

CHỦ ĐỀ 04: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ Đường tiệm cận ngang

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty), (-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

❖ Đường tiệm cận đứng

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay *tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý:

- Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

❖ Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.
- Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}, y = \sqrt{f(x)} - g(x), y = g(x) - \sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang. (dùng liên hợp)
- Hàm $y = a^x, (0 < a \neq 1)$ có tiệm cận ngang $y = 0$.
- Hàm số $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

❖ Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- Tiệm cận ngang: tính 2 giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

❖ Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận.

- Nếu $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$.
- Nếu $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
 C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A. 2
 B. 1
 C. 3
 D. 4

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$, hai nghiệm này đều không là nghiệm của tử số nên đây là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4} = 2$, nên đường $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận.

- A. 3
 B. 1
 C. 4
 D. 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}, \forall x \neq 1$.

Khi đó ta thấy $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = 0$, nên đồ thị hàm số nhận $y = 0$ làm tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

VÍ DỤ 4. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x}-\sqrt{2x^2-3x}}$

- A. $y = 2; y = -2$.
 B. $y = \sqrt{2}; y = -\sqrt{2}$.
 C. $y = \sqrt{2}$.
 D. $y = 2$.

Lời giải

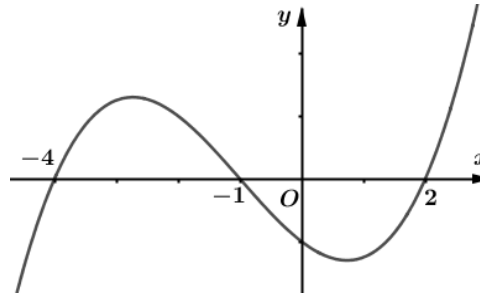
Chọn B

Tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x} + \sqrt{2x^2 - 3x}}{-2x} = -\sqrt{2}$

Và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x} + \sqrt{2x^2 - 3x}}{-2x} = \sqrt{2}$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \pm\sqrt{2}$

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{2x}{f(x)}$ có bao nhiêu đường **tiệm cận đứng**?

A. 3

B. 1

C. 4

D. 2

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $f(x) \neq 0$.

Từ đồ thị ta thấy $f(x) = 0$ khi $x = -4$, $x = -1$ và $x = 2$.

Khi đó $f(x) = a(x+4)(x+1)(x-2)$ có 3 nghiệm.

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

VÍ DỤ 6. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-5} + ax + b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $4a - b$ bằng:

A. -8.

B. 10.

C. -4.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-5} + ax + b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3x-5} + ax + b = 0$ có nghiệm kép $x = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2a + b = 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{2 \cdot 3 - 5}} + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy $4a - b = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = -8$.

VÍ DỤ 7. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{(x-1)(x^2+3x+3)}}{mx^2+2x-3}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ C. $m \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$. D. $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(x-1)(x^2+3x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Trường hợp 1:

Nếu $m = 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Do đó đồ thị hàm số không thể có ba đường tiệm cận.

Trường hợp 2:

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow mx^2+2x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thuộc nửa khoảng $[1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) \geq 0 \\ (x_1-1)+(x_2-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3m > 0 \\ \frac{-1}{m} \geq 0 \\ \frac{1+m}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 0. \text{ Vậy } m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) , gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 0.

B. 4.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$.

Với $x = m-2 \Rightarrow y = 1 - \frac{3}{m} : A\left(m-2; 1 - \frac{3}{m}\right) (m \neq 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) : $y = \frac{3}{m^2}(x-m+2) + 1 - \frac{3}{m}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = -2$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \frac{3}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{6}{m} \\ x = -2 \end{cases}$ nên $y_1 = 1 - \frac{6}{m}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \frac{3}{m} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2m - 2 \end{cases}$ nên $x_2 = 2m - 2$.

Suy ra $x_2 + y_1 = 2m - \frac{6}{m} - 1 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Vậy tổng bình phương các phân tử của S là $1^2 + (-3)^2 = 10$.

DẠNG 1**Cơ bản về tiệm cận của đồ thị hàm số**

- Câu 1:** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 2:** Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.
 A. 2 B. 3 C. 0 D. 1
- Câu 3:** Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.
 A. 3 B. 1 C. 2 D. 0
- Câu 4:** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là
 A. 1 B. 2 C. 0 D. 3
- Câu 5:** Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.
 A. $x = 3$ và $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = -3$ và $x = -2$. D. $x = -3$.
- Câu 6:** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là
 A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
- Câu 7:** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là
 A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 8:** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?
 A. 1 B. 3 C. 2 D. 4
- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?
 A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.
- Câu 10:** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là
 A. 4 B. 1 C. 3 D. 2
- Câu 11:** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?
 A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 12:** Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 13: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Câu 15: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 16: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

A. vô số.

B. 12.

C. 14.

D. 13.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14.

B. 8.

C. 15.

D. 16.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039.

B. 4040.

C. 4038.

D. 4037.

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 200.

B. 2.

C. 199.

D. 0.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$

B. $m \in \{1; 4\}$

C. $m = 4$

D. $m \in \{-1; -4\}$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m > 2$

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

- Câu 22:** Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.
A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6
- Câu 23:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 8x + 2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?
A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** Vô số
- Câu 24:** Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.
A. $m = 1$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \pm 1$ **D.** Không có m
- Câu 25:** Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.
A. $a = -1; b = 2$. **B.** $a = 4; b = 4$. **C.** $a = 1; b = 2$. **D.** $a = -1; b = -2$.
- Câu 26:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2 + 6x - m - 3}$ có hai đường tiệm cận đứng?
A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.
- Câu 27:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ bằng 3?
A. 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.
- Câu 28:** Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.
A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $\frac{3}{2}$.
- Câu 29:** Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + 2m^2 + 1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $-6; 6$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?
A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.
- Câu 30:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.
A. $m = 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m = 1$ và $m = 0$. **D.** $m \neq 0$.
- Câu 31:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $-2017; 2017$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.
A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2020.

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 33: Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

- A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

- A. $0 < m < 1$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m > 1$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 37: Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2019x}{\sqrt{17x^2-1-m|x|}}$ có bốn đường tiệm cận. Tính số phần tử của tập S .

- A. Vô số B. 3 C. 5 D. 4

Câu 38: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+mx+1} - \sqrt[3]{x^4+x+1+m^2x}}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $-10;10$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

- A. 12. B. 11. C. 0. D. 10.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

- A. $1 < m < 5$. B. $-1 < m < 2$. C. $m < 1$ hoặc $m > 5$. D. $m > 2$ hoặc $m < -1$.

