ĐỀ CƯƠNG LỚP 10 – HỌC KÌ I

Từ cơ bản đến nâng cao

2020 – 2021

Hãy là mình!
NHÓM TOÁN
LÊ VĂN ĐOÀN
Nguyễn Tiến Hà - Bùi Sỹ Khanh
Nguyễn Đức Nam - Đỗ Minh Tiến

Tài liệu này của: ....

NHÓM TOÁN THẦY LÊ VĂN ĐOÀN

Lịch và địa chỉ học: xem sau phần mục lục

Điện thoại ghi danh

Zalo: 0933.755.607 (thầy Lê Văn Đoàn)

Zalo: 0983.047.188 (thầy Nguyễn Đức Nam)

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 8 năm 2020

MỤC LỤC

Trang

ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH

HÌNH HỌC

ĐỊA CHỈ GHI DANH

- TRUNG TÂM THẾ VINH – 45A LÊ THÚC HOẠCH – Q. TÂN PHÚ (ĐỐI DIỆN TRƯỜNG TRẦN PHÚ).
- TRUNG TÂM HOÀNG GIA – 56 PHỐ CHỢ – P. TÂN THÀNH – Q. TÂN PHÚ (SAU CHỢ TÂN PHÚ).
- 71/25/10 PHÚ THỌ HÒA – P. PHÚ THỌ HÒA – Q. TÂN PHÚ – TP. HỒ CHÍ MINH.

ĐIỆN THOẠI GHI DANH

- 0983.047.188 – Zalo (Thầy Nguyễn Đức Nam) – Face: https://www.facebook.com/marion.zack/
- 0933.755.607 – Zalo (Thầy Lê Văn Đoàn) – 0929.031.789 – Face: https://www.facebook.com/levan.doan.902

NHÓM TOÁN THẦY LÊ VĂN ĐOÀN

Ths. Lê Văn Đoàn – Ths. Trương Huy Hoàng – Ths. Nguyễn Tiến Hà – Thầy Bùi Sỹ Khanh – Thầy Nguyễn Đức Nam – Thầy Đỗ Minh Tiến – Thầy Nguyễn Duy Tùng – Thầy Trần Nguyễn Vĩnh Nghi – Thầy Hoàng Minh Thiện – Thầy Trần Quốc Tuấn.

THỜI KHÓA BIỂU CÁC LỚP TOÁN ĐANG HỌC

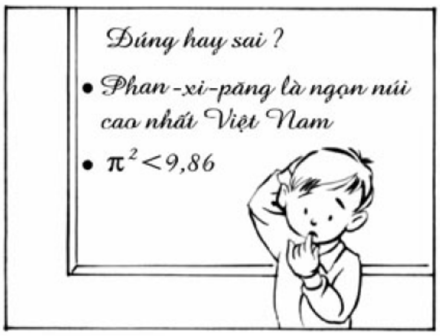
KHỐI 6	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19'15 – 21'15			**T6A**		**T6A**		**Giải đề**
KHỐI 7	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'30 -19'30			**T7A**		**T7A**		**Giải đề**
KHỐI 8	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19'15 – 21'15	**T8A**		**T8A**				**Giải đề**
KHỐI 9	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'30 -19'30	**T9A**	**T9B**	**T9A**	**T9B**			**Giải đề**
KHỐI 10	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15						**T10C**	**T10C**
19'30 – 21'00	**T10A** **10HG**	**T10B**	**T10A** **10HG**	**T10B**	**T10A** **10HG**	**T10B**	**Giải đề**
KHỐI 11	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	Giải đề
19'30 – 21'00		**T11C**		**T11C**		**T11C**	
KHỐI 12	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C**	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C**	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C** **T12HG2**	**Lớp chuyên đề VD và VDC**
19'30 – 21'00	**T12B**		**T12B**	**T12HG2**	**T12B**	**T12HG2**	

Chương 1 MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

§ 1. MỆNH ĐỀ

☆☆☆

① **Mệnh đề**



Các câu ở bên trái là những khẳng định có tính đúng hoặc sai, còn các câu bên phải không thể nói là đúng hay sai. Các câu bên trái là những mệnh đề, còn các câu bên phải không phải là những mệnh đề.

- Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.
- Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

② **Mệnh đề phủ định**

Nam và Minh tranh luận về loài dơi.

Nam nói "Dơi là một loài chim".

Minh phủ định "Dơi không phải là một loài chim.

Để phủ định một mệnh đề, ta thêm hoặc bớt từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

Cho mệnh đề P.

- Mệnh đề "không phải P" được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là $\overline{P}$.
- Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

③ **Mệnh đề kéo theo**: Cho mệnh đề P và Q.

Ai cũng biết "Nếu Trái Đất không có nước thì không có sự sống".

Câu nói trên là một mệnh đề dạng "Nếu P thì Q"

P là mệnh đề "Trái Đất không có nước",

Q là mệnh đề "(Trái Đất) không có sự sống.

- Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là: $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Như vậy, ta chỉ cần xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ khi P đúng.

④ **Mệnh đề đảo:** Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

⑤ **Mệnh đề tương đương**: Cho mệnh đề P và Q.

- Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" gọi là mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh để $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

⑥ **Mệnh đề chứa biến**: Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

⑦ **Kí hiệu ∀ và ∃**: Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó:

- "Với mọi x thuộc X", ký hiệu là: "$\forall x \in X$".
- "Tồn tại x thuộc X", ký hiệu là: "$\exists x \in X$".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X,\ P(x)$" là "$\exists x \in X,\ \overline{P(x)}$".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X,\ P(x)$" là "$\forall x \in X,\ \overline{P(x)}$".
  - Mệnh đề chứa $\exists$ đúng khi ta chỉ ra một phần tử đúng.
  - Mệnh đề chứa $\forall$ sai khi ta chỉ ra một phần tử sai.

★ **Lưu ý:**

+ **Số nguyên tố** là số tự nhiên chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Ngoài ra nó không chia hết cho bất cứ số nào khác. Số 0 và 1 không được coi là số nguyên tố.

  Các số nguyên tố từ 2 đến 100 là $2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 29;\ 31;\ 37;\ 41;\ldots$

+ **Ước và bội**: Cho hai số: $a,\ b \in \mathbb{N}$. Nếu a chia hết b, thì ta gọi a là bội của b và b là ước của a.
  - Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của 2 hay nhiều số tự nhiên là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.
  - Bội chung nhỏ nhất (BCNN) của 2 hay nhiều số tự nhiên là số nhỏ nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích ?

a) P : "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$".

Giải. Mệnh đề P là mệnh đề sai. Vì tồn tại $x = 0$: "$0^2 > 0$" sai.

b) P : "$\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2$".

....

c) P : "$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 > n$".

....

d) P : "$\exists x \in \mathbb{R},\ 5x - 3x^2 \le 1$".

....

....

e) P : "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$".

....

f) P : "$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1)$" là số lẻ".

....

....

....

BT 2. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định ?

Học sinh cần nhớ nguyên tắc phủ định của một mệnh đề *(dòng trên phủ định với dòng dưới)*:

Mệnh đề P	Có	$>$	$<$	$=$	Chia hết	$\exists$
Mệnh đề phủ định $\overline{P}$	Không	$\leq$	$\geq$	$\neq$	Không chia hết	$\forall$

a) $P: "\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \neq 1"$.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là

$\overline{P}: "\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 1"$.

Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề đúng.

b) $P: "\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 3"$.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là

$\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \neq 3"$.

Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

c) $P: "\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0"$.

....

....

d) $P: "\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2"$.

....

....

e) $P: "\exists x \in \mathbb{Q}: 4x^2 - 1 = 0"$.

....

....

f) $P: "\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - x + 7 \geq 0"$.

....

....

g) $P: "\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 2 < 0"$.

....

....

h) $P:$ $"\exists x \in \mathbb{R}: (x-1)^2 = (x-1)"$.

....

....

i) $P:$ $"\exists x \in \mathbb{R},\ x < 2$ hoặc $x \geq 7"$.

....

....

....

j) $P: "\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 5 \geq 0"$.

....

....

....

k) $P: "\exists x \in \mathbb{R}: x < \frac{1}{x}"$.

....

....

....

l) $P: "\forall x \in \mathbb{R}: x < \frac{1}{x}"$.

....

....

....

BT 3. Điền vào chỗ trống từ nối "và" hay "hoặc" để được mệnh đề đúng ?

a) $\pi < 4$...........$\pi > 5$.

b) $a.b = 0$ khi $a = 0$ .... $b = 0$.

c) $a.b \neq 0$ khi $a \neq 0$ .... $b \neq 0$.

d) $a.b > 0$ khi $a > 0$ .... $b > 0$ .... $a < 0$ .... $b < 0$.

e) Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 .... cho 3.

f) Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của nó bằng 0 .... bằng 5.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề ?

(1) Cố lên, sắp đến rồi !

(2) Số 15 là số nguyên tố.

(3) Tổng các góc của một tam giác là $180°$.

(4) Số 5 là số nguyên dương.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ vô nghiệm" là mệnh đề nào sau đây ?

A. Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ không có nghiệm.

B. Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có nghiệm kép.

D. Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có nghiệm.

Câu 3. Phủ định của mệnh đề: "Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn" là

A. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

B. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân tuần hoàn.

C. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

D. Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Câu 4. Cho mệnh đề: $"\exists x\in\mathbb{R}\left|2x^2-3x-5<0\right."$. Mệnh đề phủ định sẽ là

A. $"\forall x\in\mathbb{R}\left|2x^2+3x-5\geq 0\right."$. **B.** $"\forall x\in\mathbb{R}\left|2x^2+3x-5>0\right."$.

C. $"\exists x\in\mathbb{R}\left|2x^2+3x-5>0\right."$. **D.** $"\exists x\in\mathbb{R}\left|2x^2+3x-5\geq 0\right."$.

Câu 5. Cho mệnh đề $P:"\forall x\in\mathbb{R},\ x^2-x+7<0"$. Mệnh đề phủ định của P là

A. $\nexists x\in\mathbb{R}: x^2-x+7<0$. **B.** $\forall x\in\mathbb{R}: x^2-x+7>0$.

C. $\forall x\in\mathbb{R}: x^2-x+7<0$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R}: x^2-x+7\geq 0$.

Câu 6. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $\forall x\in\mathbb{R}: x^2+x+5>0$ là

A. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+5<0$. **B.** $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+x+5\leq 0$.

C. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+5\leq 0$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+x+5<0$.

Câu 7. Hỏi trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là mệnh đề **đúng** ?

A. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>9\Rightarrow x>-3$. **B.** $\forall x\in\mathbb{R},\ x>-3\Rightarrow x^2>9$.

C. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>9\Rightarrow x>3$. **D.** $\forall x\in\mathbb{R},\ x>3\Rightarrow x^2>9$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.A	5.D	6.B	7.D

§ 2. TẬP HỢP

☆☆☆

① **Tập hợp**

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa mà chỉ mô tả.
- Có hai cách xác định tập hợp:

  + Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{...;...;...;...\}$.

  Ví dụ: $X = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

  + Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

  Ví dụ: $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < n^2 < 36\}$.

- Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\varnothing$.

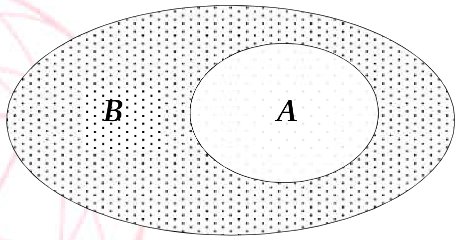
  Ví dụ: Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ không có nghiệm. Ta nói tập hợp các nghiệm của phương trình này là *tập hợp rỗng*, tức $S = \varnothing$.

② **Tập hợp con – Tập hợp bằng nhau**

- Tập hợp con: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.

  + $A \subset A,\ \forall A$ và $\varnothing \subset A,\ \forall A$.

  + $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$.



- Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.
- Nếu tập A có n phần tử $\Rightarrow$ A có 2^n tập hợp con.

③ **Một số tập hợp con của tập hợp số thực** $\mathbb{R}$

Tập hợp con của $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Trong đó:

- $\mathbb{N}^*$: là tập hợp số tự nhiên không có số 0.
- $\mathbb{N}$: là tập hợp số tự nhiên.
- $\mathbb{Z}$: là tập hợp số nguyên.
- $\mathbb{Q}$: là tập hợp số hữu tỷ.
- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$: là tập hợp số thực.

BT 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó ?

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20$ và x chia hết cho $3\}$.

Lời giải. Do $x \in \mathbb{N}$ và thỏa $x < 20$ nên $A = \{0;\ 3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x < 10\}$.

....

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{7} < x < \sqrt{15}\}$.

....

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 14 - 3x > 0\}$.

Lời giải. Ta có: $14 - 3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -14 \Leftrightarrow x < \dfrac{14}{3}$. Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \{.................................\}$.

e) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 15 - 2x > 0\}$.

....

f) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 20 - 2x \geq 0\}$.

....

g) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \left|x - 1\right| \leq 3\}$.

Lời giải. Ta có: $\left|x-1\right| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$. Do $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

☛ *Học sinh cần nhớ:* $\left|X\right| < a \Leftrightarrow -a < X < a$ *với* $a > 0$.

h) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \left|x + 2\right| \leq 1\}$.

....

....

i) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \left|2x - 1\right| < 9\}$.

....

....

j) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x = \dfrac{1}{2^n} \geq \dfrac{1}{32},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

- Với $n = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2^0} = 1 > \dfrac{1}{32}$ (nhận).
- Với $n = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{32}$ (nhận).
- Với $n = 2 \Rightarrow x =$ ....
- Với $n = 3 \Rightarrow x =$ ....
- Với $n = 4 \Rightarrow x =$ ....
- Với $n = 5 \Rightarrow x =$ ....
- Với $n = 6 \Rightarrow x =$ ....
- Với $n = 7 \Rightarrow x =$ ....

