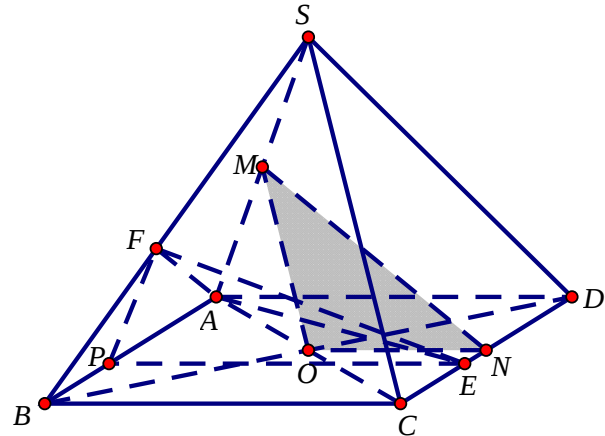
c. Chứng minh G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Giải

a. Ta có:

$A'B \parallel D'C$ (vì tứ giác A'BCD' là hình bình hành).

$BD \parallel B'D'$ (vì tứ giác BB'D'D là hình bình hành), suy ra $mp(BDA') \parallel mp(B'D'C)$.



b. Gọi O, O' và Q lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, A'B'C'D và AA'C'C.

Ta có: A'O là đường trung tuyến và G là trọng tâm của tam giác BDA' nên $\frac{A'G}{A'O} = \frac{2}{3}$.

Do đó G cũng là trọng tâm tam giác A'AC (vì A'O là đường trung tuyến của tam giác A'AC).

Mà AQ là đường trung tuyến của tam giác A'AC nên G thuộc AQ, G thuộc AC' . (1)

Tương tự ta có G' là trọng tâm của tam giác B'D'C và cũng là trọng tâm của tam giác A'C'C.

Mà C'Q là đường trung tuyến của tam giác A'C'C nên G' thuộc C'Q. Suy ra G' thuộc AC' . (2)

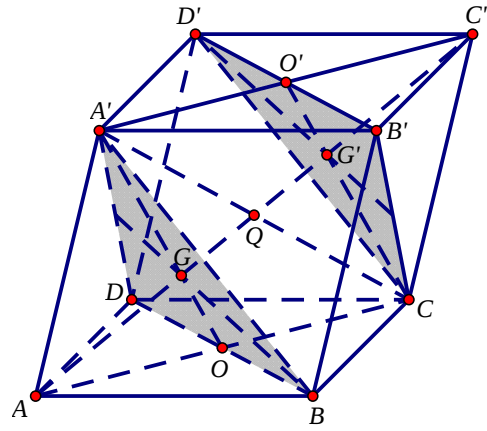
Từ (1) và (2) suy ra đường chéo AC' đi qua hai trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Ta có:

G là trọng tâm tam giác A'AC nên $\frac{AG}{AQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AC'} = \frac{1}{3} (AC' = 2AQ)$. Suy ra $AG = \frac{1}{3}AC'$.

G' là trọng tâm tam giác A'C'C nên $\frac{C'G'}{C'Q} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G'}{C'A} = \frac{1}{3} (AC' = 2C'Q)$. Suy ra $C'G' = \frac{1}{3}AC'$.

Vậy $AG = GG' = C'G' = \frac{1}{3}AC'$. Tức là G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.



Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng

1. Phương pháp

Dùng tính chất thứ 2.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (\alpha) \cap (P) = a \\ (\alpha) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là trung điểm của AD. Gọi (α) và (β) là mặt phẳng qua điểm M và lần lượt song song với mặt phẳng (SBD) và (SAC).

a. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) .

b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (β) .

c. Gọi H và K lần lượt là giao điểm của (α) và (β) với AC và BD. Chứng minh tứ giác OHMK là hình bình hành.

Giải

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \\ M \in (ABCD) \cap (\alpha) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = MN \parallel BD \quad (N \in AB)$$

Gọi M là trung điểm của AD nên N là trung điểm của AB. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \\ N \in (SAB) \cap (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = NE \parallel SB \quad (E \in SA)$$

Mà N là trung điểm của AB nên E là trung điểm của SA.

Khi đó: $ME = (\alpha) \cap (SAD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MNE.

$$\left. \begin{array}{l} (\beta) \parallel (SAC) \\ (ABCD) \cap (SAC) = AC \\ M \in (ABCD) \cap (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (ABCD) \cap (\beta) = MP \parallel AC \quad (P \in CD)$$

Mà M là trung điểm của AD nên P là trung điểm của CD.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\beta) \parallel (SAC) \\ (SCD) \cap (SAC) = SC \\ P \in (SCD) \cap (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (SCD) \cap (\beta) = PF \parallel SC \quad (F \in SD)$$

Mà P là trung điểm của CD nên F là trung điểm của SD.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MPF.

c. Trong mp(ABCD): AC cắt MN tại H, BD cắt MP tại K. Do MN chứa trong mp(α) và MP chứa trong mp(β) nên H chính là giao điểm của AC với mp(α) và K chính là giao điểm của BD với mp(β).

Ta có $MN \parallel BD$ nên $MH \parallel OK$, $MP \parallel AC$ nên $MK \parallel HO$. Vậy tứ giác OHMK là hình bình hành.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh:

a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

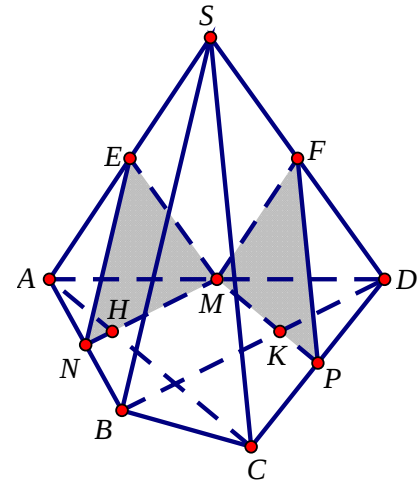
b. $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Giải

a. Ta có $AB \parallel CD$ và $Ax \parallel Dt$ nên $mp(Ax, By) \parallel mp(Cz, Dt)$.