Câu 41: Hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a - b$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 2016x + 2017} - 24\sqrt{7}}{x - m}$ có tiệm cận đứng?

- A. vô số. B. 2. C. 2017 D. 2019.

Câu 43: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 44: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $-10; 10$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x + 2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

- A. 12. B. 11. C. 0. D. 10.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1}$ có đúng một đường tiệm cận.

- A. $-1 \leq m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m < -1$. D. $m > 0$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.C	4.A	5.B	6.C	7.C	8.C	9.A	10.D
11.A	12.C	13.A	14.B	15.C	16.B	17.A	18.D	19.A	20.D
21.C	22.A	23.B	24.A	25.C	26.C	27.B	28.A	29.B	30.C
31.D	32.B	33.A	34.C	35.B	36.D	37.C	38.B	39.A	40.A
41.C	42.C	43.B	44.A	45.A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Tiệm cận ngang:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 5 \text{ nên đồ thị hàm}$$

số có một tiệm cận ngang $y = 5$.

Tiệm cận đứng:

$$\text{Cho } x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x+1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ nên } x = 1 \text{ không là tiệm}$$

cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} = -4 < 0 \end{cases}.$$

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 2: Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận ngang.}$$

Mặt khác:

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x = 1$ không là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-4)}{(x+1)} = +\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận

Câu 3: Chọn C

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$, nên đường thẳng $x = -2$

là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 4: Chọn A

Tập xác định của hàm số: $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty$.

$\Rightarrow$ TCD: $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow x = 0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 5: Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = -\frac{7}{6}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x = 2$ **không** là tiệm cận đứng của

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 6: Chọn C

Tập xác định hàm số $D = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = +\infty.$$

vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\sqrt{x+16}+4) = \sqrt{15}+4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \rightarrow (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$.

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 7: TXĐ: $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$$

Nên đường thẳng $x = -1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$$

Nên đường thẳng $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 8: Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)(\sqrt{x(4x+6)}+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)}+2} = \frac{-5}{2}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 2$.

Câu 9: Điều kiện: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận}$$

ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = 0 \text{ nên}$$

đường thẳng $x = -1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 10: Chọn D

$$\text{Đkxđ: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 11: Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1}$ có tập xác định $D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + x}{(3x + 1)(2x - \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x}{2x - \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{4};$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \frac{1}{2}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = 1 \text{ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang}$$

là $y = \frac{1}{3}$ và $y = 1$.

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 12: Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D = [-1; 0) \cup (2; +\infty)$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{25x^2 + 9x}{(x^2 - 2x)(5x + 1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{25x + 9}{(x - 2)(5x + 1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{2}{x}} = 0.$$

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x = 2$ và $y = 0$.

Câu 13: Chọn A

$$\text{Tập xác định: } D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$$

$$+ \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty$$

do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 - \frac{5}{x}} = -\frac{1}{3} \text{ do đó đường thẳng } y = -\frac{1}{3} \text{ là đường}$$

tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 14: Chọn B

$$\text{Tập xác định } D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (1)^-} y = +\infty.$$

$\Rightarrow$ Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow \text{đồ thị có một tiệm cận ngang } y = 1.$$

Câu 15: Chọn C

$$\text{Hàm số } y = \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1} + x}{x + 1} \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \\ x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

$$\text{Tập xác định của hàm số đã cho là } D = (-\infty; -1) \cup \left[-1; \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right) \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; +\infty\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1} + x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + x}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

$\Rightarrow y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = 3. \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)(\sqrt{4x^2+2x-1}-x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(\sqrt{4x^2+2x-1}-x)} = -2.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

Câu 16: Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-6x+2m > 0 \end{cases}.$$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } x_1, x_2 \text{ lớn hơn } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-2m > 0 \\ x_1+x_2 > -2 \\ (-2)^2-6 \cdot (-2)+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ 3 > -2 \\ 4+12+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m > -8 \end{cases}.$$

Do đó tập $S = \{-7; -6; -5; \dots; 4\}$ có 12 giá trị.

Câu 17: Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$$x^2-8x+m=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16-m > 0 \\ m-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; \dots; 6; 8; \dots; 15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 18: Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng (*).

$$\text{Có } x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=(x-m)(x^2-2mx+1)$$

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(*) $\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow m \neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 2m \cdot m + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 2m \cdot 3 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3, m \neq \frac{5}{3} \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020; -2019; \dots; -2; 2; 4; 5; \dots; 2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 19: Chọn A

Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases} x \neq m \\ x \in (0; 2) \end{cases}$, khi đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \infty$

Suy ra $x = 0$, $x = 2$ là hai đường tiệm cận đứng

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$, theo bài m thuộc đoạn $[-100; 100]$

. Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Câu 20: $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2 + m = 0$ nhận nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó: $\begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$.

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 21: Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Câu 22: Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x = -\frac{d}{c} = -m-3=0$ làm TCD $\Rightarrow m = -3$

Đồ thị hàm số nhận $y = \frac{a}{c} = n-3=0$ làm TCN $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m+n=0$.

Câu 23: Trường hợp 1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2: $m = 0 \Rightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 4)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} y = -\infty$. Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

Trường hợp 3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} 16-2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m-8+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}. \text{ Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của}$$

tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 24: Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a), (-\infty; a], (a; +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$

$m \geq 0$

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x+7}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

Trường hợp 2: $m > 0, y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định. Vậy $m = 1$

Câu 25: Chọn C

$+b=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b \neq 0$, tập xác định của hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{b} \right\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+1}{bx-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{b - \frac{2}{x}} = \frac{a}{b}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}^+} \frac{ax+1}{bx-2} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1; b = 2$.

Câu 26: Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình

$$2x^2+6x-m-3=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2-2(-m-3)>0 \\ 2.1^2+6.1-m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{15}{2} \\ m \neq 5 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 27: Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Xét điều kiện tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

$$\text{Trường hợp 1: } g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{16}{9}$$

Trường hợp 2: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm

$$\text{của } g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{16}{9}$$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m > 0$

Xét trường hợp $x = -2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x = -2$ là nghiệm của $g(x) = mx^2 + 3mx + 4$

$$\Rightarrow g(-2) = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\text{Khi đó } y = \frac{\sqrt{2x^2 + 6x + 4}}{x+2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \frac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}} \right] = -\infty$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2 \Rightarrow m = 2$ thỏa mãn

Xét trường hợp $x = -2$ không là nghiệm của tử số, để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm

$$\text{số thì } \begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1, m = 2$.

Câu 28: Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2$$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 1$ hoặc $f(x) = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2 - 2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m = 1; m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\frac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn B

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3 - 3mx^2 + 2m^2 + 1 x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x \neq 3$.