Do đó: $A = \left\{\dfrac{1}{32};\ \dfrac{1}{16};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2};\ 1\right\}$.

k) $A = \left\{x \middle| x = \dfrac{1}{2n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \text{ và } x \geq \dfrac{1}{8}\right\}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

l) $A = \{x \mid x = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$ và $-4 \le x < 12\}$.

- Với $k = 0 \Rightarrow x = 0$: nhận vì $-4 \le x < 12$.
- Với $k = 1 \Rightarrow x = 4$: nhận vì $-4 \le x < 12$.
- Với $k = -1 \Rightarrow x =$ ....
- Với $k = 2 \Rightarrow x =$ ....
- Với $k = -2 \Rightarrow x =$ ....
- Với $k = 3 \Rightarrow x =$ ....

Vậy $A = \{$...$\}$.

m) $A = \{x \mid x = 2n^2 - 1,$ với $n \in \mathbb{N}$ và $x < 9\}$.

....

....

....

....

n) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là số nguyên tố $< 11\}$.

....

....

o) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội chung của 4 và $6\}$.

....

....

BT 2. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 5x + 3)(4 - x^2) = 0\}.$$

Lời giải. Ta có $(2x^2 - 5x + 3)(4 - x^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,\ x = \dfrac{3}{2}. \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên chọn ....

Vậy $A = \{$.......................$\}$.

BT 3. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4x + 3)(2x + 1) = 0\}.$$

....

....

....

....

....

....

BT 4. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 7x^2 - 5x = 0\}.$$

....

....

....

....

....

BT 5. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^4 - 8x^2 - 9)(x^2 - 16) = 0\}.$$

....

....

....

....

....

BT 6. Viết tập hợp $A=\{2;6;12;20;30\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

Cách 1: $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x=n(n+1),\ 1\le n\le 5\}$.

Cách 2:

BT 7. Viết tập hợp $A=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

BT 8. Viết tập hợp $A=\{1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

BT 9. Viết tập hợp $A=\{9;\ 36;\ 81;\ 144\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

BT 10. Viết tập hợp $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{6};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{30}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó.

BT 11. Viết tập hợp $A=\left\{1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\frac{1}{27};\frac{1}{81};\frac{1}{234}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó.

BT 12. Viết tập hợp $A=\{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

BT 13. Viết tập hợp $A=\{3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

BT 14. Viết tập hợp $A=\{0;\ 4;\ 8;\ 12;\ 16\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

BT 15. Viết tập hợp $A=\{1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó

BT 16. Tìm tất cả các tập hợp con của tập hợp sau:

a) $A=\{a;b\}$.

b) $B=\{0;1;2\}$.

BT 17. * Cho hai tập hợp $A=\{-4;-2;-1;2;3;4\}$ và $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 4\}$. Tìm các tập hợp X sao cho $A\subset X\subset B$.

Ta có: $|x|\le 4\Leftrightarrow -4\le x\le 4$ và do $x\in\mathbb{Z}$ nên $B=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Theo đề $A\subset X\subset B\Rightarrow\{-4;-2;-1;2;3;4\}\subset X\subset\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ nên tập hợp X là một trong những tập hợp $\{-4;-2;-1;2;3;4\}$, $\{-4;-3;-2;-1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;0;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;0;2;3;4\}$, $\{-4;-3;-2;-1;1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;0;1;2;3;4\}$, $\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

BT 18. * Cho $A=\{1;2\}$ và $B=\{1;2;3;4;5\}$. Tìm các tập hợp X sao cho $A\subset X\subset B$?

BT 19. * Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \dfrac{3x+8}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}\cdot$ Tìm các tập hợp con của A có 3 phần tử ?

Ta có: $\dfrac{3x+8}{x+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{3(x+1)+5}{x+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3+\dfrac{5}{x+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 5\ \vdots\ (x+1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=1\\x+1=-1\\x+1=5\\x+1=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=4\\x=-6\end{array}\right.$.

Suy ra $A=\{-2;0;4;6\}$ nên tập hợp con có 3 phần tử là

BT 20. * Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}\in\mathbb{Z}\right\}$. Tìm các tập hợp con của tập hợp A ?

Đáp số: Các tập hợp con của A là $\varnothing$, $\left\{\dfrac{1}{9}\right\}$, $\left\{\dfrac{64}{9}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{9};\dfrac{64}{9}\right\}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu cách cho một tập hợp ?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề nào **sai** ?

A. $A \neq \{A\}$. **B.** $\varnothing \subset A$. **C.** $A \subset A$. **D.** $A \in A$.

Câu 3. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "7 là số tự nhiên" ?

A. $7 \subset \mathbb{N}$. **B.** $7 \in \mathbb{N}$. **C.** $7 < \mathbb{N}$. **D.** $7 \leq \mathbb{N}$.

Câu 4. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "$\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ" ?

A. $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. **B.** $\sqrt{2} \not\subset \mathbb{Q}$. **C.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. **D.** $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Câu 5. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$.

A. $X = \{\varnothing\}$. **B.** $X = \varnothing$. **C.** $X = \{0\}$. **D.** $X = 0$.

Câu 6. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0\}$. Các phần tử của tập A là

A. $A = \{1\}$ **B.** $A = \{-1;1\}$. **C.** $A = \{\pm\sqrt{2};\pm 1\}$. **D.** $A = \{-1\}$.

Câu 7. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{N} \mid (x+2)(2x^2 - 5x + 3) = 0\}$.

A. $X = \{-2;1\}$. **B.** $X = \{1\}$. **C.** $X = \left\{-2;1;\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $X = \left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 8. Các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ là

A. $A = \{0\}$. **B.** $A = \{1\}$. **C.** $A = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $A = \left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 9. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 - 6x^2 + 8 = 0\}$.

A. $X = \{-2;2\}$. **B.** $X = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$.

C. $X = \{\sqrt{2};2\}$. **D.** $X = \{-2;-\sqrt{2};\sqrt{2};2\}$.

Câu 10. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - x - 6)(x^2 - 5) = 0\}$.

A. $X = \{\sqrt{5};3\}$. **B.** $X = \{-\sqrt{5};-2;\sqrt{5};3\}$.

C. $X = \{-2;3\}$. **D.** $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid -\sqrt{5} \leq x \leq 3\}$.

Câu 11. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $M = \{x \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt{x}$ là ước của $8\}$.

A. $M = \{1;2;4;8\}$ **B.** $M = \{0;1;2;4;8\}$.

C. $M = \{1;4;16;64\}$. **D.** $M = \{0;1;4;16;64\}$.

Câu 12. Số phần tử của tập hợp $A = \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{Z},\ |k| \leq 2\}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 13. Cho tập hợp $X = \{0;1;2;a;b\}$. Số phần tử của tập X là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 14. Cho tập hợp $X = \{2;3;4\}$. Tập X có bao nhiêu tập hợp con ?

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 15. Tập $A = \{0;2;4;6\}$. có bao nhiêu tập hợp con có đúng hai phần tử ?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.B	4.C	5.B	6.B	7.B	8.D	9.A	10.C
11.C	12.D	13.C	14.C	15.B	16.B	17.C	18.D	19.B	20.A

§ 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

☆☆☆

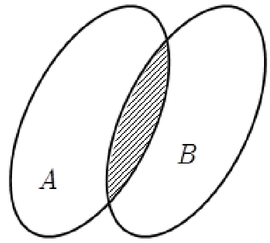
① **Giao của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B.

Kí hiệu $C = A \cap B$ (phần gạch trong hình).

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$ hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}.$

(*Cách nhớ: giao là lấy phần chung*)



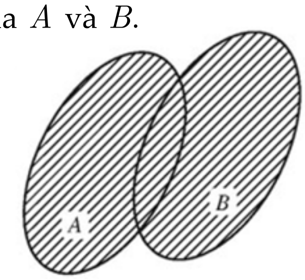
② **Hợp của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là **hợp** của A và B.

Kí hiệu: $C = A \cup B$ (phần gạch chéo trong hình).

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$ hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$.

(*Cách nhớ: hợp là lấy hết*)



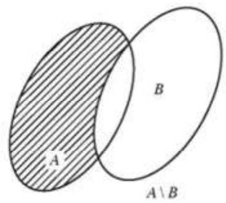
③ **Hiệu và phần bù của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là **hiệu** của A và B.

Kí hiệu $C = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).

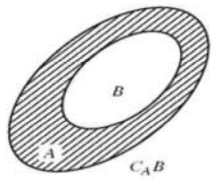
Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ và $x \notin B\}$ hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}.$

(*Cách nhớ: hiệu thuộc A mà không thuộc B*)



Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là **phần bù** của B trong A.

Kí hiệu $C_A B = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).



☞ *Tổng kết: Giao $(A \cap B)$ là lấy phần chung, hợp $(A \cup B)$ là lấy hết, trừ $(A \setminus B)$ là thuộc A mà không thuộc B, phần bù $C_A B = A \setminus B$* (**dưới trừ trên và trên con dưới**).

BT 4. Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp trong các trường hợp sau:

p) $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ và $B = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11\}$.

- $A \cap B =$ .... • $A \cup B =$ ....
- $A \setminus B =$ .... • $B \setminus A =$ ....
- $(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$ ....
- $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$ ....

q) $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$ và $C = \{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

- $A \cup B =$ .... • $B \cup C =$ ....
- $C \cup A =$ .... • $A \cap B =$ ....
- $B \cap C =$ .... • $C \cap A =$ ....
- $A \setminus B =$ .... • $B \setminus C =$ ....
- $C \setminus A =$ .... • $(A \cup B) \cap C =$ ....

BT 5. Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp trong các trường hợp sau:

a) $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 3\}$ và $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-2<x<2\}$.

Giải. Vì $x\in\mathbb{N}$ và $x\le 3\Rightarrow A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. Do $x\in\mathbb{Z}$ và $-2<x<2\Rightarrow B=\{-1;\ 0;\ 1\}$.

- $A\cap B=$ .... • $A\cup B=$ ....
- $A\setminus B=$ .... • $B\setminus A=$ ....

b) và $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,\left|x\right|-1\le 0\}$.

....

....

- $A\cap B=$ .... • $A\cup B=$ ....
- $A\setminus B=$ .... • $B\setminus A=$ ....

c) $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,(x^2-4)(2x^2-5x)=0\}$ và $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x\le 6$ và x là số chẵn$\}$.

....

....

....

- $A\cap B=$ .... • $A\cup B=$ ....
- $A\setminus B=$ .... • $B\setminus A=$ ....

d) $E=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x<7\}$, $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,(x^2-9)(x^2-5x-6)=0\}$, $B=\{2;3;5\}$.

Giải. Vì $x\in\mathbb{N}$ và $1\le x<7\Rightarrow E=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

Ta có: $(x^2-9)(x^2-5x-6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-9=0\\ x^2-5x-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 3\\ x=-1\\ x=6\end{array}\right.$ và $x\in\mathbb{N}\Rightarrow A=\{3;6\}$.

Suy ra: $A\subset E$, $B\subset E$.

- $C_E A=E\setminus A=\{$......................$\}$. • $C_E B=$ ....

☞ ***Lưu ý**: Để tìm phần bù của B trong A, tức tìm $C_A B=A\setminus B$ ta cần kiểm tra $B\subset A$. Nếu $B\not\subset A$ thì không tồn tại phần bù.*

e) $A=\{2;\ 3;\ 5\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x^2-9)(x^2-x-6)=0\}$ và $E=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,\left|x\right|\le 3\}$.

....

....

- $A\cap B=$ • $A\cup B=$ ....
- $A\setminus B=$ • $B\setminus A=$ ....
- $A\cap E=$ • $B\cap E=$ ....
- $(A\cup B)\setminus(A\cap E)=$ • $C_E(A\cap E)=$ ....

f) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x^3-9x=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x-1|<3\}$ và $E=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2\le 9\}$.

....

....

....

.... • $A\cup B=$ ....

• $C_EA=$ ....

• $C_E(A\cap B)=$ .... • $C_E(A\cup B)=$ ....

g) * $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \dfrac{3x+8}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,|x+2|<5\right\}$.

Ta có: ....

....

....

• $A\cap B=$ .... • $A\cup B=$ ....

• $A\setminus B=$ .... • $B\setminus A=$ ....

BT 6. Hãy xác định các tập A và B thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $A\cap B=\{1;2;3\}$, $A\setminus B=\{4;5\}$ và $B\setminus A=\{6;9\}$.

• Vì $A\cap B=\{1;2;3\}$ nên hai tập hợp A và B sẽ có ba phần tử: $1,\ 2,\ 3$.

• Vì $A\setminus B=\{4;5\}$, tức $4,\ 5\in A$ mà $4,\ 5\notin B$ nên $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

• Vì $B\setminus A=\{6;9\}$, ...

b) $A\cap B=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $A\setminus B=\{-3;-2\}$ và $B\setminus A=\{6;\ 9;\ 10\}$.

....

....

....

....

c) $A\setminus B=\{1;\ 5;\ 7;\ 8\}$, $A\cap B=\{3;\ 6;\ 9\}$ và $A\cup B=\{x\in\mathbb{N}\mid 0<x\le 10\}$.

....

....

....

....

....

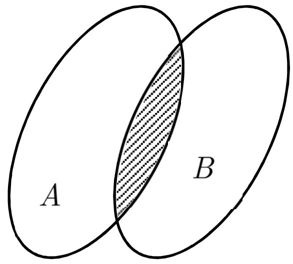
....