Mà $(P') \cap (Ax, By) = A'B'$; $(P') \cap (Cz, Dt) = C'D'$ nên $A'B' \parallel C'D'$ (1)

Tương tự:



$$\left. \begin{aligned} & mp(Ax, Dt) \parallel mp(By, Cz) \\ & (P') \cap (Ax, Dt) = A'D' \\ & (P') \cap (By, Cz) = B'C' \end{aligned} \right\} \Rightarrow A'D' \parallel B'C'$$

(2)

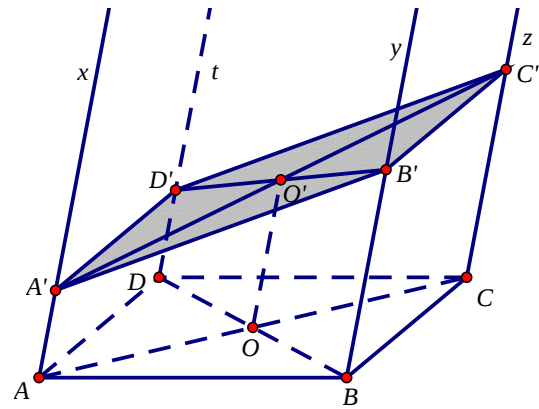
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

b. Gọi O và O' lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Khi đó ta có OO' là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$ và hình thang $BB'D'D$.

Do đó: $AA' + CC' = 2OO'$ và $BB' + DD' = 2OO'$.

Vậy $AA' + CC' = BB' + DD'$.



Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh AD và BC lần lượt là P và Q .

a. Cho trước điểm P , hãy nói cách dựng điểm Q .

b. Gọi K là giao điểm của MN và PQ . Chứng minh rằng $KP = KQ$.

Giải

a. Ta có (α) là $mp(MNP)$.

Trong $mp(ABD)$: MP cắt BD tại E .

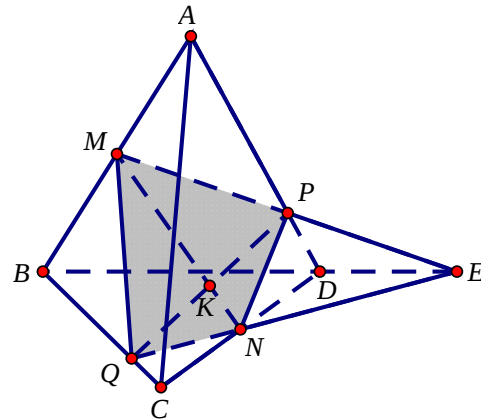
Trong $mp(BCD)$: EN cắt BC tại Q .

Vậy (α) chính là $mp(MPNQ)$. Q là điểm cần tìm.

b. Trên hai đường thẳng chéo nhau AB và CD lần lượt có các điểm A, M, B và C, N, D định ra các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 1.$$

Theo định lý Thales ta suy ra AD, MN, BC nằm trên ba mặt phẳng song song.



Mà PQ là cát tuyến cắt ba mặt phẳng song song lần lượt tại P, K, Q nên: $\frac{KP}{KQ} = \frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 1$.

Vậy K là trung điểm của PQ .

Dạng 3. Tìm thiết diện của lăng trụ, hình chóp cắt

1. Phương pháp

Tìm thiết diện của lăng trụ hay hình chóp cắt cũng thực hiện tương tự như xác định thiết diện của hình chóp.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CC' .

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng $(A'MN)$. Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB .

b. Gọi P là điểm đối xứng của C qua A . Hãy xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP) . Tính tỉ số các đoạn thẳng mà thiết diện chia các cạnh AA' và AB .

Giải

a. Trong $mp(BCC'B')$: MN cắt BB' tại D .

Khi đó $mp(A'MN)$ chính là $mp(A'DN)$.

Trong $mp(AA'B'B)$: $A'D$ cắt AB tại E .

Vậy thiết diện do $mp(A'MN)$ cắt lăng trụ là tứ giác $A'EMN$.

Ta có: $\frac{EA}{EB} = \frac{AA'}{BD} = \frac{2CN}{BD} = 2 \frac{MC}{MB} = 2$ (vì $AA' = CC' = 2CN$, $CN \parallel BD$ và $MB = MC$). Do đó $\frac{EA}{EB} = 2$.

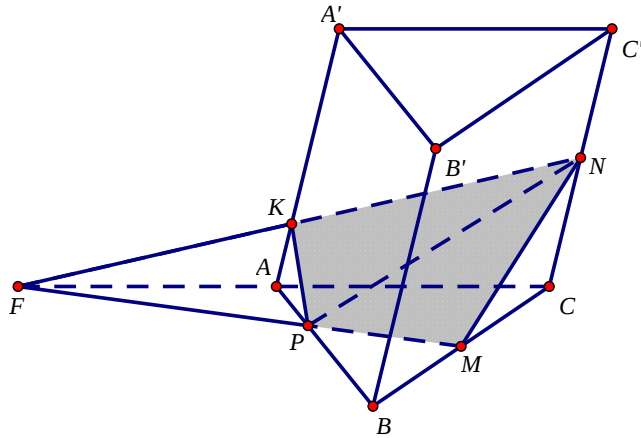
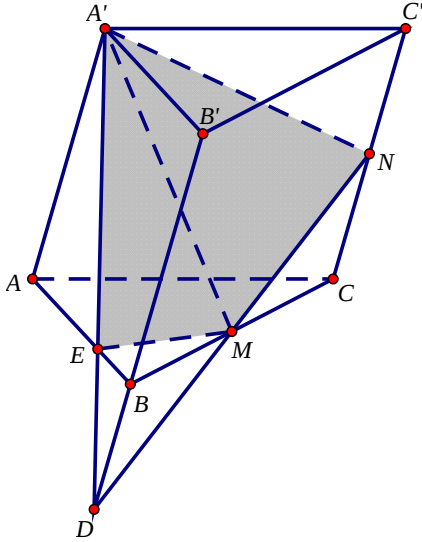
b. Trong mp(ABC): MP cắt AC tại F. Khi đó mp(MNP) chính là mp(MNF).