Xét phương trình $x^3 - 3mx^2 + 2m^2 + 1 x - m = 0$ ta có

$$x^3 - 3mx^2 + 2m^2 + 1 x - m = 0 \Leftrightarrow x - m \quad x^2 - 2mx + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}$$

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và phương trình

$$x^2 - 2mx + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \\ m < -1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Do m nguyên và $m \in -6; 6$ nên $m \in -6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 30: Chọn C

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} \left(2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m} \right).$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$,

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Câu 31: Chọn D

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có

hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 12 + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2017 \leq m < 4 \\ m \neq -12 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in -2017; -2016; \dots; 3 \setminus -12.$$

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3 - (-2017) + 1 - 1 = 2020$ giá trị.

Câu 32: Chọn B

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

$$\Leftrightarrow 2019m = 2020m^4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\frac{2019}{2020}} \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán

Câu 33: Chọn A

Điều kiện $x > m$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Xét phương trình } [x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 (*) \end{cases}$$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $m < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 > 0 \\ (x_1-m)(x_2-m) > 0 \\ x_1+x_2 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ x_1x_2 - m(x_1+x_2) - m^2 > 0 \\ 2m+1 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m-m^2 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$$

Câu 34: Chọn C

Đặt $f(x) = mx^2 - 6x + 3$ và $g(x) = 9x^2 + 6mx + 1$. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó ta có $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận

ngang là đường thẳng $y = 0$ do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ và cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_f < 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m < 0 \\ 9m^2-9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Trường hợp 3: Tam thức $g(x)$ nhận $x = \frac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{13}{12}$ khi đó $f(x)$

luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1

đường tiệm cận

Câu 35: Chọn B

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k

$$\text{sao cho: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = k \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = k \end{cases}$$

Hiển nhiên nếu $m \leq 0$ thì giới $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{mx^2+1})$ không hữu hạn

Nếu $m > 0$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-m)-1}{x-\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-m)-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}$$

Để giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 36: Chọn D

Với $m = 0$; ta có hàm số $y = \frac{x-2}{-2x+4} = -2 \Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2 - 2x + 4 = 0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2 - 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

$$mx^2 - 2x + 4 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

$$mx^2 - 2x + 4 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm } x = 2. \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{2019}{m - \sqrt{17}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{2019}{\sqrt{17} - m}.$$

$$\text{Với } m \neq \sqrt{17} \text{ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là } y = \frac{2019}{m - \sqrt{17}}, \quad y = \frac{2019}{\sqrt{17} - m}.$$

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $\sqrt{17x^2 - 1} - m|x| = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \sqrt{17x^2 - 1} = m|x| \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17x^2 - 1 = m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ (17 - m^2)x^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < \sqrt{17}.$

Suy ra $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$

Câu 38: Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2x}{x}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 1} - 1}{x} + \frac{m^2x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3 + mx}{x(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{x^4 + x}{x(\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1)} + m^2 \right].$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2 + m)}{(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{(x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1} + m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{3} + m^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0 \text{ Vậy } m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 39: Chọn A

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = -1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \frac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m > 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = -\infty; 0 \cup m; +\infty$.

$x = -2 \in D$. $g(-2) = \sqrt{2(m+2)} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 1, m = 2, \dots, m = 9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m .

Trường hợp 3: $m < 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = -\infty; m \cup 0; +\infty$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \in D$ hay $m \geq -2$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thỏa mãn.

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{x(x+2)} - 1 = -1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 40: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ không tồn tại. Suy ra $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m - 1$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$			$m-1$		$m-5$		$+\infty$
	$-\infty$						

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m - 5 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Câu 41: Chọn A

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x) = \sqrt{3x+1} + ax + b = (x-1)^2 g(x)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2=0 \\ a+\frac{3}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=-\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=\frac{1}{2} \rightarrow \text{đáp án A.}$$

Chú ý: Với $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$ thì ta luôn có $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Câu 42: Chọn C

Biểu thức: $\sqrt{-x^2 + 2016x + 2017}$ có nghĩa khi $-x^2 + 2016x + 2017 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2017$.

Đặt $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2016x + 2017}$.

Xét $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$. Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x = m$, khi đó điều kiện

$$\text{là: } \begin{cases} -1 \leq x \leq 2017 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1; 2017] \\ \sqrt{-m^2 + 2016m + 2017} \neq 24\sqrt{7} (*) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow m^2 - 2016m + 2015 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2015 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow m \in [-1; 2017] \setminus \{1; 2015\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}}$ có $2019 - 2 = 2017$ số nguyên m thỏa mãn bài toán $\rightarrow$ đáp án C.

Câu 43: Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2 x}{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2 x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 1} - 1}{x} + \frac{m^2 x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3 + mx}{x(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{x^4 + x}{x(\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1)} + m^2 \right]. \end{aligned}$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2 + m)}{(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{(x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1} + m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{3} + m^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0 \text{ Vậy } m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 44: Chọn A

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = -1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \frac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m > 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = -\infty; 0 \cup m; +\infty$.

$x = -2 \in D$. $g(-2) = \sqrt{2m+2} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 1, m = 2, \dots, m = 9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m .

Trường hợp 3: $m < 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = -\infty; m \cup 0; +\infty$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \in D$ hay $m \geq -2$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thỏa mãn.

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $g(-2) = \sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x+2} - 1$, $g(-2) = \sqrt{x+2} - 1 = -1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 45: Chọn A

Nếu $m = 0$ thì $y = \frac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Nếu $m > 0$ thì $mx^2 + 1 > 0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{m}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -\sqrt{m}$. Suy ra đồ thị

hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m > 0$ không thỏa mãn.

Nếu $m < 0$ thì tập xác định của hàm số là $D = \left[-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}}\right] \setminus \{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$$-\sqrt{-\frac{1}{m}} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{1}{m}} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy với $-1 \leq m < 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

DẠNG**Bài tập tiệm cận của đồ thị hàm số nâng cao**

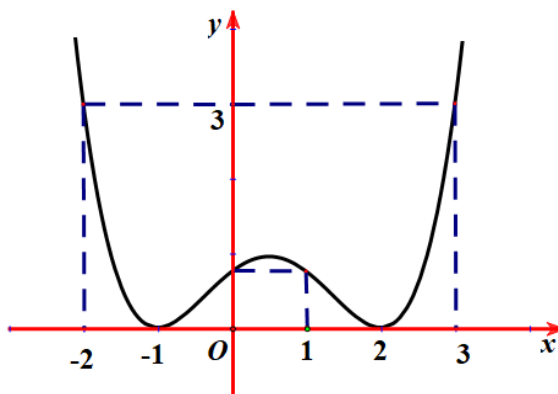
Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

- A. 4039. B. 4040. C. 4038. D. 4037.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{20 + \sqrt{6x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 8x + 2m}}$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng

- A. $m \in [6; 8)$. B. $m \in (6; 8)$. C. $m \in [12; 16)$. D. $m \in (0; 16)$.