BT 7. * Cho tập hợp $X=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ và hai tập hợp $A,\ B$ thỏa $A\subset X,\ B\subset X$ sao cho $A\cup B=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\},\ A\cap B=\{1;\ 2\}$. Tìm các tập C sao cho $C\cup(A\cap B)=A\cup B$?

BT 8. Mỗi học sinh lớp $10C$ đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi môn thể thao này. Hỏi lớp $10C$ nói trên có tất cả bao nhiêu học sinh ?

Kí hiệu:

- A là tập các học sinh lớp $10C$ chơi bóng đá (có 25 người).
- B là tập các học sinh lớp $10C$ chơi bóng chuyền (có 20 người).



Vì mỗi bạn lớp $10C$ đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền$\Rightarrow A\cup B$ là tập các học sinh của lớp.

Để đếm số phần tử của $A\cup B$ ta đếm số phần tử của A (25 phần tử) và đếm số phần tử của B (20 phần tử), nhưng khi đó số phần tử của $A\cap B$ được đếm 2 lần.

Tức số học sinh của lớp là $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=25+20-10=35$ học sinh.

BT 9. Trong số 45 học sinh lớp $10A_1$ có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 20 bạn xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi

a) Lớp $10A_1$ có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng, bạn đó phải học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt ?

$=25$ bạn.

b) Lớp $10A_1$ có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt ?

$=20$ bạn.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai tập hợp $X = \{1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 9\}$ và $Y = \{-1;\ 0;\ 7;\ 10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử ?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

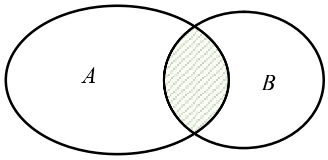
Câu 2. Cho A và B là hai tập hợp bất kì. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới là tập hợp nào ?

A. $A \cup B$.

B. $B \setminus A$.

C. $A \setminus B$.

D. $A \cap B$.



Câu 3. Cho các tập hợp $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{2;\ 4;\ 5;\ 8\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$?

A. $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 8\}$. **B.** $\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8\}$.

C. $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8\}$. **D.** $\{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 8\}$.

Câu 4. Cho hai tập hợp $M = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ và $N = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$. Khi đó tập hợp $M \cap N$ là

A. $\{6;\ 8\}$. **B.** $\{1;\ 3\}$. **C.** $\{0;\ 2;\ 4\}$. **D.** $\{0;1;2;3;4;6;8\}$.

Câu 5. Cho hai tập hợp $A = \{a;\ b;\ 1;\ 2\}$ và $B = \{a;\ b;\ c;\ 1;\ 3\}$. Tập hợp $A \cap B$ là

A. $\{a;\ b;\ 1\}$. **B.** $\{a;\ b;\ 2\}$. **C.** $\{a;\ b;\ 3\}$. **D.** $\{2;\ 3;\ c\}$.

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 3\}$ và $B = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. Tập $A \cap B$ là

A. $\{1;\ 2;\ 3\}$. **B.** $\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

C. $\{0;\ 1;\ 2\}$. **D.** $\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = \{2;\ 4;\ 6;\ 9\}$ và $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Khi đó tập hợp $A \setminus B$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\{6;9;1;3\}$. **C.** $\{1;2;3;5\}$. **D.** $\{6;9\}$.

Câu 8. Cho tập $A = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$ và $B = \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. Tập $A \setminus B$ là

A. $\{0;6;8\}$. **B.** $\{0;2;8\}$. **C.** $\{3;6;7\}$. **D.** $\{0;2\}$.

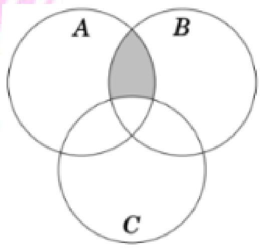
Câu 9. Cho các tập hợp $A,\ B,\ C$ được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây ?

A. $A \cap B \cap C$.

B. $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.

C. $(A \cup B) \setminus C$.

D. $(A \cap B) \setminus C$.



Câu 10. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\}$. Khi đó tập $A \cap B$ là

A. $\{2\}$. **B.** $\{4;5\}$. **C.** $\{2;4\}$. **D.** $\{3\}$.

Câu 11. Cho ba tập hợp $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 9\}$, $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9\}$ và $C = \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. Tích các phần tử của tập hợp $A \cap (B \setminus C)$ bằng

A. 18. **B.** 11. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 12. Cho hai tập hợp A và B thỏa $A \cup B = \{1;2;3;4;5\}$, $A \cap B = \{2\}$ và $A \setminus B = \{4;5\}$. Khi đó tập hợp B là

A. $\{3\}$. **B.** $\{1;2;3\}$.

C. $\{2;3\}$. **D.** $\{2;5\}$.

Câu 13. Lớp $10A$ có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả hai môn và 17 học sinh không giỏi môn nào. Số học sinh lớp $10A$ là

A. $37.$ **B.** $42.$

C. $47.$ **D.** $32.$

Câu 14. Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp. Trong đó có 12 cán bộ phiên dịch được cả 2 thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho hội nghị đó ?

A. $42.$ **B.** $31.$

C. $55.$ **D.** $43.$

Câu 15. Lớp $10A$ có 10 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý, 11 học sinh giỏi hóa, 6 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 5 học sinh giỏi cả Hóa và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp $10A$ là

A. $19.$ **B.** $18.$

C. $31.$ **D.** $49.$

Câu 16. Lớp $10A$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hoá, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hoá, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hoá, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hoá. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hoá) của lớp $10A$ là

A. $9.$ **B.** $18.$

C. $10.$ **D.** $28.$

Câu 17. Gọi A là tập hợp các học sinh của một lớp học có 53 học sinh, B và C lần lượt là tập hợp các học sinh thích môn Toán, tập hợp các học sinh thích môn Văn của lớp này. Biết rằng có 40 học sinh thích môn Toán và 30 học sinh thích môn Văn. Số phần tử lớn nhất có thể có của tập hợp $B \cap C$ bằng

A. $31.$ **B.** $29.$

C. $30.$ **D.** $32.$

Câu 18. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng** ?

A. $C = A \cup B.$ **B.** $C = A \cap B.$

C. $C = A \setminus B.$ **D.** $C = B \setminus A.$

Câu 19. Xét các tập hợp $X,\ Y$ có cùng số phần tử. Biết rằng số phần tử của tập hợp $X \cup Y$ và $C_X Y$ lần lượt là 35 và $15.$ Số phần tử của tập hợp X bằng

A. $35.$ **B.** $20.$

C. $50.$ **D.** $15.$

Câu 20. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |mx - 3| = mx - 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \setminus A = B$?

A. $-\dfrac{3}{2} \le m \le \dfrac{3}{2}\cdot$ **B.** $m < \dfrac{3}{2}\cdot$

C. $-\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{3}{2}\cdot$ **D.** $m \ge -\dfrac{3}{2}\cdot$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.C	5.A	6.D	7.D	8.B	9.D	10.A
11.A	12.B	13.A	14.D	15.B	16.C	17.C	18.B	19.B	20.C

§ 4. CÁC TẬP HỢP SỐ

☆☆☆

① **Các tập hợp số đã học**

a) Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{................................\}$. $\qquad\qquad$ $\mathbb{N}^* = \{................................\}$.

b) Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{..\}$.

Tập hợp các số $-1, -2, -3, \ldots$ là các số nguyên âm, kí hiệu: $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Tập hợp các số $1,\ 2,\ 3, \ldots$ là các số nguyên dương, kí hiệu: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ..\}$.

Vậy $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm.

c) Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

Số hữu tỉ biểu diễn được dưới dạng một phân số $\dfrac{a}{b}$, trong đó $a,\ b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.

Số hữu tỉ còn được biểu diễn bởi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ: $\dfrac{5}{4} = 1,25$ *(thập phân hữu hạn)* và $\dfrac{5}{12} = 0,41(6) = 0,416666666\ldots$ *(vô hạn tuần hoàn).*

d) Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

Tập hợp các số thực gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ (căn).

② **Các tập hợp con thường dùng của** $\mathbb{R}$.

Tên	Kí hiệu	Cách ghi tập hợp	Biểu diễn trục số	Ví dụ
Khoảng	$(a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$		$-2 < x < 3 \Rightarrow x \in (-2;3)$.
	$(a;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$		$x > 3 \Rightarrow x \in (3;+\infty)$.
	$(-\infty;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$		$x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty;1)$.
Đoạn	$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$		$-3 \le x \le 5 \Rightarrow x \in [-3;5]$.
Nửa khoảng	$[a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$		$-1 \le x < 7 \Rightarrow x \in [-1;7)$.
	$(a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$		$0 < x \le 4 \Rightarrow x \in (0;4]$.
	$[a;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$		$x \ge -2 \Rightarrow x \in [-2;+\infty)$.
	$(-\infty;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$		$x \le -5 \Rightarrow x \in (-\infty;-5]$.

Kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực (cùng), kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực (cùng).

Ta có thể viết $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$ và gọi là khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Học sinh cần phân biệt sự khác nhau giữa tập hợp và đoạn, khoảng, nửa khoảng, chẳng hạn: $\{1;5\}$, $(1;5)$, $[1;5)$, $(1;5]$, $[1;5]\ldots$.

BT 1. Hãy phân biệt các tập hợp sau:

a) $\{-1;2\}$, $[-1;2]$, $(-1;2)$, $[-1;2)$, $(-1;2]$.

- $\{-1;2\}$ là tập hợp (dạng liệt kê) chỉ chứa 2 phần tử là số -1 và số 2.
- $[-1;2]=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x\le 2\}$ là một đoạn từ $-1\to 2$ (lấy -1 và 2) gồm vô số các phần tử là số thực, chẳng hạn $-1;\ -0,9;\ -0,89;.....;2$.
- $(-1;2)=\{x\in\mathbb{R}\mid -1< x< 2\}$ là một khoảng $-1\to 2$ (không lấy -1 và 2) gồm vô số các phần tử là số thực, chẳng hạn $-0,9999;\ -0,98;.....;1,888;\ 1,9,...,$ nhưng không lấy 2.
- $[-1;2)=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x< 2\}$ là nửa khoảng ....
- $(-1;2]=$ ....

b) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -2\le x\le 3\}$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x\le 3\}$.

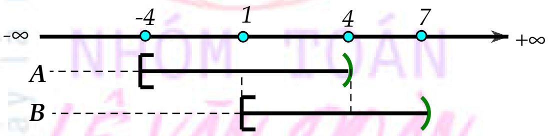
....

BT 2. Hãy xác định: $A\cap B$; $A\cup B$; $A\setminus B$; $B\setminus A$, $C_{\mathbb{R}}A$, $C_{\mathbb{R}}B$ và biểu diễn chúng trên trục số trong mỗi trường hợp sau:

a) $A=[-4;4)$, $B=[1;7)$.

Ta thực hiện nháp theo hai cách sau:

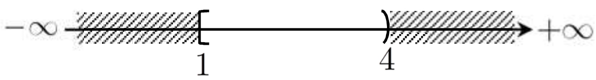
Cách 1: *Sử dụng mỗi trục là một tập hợp. Làm theo nguyên tắc: "**Giao chung – hợp hết**".*



Cách 2: *Sử dụng một trục và gạch chéo theo nguyên tắc: "**Giao gạch – hợp thẳng**".*

....

- $A\cap B=[1;4)$, biểu diễn trên trục số:



- $A\cup B=[-4;7)$, biểu diễn trên trục số: ....
- $A\setminus B=[-4;1)$, biểu diễn trên trục số: ....
- $B\setminus A=[4;7)$, biểu diễn trên trục số: ....
- $C_{\mathbb{R}}A=\mathbb{R}\setminus A=(-\infty;-4)\cup[4;+\infty)$: ....
- $C_{\mathbb{R}}B=\mathbb{R}\setminus B=(-\infty;1)\cup[7;+\infty)$: ....

b) $A=[3;+\infty)$, $B=(0;4)$.

....

- $A \cap B =$ ....
- $A \cup B =$ ....
- $A \setminus B =$ ....
- $B \setminus A =$ ....
- $C_{\mathbb{R}}A =$ ....
- $C_{\mathbb{R}}B =$ ....

c) $A = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty), \ B = [-3; 4].$

....

....

....

- $A \cap B =$ ....
- $A \cup B =$ ....
- $A \setminus B =$ ....
- $B \setminus A =$ ....
- $C_{\mathbb{R}}A =$ ....
- $C_{\mathbb{R}}B =$ ....

BT 3. Tìm $A \cap B;\ \ A \cup B;\ \ A \setminus B;\ \ B \setminus A,\ \ C_{\mathbb{R}}A,\ \ C_{\mathbb{R}}B$ và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\}, \ \ B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}.$

....

....

....

- $A \cap B =$ ....
- $A \cup B =$ ....
- $A \setminus B =$ ....
- $B \setminus A =$ ....
- $C_{\mathbb{R}}A =$ ....
- $C_{\mathbb{R}}B =$ ....

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ hay } x \ge 2\}, \ B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x < 3\}.$

....

....

....

- $A \cap B =$ ....
- $A \cup B =$ ....

- $A \setminus B =$ ...
- $B \setminus A =$ ...
- $C_{\mathbb{R}} A =$ ...
- $C_{\mathbb{R}} B =$ ...

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2\},\ B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| < 3\}.$

...

...

...

...

- $A \cap B =$ ...
- $A \cup B =$ ...
- $A \setminus B =$ ...
- $B \setminus A =$ ...
- $C_{\mathbb{R}} A =$ ...

BT 4. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 8-x \le 0 \end{cases}.$

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 8-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>4 \\ -x \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \le 8 \Rightarrow x \in (2;8].$

b) $\begin{cases} 2x-6 \ge 0 \\ 10-x \ge 0 \end{cases}.$

...