Trong mp(AA'C'C): NF cắt AA' tại K. Vậy thiết diện do mp(MNP) cắt lăng trụ là tứ giác MNPK.

Ta có: $\frac{KA}{AA'} = \frac{KA}{CC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{KA}{CN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{FA}{FC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (vì $AA' = CC' = 2CN$, $KA \parallel CN$).

Vậy $\frac{KA}{KA'} = \frac{1}{3}$.

Tam giác FBC có FM và BA là hai đường trung tuyến cắt nhau tại P nên P là trọng tâm tam giác FBC. Vậy theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{2}$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $B'B$ và BC . Xác định thiết diện của hình chóp cụt cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Giải

Gọi (α) là mp(MNP).

Trong mp(AA'B'B): MN cắt AB tại F và cắt AA' tại E.

Trong mp(ABC): FP cắt AC tại Q.

Trong mp(AA'C'C): QE cắt A'C' tại R.

Khi đó:

$$MN = (\alpha) \cap (AA'B'B)$$

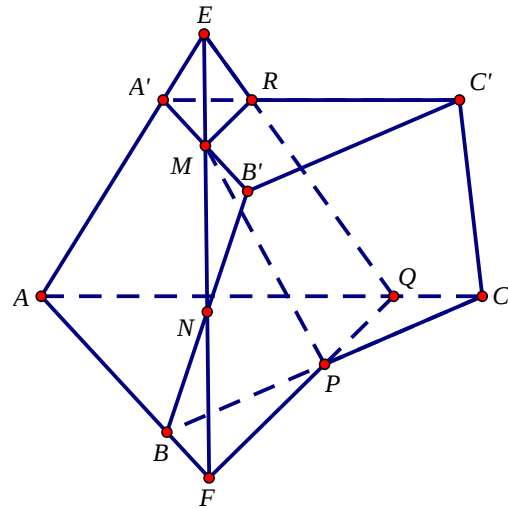
$$NP = (\alpha) \cap (BB'C'C)$$

$$PQ = (\alpha) \cap (ABC)$$

$$QR = (\alpha) \cap (AA'C'C)$$

$$RM = (\alpha) \cap (A'B'C')$$

Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác MNPQR.



Ví dụ 3. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$ và AC . Xác định thiết diện của hình chóp cụt cắt bởi mặt phẳng chứa MP và song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$.

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng chứa MP và song song với mp(BB'C'C).

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (BB'C'C) \\ (ABC) \cap (BB'C'C) = BC \\ P \in (ABC) \cap (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (ABC) \cap (\alpha) = PN \parallel BC \quad (N \in AB)$$

Vì P là trung điểm của AC nên N là trung điểm của AB.

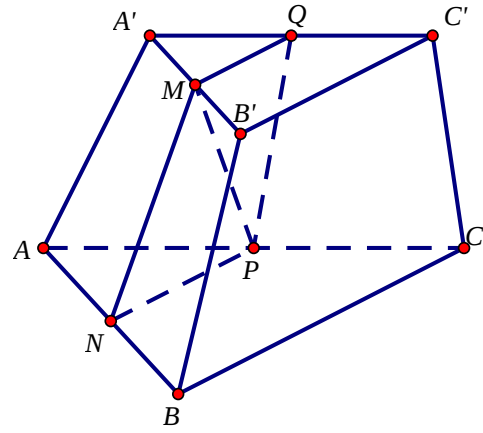
Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (BB'C'C) \\ (A'B'C') \cap (BB'C'C) = B'C' \\ M \in (A'B'C') \cap (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (A'B'C') \cap (\alpha) = MQ \parallel B'C' \quad (Q \in A'C')$$

Vì M là trung điểm của A'B' nên Q là trung điểm của A'C'.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} MN = (\alpha) \cap (AA'B'B) \\ PQ = (\alpha) \cap (AA'C'C) \end{cases}$$

Vậy thiết diện cần tìm là hình thang MNPQ ($MQ \parallel NP$).



Dạng 4: Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (NOM) cắt (OPM) .

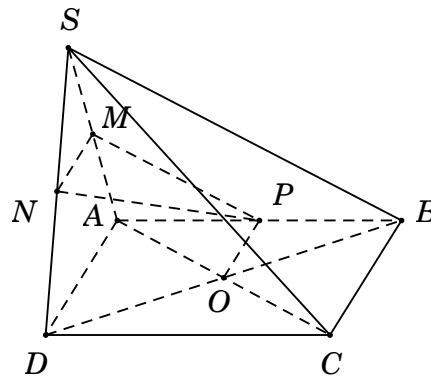
B. $(MON) \parallel (SBC)$.