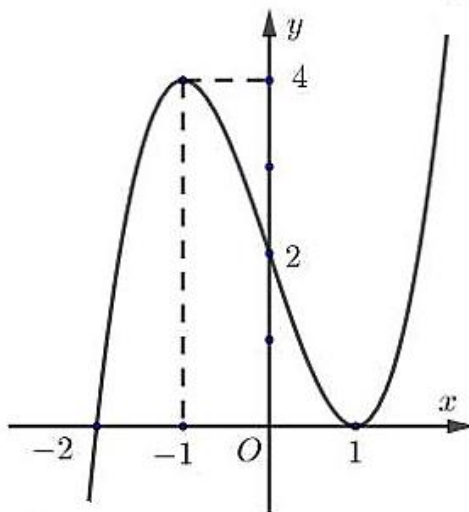
Câu 3: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)^4 (x - 3)(x^3 + 1)}{f(f(x) - 1)}$ là

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ dưới đây:



Đồ thị của hàm số $g(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{3f^2(x) - 6f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

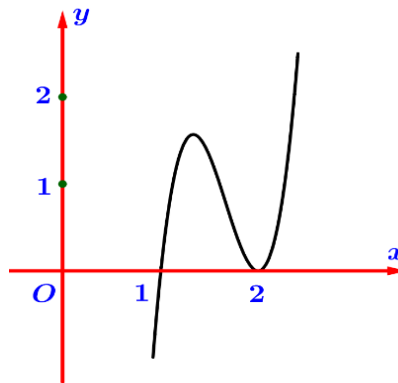
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3		-1	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

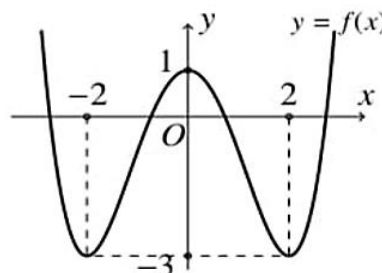
$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 7: Cho hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-5)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $a^2 + b^3$

- A. $\frac{-4841}{152}$. B. $\frac{-4814}{152}$. C. $\frac{4841}{152}$. D. $\frac{4814}{152}$.

Câu 9: Biết rằng tích phân $I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \left(1 + x + \frac{4}{x^2}\right) \cdot e^{x - \frac{2}{x^2}} dx = 3 \cdot e^{\frac{a}{b}} - \frac{1}{3} e^{\frac{-c}{d}}$, trong đó các phân số $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ tối giản.

Hãy xác định phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

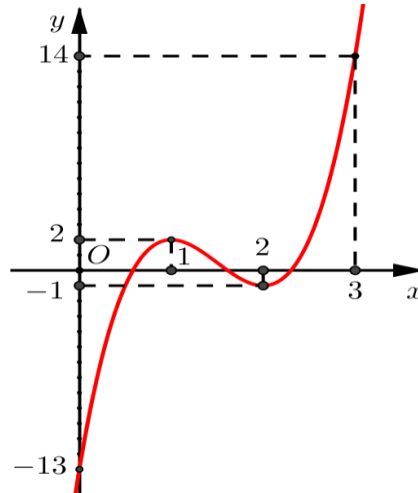
A. $y = \frac{25}{3}$.

B. $y = \frac{25}{53}$.

C. $y = \frac{25}{9}$.

D. $y = 3$.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(f(x)+1)-m}$ có 4 đường tiệm cận bằng

A. 15.

B. 1.

C. 13.

D. 11.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{6x-3} + mx - 2m - 3}{3x^3 - 14x^2 + 20x - 8}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Câu 12: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $f(x) = \frac{(\sqrt[3]{9-x^2} - 2)\ln(x+1)}{x^3 - x}$ là:

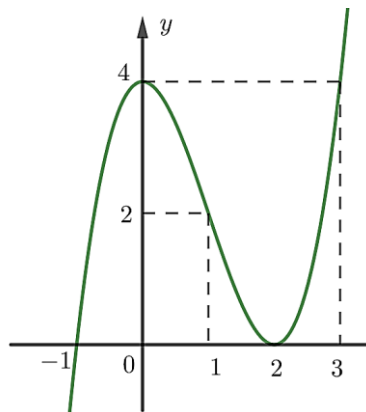
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 13: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

Gọi M, m lần lượt là số tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 2x - 3) \cdot \sqrt{x^2 - x} \cdot \sqrt{x^4 - 17x^2 + 16}}{|f(x) - 2| \cdot (2x^2 - 3x)}. \text{ Khi đó mệnh đề nào đúng?}$$

- A. $2M = 3m$. B. $M = 3m$. C. $M = 2m$. D. $M = m$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y = \frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)}$ có tổng số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 15: Đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{4x^3 - 20x^2 + (m+24)x - 2m}{20x^2 + 14x + 9 - (14x+11)\sqrt{2x^2+1}}$ có đồ thị là (C) . Gọi S là tập hợp

các giá trị của m để (C) có đúng một tiệm cận đứng. Tổng các giá trị trong S là

- A. -1. B. -3. C. -5. D. -7.

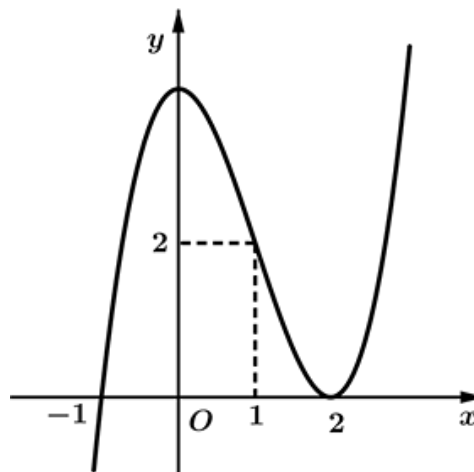
Câu 17: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai đường tiệm cận ngang $y = -5, y = 1$. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

- A. $m = 1$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x \cdot (\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1})$. Biết rằng đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang bằng $y = \frac{5}{4}$. Giá trị $a + b$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-5; -3)$. B. $(-3; 0)$. C. $(0; 3)$. D. $(3; 5)$.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau đây:



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}(x-2)}{f^2(x)-2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 2 B. 4. C. 3. D. 1.