...

c) $\begin{cases} 3x-9 \le 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases}.$

...

...

d) $\begin{cases} 2x-4 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ 8-2x \ge 0 \end{cases}.$

...

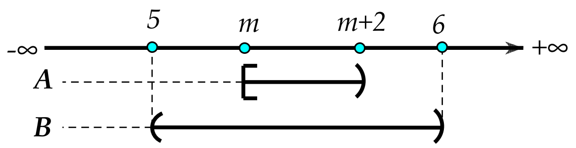
...

...

...

BT 5. Cho hai tập hợp $A = [m;\ m+2)$ và $B = (5;6),\ \forall m \in \mathbb{R}$.

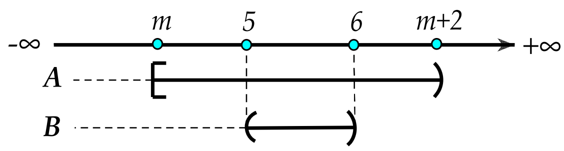
a) Tìm tham số m để $A \subset B$?



Để $A \subset B \Leftrightarrow 5 < m < m+2 < 6$

$\Rightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m+2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < 4 \end{cases} \Rightarrow m \in \varnothing.$

b) Tìm tham số m để $B \subset A$?



Để $B \subset A \Leftrightarrow m \le 5 < 6 \le m+2$

$\Rightarrow \begin{cases} m \le 5 \\ m+2 \ge 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 5 \\ m \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le m \le 5.$

c) Tìm tham số m để $A \cap B = \varnothing$ *(Cố định tập $B = (5;6)$ thì tập A nằm bên trái hoặc bên phải).*

Để $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2 \le 5 \\ m \ge 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 3 \\ m \ge 6 \end{array}\right.$.

BT 6. Cho hai tập hợp $A = (3m-1;\ 3m+7)$ và $B = (-1;1),\ \forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $B \subset A$?

$\Leftrightarrow m \le 2.$

b) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B = \varnothing$?

$\Leftrightarrow m < 4.$

BT 7. Cho hai tập hợp $A = (2;7-m)$ và $B = (m-1;+\infty),\ \forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $A \subset B$?

b) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B = \varnothing$?

c) Tìm tất cả các tham số m để $A \cup B = (1;+\infty)$?

$\Leftrightarrow m = 2.$

BT 8. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m-1; 3m+3]$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B = \varnothing$?

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các tham số m để $B \subset A$?

$\Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{2}$.

c) Tìm tất cả các tham số m để $A \subset C_{\mathbb{R}}B$?

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{2}$.

d) Tìm tất cả các tham số m để $C_{\mathbb{R}}A \cap B = \varnothing$?

$\Leftrightarrow m \geq -\dfrac{3}{2}$.

BT 9. Cho hai tập hợp $A = (m-1; 4]$ và $B = (-2; 2m+2)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B \neq \varnothing$?

$\Leftrightarrow -2 < m < 5$.

b) Tìm tất cả các tham số m để $A \subset B$?

$\Leftrightarrow 1 < m < 5$.

c) Tìm tất cả các tham số m để $B \subset A$?

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1$.

d) Tìm các tham số m để $(A \cap B) \subset (-1; 3)$?

$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1/2$.

BT 10. * Cho hai tập hợp $A = \left[m-1; \dfrac{m+1}{2}\right]$ và $B = (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $A \subset B$?

$\Leftrightarrow m < -5$.

b) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B = \varnothing$?

$\Leftrightarrow -1 \leq m < 3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tập hợp $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 5\}$. Hãy viết tập M dưới dạng khoảng, đoạn ?

A. $M = [2;5)$. **B.** $M = (2;5)$. **C.** $M = [2;5]$. **D.** $M = (2;5]$.

Câu 2. Kết quả của $[-4;1) \cup (-2;3]$ là

A. $(-2;1)$. **B.** $[-4;3]$. **C.** $(-4;2]$. **D.** $(1;3]$.

Câu 3. Cho hai tập hợp $A = [-2;3]$ và $B = (1;+\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(1;3]$. **C.** $[1;3]$. **D.** $(1;3)$.

Câu 4. Cho hai tập hợp $A = (-3;3)$ và $B = (0;+\infty)$, khi đó $A \cup B$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $[-3;0)$. **D.** $(0;3)$.

Câu 5. Kết quả của phép toán $(-\infty;1) \cap [-1;2)$ là

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $[-1;1)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = (1;9)$ và $B = [3;+\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $[3;9)$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = [-1;3]$ và $B = (2;5)$. Tìm mệnh đề **sai** ?

A. $B \backslash A = [3;5)$. **B.** $A \cap B = (2;3]$. **C.** $A \backslash B = [-1;2]$. **D.** $A \cup B = [-1;5]$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = (-\infty;5]$ và $B = (0;+\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

A. $[0;5)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(0;5]$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9. Cho hai tập hợp $A = (-\infty;2]$ và $B = (0;+\infty)$, khi đó $A \setminus B$ là

A. $(-\infty;0]$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2]$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 10. Phần bù của $[-2;1)$ trong $\mathbb{R}$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;-2) \cup [1;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 11. Phần bù của tập hợp $(-\infty;-2)$ trong $(-\infty;4)$ là

A. $(-2;4)$. **B.** $(-2;4]$. **C.** $[-2;4)$. **D.** $[-2;4]$.

Câu 12. Cho tập hợp $A = [-\sqrt{3};\sqrt{5})$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

A. $(-\infty;-\sqrt{3}] \cup (\sqrt{5};+\infty)$. **B.** $(-\infty;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{5};+\infty)$.

C. $(-\infty;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{5};+\infty)$. **D.** $(-\infty;-\sqrt{3}) \cup [\sqrt{5};+\infty)$.

Câu 13. Tập $(-\infty;-3) \cap [-5;2)$ bằng

A. $[-5;-3)$. **B.** $(-\infty;-5]$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-3;-2)$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 2\}$ và $B = (-1;3)$. Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $A \cap B = (-1;2]$. **B.** $A \setminus B = (-3;-1)$.

C. $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty;-1) \cup [3;+\infty)$. **D.** $A \cup B = \{-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 15. Cho hai tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$, khi đó $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ là

A. $(-\infty;-1) \cup [3;+\infty)$. **B.** $(-1;3]$.

C. $(-\infty;-1] \cup (3;+\infty)$. **D.** $[-1;3)$.

Câu 16. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \le 5\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 4\}$. Khi đó $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$ bằng

A. $[-2;3)$. **B.** $[3;5]$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[-2;5]$.

Câu 17. Cho hai tập hợp $A=(-1;3)$ và $B=[0;5]$. Khi đó $(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ là

A. $(-1;3)$. **B.** $[-1;3]$. **C.** $(-1;3)\setminus\{0\}$. **D.** $(-1;3]$.

Câu 18. Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1\le x<3\}$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|<2\}$. Khi đó $A\cap B$ là

A. $(-1;2)$. **B.** $[0;2)$. **C.** $(-2;3)$. **D.** $[-1;2)$.

Câu 19. Cho các tập hợp $M=[-3;6]$ và $N=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. Khi đó $M\cap N$ là

A. $(-\infty;-2)\cup[3;6]$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $[-3;-2)\cup(3;6]$. **D.** $(-3;-2)\cup(3;6)$.

Câu 20. Cho ba tập hợp $A=(-\infty;1]$, $B=[1;+\infty)$ và $C=(0;1]$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $(A\cup B)\setminus C=(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$. **B.** $A\cap B\cap C=\{-1\}$.

C. $A\cup B\cup C=(-\infty;+\infty)$. **D.** $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$.

Câu 21. Cho ba tập hợp $A=(-\infty;2]$, $B=[2;+\infty)$ và $C=(0;3)$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $A\cap C=(0;2]$. **B.** $B\cup C=(0;+\infty)$.

C. $A\cup B=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $B\cap C=[2;3)$.

Câu 22. Cho ba tập hợp $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$ và $C=(0;4)$. Khi đó $(A\cup B)\cap C$ là

A. $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $[3;4)$. **D.** $[3;4]$.

Câu 23. Cho hai tập hợp $A=(2;+\infty)$ và $B=(m;+\infty)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B\subset A$?

A. $m\le 2$. **B.** $m=2$.

C. $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

Câu 24. Cho hai tập hợp $A=[1;3]$ và $B=[m;m+1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B\subset A$?

A. $m=1$. **B.** $1<m<2$.

C. $1\le m\le 2$. **D.** $m=2$.

Câu 25. Cho hai tập hợp $A=(-\infty;m+1]$ và $B=(-1;+\infty)$. Điều kiện để $(A\cup B)=\mathbb{R}$ là

A. $m>-1$. **B.** $m\ge -2$.

C. $m\ge 0$. **D.** $m>-2$.

Câu 26. Cho $A=[1-2m;m+3]$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge 8-5m\}$. Tìm tất cả tham số m để $A\cap B=\varnothing$?

A. $m\ge\dfrac{5}{6}\cdot$ **B.** $m<-\dfrac{2}{3}\cdot$

C. $m\le\dfrac{5}{6}\cdot$ **D.** $-\dfrac{2}{3}\le m<\dfrac{5}{6}\cdot$

Câu 27. Cho hai tập hợp $A=(-\infty;m)$ và $B=[2m-2;2m+2]$. Tìm các tham số m để $C_{\mathbb{R}}A\cap B\ne\varnothing$.

A. $m\ge 2$. **B.** $m<-2$.

C. $m\ge -2$. **D.** $m<2$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.B	4.A	5.C	6.D	7.D	8.C	9.A	10.B
11.C	12.D	13.A	14.A	15.A	16.B	17.A	18.D	19.C	20.B
21.C	22.C	23.D	24.C	25.B	26.D	27.C			

Chương 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

☆☆☆

① **Định nghĩa**

Giả sử có hai đại lượng biến thiên x và y, trong đó x nhận giá trị thuộc tập số $\mathscr{D}$.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập $\mathscr{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì ta có một hàm số của x.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x. Tập hợp $\mathscr{D}$ được gọi là tập xác định hàm số.

Tập xác định của $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

② **Cách cho hàm số**

Cho bằng bảng, biểu đồ, công thức $y = f(x)$.

③ **Đồ thị của hàm số**:

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy với mọi $x \in \mathscr{D}$.

④ **Chiều biến thiên của hàm số**

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1,\ x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1,\ x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi xuống, hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi lên.

⑤ **Tính chẵn lẻ của hàm số**

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số chẵn nếu

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = f(x).$$

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số lẻ nếu

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

Tính chất:

+ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
+ Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

⑥ **Hàm số phân nhánh**

Ví dụ hàm số $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ nghĩa là với $x \geq 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $f(x) = 2x+1$, với $x < 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $g(x) = -x^2$.

⑦ **Hàm số hợp**

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Tìm hàm số $y = f(2x+1)$?

$\longrightarrow$ Ta có: $y = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3 = 4x^2 - 1$ (thay x bằng $2x+1$).

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x-1) = x^2 - 3x + 2$. Tìm hàm số $f(x)$?

$\longrightarrow$ Đặt $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1 \Rightarrow f(t) = (t+1)^2 - 3(t+1) + 2 = t^2 - t \Rightarrow f(x) = x^2 - x$.

Dạng toán 1: Xác định hàm số và điểm thuộc đồ thị

1. Cho hàm số $f(x)$. Hãy tìm hàm số $g(x)$ trong các trường hợp sau:

a) Cho $f(x) = x - 2x^2$. Tìm $g(x) = f(x-1)$.

Ta có: $g(x) = f(x-1) = (x-1) - 2(x-1)^2$

$= x - 1 - 2(x^2 - 2x + 1)$

$= -2x^2 + 5x - 3.$

b) Cho $f(x) = x - 3x^2$. Tìm hàm $g(x) = f(2-x)$.

c) Cho $f(x) = x^2 - 2x$. Tìm $g(x) = f(x^2+1)$.

d) Cho $f(x) = x^2 - 4x$. Tìm hàm $g(x) = f(1-x^2)$.

2. Hãy tìm hàm số $y = f(x)$, biết rằng:

a) $f(x+2) = 2x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $x + 2 = t \Rightarrow x = t - 2$.

Khi đó: $f(t) = 2(t-2) - 1$

$= 2t - 5.$

Suy ra: $y = f(x) = 2x - 5$.

b) $f(x-1) = x^2 - 3x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x+1) = x^2 + 2x + 4,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $f(1-2x) = 4x^2 - 8x + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Cho hàm số $f(x) = 1 - 3x$. Tìm x sao cho:

a) $f(x) = 2.f(1-x) - 3x + 4$.

Ta có: $f(x) = 2.f(1-x) - 3x + 4$

$\Leftrightarrow 1 - 3x = 2.[1 - 3(1-x)] - 3x + 4$

$\Leftrightarrow 1 - 3x = 2(-2 + 3x) - 3x + 4$

$\Leftrightarrow 1 - 3x = -4 + 6x - 3x + 4$

$\Leftrightarrow x = 1.$

b) $f(x) = f(x^2) - 3x + 12$.

$\Leftrightarrow x = \pm 2.$

4. Cho hàm số $y = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \ge 2 \\ x^2 - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính giá trị của hàm số đó tại:

- $x = 3 > 2$ nên chọn hàm $y = x + 1 \Rightarrow y(3) = 3 + 1 = 4.$
- $x = -1$ ....
- $x = 2$ ....

5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các tham số m để $f(m^2) + f(-2) = 18$?