C. $(PON) \cap (MNP) = NP$.

D. $(NMP) \parallel (SBD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN \parallel AD$. (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP \parallel AD$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $MN \parallel OP \parallel AD \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

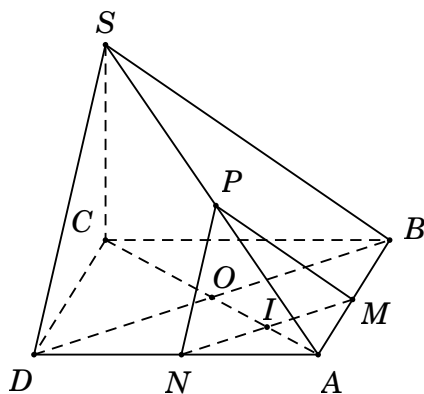
Lại có $MP \parallel SB, OP \parallel BC$ suy ra $(MNOP) \parallel (SBC)$ hay $(MON) \parallel (SBC)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

- A. Hình hình hành. B. Tam giác cân. C. Tam giác vuông. D. Tam giác đều.

Lời giải

Chọn D



Gọi MN là đoạn thẳng giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt đáy $(ABCD)$.

Vì $(P) \parallel (SBD)$, $(P) \cap (ABCD) = MN$ và $(SBD) \cap (ABCD) = BD$ suy ra $MN \parallel BD$.

Lập luận tương tự, ta có

(P) cắt mặt (SAD) theo đoạn giao tuyến NP với $NP \parallel SD$.

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với $MP \parallel SB$.

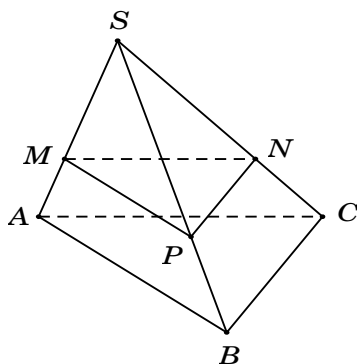
Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều MNP .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{16}{9}$. B. $\frac{14}{9}$. C. $\frac{25}{9}$. D. 1.

Lời giải

Chọn A



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 4$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC .

Vì $(P) \parallel (ABC)$ nên theo định lý Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác

ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$. Vậy $S_{\Delta MNP} = k^2 \cdot S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{16}{9}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6, CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

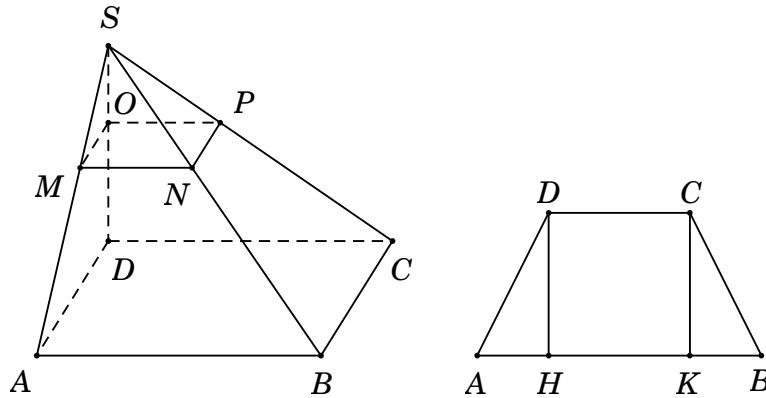
B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. 2.

D. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB .

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK; CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1$.

Tam giác BCK vuông tại K , có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK \cdot \frac{AB + CD}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{4 + 6}{2} = 5\sqrt{3}$.

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD .

Vì $(P) \parallel (ABCD)$ nên theo định lý Talet, ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm $O, AB = 8, SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB) . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $5\sqrt{5}$.

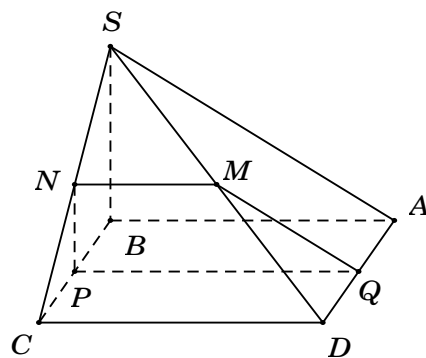
B. $6\sqrt{5}$.

C. 12.

D. 13.

Lời giải

Chọn B



Qua O kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AD lần lượt tại P, Q .

Kẻ PN song song với SB ($N \in SB$), kẻ QM song song với SA ($M \in SA$).

Khi đó $(MNPQ) \parallel (SAB) \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$

Vì P, Q là trung điểm của BC, AD suy ra N, M lần lượt là trung điểm của SC, SD .

Do đó MN là đường trung bình tam giác $SCD \Rightarrow MN = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} = 4$.

Và $NP = \frac{SB}{2} = 3; QM = \frac{SA}{2} = 3 \Rightarrow NP = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

Hạ NH, MK vuông góc với PQ . Ta có $PH = KQ \Rightarrow PH = \frac{1}{2}(PQ - MN) = 2$.

Tam giác PHN vuông, có $NH = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = NH \cdot \frac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}$.

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.
- B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.
- C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.
- D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Lời giải

Chọn C

Xét hình lăng trụ có đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác, ...), ta thấy rằng

Hình lăng trụ luôn có các cạnh bên song song và bằng nhau.

Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau (tam giác, tứ giác, ...)

Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành vì có hai cạnh là hai cạnh bên của hình lăng trụ, hai cạnh còn lại thuộc hai đáy song song.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.
- D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Lời giải

Chọn C

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành, chúng bằng nhau nếu hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

- Câu 8:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?
- A. Các cạnh bên của hình chóp cắt đôi một song song.
 B. Các cạnh bên của hình chóp cắt là các hình thang.
 C. Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.
 D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn C

Xét hình chóp cắt có đáy là đa giác (tam giác, tứ giác,...) ta thấy rằng:
 Các cạnh bên của hình chóp cắt đôi một cắt nhau.
 Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân.
 Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.