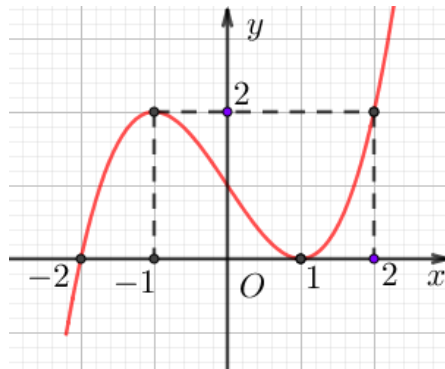
Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+4}$ có 3 đường tiệm cận.

- A. $m < 2$. B. $-2 < m < 2$. C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

Câu 21: Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+m^2-2m-6}$ có đúng hai đường tiệm cận. Số phần tử của S là:

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình dưới đây.



Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để đồ thị hàm số

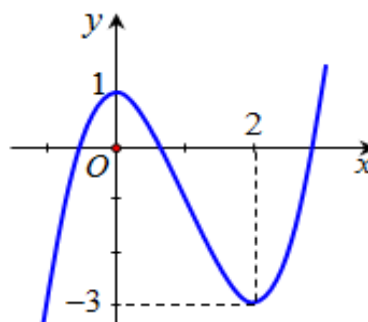
$g(x) = \frac{(x+1)\sqrt{f(x)}}{(f(x)-2)(x^2-2mx+m+2)}$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang).

Số phần tử của tập S là

- A. 2016. B. 4034. C. 4036. D. 2017.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$g(x) = \frac{(x^2-2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)[f^2(x)+3f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



- A. 4. B. 3. C. 5. D. 6.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.A	4.C	5.B	6.C	7.D	8.A	9.B	10.D
11.B	12.C	13.C	14.A	15.C	16.C	17.C	18.D	19.	20.
21.	22.	23.							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng 3 đường tiệm cận đứng, hay khi $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Ta có $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - 2mx + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ f(x) = x^2 - 2mx + 1 = 0(2) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt khác 3 và } m \text{ khi } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(3) \neq 0 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 6m + 1 \neq 0 \\ m^2 - 2m^2 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \\ m \neq \frac{5}{3} \\ m \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ nên có 4038 giá trị của tham số m .

Câu 2: Chọn B

Ta có tập xác định của hàm số phải thỏa mãn $6x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là phương trình $x^2 - 8x + 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < x_2 < 6$.

Ta có: $x^2 - 8x = -2m$. Đặt $f(x) = x^2 - 8x$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$.

x	0	4	6
$f(x)$	0	-16	-12

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -16 < -2m < -12 \Leftrightarrow 6 < m < 8$.

Câu 3: Chọn A

Hàm số bậc bốn có dạng $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$). Ta có: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ đồ thị trong hình vẽ đã cho ta thấy: Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $(-1;0), (x_0; y_0), (2;0)$ với $0 < x_0 < 1; y_0 > 0$. Ngoài ra đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;3), (3;3)$.

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} y'(-1)=0 \\ y'(2)=0 \\ y(-1)=0 \\ y(2)=0 \\ y(-2)=3 \\ y(3)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+3b-2c+d=0 \\ 32a+12b+4c+d=0 \\ a-b+c-d+e=0 \\ 16a+8b+4c+2d+e=0 \\ 16a-8b+4c-2d+e=3 \\ 81a+27b+9c+3d+e=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \\ d=4 \\ e=4 \end{cases}$$

Suy ra bậc bốn $y = f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$.

Ta có: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = (x+1)^2(x-2)^2$.

$$\text{Từ đó ta có hàm số } y = \frac{(x^2-4)^4(x-3)(x^3+1)}{f(f(x)-1)} \Leftrightarrow y = \frac{(x^2-4)^4(x-3)(x^3+1)}{f((x+1)^2(x-2)^2-1)}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(x-2)^4(x+2)^4(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}{\left((x+1)^2(x-2)^2\right)^2 \left((x+1)^2(x-2)^2-3\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(x-2)^4(x+2)^4(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^4(x-2)^4 \left((x+1)^2(x-2)^2-3\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow y = g(x) = \frac{(x-2)^4(x+2)^4(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^4(x-2)^4(x^2-x-2-\sqrt{3})^2(x^2-x-2+\sqrt{3})^2}.$$

$$\text{Xét } (x+1)^4(x-2)^4(x^2-x-2-\sqrt{3})^2(x^2-x-2+\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1+\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2} = x_1 \\ x = \frac{1-\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2} = x_2 \\ x = \frac{1+\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{2} = x_3 \\ x = \frac{1-\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{2} = x_4 \end{cases}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{-256}{81}$; $\lim_{x \rightarrow x_1} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_2} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_3} g(x) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow x_4} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0.$$

Suy ra đồ thị hàm số có 5 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 4: Chọn C

$$\text{Xét phương trình } 3f^2(x) - 6f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra:

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}, \text{ với } x = -2 \text{ là nghiệm đơn và } x = 1 \text{ là nghiệm kép.}$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = a(x+2)(x-1)^2, (a \neq 0).$$

$$\text{Phương trình } f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m (-2 < m < -1), \text{ các nghiệm đều là nghiệm đơn.} \\ x = n (n > 1) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(x) - 2 = ax(x-m)(x-n), (a \neq 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } g(x) &= \frac{(x-1)(3x+2)}{3f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x-1)(3x+2)}{3a^2(x+2)(x-1)^2 x(x-m)(x-n)} \\ &= \frac{(3x+2)}{3a^2 x(x+2)(x-1)(x-m)(x-n)}, (a \neq 0) \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Cách 2: Chọn hàm số $f(x)$. Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Đồ thị hàm số qua 4 điểm $A(-2;0), B(-1;4), C(0;2), D(1;0)$.

$$\text{suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hay } f(x) = x^3 - 3x + 2$$

♦ Khi đó:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3x^2 - x - 2}{3f^2(x) - 6f(x)} = \frac{3x^2 - x - 2}{3f(x)(f(x) - 2)} = \frac{3x^2 - x - 2}{3(x^3 - 3x + 2)(x^3 - 3x)} \\ &= \frac{(x-1)(3x+2)}{3(x+2)(x-1)^2 x(x^2-3)} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Câu 5: Chọn B

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ xác định khi } \begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ f(x) \neq \pm 1 \end{cases}$$