Lời giải tham khảo

Vì $x = m^2 \geq 0$ nên chọn (lấy nhánh trên) $f(x) = x - 4 \Rightarrow f(m^2) = m^2 - 4.$

Tương tự $x = -2 < 0$ nên chọn (nhánh dưới) $f(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 1 = 13.$

Do đó $f(m^2) + f(-2) = 18 \Leftrightarrow m^2 - 4 + 13 = 18 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = -3$ hoặc $m = 3.$

6. Cho $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 - 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm tham số m để $f((m+1)^2) + f(-3) = 3.$

....

....

....

....

.... $\Leftrightarrow m = 4$ hoặc $m = -6.$

7. Cho hàm số $y = 3x^2 - 2x + 1.$ Các điểm sau có thuộc đồ thị hàm số không ?

- $M(-1;6).$ Gọi $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 1.$ Ta có $f(-1) = 6 \Rightarrow M(-1;6)$ thuộc đồ thị hàm số.
- $N(1;1).$ ....
- $P(0;1).$ ....

8. Cho hàm số $y = \dfrac{5x^3 - 7x^2 + 8}{3x + 2}$ có đồ thị là $(C).$ Tìm trên đồ thị (C) các điểm có tung độ bằng $4.$

....

....

....

....

.... $M(0;4),\ N(-1;4),\ P(12/5;4).$

9. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x - m}{2x + m}$. Tìm các giá trị m để đồ thị hàm số qua điểm $M\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$?

....

....

.... $m = 2.$

Dạng toán 2: Tìm tập xác định của hàm số

— **Bước 1.** Ghi điều kiện để hàm số $y = f(x)$ xác định. Thường gặp ba dạng sau:

- Hàm số phân thức: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \xrightarrow{ĐKXĐ} Q(x) \neq 0.$
- Hàm số chứa căn bậc chẵn trên tử số: $y = \sqrt[2n]{P(x)} \xrightarrow{ĐKXĐ} P(x) \geq 0.$
- Hàm số chứa căn thức dưới mẫu số: $y = \dfrac{P(x)}{\sqrt[2n]{Q(x)}} \xrightarrow{ĐKXĐ} Q(x) > 0.$

— **Bước 2.** Thực hiện phép toán trên tập hợp (thường là phép giao) để suy ra tập xác định $\mathscr{D}$.

Lưu ý: $A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$. Căn bậc lẻ (như $\sqrt[3]{x}$) luôn xác định, nghĩa là không có điều kiện.

Khi tìm điều kiện luôn trả lời 3 câu hỏi: Có mẫu không ? Có căn không ? Căn nằm ở đâu ?

1. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x-6}$.

- Hàm số xác định khi $x^2 + x - 6 \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3;2\}$.

2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{5x+2}{x^2+5x-14}$.

3. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{2019x}{(4-x^2)(x^2+1)}$.

4. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{2019x+2020}{(x-1)(x^2+2x+2)}$.

5. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{3-x}{x^2-2x} + \sqrt{x-1}$.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2 - 2x \neq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$.

- Tập xác định $\mathscr{D} = [1;+\infty) \setminus \{2\}$.

6. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{2019}{-x^2+3x} + \sqrt{2x-4}$.

7. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x+4}}{x^2-3x}\cdot$

8. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-10x}\cdot$

9. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}}+\sqrt{2x+4}.$

- Hàm số xác định khi $\begin{cases}3-x>0\\2x+4\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x<3\\x\geq -2\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x<3.$

- Tập xác định $\mathscr{D}=[-2;3).$

10. Tìm tập xác định của $y=\sqrt{2-x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot$

11. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-1}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-4}\cdot$

12. Tìm TXĐ của $y=\dfrac{x+5\sqrt{2x+8}}{x^2-3x-10}-\dfrac{2019}{\sqrt{3-x}}\cdot$

13. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{3x+5}{(2x+x^2)\sqrt{x+1}}\cdot$

- Hàm số xác định khi $\begin{cases}2x+x^2\neq 0\\x+1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x\neq -2.\\x>-1\end{cases}$

- Tập xác định $\mathscr{D}=(-1;+\infty)\setminus\{0\}.$

14. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{2020x-2021}{(x^2+3x)\sqrt{x+1}}\cdot$

15. Tìm TXĐ của $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{(x-3)\sqrt{8-x}}\cdot$

16. Tìm tập xác định $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{2x-6}{(x-4)\sqrt{5-x}}\cdot$

17. Tìm TXĐ của hàm số $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x(x-3)}-2}$.

18. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{\sqrt{x+2}+x}{2+\sqrt{(x-1)(x+2)}}$.

19. Tìm TXĐ $y = \dfrac{2x^2+3}{\left|x+2\right|-\left|x-2\right|} + \dfrac{1}{\left|x\right|-2}$.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} \left|x+2\right|-\left|x-2\right| \neq 0 \\ \left|x\right|-2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x+2\right| \neq \left|x-2\right| \\ \left|x\right| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \neq x-2 \\ x+2 \neq -x+2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}.$$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2;0;2\}$.

20. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{-4+2x}}{\left|x+1\right|-3}$.

- $\left|A\right| \neq \left|B\right| \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq B \\ A \neq -B \end{cases}$
- $\left|A\right| \neq B < 0$: luôn đúng.
- $\left|A\right| \neq B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq B \\ A \neq -B \end{cases}$.

21. Tìm TXĐ của hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-6}}{\left|x-2\right|-1}$.

22. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{10-2x}}{\left|2x\right|+4}$.

23. Tìm tập xác định của $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-2\sqrt{x-1}\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x-1-2.\sqrt{x-1}+1^2\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ (\sqrt{x-1}-1)^2\geq 0: \text{ luôn đúng} \end{cases}$

- Tập xác định $\mathscr{D}=[1;+\infty)$.

24. Tìm tập xác định của $y=\sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}$.

☛ **Cần nhớ**: *Khi gặp dạng* ***căn trong căn*** $\longrightarrow$ *Đưa về hằng đẳng thức* $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

25. Tìm tập xác định của $y=\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}$

26. Tìm tập xác định của $y=\sqrt{x+21+8\sqrt{x+5}}$.

27. Tìm TXĐ của $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}}{(3-x)\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

28. Tìm TXĐ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}}$

29. * Tìm tập xác định của $y=\dfrac{2018x}{\left|1-x\right|+x-1}$.

Lời giải tham khảo

- Hàm số xác định khi $\left|1-x\right|+x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow \left|1-x\right|\neq 1-x \qquad (*)$

- Mệnh đề phủ định $(*)$ là $\left|1-x\right|=1-x$

$\Rightarrow 1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$ (định nghĩa $|A|$).

Do đó $(*)\Rightarrow x>1$.

- Tập xác định $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

30. * Tìm tập xác định của $y=\dfrac{2019x}{\left|2-x\right|+x-2}$.

☛ *Một số trường hợp xét mệnh đề phủ định:* $\left|A\right|\pm B\neq 0,\ \left|A\right|+\left|B\right|\neq 0,\ \left|A\right|+\sqrt{B}\neq 0,\ \sqrt{A}+\sqrt{B}\neq 0,..$

Định nghĩa trị tuyệt đối: $\left|A\right|=\begin{cases}A\Leftrightarrow A\geq 0\\ -A\Leftrightarrow A<0\end{cases}$.

31. * Tìm TXĐ của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\left|x-3\right|+x-3}$.

32. * Tìm TXĐ của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{2\left|x-2\right|+2x-4}$.

33. * Tìm TXĐ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\left|3-x\right|+x-3}$.

34. * Tìm TXĐ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{2\left|x-2\right|+4-2x}$.

35. * Tìm TXĐ của hàm $y=\sqrt{\dfrac{x^2+5}{2-x}}+\dfrac{2020}{x^2-9}\cdot$

Lời giải tham khảo

- Hàm số xác định khi $\begin{cases}\dfrac{x^2+5}{2-x}\geq 0\\ x^2-9\neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}2-x>0\\ x\neq \pm 3\end{cases}$ (do $x^2+5>0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases}x<2\\ x\neq \pm 3\end{cases}$

- Tập xác định: $\mathscr{D}=(-\infty;2)\setminus\{-3\}$.

36. * Tìm TXĐ của hàm $y=\dfrac{2021x}{4-x^2}+\sqrt{\dfrac{1-x}{-x^2-2}}\cdot$

37. * $y=\dfrac{\sqrt{-4-3x}}{\left|5x+7\right|-4}+\dfrac{4x^2-x}{\left|x-1\right|+\left|2-2x\right|}\cdot$

38. * $y=\dfrac{\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}}{\left|x^2-4\right|+\left|x^2-2x\right|}+\dfrac{1}{\left|x+1\right|-\left|x-1\right|}\cdot$

39. * Tìm tập xác định: $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-1}+\left|x^2-1\right|}\cdot$

40. * Tìm TXĐ $y=\dfrac{\sqrt{3x+3}}{\left|-x^2-3x+4\right|+\left|x^2+5x-6\right|}\cdot$

Dạng toán 3: Bài toán tìm tập xác định liên quan đến tham số

1. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2m+1}{x-m}$ xác định trên nửa khoảng $(-1;0]$.

Lời giải tham khảo

- Hàm số xác định khi $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$.
- Hs xác định trên $(-1;0] \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \in (-1;0) \end{cases}$

  $\Leftrightarrow m \notin (-1;0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$.
- Kết luận: $m \leq -1$ hoặc $m > 0$.

2. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2m}$ xác định trên nửa khoảng $(1;3]$.

3. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2m}{x-2m}$ xác định trên khoảng $(4;+\infty)$.

4. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{3mx+6}$ xác định trên khoảng $(-\infty;2)$.

5. Tìm m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x^2-6x+m-2}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải tham khảo

- Hàm số xác định khi $x^2 - 6x + m - 2 \neq 0$
- Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

  $x^2 - 6x + m - 2 \neq 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

  $\Leftrightarrow \; x^2 - 6x + m - 2 = 0$ vô nghiệm

  $\Leftrightarrow \Delta = (-6)^2 - 4.1.(m-2) < 0$

  $\Leftrightarrow 36 - 4m + 8 < 0$

  $\Leftrightarrow -4m < -44 \Leftrightarrow m > 11$.
- Kết luận: $m > 11$.

6. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x^2-2x+m}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

☛ ***Cần nhớ***: *$ax^2 + bx + c \neq 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm.*

7. * Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x^2-4x+4-m}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

8. * Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2020mx}{x^2+4mx+16}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

9. * Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x+2m+6}}{\sqrt{x-m}}$ xác định trên khoảng $(-1;0)$.

- Điều kiện: $\begin{cases}-x+2m+6\ge 0\\ x-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2m+6\\ x>m\end{cases}$

  $\Leftrightarrow m<x\le 2m+6.$

  (Điều kiện $2m+6>m\Leftrightarrow m>-6$)
- Do đó tập xác định của hàm số theo m là $\mathscr{D}=(m;\ 2m+6]$.
- Hs xác định $(-1;0)$ thì $(-1;0)\subset(m;\ 2m+6]$.

  $\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -1\\ 2m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -1\\ m>-3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\le -1.$
- Kết luận: $m\in(-3;-1]$ thỏa bài toán.

10. * Tìm m để hàm số $y=\dfrac{3-\sqrt{2m+4-x}}{\sqrt{x-m}}$ xác định nửa khoảng $(0;2]$.

11. * Tìm m để $y=\sqrt{m-x}-\sqrt{x+m-5}$ xác định trên $[0;1)$.

12. * Tìm m để $y=\sqrt{x-m}+\sqrt{2x-m-1}$ xác định trên $[0;+\infty)$.

13. * Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2020mx}{\sqrt{x-m+2}-1}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải tham khảo

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m+2\ge 0 \\ \sqrt{x-m+2}-1\ne 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge m-2 \\ \sqrt{x-m+2}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge m-2 \\ x-m+2\ne 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge m-2 \\ x\ne m-1 \end{cases}$

- Do đó tập xác định của hàm số theo m là $\mathscr{D}=[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\}$.
- Để hàm số xác định trên khoảng $(0;1)$

$(0;1)\subset[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\}$

$\Leftrightarrow (0;1)\subset[m-2;m-1)\cup(m-1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (0;1)\subset[m-2;m-1) \\ (0;1)\subset(m-1;+\infty) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-2\le 0 \\ 1\le m-1 \end{cases} \\ m-1\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\le 2 \\ m\ge 2 \end{cases} \\ m\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m\le 1 \end{array}\right.$.

- Kết luận: $m\in(-\infty;1]\cup\{2\}$ thỏa bài toán.

14. * Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2021mx-1}{\sqrt{x-m+1}-1}$ xác định trên khoảng $(1;2)$.

15. * Tìm m để $y=\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+5m}$ xác định trên đoạn có chiều dài bằng 1.

16. * Tìm m để $y=\sqrt{x-m+2}+\sqrt{2m-x}$ xác định trên đoạn có chiều dài bằng 3.

Dạng toán 4: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

- **Bước 1**. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = f(x)$.
- **Bước 2**. Xét $\mathscr{D}$ có là tập đối xứng không ? ($\mathscr{D}$ là tập đối xứng khi $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$).
  + Nếu $\exists x \in \mathscr{D}$ sao cho $-x \notin \mathscr{D}$ thì ta kết luận hàm số không phải là hàm số chẵn, cũng không phải là hàm số lẻ.
  + Nếu $\forall x \in \mathscr{D}$, ta có $-x \in \mathscr{D}$ thì ta làm sang bước 3.
- **Bước 3**. Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, tính $f(-x)$, (nghĩa là chỗ nào có x sẽ thế bằng $-x$).
  + Nếu $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathscr{D}$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn.
  + Nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathscr{D}$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ.

☛ **Cần nhớ**: $(-X)^{2n} = X^{2n}$, $(-X)^{2n+1} = -X^{2n+1}$, $\left|-X\right| = \left|X\right|$, $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$,....