- Câu 9:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?
- A. Trong hình chóp cắt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
 B. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.
 C. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân.
 D. Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cắt đồng quy tại một điểm.

Lời giải

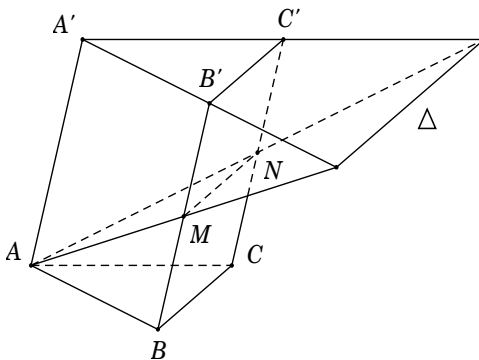
Chọn C

Với hình chóp cắt, các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.

- Câu 10:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\Delta \parallel AB$. B. $\Delta \parallel AC$. C. $\Delta \parallel BC$. D. $\Delta \parallel AA'$.

Lời giải

Chọn C

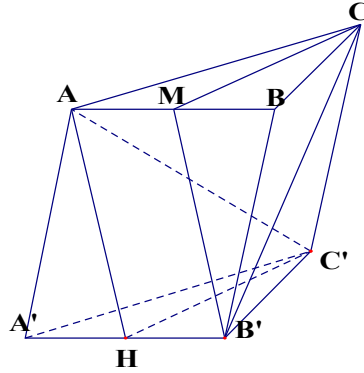


Ta có $\begin{cases} MN \subset (AMN) \\ B'C' \subset (A'B'C') \end{cases} \longrightarrow \Delta$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$ sẽ $MN \parallel B'C'$
 song song với MN và $B'C'$. Suy ra $\Delta \parallel BC$.

- Câu 11:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây?
- A. (AHC') . B. $(AA'H)$. C. (HAB) . D. $(HA'C)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?

A. CB' .

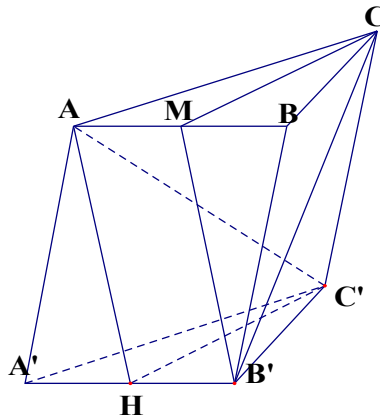
B. BB' .

C. BC .

D. BA' .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

B. $AA_1 \parallel (BCC_1)$.

C. $AB \parallel (A_1B_1C_1)$.

D. AA_1B_1B là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D

Vì mặt bên AA_1B_1B là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu $ABC.A_1B_1C_1$ là hình lăng trụ đứng.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $ABCD$ là hình bình hành.

B. Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B

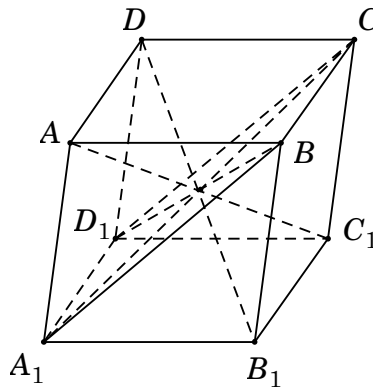
đồng quy.

C. $(ADD_1A_1) \parallel (BCC_1B_1)$.

D. AD_1CB là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào hình vẽ và tính chất của hình hộp chữ nhật, ta thấy rằng:

- Hình hộp có đáy $ABCD$ là hình bình hành.
- Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B cắt nhau tại tâm của AA_1C_1C, BDD_1B_1 .
- Hai mặt bên $(ADD_1A_1), (BCC_1B_1)$ đối diện và song song với nhau.
- AD_1 và CB là hai đường thẳng chéo nhau suy ra AD_1CB không phải là hình chữ nhật.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $(AA'B'B) \parallel (DD'C'C)$.

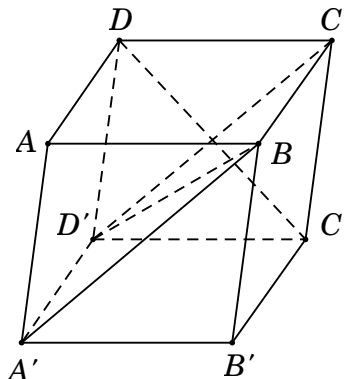
B. $(BA'D') \parallel (ADC')$.

C. $A'B'CD$ là hình bình hành.

D. $BB'D'D$ là một tứ giác.

Lời giải

Chọn B



- Mặt phẳng $(BA'D')$ chứa đường thẳng CD' mà CD' cắt $C'D$ suy ra $(BA'D')$ không song song với (ADC') .

D. 6 cạnh.

Đa giác thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng có nhiều nhất 5 cạnh với các cạnh thuộc các mặt của hình lăng trụ tam giác.

D. 7 cạnh.

Vì hình hộp là hình lăng trụ có đáy là tứ giác và có 6 mặt nên thiết diện của hình hộp và mặt phẳng bất kì là một đa giác có nhiều nhất 6 cạnh.

D. Hình chữ

I và song song với BD .

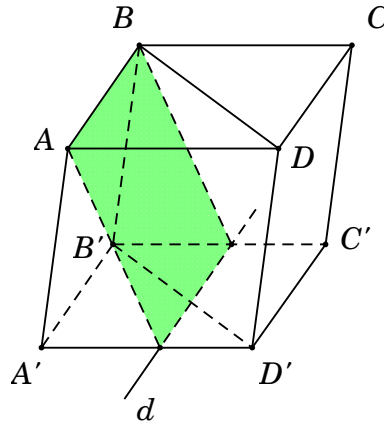
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = d \cap AD \longrightarrow IM \parallel BD \parallel B'D'$.