Ta có $y = f(x)$ là hàm bậc ba và dựa vào bảng biến thiên ta có $y' = a(x^2 - 1)$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{3}x^3 - ax + b.$$

$$\begin{cases} y(-1)=3 \\ y(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3}+a+b=3 \\ \frac{a}{3}-a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|x^3-3x+1|-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} - 3\sqrt{\frac{4}{x^5} + \frac{5}{x^6}}}{\left|1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right| - \frac{1}{x^3}} = 0$$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$g(x) = \frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1} = \frac{(4x^2-8x+4)(|f(x)|+1)}{(f^2(x)-1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$= \frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{(f(x)-1)(f(x)+1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$= \frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(x-1)^2(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$= \frac{4(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \end{cases} \text{ (vì } x \geq -\frac{5}{4} \text{)}$$

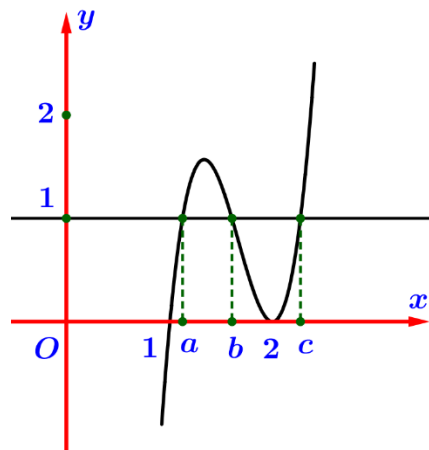
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{3} \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$ và tiệm cận đứng là $y=\sqrt{3}$

Câu 6: Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $x \geq 1$.



$$\text{Xét phương trình } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

Xét phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = 2$ và nghiệm đơn $x = 1$.

$$\text{Xét phương trình } f(x) = 1 \text{ có ba nghiệm đơn } \begin{cases} x = a, 1 < a < 2 \\ x = b, 1 < b < 2, b \neq a \\ x = c, c > 2 \end{cases} \text{ . Ta thấy } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

Nên không mất tính tổng quát, ta có

$$+ f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$$

$$+ f(x) = 1 \Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

Do đó:

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]} = \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Khi đó

$$+ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \end{cases} \text{ không tồn tại giới hạn } \Rightarrow x = 0 \text{ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số } g(x)$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty.$$

$\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = 0.$$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường tiệm cận.

Câu 7: Chọn D

$$\text{Ta có: } y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} = \frac{(x-2)(x+2)x(x+2)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} = \frac{(x-2)(x+2)^2 x}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}.$$

$$\text{Xét } [f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m, m < -2 \\ x = 0 \\ x = n, n > 2 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0$; $x=\pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2).

Do đó đa thức $[f(x)]^2 + 2f(x) - 3$ có bậc là 8.

$$\text{Suy ra } y = \frac{(x-2)(x+2)^2 x}{a^2 x^2 (x+2)^2 (x-2)^2 (x-m)(x-n)} = \frac{1}{a^2 x(x-2)(x-m)(x-n)}.$$

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$, $x=2$, $x=m$, $x=n$.

Câu 8: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \sqrt{3x+1} + ax + b \text{ có } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} + a$$

Để hàm số không có tiệm cận đứng: $f(x) = (x-5)^2 \cdot g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(5) = 0 \\ f'(5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} + a \cdot 5 + b = 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 5 + 1}} + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = -4 \\ a = \frac{-3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-17}{8} \\ a = \frac{-3}{8} \end{cases}$$

$$\text{Nên } a^2 + b^3 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{-4814}{152}$$

Câu 9: Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{3}}^3 e^{\frac{x-2}{x^2}} dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{x-2}{x^2}} dx = I_1 + I_2, \text{ với } I_1 = \int_{\frac{1}{3}}^3 e^{\frac{x-2}{x^2}} dx; I_2 = \int_{\frac{1}{3}}^3 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{x-2}{x^2}} dx.$$

Tính $I_1 = \int_{\frac{1}{3}}^3 e^{x-\frac{2}{x^2}} dx$. Đặt $\begin{cases} u = e^{x-\frac{2}{x^2}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1 + \frac{4}{x^3}\right) e^{x-\frac{2}{x^2}} dx \\ v = x \end{cases}$.

Ta có $I_1 = x \cdot e^{x-\frac{2}{x^2}} \Big|_{\frac{1}{3}}^3 - \int_{\frac{1}{3}}^3 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) \cdot e^{x-\frac{2}{x^2}} dx = 3e^{\frac{25}{9}} - \frac{1}{3}e^{\frac{-53}{3}} - I_2$.

Do vậy $I = I_1 + I_2 = 3e^{\frac{25}{9}} - \frac{1}{3}e^{\frac{-53}{3}}$.

Ta có $a = 25; b = 9; c = 53; d = 3$. Suy ra hàm số $y = \frac{25x+9}{53x+3}$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \frac{25x+9}{53x+3}$ có phương trình đường tiệm cận ngang $y = \frac{25}{53}$.

Câu 10: Chọn D

Ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận thì phương trình $f(f(x)+1) - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đặt $h(x) = f(f(x)+1)$. Khi đó, $h'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)+1)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x)+1 = 1 \\ f(x)+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{1, 2\} \\ x \in \{x_1; x_2; x_3\} \\ x \in \{x_4; x_5; x_6\} \end{cases}$$

$$(x_1 < x_4 < 1 < x_5 < x_2 < 2 < x_3 < x_6)$$

Ta có $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = f(f(x_1)+1) = 2$;

$h(x_4) = h(x_5) = h(x_6) = f(f(x_4)+1) = -1$; $h(1) = f(f(1)+1) = 14$; $h(2) = f(f(2)+1) = -13$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_4	1	x_5	x_2	2	x_3	x_6	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	-	0	+
$h(x)$				14							
		↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	
		2	-1		-1	2		-13	2	-1	

Căn cứ vào bảng biến thiên để phương trình $f(f(x)+1) - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases} 2 < m < 14 \\ -13 < m < -1 \end{cases}$$

Câu 11: Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{6x-3} + mx - 2m - 3}{3x^3 - 14x^2 + 20x - 8} = 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

$$\text{Ta có } y = f(x) = \frac{\sqrt{6x-3} + mx - 2m - 3}{(x-2)^2(3x-2)}.$$

Yêu cầu bài toán trở thành, tìm m để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận đứng $x = 2$ hoặc $x = \frac{2}{3}$.