1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số sau:
$f(x) = (2x-2)^{2020} + (2x+2)^{2020}$.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có:

$f(-x) = (-2x-2)^{2020} + (-2x+2)^{2020}$

$= [-(2x+2)]^{2020} + [-(2x-2)]^{2020}$

$= (2x+2)^{2020} + (2x-2)^{2020}$

$= (2x-2)^{2020} + (2x+2)^{2020} = f(x)$.

- Kết luận: hàm số đã cho là hàm số chẵn.

2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số sau:
$f(x) = (5x+1)^{2018} + (1-5x)^{2018}$.

3. Xét tính chẵn lẻ của $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.

4. Xét tính chẵn lẻ của $f(x) = -2x^3 + 3x - \sqrt[3]{x}$.

5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}\cdot$

6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \dfrac{x^{2020}+4}{x^{2021}}\cdot$

7. Xét tính chẵn lẻ của $f(x)=\left|x+2\right|-\left|x-2\right|$.

8. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-\left|x\right|}{\sqrt[3]{x}}$

9. Xét tính chẵn lẻ của $f(x)=\dfrac{\left|x+3\right|+\left|x-3\right|}{\left|x+3\right|-\left|x-3\right|}$.

- ĐK $\left|x+3\right|-\left|x-3\right|\neq 0 \Leftrightarrow \left|x+3\right|\neq\left|x-3\right|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3\neq x-3 \\ x+3\neq -x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 0.$$

- Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có:

$$f(-x)=\frac{\left|-x+3\right|+\left|-x-3\right|}{\left|-x+3\right|-\left|-x-3\right|}$$

$$=\frac{\left|-(x-3)\right|+\left|-(x+3)\right|}{\left|-(x-3)\right|+\left|-(x+3)\right|}=\frac{\left|x-3\right|+\left|x+3\right|}{\left|x-3\right|-\left|x+3\right|}$$

$$=-\frac{\left|x+3\right|+\left|x-3\right|}{\left|x+3\right|-\left|x-3\right|}=-f(x).$$

- Kết luận: hàm số đã cho là hàm số lẻ.

10. Xét tính chẵn lẻ của $f(x)=\dfrac{\left|x-1\right|+\left|x+1\right|}{\left|x-1\right|-\left|x+1\right|}$.

11. Xét tính chẵn lẻ của $f(x)=\dfrac{\left|2-x\right|-\left|2+x\right|}{x^2-1}$.

12. Xét tính chẵn lẻ của $f(x)=\dfrac{\left|3-x\right|-\left|x+3\right|}{x^2-4}$.

13. Xét tính chẵn lẻ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}}{x^2-9}$.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-9\neq 0\\x+5\geq 0\\5-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 3\\x\geq -5\\x\leq 5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 3\\-5\leq x\leq 5\end{cases}$.

- Tập xác định $\mathscr{D}=[-5;5]\setminus\{\pm 3\}$.
- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có:

$f(-x)=\dfrac{\sqrt{-x+5}+\sqrt{5-(-x)}}{(-x)^2-9}$

$=\dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}}{x^2-9}=f(x)$.

- Kết luận: hàm số đã cho là hàm số chẵn.

14. Xét tính chẵn lẻ $f(x)=\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+7}}{x^2-16}$.

15. *Xét tính chẵn lẻ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1$

Ta có: $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Khi đó: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1$

$=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{(\sqrt{x^2+1}-x)(x+\sqrt{x^2+1})}-2x^2-1$

$=\dfrac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}{x^2+1-x^2}-2x^2-1$

$=2x\sqrt{x^2+1}$. Do đó: $f(x)=2x\sqrt{x^2+1}$.

Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có:

$f(-x)=-2x\sqrt{(-x^2)+1}=-2x\sqrt{x^2+1}=-f(x)$.

Kết luận: hàm số đã cho là hàm số lẻ.

16. * $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+2}}{\sqrt{4x^2+2}-2x}-4x^2-1$.

Trục căn thức (nhân liên hợp): $\sqrt{A}\pm B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}\mp B}$, $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}\mp\sqrt{B}}$.

17. Xét tính chẵn lẻ của $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ khi } x<0\\ 0 \text{ khi } x=0\\ 1 \text{ khi } x>0\end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

- Với mọi $x>0$, ta có: $-x<0$.

  Suy ra: $\begin{cases}f(-x)=1\\ f(x)=1\end{cases} \Rightarrow f(-x)=f(x)$.

- Và $f(-0)=f(0)$.

Do đó với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $f(-x)=f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ khi } x<0\\ 0 \text{ khi } x=0\\ 1 \text{ khi } x>0\end{cases}$ là hàm lẻ.

18. Xét tính chẵn lẻ $f(x)=\begin{cases}x^3+1 \text{ khi } x\le -1\\ 0 \text{ khi } -1<x<1\\ x^3-1 \text{ khi } x\ge 1\end{cases}$

19. Cho hàm số $f(x)=x^2+mx+m^2$. Tìm tham số m để hàm số đã cho là hàm số chẵn ?

Lời giải tham khảo

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$.

Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn

$\Leftrightarrow f(-x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+m^2=x^2+mx+m^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2mx=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m=0$.

Kết luận: $m=0$.

20. Cho hàm $f(x)=x^3-(m^2-9)x^2+m-3$. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số lẻ ?

Lời giải tham khảo

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$.

Vì hàm số đã cho là hàm số lẻ

$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^3-(m^2-9)x^2+m-3$

$=-\left[x^3-(m^2-9)x^2+m-3\right],\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2(m^2-9)x^2-2(m-3)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-9=0\\ m-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\pm 3\\ m=3\end{cases} \Leftrightarrow m=3.$

21. Cho $f(x)=x^4-m(m-1)x^3+x^2+mx+m^2$. Tìm m để hàm số đã cho là hàm chẵn ?

22. Cho hàm số $f(x)=x\left|x\right|+mx^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số lẻ ?

Dạng toán 5: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

— Hàm số $f(x)$ gọi là đồng biến trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,\ x_2 \in (a;b);\ x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

— Hàm số $f(x)$ gọi là nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,\ x_2 \in (a;b);\ x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

2. Tỉ số Newton: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và xét tỉ số $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

— Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $T > 0$.

— Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì $T < 0$.

3. Phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số

— Phương pháp 1: Dùng định nghĩa.

— Phương pháp 2: Dùng tỉ số Newton.

☛ **Lưu ý**:

- ***Khi gặp hàm số chứa biểu thức bậc hai trở lên $\longrightarrow$ thường sử dụng tỉ số Newton.***
- ***Khi gặp hàm số chứa biểu thức bậc nhất $\longrightarrow$ thường sử dụng định nghĩa.***

1. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Với mọi $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2^2 - 4x_2 + 5) - (x_1^2 - 4x_1 + 5)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \quad \textit{(nhóm đồng bậc)}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4.$$

- Xét $x_1,\ x_2 \in (-\infty;2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} x_1 + x_2 < 4$$

$\Leftrightarrow T = x_1 + x_2 - 4 < 0.$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$.

- Xét $x_1,\ x_2 \in (2;+\infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} x_1 + x_2 > 4$$

$\Leftrightarrow T = x_1 + x_2 - 4 > 0 \Rightarrow$ đồng biến $(2;+\infty)$.

b) $f(x) = 2x - x^2 + 1$ trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

c) $f(x) = x^2 + 10x + 9$ trên khoảng $(-5;+\infty)$.

d) $f(x) = -2x^2 + 4x$ trên khoảng $(-\infty;-1)$.

e) $f(x) = x^3 + 3x - 1$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

f) $f(x) = -2020x^3 - x$ trên $(-\infty;+\infty)$.

2. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$ trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Xét $x_1,\ x_2 \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$ và xét:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 2} > \dfrac{1}{x_2 - 2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x_1 - 2} > \dfrac{2}{x_2 - 2}$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Do đó ta có $x_1,\ x_2 \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$ thì:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(-\infty;2)$.

b) $f(x) = \dfrac{3}{1-x}$ trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

c) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty;1)$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}\cdot$

d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}=x-1+\dfrac{2}{x}\cdot$

f) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ trên khoảng $(0;2)$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-(x+1)+1}{x+1}$

3. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}$ trên khảng $(4;+\infty)$.

Lời giải tham khảo

Với mọi $x_1>4,\ x_2>4$ và xét

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1-4<x_2-4\\x_1+1<x_2+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x_1-4}<\sqrt{x_2-4}\\\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x_1-4}+\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2-4}+\sqrt{x_2-4}$$

$\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

b) $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$ trên $(3;+\infty)$.

c) $f(x) = \sqrt{5-x}$ trên $(-\infty;2)$.

d) $f(x) = |2x-4| + x$ trên khoảng $(-\infty;2)$.

4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = (m-2)x + 5$ nghịch biến $(-\infty;+\infty)$.

b) $y = (m+1)x + m$ đồng biến $(-\infty;+\infty)$.

c) $f(x) = \dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

d) $f(x) = \dfrac{m+1}{x}$ nghịch biến khoảng $(0;+\infty)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x(x-1)}$?

A. $M(0;-1)$. **B.** $M(2;1)$.
C. $M(2;0)$. **D.** $M(1;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}\cdot$ Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -2 ?

A. $M(0;-2)$. **B.** $N\left(\dfrac{1}{3};-2\right)$.
C. $P(-2;-2)$. **D.** $Q(-1;-2)$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } \ x \le 2 \\ -3 & \text{khi } \ x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây ?

A. $M(0;-3)$. **B.** $N(3;7)$.
C. $P(2;-3)$. **D.** $Q(0;1)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } \ x \ge 2 \\ x^2+2 & \text{khi } \ x < 2 \end{cases}$. Giá trị của $f(2)+f(-2)$ bằng

A. $P = 3$. **B.** $P = 2$.
C. $P = \dfrac{7}{3}\cdot$ **D.** $P = 6$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2(x-3) \text{ khi } -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1} \quad \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Giá trị của $f(-1)$ và $f(1)$ lần lượt là

A. 8 và 0. **B.** 0 và 8.
C. 0 và 0. **D.** 8 và 4.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ là

A. $\mathscr{D} = (-\infty;1]$. **B.** $\mathscr{D} = (1;+\infty)$.
C. $\mathscr{D} = [1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Câu 7. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{2-x}{x^2-4x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{0;2;4\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus [0;4]$.
C. $\mathbb{R} \setminus (0;4)$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0;4\}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{khi } x \le 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tập xác định của hàm số là

A. $\mathscr{D} = [-2;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $\mathscr{D} = [-2;+\infty) \setminus \{1\}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = f\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8}+x & \text{khi } \ x < 2 \\ \sqrt{x+7}+1 & \text{khi } \ x \ge 2 \end{cases}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

C. $\mathscr{D} = \left(-\infty; \dfrac{8}{3}\right]$. **D.** $\mathscr{D} = [-7; +\infty)$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{6+x}$ là

A. $\mathscr{D} = \left[-6; -\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $\mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D} = \left[-6; +\infty\right)$.

Câu 11. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $[1; +\infty)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.. **D.** $[-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 12. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ là

A. $(3; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty)$.

C. $[-1; 3) \cup (3; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Câu 13. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ là

A. $[0; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $[0; +\infty) \setminus \{2\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 14. Hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$ là

A. Hàm số vừa chẵn, vừa lẻ. **B.** Hàm số không chẵn, không lẻ.

C. Hàm số lẻ. **D.** Hàm số chẵn.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = x^2 - |x|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

A. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.

C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

D. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (3-m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m > 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m < 3$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (-2m+1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m < \dfrac{1}{2}\cdot$ **B.** $m > \dfrac{1}{2}\cdot$ **C.** $m < 3$. **D.** $m > 3$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (3m+4)x + 5m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m < -\dfrac{4}{3}\cdot$ **B.** $m > -\dfrac{4}{3}\cdot$ **C.** $m \neq -1$. **D.** $m = 1$.

Câu 19. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$, nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 20. Cho hai hàm số $f(x)=\left|x+2\right|-\left|x-2\right|$ và $g(x)=-\left|x\right|$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 21. Hàm số $f(x)=ax-\sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $0<a<1$. **B.** $a<1$. **C.** $0<a\le 1$. **D.** $a>0$.

Câu 22. Cho (H) là đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-10x+25}+\left|x+5\right|$. Xét các mệnh đề sau:

I. (H) đối xứng qua trục Oy. II. (H) đối xứng qua trục Ox.

III. (H) không có tâm đối xứng.

Mệnh đề nào **đúng** ?

A. Chỉ có I đúng. **B.** I và III đúng.

C. II và III đúng. **D.** Chỉ có II đúng.

Câu 23. Cho hàm số $y=\begin{cases}-2x+1 & \text{khi } x\le -3\\ \dfrac{x+7}{2} & \text{khi } x>-3\end{cases}$. Biết $f(x_\circ)=5$ thì $x_\circ$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 24. Hàm số nào trong các hàm số sau không là hàm số chẵn ?

A. $y=\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}+5$. **B.** $y=\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{2+x}$.

C. $y=\dfrac{x^2+1}{\left|2-x\right|+\left|2+x\right|}$. **D.** $y=\left|1+2x\right|+\left|1-2x\right|$.

Câu 25. Trong các hàm số sau, có bao nhiêu hàm số chẵn: $y=\sqrt{20-x^2}$, $y=-7x^4+2\left|x\right|+1$, $y=\dfrac{x^4+10}{x}$, $y=\left|x+2\right|+\left|x-2\right|$ và $y=\dfrac{\sqrt{x^4-x}+\sqrt{x^4+x}}{\left|x\right|+4}$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 26. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$ là

A. $[-1;3)\setminus\{2\}$. **B.** $[-1;2]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(2;3)$.

Câu 27. Cho $y=x+1$, $y=x^2-2$, $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ và $y=\dfrac{x^4-2x^2+3}{\left|x\right|+1}$. Khẳng định nào **sai** ?