Khi đó thiết diện là tứ giác $IMB'D'$ và tứ giác này là hình thang.

- Câu 19:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T) . Khẳng định nào sau đây không **sai**?
- A.** (T) là hình chữ nhật. **B.** (T) là hình bình hành. **C.** (T) là hình thoi. **D.** (T) là hình vuông.

Lời giải

Chọn B



Giả sử mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và cắt hình hộp theo tứ giác (T) .

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta chứng minh được $AB \parallel d$ suy ra tứ giác (T) là một hình bình hành.

- Câu 20:** Cho hình chóp cắt tam giác $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

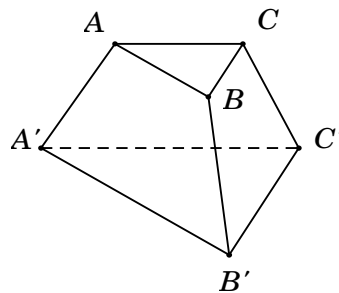
B. $\frac{1}{4}$.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B



Hình chóp cắt $ABC.A'B'C'$ có hai mặt đáy là hai mặt phẳng song song nên tam giác ABC

đồng dạng tam giác $A'B'C'$ suy ra $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{4}$.

BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) . Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt Δ tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng Δ hoặc nói gọn là theo phương Δ .

Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ .

Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp H' các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc H được gọi là hình chiếu của H qua phép chiếu song song nói trên.

Chú ý. Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Sau đây, ta chỉ xét các phép chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

Định lý 1

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

III. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn của các hình thường gặp

- + **Tam giác:** Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, v.v...)
- + **Hình bình hành:** Một hình bình hành bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật...)
- + **Hình thang:** Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

+ **Hình tròn:** Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

1. Phương pháp

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta cần chú ý một số điểm sau:

- Nếu trên hình H có hai đoạn thẳng cùng phương thì trên hình H' hình chiếu của hai đoạn thẳng đó phải cùng phương.
- Trung điểm của một đoạn thẳng có hình chiếu là trung điểm của đoạn thẳng hình chiếu.
- Trong tam giác có một góc tù, ta cần chú ý chân đường cao kẻ từ đỉnh của góc nhọn không nằm trên cạnh đối diện mà nằm ở trên phần kéo dài của cạnh ấy.
- Một góc bất kì có thể biểu diễn cho mọi góc (nhọn, vuông, tù).
- Một tam giác bất kì có thể là hình biểu diễn của mọi tam giác (cân, đều, vuông).
- Hình bình hành có thể dùng làm hình biểu diễn cho các hình có tính chất của hình bình hành (vuông, thoi, chữ nhật,...)
- Một đường tròn được biểu diễn bởi một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

2. Các ví dụ

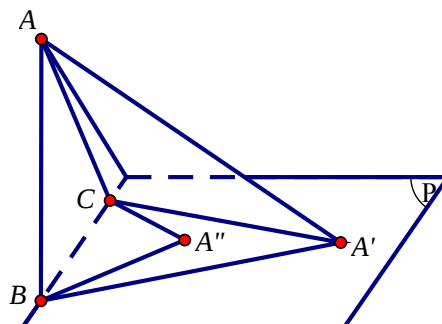
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là:

- Một tam giác cân.
- Một tam giác vuông.

Giải

Qua BC dựng mặt phẳng (P) không qua A.

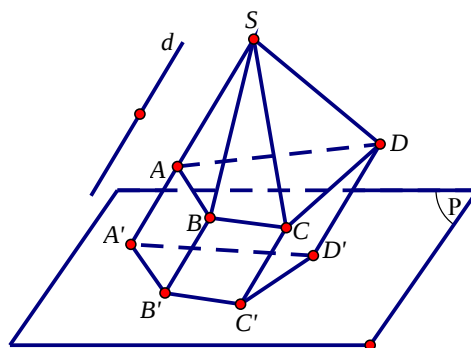
- Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA' cân tại A'. Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA' biến tam giác ABC thành tam giác BCA'.
- Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA'' vuông tại A''. Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA'' biến tam giác ABC thành tam giác vuông A''BC.



Ví dụ 2. Vẽ hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu SA (SA không song song với (P)).

Giải

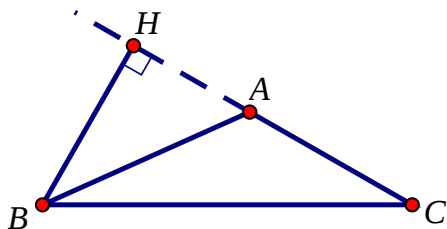
Vì phương chiếu d là SA nên SA cắt (P) tại A'. Các đỉnh B, C, D có hình chiếu trên (P) lần lượt là B', C', D' ($BB' \parallel AA', CC' \parallel AA', DD' \parallel AA'$). Vậy hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên (P) là tứ giác A'B'C'D'.



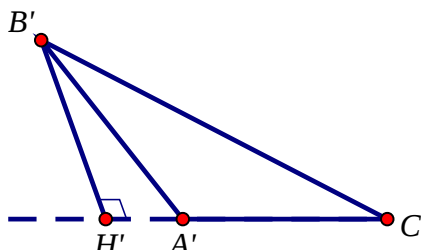
Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn của tam giác ABC có góc A tù, đường cao BH.

Giải

Xem hình vẽ sau:



Hình thật



Hình biểu diễn

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của đường tròn có hai đường kính vuông góc.