Nếu $\sqrt{6x-3} + mx - 2m - 3$ nhận $x = \frac{2}{3}$ là nghiệm thì $m = -\frac{3}{2}$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{6x-3} - \frac{3}{2}x}{(x-2)^2(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{-3}{4(x-2)\left(\sqrt{6x-3} + \frac{3}{2}x\right)} = \frac{9}{32}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{6x-3} - \frac{3}{2}x}{(x-2)^2(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{4(x-2)\left(\sqrt{6x-3} + \frac{3}{2}x\right)} = -\infty.$$

Suy ra $x = 2$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Nếu $\sqrt{6x-3} + mx - 2m - 3 = (x-2)\left(\frac{6}{\sqrt{6x-3}+3} + m\right)$ nhận $x = 2$ là nghiệm kép thì $m = -1$.

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^+} \frac{\sqrt{6x-3} - x - 1}{(x-2)^2(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^+} \frac{-1}{(3x-2)\left(\sqrt{6x-3} + x + 1\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6x-3} - x - 1}{(x-2)^2(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(3x-2)\left(\sqrt{6x-3} + x + 1\right)} = -\frac{1}{24}$$

Suy ra $x = \frac{2}{3}$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Vậy có hai giá trị của $m \in \left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Chọn C

Tập xác định: $D = (-1; +\infty) \setminus \{0; 1\}$.

Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2} - 2\right)\ln(x+1)}{x^3 - x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2} - 2\right)\ln(x+1)}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2} - 2\right)}{x^2 - 1} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 - \sqrt[3]{9}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2} - 2\right)\ln(x+1)}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2} - 2\right)}{x^2 - 1} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 - \sqrt[3]{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(1-x^2)\ln(x+1)}{(x^2-1)x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-\ln(x+1)}{x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x^2)\ln(x+1)}{(x^2-1)x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln(x+1)}{x\left(\sqrt[3]{(9-x^2)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)} = \frac{1}{12}\ln 2.$$

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x} = \frac{1}{12}\ln 2.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận $y=0$ và $x=-1$.

Câu 13: Chọn C

Từ giả thiết, ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

$$\text{Gọi } (C) \text{ là đồ thị hàm số } y = g(x) = \frac{(x^2 - 2x - 3) \cdot \sqrt{x^2 - x} \cdot \sqrt{x^4 - 17x^2 + 16}}{|x^3 - 3x^2 + 2| \cdot (2x^2 - 3x)}.$$

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^4 - 17x^2 + 16 \geq 0 \\ |x^3 - 3x^2 + 2| \cdot (2x^2 - 3x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ -1 \leq x \neq 1 - \sqrt{3} < 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \cdot \sqrt{1 - \frac{17}{x^2} + \frac{16}{x^4}}}{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) \cdot \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{17}{x^2} + \frac{16}{x^4}}}{-\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của (C) .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - 2x - 3) \cdot \sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{x^4 - 17x^2 + 16}}{(x^3 - 3x^2 + 2) \cdot (-\sqrt{x}) \cdot (2x - 3)} = -\infty$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của (C) .

$$\lim_{x \rightarrow (1-\sqrt{3})^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (1-\sqrt{3})^-} \frac{(x^2 - 2x - 3) \cdot \sqrt{x^2 - x} \cdot \sqrt{x^4 - 17x^2 + 16}}{|x^3 - 3x^2 + 2| \cdot (2x^2 - 3x)} = -\infty$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x = 1 - \sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của (C) . Vậy $M = 2; m = 1$ nên $M = 2m$.

Câu 14: Chọn A

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)}$.

Ta có $(|x+2|-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2|=1 \\ \sqrt{4x^2+x+4} = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \pm 1 \\ x \leq 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = -4 \end{cases}$.

Suy ra tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là: $D = (-\infty; -4) \cup [2; +\infty)$.

$$\begin{aligned} +) \quad \lim_{x \rightarrow (-4)^-} y &= \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{(2x-3)\sqrt{(-x+2)(-x-4)}(\sqrt{4x^2+x+4}-2x)}{(-x-3)(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{(2x-3)\sqrt{-x+2}(\sqrt{4x^2+x+4}-2x)}{(x+3)\sqrt{-x-4}} = +\infty \end{aligned}$$

Suy ra đường thẳng $x = -4$ là tiệm cận đứng của (C) .

$$+) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(x+1)(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} + 2\right)} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} +) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(-x-3)(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}(\sqrt{4x^2+x+4}-2x)}{(-x-3)(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(2x-3) \cdot \frac{\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}\right)\left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} - 2\right)}{\left(-1 - \frac{3}{x}\right)\left(1 + \frac{4}{x}\right)} \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Suy ra đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của (C) .

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 15: Chọn C

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^6}}}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = 0$.

Suy ra (C) nhận đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2} = -\frac{1}{4}.$$

Suy ra (C) nhận đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$ là tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4 - 4(x+2)}{x(x-2)^2(x^2 + 2\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 4}{x(x-2)(x^2 + 2\sqrt{x+2})} = +\infty.$$

Suy ra (C) nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 16: Chọn C

Ta có $20x^2 + 14x + 9 + (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1} = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow 350x^2 + 245x + \frac{315}{2} + \frac{35}{2}(14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(14x + \frac{35}{4}\right)^2 + 2\left(14x + \frac{35}{4}\right) \cdot \frac{35}{4}\sqrt{2x^2 + 1} + \frac{1225}{16}(2x^2 + 1) + \frac{7}{8}x^2 + \frac{315}{8}\sqrt{2x^2 + 1} + \frac{35}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(14x + \frac{35}{4} + \frac{35}{4}\sqrt{2x^2 + 1}\right)^2 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{315}{8}\sqrt{2x^2 + 1} + \frac{35}{8} = 0 \quad (2).$$

Nhận thấy phương trình (2) vô nghiệm nên phương trình (1) vô nghiệm.

$$\text{Do đó } 20x^2 + 14x + 9 - (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1} = \frac{(20x^2 + 14x + 9)^2 - (14x + 11)^2(2x^2 + 1)}{20x^2 + 14x + 9 + (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$= \frac{8x^4 - 56x^3 + 118x^2 - 5x - 40}{20x^2 + 14x + 9 + (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2(x-2)^2(4x^2 - 12x - 5)}{20x^2 + 14x + 9 + (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

$$\text{Khi đó hàm số } y = f(x) = \frac{(x-2)(4x^2 - 12x + m)}{2(x-2)^2(4x^2 - 12x - 5)} \cdot \left[20x^2 + 14x + 9 + (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1} \right]$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4x^2 - 12x + m}{2(x-2)(4x^2 - 12x - 5)} \cdot \left[20x^2 + 14x + 9 + (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1} \right].$$

$$\text{Hàm số } y = f(x) \text{ có TXĐ là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ 2; \frac{3 \pm \sqrt{14}}{2} \right\}.$$

Để thấy đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 tiệm cận đứng thì phương trình

$$4x^2 - 12x + m = 0 \quad (1) \text{ phải có đúng hai trong ba nghiệm } 2; \frac{3 \pm \sqrt{14}}{2}.$$

Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = 3 \in \mathbb{Q}$. Do đó, (1) phải có hai nghiệm là $\frac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$, suy ra $m = -5$. Do đó $S = \{-5\}$.
 Vậy tổng các giá trị trong S là -5 .