A. Có hai hàm số mà đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

B. Có hai hàm số chẵn.

C. Có một hàm số không chẵn, không lẻ.

D. Có một hàm số lẻ.

Câu 28. Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y = 3x^3 - 2\sqrt{x}$. **B.** $y = 3x^3 - 2|x|$. **C.** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. **D.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = |x+1| + |x-1|$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục tung là trục đối xứng.

B. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \le -2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.

B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

D. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 31. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $\mathscr{D} = (1;3]$. **B.** $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup [3;+\infty)$.

C. $\mathscr{D} = [1;3]$. **D.** $\mathscr{D} = \varnothing$.

Câu 32. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2 - 6x + 8}$ là

A. $(3;8) \setminus \{4\}$. **B.** $[-3;3] \setminus \{2\}$. **C.** $(-3;3) \setminus \{2\}$. **D.** $(-\infty;3) \setminus \{2\}$.

Câu 33. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x - 2m + 3}}{x - m} + \dfrac{3x - 1}{\sqrt{-x + m + 5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

A. $m \in [-3;0] \cup [0;1]$. **B.** $m \in [-3;0]$.

C. $m \in \left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $m \in [-4;0] \cup \left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Câu 34. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + m + 2}{x - m}$ xác định trên khoảng $(-1;2)$?

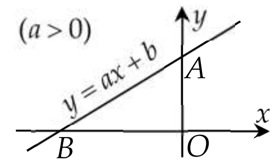
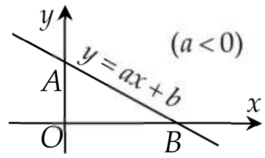
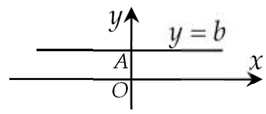
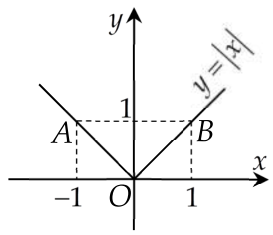
A. $\begin{cases} m \le -1 \\ m \ge 2 \end{cases}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $-1 < m < 2$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.D	4.A	5.A	6.C	7.D	8.B	9.A	10.C
11.D	12.C	13.C	14.D	15.D	16.C	17.A	18.B	19.A	20.B
21.C	22.B	23.B	24.B	25.C	26.A	27.A	28.B	29.D	30.D
31.A	32.B	33.D	34.B						

§ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

☆☆☆

<table>
<tr><th>Hàm số</th><th>TXĐ</th><th>Tính chất</th><th>Bảng biến thiên</th><th>Điểm ĐB</th><th>Đồ thị</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Hàm số bậc nhất
$y = ax + b$
$(a \neq 0)$</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$a > 0$:
hàm số đồng biến</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y & & & +\infty \\ & & \nearrow & \\ & -\infty & & \end{array}$</td><td rowspan="2">$A(0;b)$
$B\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$:
hàm số nghịch biến</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y & +\infty & & \\ & & \searrow & \\ & & & -\infty \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Hàm số hằng
$y = b$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>Hàm chẵn.
Không đổi.</td><td></td><td>$A(0;b)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Hàm số
$y = \left|x\right| =$
$\begin{cases} x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>Hàm chẵn.
Đồng biến trên $(0;+\infty)$.
và nghịch biến $(-\infty;0)$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y & +\infty & & & & +\infty \\ & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & 0 & & \end{array}$</td><td>$O(0;0)$
$A(-1;1)$
$B(1;1)$</td><td></td></tr>
</table>

Đối với hàm số $y = \left|ax + b\right|,\ (a \neq 0)$ thì ta có: $y = \left|ax + b\right| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\dfrac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{khi } x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}.$

Do đó để vẽ hàm số $y = \left|ax + b\right|$, ta sẽ vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$, rồi xóa đi hai phần đường thẳng nằm ở phía dưới trục hoành Ox.

✪ **Lưu ý**: Cho hai đường thẳng $d : y = ax + b$ và $d' : y = a'x + b'$. Khi đó:

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}.$
- $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1.$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.
- $d \cap d' \Leftrightarrow a \neq a'$.
- Phương trình đường d qua $A(x_A;y_A)$, có hệ số góc k dạng $d : y = k.(x - x_A) + y_A$.
- Trục hoành $Ox : y = 0$, trục tung $Oy : x = 0$.
- Phương trình phân giác góc phần tư thứ I, III là $y = x$ và II, IV là $y = -x$.
- Để tọa độ giao điểm của hai đường thẳng, ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm.

Dạng toán 1: Khảo sát sự biến thiên, tương giao & đồng quy

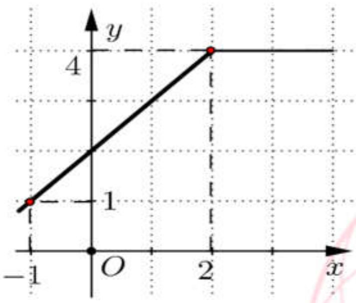
1. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 2 \\ x+2 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}$.

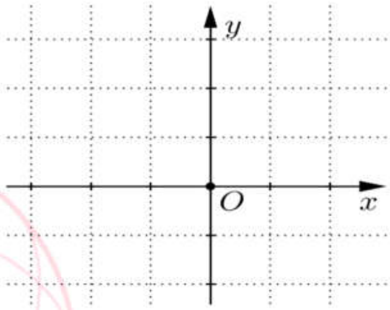
Xét $x > 2 \Rightarrow d : y = 1 \quad (d \parallel Ox)$.

Xét $x \le 2 \Rightarrow (\Delta) : y = x + 2$. Khi đó:

x	-1	2
$y = x+2$	1	4



b) $y = \begin{cases} 2 & \text{khi } x \ge -1 \\ x+3 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.



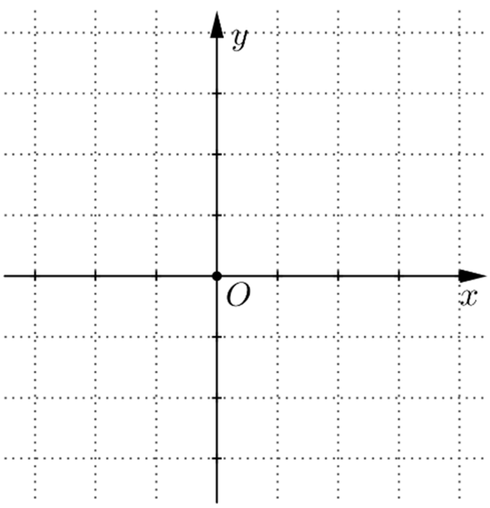
c) $y = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \ge 1 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Xét $x \ge 1 \Rightarrow d : y = 2x - 1$.

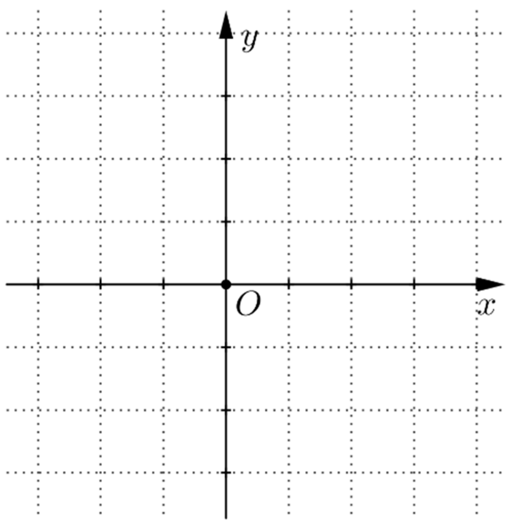
x	1	2
$y = 2x-1$	1	3

Xét $x < 1 \Rightarrow (\Delta) : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

x	-1	0
$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$

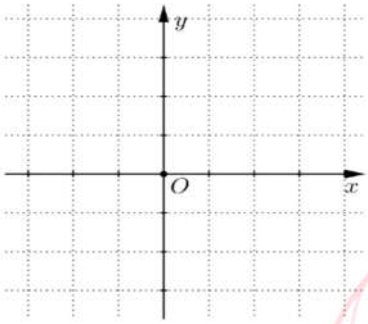


d) $y = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \ge 0 \\ y = -\dfrac{1}{2}x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

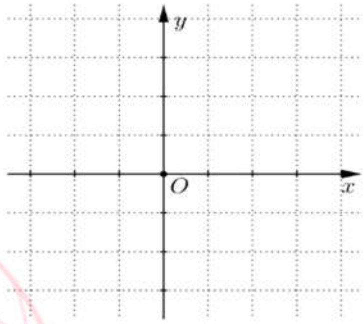


2. Vẽ đồ thị của các hàm số sau, dựa vào đồ thị hãy lập bảng biến thiên.

a) $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \le -1 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}.$



b) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } -2 \le x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{khi } 1 < x \le 2 \\ 2x - 4 & \text{khi } 2 < x \le 4 \end{cases}.$

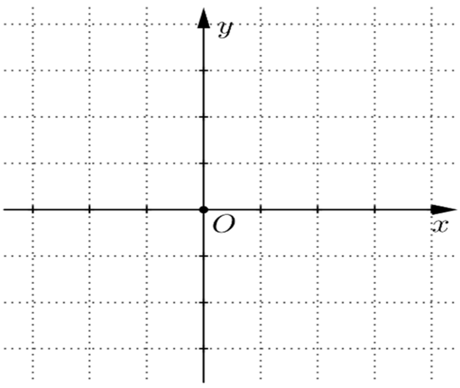


3. Vẽ đồ thị của các hàm số sau và tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ nhỏ nhất ?

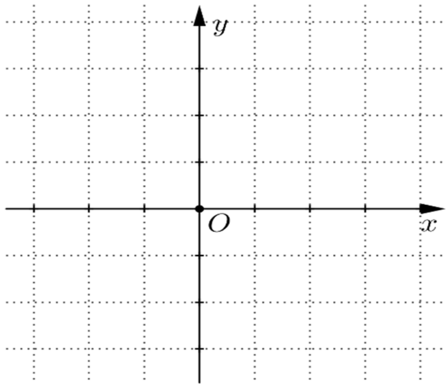
a) $y = 2x + \left|x - 1\right|$.

$$y = 2x + \left|x - 1\right| = \begin{cases} 2x + x - 1 & \text{khi } x - 1 \ge 0 \\ 2x - (x - 1) & \text{khi } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 3x - 1 \text{ khi } x \ge 1 \\ x + 1 \text{ khi } x < 1 \end{cases}.$$



b) $y = 3x + \left|x - 2\right|$.



4. Vẽ đồ thị và từ đồ thị thành lập bảng biến thiên và cho biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$?

a) $y = \left|2 - x\right| + \left|x + 1\right|$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Xét:

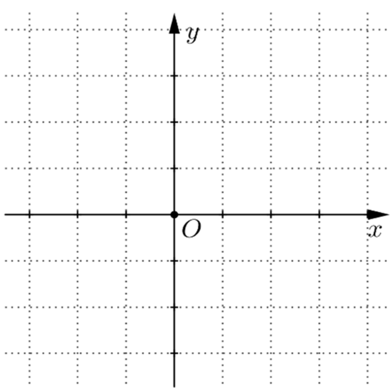
- $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu:

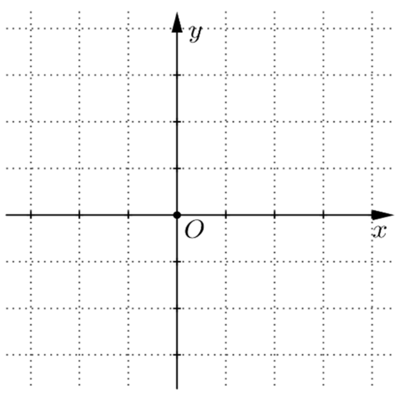
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	

Khi $x \le -1$ thì $y = 2 - x - (x+1) = 1 - 2x$.
Khi $-1 < x \le 2$ thì $y = 2 - x + x + 1 = 3$.
Khi $x > 2$ thì $y = x - 2 + x + 1 = 2x - 1$.

Suy ra: $y = \begin{cases} 1 - 2x \text{ khi } x \le -1 \\ 3 \qquad \text{khi } -1 < x \le 2 \\ 2x - 1 \text{ khi } x > 2 \end{cases}$.



b) $y = \left|x - 2\right| + \left|2x + 4\right|$.



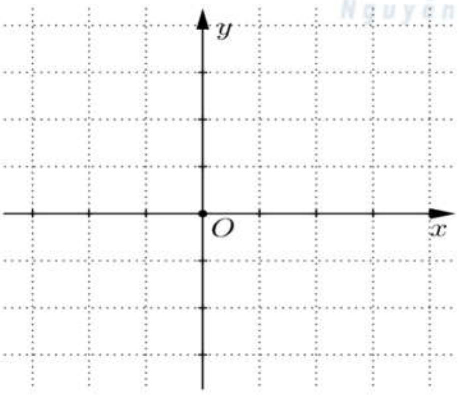
5. Vẽ đồ thị và từ đồ thị thành lập bảng biến thiên và cho biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4;4]$?

a) $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

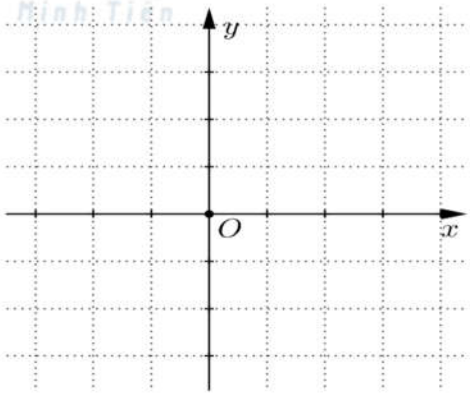
Điều kiện: $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases}$ luôn đúng nên TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x| + |x-1|$.



b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3\sqrt{x^2 - 2x + 1}$.