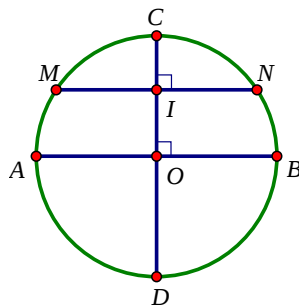
Giải

Giả sử trên hình thật ta có đường tròn tâm (O), tâm O, có hai đường kính AB và CD vuông góc. Nếu ta vẽ dây cung MN song song với AB thì CD sẽ cắt MN tại trung điểm I của MN.

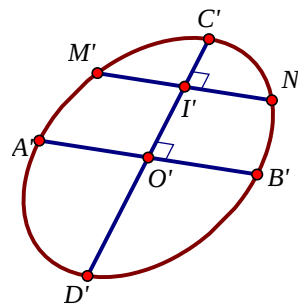
Suy ra cách vẽ hình biểu diễn như sau:

- Vẽ elip (E), tâm O' và đường kính $A'B'$ (qua O') của nó.
- Vẽ dây cung $M'N' \parallel A'B'$.
- Lấy I' là trung điểm của $M'N'$.

Đường thẳng $O'I'$ cắt elip (E) tại C', D' . Ta có $A'B'$ và $C'D'$ là hình biểu diễn hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn.



Hình thật



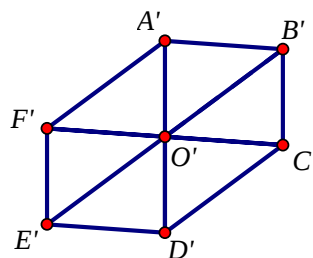
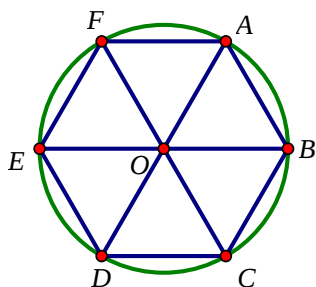
Hình biểu diễn

Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Giải

Xét hình lục giác đều ABCDEF, ta thấy:

- Tứ giác OABC là một hình thoi.
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O. Suy ra cách vẽ như sau:
- + Vẽ hình bình hành $O'A'B'C'$ biểu diễn cho hình thoi OABC.
- + Lấy các điểm D', E', F' đối xứng với các điểm A', B', C' qua O' .
- + $A'B'C'D'E'F'$ là hình cần vẽ.



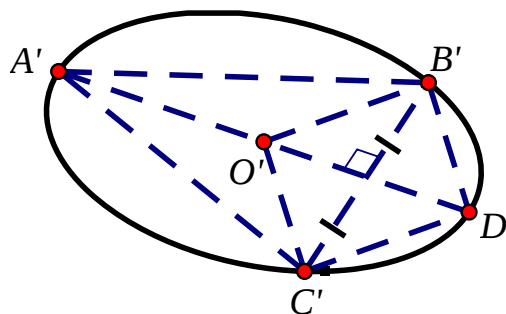
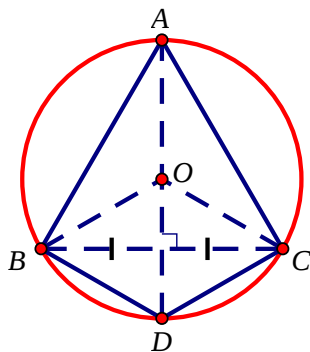
Hình biểu diễn lục giác đều

Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác đều.

Giải

Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, ta thấy tứ giác OBDC là hình thoi. Từ đó suy ra cách vẽ như sau:

- + Vẽ hình bình hành $O'B'D'C'$ biểu diễn cho hình thoi OBDC.
- + Lấy điểm A' là điểm đối xứng của D' qua O' .
- + Tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều cần tìm.



Hình biểu diễn tam giác đều

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song

1. Phương pháp

Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song thường là dựa vào các tính chất của phép chiếu song song để chứng minh một vấn đề nào đó. Cần chú ý rằng trong các bài toán dạng này, việc tìm phương chiếu đóng vai trò khá quan trọng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.

- Chứng minh hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là trọng tâm của tam giác BCD.
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AC. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N theo phép chiếu nói trên.

Giải

- Chứng minh G' là trọng tâm của tam giác BCD:

- Gọi I là trung điểm của CD. Qua phép chiếu song song phương AB thì IB là hình chiếu của IA trên mặt phẳng (BCD).

- Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự ba điểm A, G, I nên hình biểu diễn G' của G nằm trên BI và ở giữa B và I.

Trong tam giác IAB, ta có:

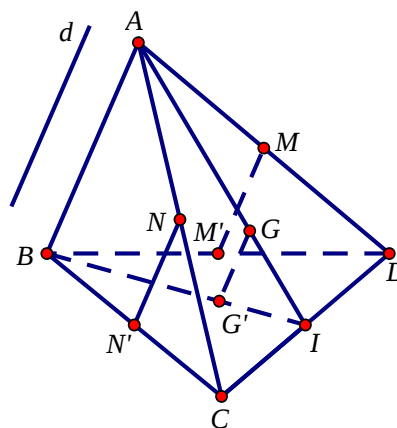
$$\left. \begin{array}{l} \frac{IG}{IA} = \frac{IG'}{IB} \\ \frac{IG}{IA} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{IG'}{IB} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra G' là trọng tâm của tam giác BCD.

- Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song phương AB trên mặt phẳng (BCD). Ta thấy:
 - BD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD); M là trung điểm của AD nên M' là trung điểm của BD.
 - BC là hình chiếu của AC trên mặt phẳng (BCD); N là trung điểm của AC nên N' là trung điểm của BC.

Ví dụ 2. Cho hai hình bình hành ABCD và BCC'B' nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN \parallel BC'$.