Câu 17: Chọn C

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang $y = -5, y = 1$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có hai đường tiệm cận ngang $y = -5 + m, y = 1 + m$

Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có đúng một đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi hai đường thẳng $y = -5 + m, y = 1 + m$ đối xứng qua trục Ox

$$\Leftrightarrow -5 + m + 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 18: Chọn D

Trường hợp 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right] = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\sqrt[3]{a + \frac{b}{x} - 1} - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{5}{4}$$

Suy ra $\sqrt[3]{a} - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 8$. Thay lại ta được

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right] = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} - (2x - 1) + (2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 4x + 4} \right) \right] = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 12)x^3 - 6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} + (2x - 1)^2} + \frac{-3x}{(2x - 1) + \sqrt{4x^2 - 4x + 4}} \right) = \frac{5}{4}$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x}{(2x - 1) + \sqrt{4x^2 - 4x + 4}} \right) = \frac{-3}{4} \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{4} \text{ nên}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 12)x^3 - 6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} + (2x - 1)^2} \right) \text{ phải hữu hạn.}$$

Do đó $(b + 12) = 0 \Rightarrow b = -12$ thay lại ta được

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 - 1} + (2x - 1)^2} \right) = \frac{-1}{2}$$

Thay lại được $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{5}{4}$ không thỏa mãn

Trường hợp 2: Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right] = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \left(\sqrt[3]{a + \frac{b}{x} - 1} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{5}{4}$$

Chủ đề 04: Tiệm cận của đồ thị hàm số

Suy ra $\sqrt[3]{a} + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -8$.

Thay lại ta được

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt[3]{-8x^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right] = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left[\left(\sqrt[3]{-8x^3 + bx^2 - 1} + (2x - 1) - (2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 4x + 4} \right) \right] = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(b - 12)x^3 + 6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3 + bx^2 - 1} \right)^2 - (2x - 1)\sqrt[3]{-8x^3 + bx^2 - 1} + (2x - 1)^2} - \frac{-3x}{(2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 4x + 4}} \right) = \frac{5}{4}$$

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3x}{(2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 4x + 4}} \right) = -\frac{3}{4}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{4}$

nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(b - 12)x^3 + 6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3 + bx^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{-8x^3 + bx^2 - 1} + (2x - 1)^2} \right)$ hữu hạn.

Do đó $(b - 12) = 0 \Rightarrow b = 12$ thay lại ta được

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3 + 12x^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{-8x^3 + 12x^2 - 1} + (2x - 1)^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{4}$ thỏa mãn. Vậy ta được $a + b = 4 \in (3; 5)$.

Câu 19: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \end{cases}$. Xét phương trình: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$

Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

$x = -1$ không là tiệm cận đứng do đk $x \geq 0$.

$x = 2$ là nghiệm kép và tử số có một nghiệm $x = 2 \Rightarrow x = 2$ là một đường tiệm cận đứng.

Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < 0 \\ x = 1 \\ x = b \ (b > 2) \end{cases}$

$x = a$ không là tiệm cận đứng (vì $x \geq 0$)

$x = 1, x = b$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 3.

Câu 20: Chọn C

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0, \forall m$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

Câu 21: Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2m}{x} + \frac{m^2 - 2m - 6}{x^2}} = 0.$$

Nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 6 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 2m + 6 = 0 \\ 2m + 6 > 0 \\ m^2 - 4m - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m > -3 \\ m = -1 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \\ m = 5 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-3; -1; 5\}$. Nên tập S có 3 phần tử.

Câu 22: Chọn A

$$\text{Điều kiện. } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 2 \\ x^2 - 2mx + m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$\text{Nếu } f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad (x = 1 \text{ là nghiệm kép}).$$

$$\text{Nếu } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad (x = 1 \text{ là nghiệm kép}).$$

$$\text{Khi đó. } g(x) = \frac{(x+1)\sqrt{a(x+2)(x-1)^2}}{a(x-2)(x+1)^2(x^2 - 2mx + m + 2)} = \frac{|x-1|\sqrt{a(x+2)}}{a(x-2)(x+1)(x^2 - 2mx + m + 2)} \quad (a > 0).$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, nên hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \infty$, nên hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$

$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \infty$, nên hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$

Để hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang). Thì phương trình

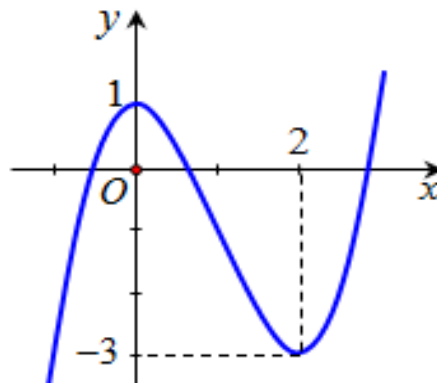
$h(x) = x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn -2 và $x \neq \{-1; 1; 2\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a_{h(x)} \cdot h(-2) > 0 \\ \frac{S}{2} > -2 \\ h(-1) \neq 0 \\ h(1) \neq 0 \\ h(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 5m + 6 > 0 \\ m > -2 \\ 3m + 3 \neq 0 \\ 3 - m \neq 0 \\ 6 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ m > -\frac{6}{5} \\ m > -2 \\ m \neq -1 \\ m \neq 3 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{6}{5} < m < -1 \\ m > 2 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m có giá trị là nguyên và m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ là $\{4; 5; 6; \dots; 2019\}$

Câu 23:



$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \leq 1 \\ x - 3 \neq 0 \\ f^2(x) + 3f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ f^2(x) + 3f(x) \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } (x-3)[f^2(x) + 3f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (L) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases}. \text{ Dựa vào đồ thị ta có}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-1; 0) \\ x = x_2 \in (0; 1) \\ x = x_3 \in (2; +\infty) \end{cases} \quad (\text{loại } x_3 > 2), \text{ do đó có 2 tiệm cận đứng } x = x_1, x = x_2.$$

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4, x_4 < 0 \\ x = 2 & (L) \end{cases}, \text{ do đó có 1 tiệm cận đứng } x = x_4.$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.