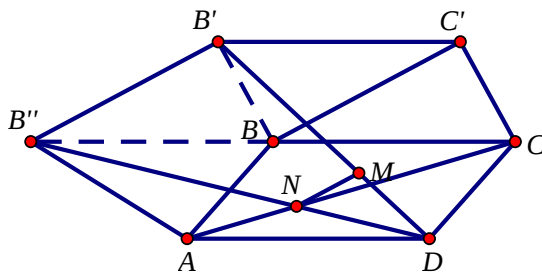
Giải



- Phân tích:

Giả sử đã tìm được $M \in DB'$ và $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC'$.

Xét phép chiếu song song theo phương BC' lên mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, B' lần lượt là D, N, B'' . Vì D, M, B' thẳng hàng nên D, N, B'' cũng thẳng hàng. Do đó, N là giao điểm của DB'' và AC . Từ đó, ta có cách dựng như sau:



- Cách dựng:

+ Dựng B'' là hình chiếu của B' qua phép chiếu theo phương BC' lên mặt phẳng $(ABCD)$.

+ Dựng N là giao điểm của DB'' và AC .

+ Trong mặt phẳng $(DB'B'')$, ta kẻ $NM \parallel B'B''$ cắt DB' tại M .

Vậy M và N là các điểm cần tìm.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.

B. Hình chiếu song song của một hình bình hành là một hình bình hành.

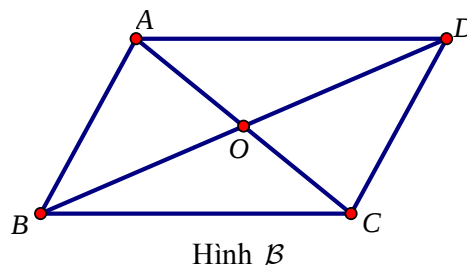
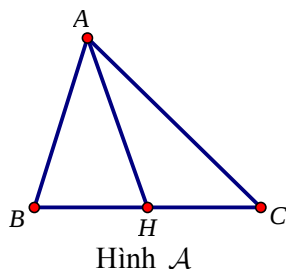
C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.

D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Trên hình $\mathcal{A}$ có $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB = HC \end{cases}$ và hình $\mathcal{B}$ có $\begin{cases} AB \parallel CD, AD \parallel BC \\ AC \perp BD \end{cases}$



Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. ABC là tam giác đều.

B. ABC là tam giác cân tại A.

C. ABCD là hình thoi.

D. B và C đúng.

Hướng dẫn giải

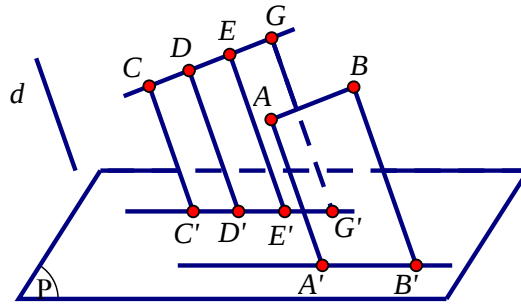
ĐÁP ÁN D.

Nhìn hình vẽ, ta thấy:

- Tam giác ABC có AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A $\rightarrow$ B đúng.

- Tứ giác ABCD có $AB \parallel CD, AC \parallel BD$ nên là hình bình hành. Mặt khác hai đường chéo của nó vuông góc nên ABCD là hình thoi $\rightarrow$ C đúng.

Câu 3. Trên hình $\mathcal{C}$, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P) ; $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Hình C

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$.

B. $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$.

C. $D'G' = A'B'$.

D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

The định lý 2, ta thấy câu A và câu B đúng. Từ câu A đúng suy ra câu C đúng.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.

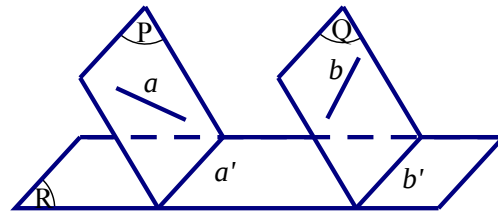
C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.

D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Dựng mặt phẳng (P) qua a và song song với b. Dựng mặt phẳng (Q) qua b và song song với a. Giả sử (P) song song với (Q). Ta chọn phương chiếu d song song với (P) và mặt phẳng chiếu (R) sao cho (R) cắt (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a' và b'. Khi đó hình chiếu a', b' song song với nhau.



Câu 5. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là hai đường thẳng a' và b'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a' và b' luôn luôn cắt nhau.

B. a' và b' có thể trùng nhau.

C. a và b không thể song song.

D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Gọi l là phương chiếu, (α) và (β) là các mặt phẳng song song với l và lần lượt đi qua a và b. Khi đó nếu (α) và (β) cắt nhau thì a' và b' cắt nhau, nếu (α) và (β) song song thì a' và b' song song.

Câu 6. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:

A. a và b phải song song với nhau.

B. a và b phải cắt nhau.

C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.

D. a và b không thể song song.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nếu $a' \parallel b'$ thì $mp(a, a') \parallel mp(b, b')$. Bởi vậy a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

Câu 7. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D có hình chiếu song song trên mặt phẳng (P) lần lượt là bốn điểm A', B', C', D' . Những trường hợp nào sau đây không thể xảy ra?

A. $A'B'C'D'$ là bốn đỉnh của một hình bình hành.

B. D' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

C. D' là trung điểm cạnh $A'B'$.

D. Hai điểm B', C' nằm giữa hai điểm A' và D' .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bốn điểm không đồng phẳng A', B', C', D' không thể thẳng hàng.

Câu 8. Hình chiếu song song của một hình thang $ABCD$ không thể là hình nào dưới đây?

A. Hình bình hành.

B. Hình tam giác cân.

C. Đoạn thẳng.

D. Bốn điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.