6. Với giá trị nào của m thì các hàm số sau đồng biến ? nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

Kiến thức cần nhớ: *Hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$.*

a) $y = (2m+3)x - m + 1.$

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi

$a = 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{2}\cdot$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi

$a = 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{2}\cdot$

b) $y = (2m+5)x + m + 3.$

c) $y = mx - 3 - x.$

d) $y = (m-1)x - 2m - 2x.$

7. Tìm điểm để đường thẳng sau luôn đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào ***(điểm cố định)*** ?

a) $y = (2m+3)x - m + 1.$

Gọi $M(x_o;y_o) \in y = (2m+3)x - m + 1$

$\Leftrightarrow y_o = 2mx_o + 1 - m$

$\Leftrightarrow y_o = (2x_o - 1).m + 1$

$\Leftrightarrow (2x_o - 1).m + (1 - y_o) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_o - 1 = 0 \\ 1 - y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = \dfrac{1}{2} \\ y_o = 1 \end{cases}.$

Vậy điểm cố định là $M\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

b) $y = (2m+5)x + m + 3.$

c) $y = 3mx - 6m + 2.$

d) $y = (m-1)x - 2m.$

Dạng toán 2: Xác định phương trình đường thẳng

8. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm m để đồ thị hàm số $d: y = (m-2)x + m$

☞ ***Cần nhớ***: *Cho hai đường thẳng* $d: y = ax + b$ *và* $d': y = a'x + b'$.

Khi đó: $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ *và* $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1$.

a) Đi qua gốc tọa độ O.

Ta có: $O(0;0) \in d: y = -2x + m(x+1)$

$\Leftrightarrow$ ....

b) Đi qua điểm $M(-2;3)$.

c) Song song với đường thẳng $d_1: y = x\sqrt{2}$.

d) Vuông góc với đường thẳng $d_2: y = -x$.

e) Đi qua giao điểm của hai đường thẳng: $d_3: x + y = -1$ và $d_4: x - 2y + 4 = 0$.

f) Cắt đường thẳng $d_5: 3x - y - 4 = 0$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

9. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các cặp hàm số sau song song, vuông góc với nhau ?

a) $d_1: y = (3m-1)x + m,\ d_2: y = 2x - 1$.

b) $d_1: y = (m^2 - m)x + 2,\ d_2: y = m + 2x$.

10. Xác định các tham số a và b để đồ thị của hàm số bậc nhất $(d): y = ax + b$

a) Đi qua hai điểm $A(-1;-20)$ và $B(3;8)$.

Ta có: $A(-1;-20) \in (D): y = ax + b$

$\Leftrightarrow$ ...

b) Đi qua hai điểm $A(-1;3)$ và $B(1;2)$.

c) Đi qua $M(-5;4)$ và song song Oy.

Vì $(D) \parallel Oy: x = 0 \Rightarrow (D): x = \alpha,\ (\alpha \neq 0)$

Do $M(-5;4) \in (D): x = \alpha$

$\Leftrightarrow$ ...

d) Đi qua $M(-12;-5)$ và song song Oy.

e) Đi qua $N(\sqrt{2};1)$ và song song Ox.

f) Đi qua $P(2;-3)$ và vuông góc với Ox.

g) Đi qua điểm $I(-3;2)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

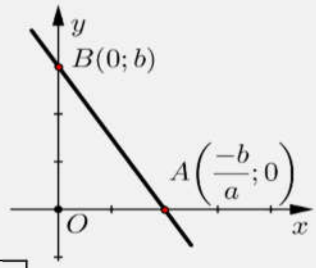
h) Đi qua điểm $K(-2;3)$ và vuông góc với đường phân giác giác góc phần tư thứ tư.

i) Đi qua điểm $A(1;-1)$ và song song với đường thẳng $d: y = 2x + 7$.

j) Đi qua $M(1;-2)$ và có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{3}$.

11. Tìm đường thẳng d đi qua điểm M cho trước và chắn trên hai trục tọa độ một tam giác vuông cân trong các trường hợp sau:

☞ ***Cần nhớ***: *Xét đường thẳng $d: y = ax + b$.*



- $A = d \cap Ox: y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow A\left(-\dfrac{b}{a};0\right) \Rightarrow OA = \left|-\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|b|}{|a|}$.
- $B = d \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow B(0;b) \Rightarrow OB = |b|$.

① *Tam giác OAB vuông cân* $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{|a|} = |b| \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = \pm 1}$.

② *Diện tích* $S_{\Delta OAB} = S_0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{|b|}{|a|}|b| = S_0 \Rightarrow \boxed{b^2 = |a|S_0}$.

a) Qua $M(1;2)$.

- $d \cap Ox = A\left(-\dfrac{b}{a};0\right) \Rightarrow OA = \dfrac{|b|}{|a|}$.
- $d \cap Oy = B(0;b) \Rightarrow OB = |b|$.

Ta có tam giác OAB vuông cân $\Leftrightarrow OA = OB$

$\Leftrightarrow \dfrac{|b|}{|a|} = |b| \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 1 \end{array}\right.$.

Với $a = 1 \Rightarrow d: y = x + b$

Mà $M(1;2) \in d: y = x + b$

$\Leftrightarrow$ ....

Với $a = -1 \Rightarrow y = -x + b$.

Mà $M(1;2) \in d: y = -x + b$

$\Leftrightarrow$ ....

b) Qua $M(-3;1)$.

12. Định tham số m để đường thẳng d chắn trên 2 trục tọa độ tam giác có diện tích cho trước, biết:

a) $d: y = x + 2m$ và $S = 1$.

Gọi $A = d \cap Ox: y = 0 \Rightarrow x = -2m$

$\Rightarrow A(-2m;0) \Rightarrow OA = |-2m|$.

Gọi $B = d \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = 2m$

$\Rightarrow B(0;2m) \Rightarrow OB = |2m|$.

Ta có: $S_{\Delta OAB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}OA.OB = 1$.

b) $d: y = 2x + 4m$ và $S = 4$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $f(x) = (m-1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

A. $m \neq -1.$ **B.** $m > 1.$

C. $m \neq 1.$ **D.** $m \neq 0.$

Câu 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = (3-m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m > 0$ **B.** $m = 3$

C. $m > 3$ **D.** $m < 3$

Câu 3. Một hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$. Hàm số đó là

A. $y = -2x + 3$ **B.** $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}\cdot$

C. $y = 2x - 3.$ **D.** $y = -\dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}\cdot$

Câu 4. Biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;4)$ và có hệ số góc bằng -3. Giá trị của biểu thức $P = ab$ bằng

A. $13.$ **B.** $21.$

C. $4.$ **D.** $-21.$

Câu 5. Đồ thị hàm số nào sau đây đi qua 2 điểm $A(-1;2)$ và $B(0;-1)$?

A. $y = x + 1.$ **B.** $y = x - 1.$

C. $y = 3x - 1.$ **D.** $y = -3x - 1.$

Câu 6. Biết ba đường thẳng $d_1 : y = 2x - 1$, $d_2 : y = 8 - x$, $d_3 : y = (3-2m)x + 2$ đồng quy. Giá trị của m bằng

A. $-1.$ **B.** $1.$

C. $-\dfrac{3}{2}\cdot$ **D.** $\dfrac{1}{2}\cdot$

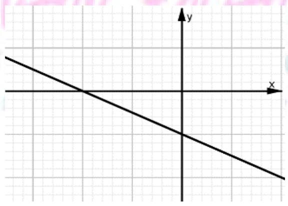
Câu 7. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $a < 0,\ b < 0$

B. $a > 0,\ b > 0$

C. $a < 0,\ b > 0$

D. $a > 0,\ b < 0$



Câu 8. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3;1)$ là

A. $y = -2x + 1.$ **B.** $y = 2x + 7.$

C. $y = 2x + 5.$ **D.** $y = -2x - 5.$

Câu 9. Đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + 5$ có phương trình là

A. $y = 3x - 7.$ **B.** $y = 3x + 5.$

C. $y = -3x - 7.$ **D.** $y = -3x + 5.$

Câu 10. Cho hàm số bậc nhất $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị là d. Tìm số giá trị nguyên dương của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác cân (O là gốc tọa độ).

A. $3.$ **B.** $1.$

C. $2.$ **D.** $4.$

Câu 11. Cho hai đường thẳng $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 100$ và $d_2 : y = -\frac{1}{2}x + 100$. Mệnh đề nào **đúng** ?

A. d_1 và d_2 trùng nhau.

B. d_1 và d_2 vuông góc nhau.

C. d_1 và d_2 cắt nhau.

D. d_1 và d_2 song song với nhau.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 3$ và đi qua điểm $M(-2;4)$. Giá trị a và b lần lượt là

A. $-\frac{4}{5}$ và $\frac{12}{5}\cdot$ **B.** $-\frac{4}{5}$ và $-\frac{12}{5}\cdot$

C. $\frac{4}{5}$ và $-\frac{12}{5}\cdot$ **D.** $\frac{4}{5}$ và $\frac{12}{5}\cdot$

Câu 13. Tìm điểm $M(a;b)$ với $a < 0$ nằm trên $\Delta : x + y - 1 = 0$ và cách $N(-1;3)$ một khoảng bằng 5. Giá trị của $a - b$ bằng

A. $3.$ **B.** $-1.$

C. $-11.$ **D.** $1.$

Câu 14. Đường thẳng $d_m : (m-2)x + my = -6$ luôn đi qua điểm

A. $M_1(3;-3).$ **B.** $M_2(2;1).$

C. $M_3(1;-5).$ **D.** $M_4(3;1).$

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ tạo với hệ trục tọa độ Oxy tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}\cdot$ Khi đó m bằng

A. $m = 2$ hoặc $m = 3.$

B. $m = 2$ hoặc $m = 4.$

C. $m = -2$ hoặc $m = 3.$

D. $m = -2.$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + (m - 1)$.

A. $m = \pm 2.$ **B.** $m = 2.$

C. $m = -2.$ **D.** $m = 0.$

Câu 17. Biết rằng đồ thị hàm số $d : y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;4)$ và song song với đường thẳng $d' : y = 2x + 1$. Tính tổng $S = a + b$?

A. $S = 4.$ **B.** $S = 2.$

C. $S = 0.$ **D.** $S = -4.$

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d : y = (3m + 2)x - 7m - 1$ vuông góc với đường $\Delta : y = 2x - 1$?

A. $m < \frac{5}{6}.$ **B.** $m = -\frac{5}{6}.$

C. $m = 0.$ **D.** $m > -0,5.$

Câu 19. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m^2x + 2$ cắt đường thẳng $y = 4x + 3$?

A. $m = \pm 2$. **B.** $m \neq \pm 2$.

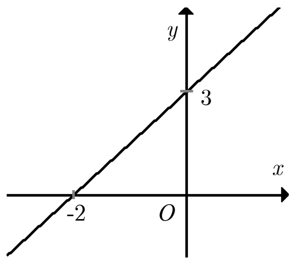
C. $m \neq 2$. **D.** $m \neq -2$.

Câu 20. Tìm phương trình đường thẳng $d : y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(2;3)$ và tạo với hai tia $Ox,\ Oy$ một tam giác vuông cân.

A. $y = x + 5$. **B.** $y = -x + 5$.

C. $y = -x - 5$. **D.** $y = x - 5$.

Câu 21. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị là hình bên. Tìm a và b.



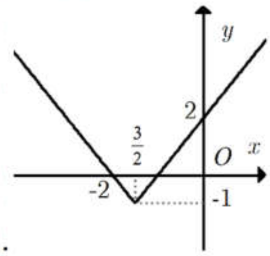
A. $a = -2$ và $b = 3$.

B. $a = -\dfrac{3}{2}$ và $b = 2$.

C. $a = -3$ và $b = 3$.

D. $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = 3$.

Câu 22. Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào ?



A. $y = |2x + 3|$.

B. $y = |2x + 3| - 1$.

C. $y = |x - 2|$.

D. $y = |3x + 2| - 1$.

Câu 23. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào ?

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = |2x - 1|$.

C. $y = 1 - 2x$.

D. $y = -|2x - 1|$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 24. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào ?

A. $y = |4x + 3|$.

B. $y = |4x - 3|$.

C. $y = |-3x + 4|$.

D. $y = |3x + 4|$.

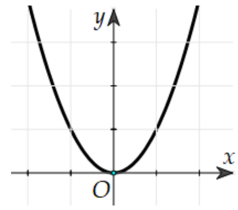
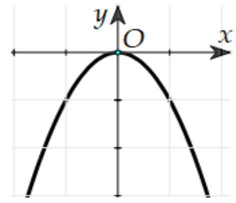
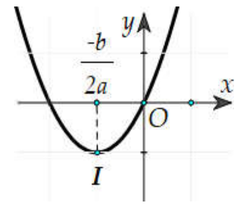
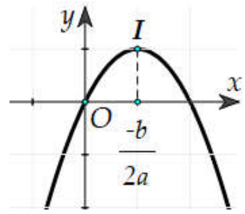
x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.B	4.D	5.D	6.B	7.A	8.B	9.A	10.B
11.C	12.A	13.C	14.A	15.A	16.C	17.A	18.B	19.B	20.B
21.D	22.B	23.B	24.C						

§ 3. HÀM SỐ BẬC HAI

☆☆☆

Hàm số	Tính chất	Bảng biến thiên	Đồ thị
$y=ax^2$ $(a\neq 0)$	Đồ thị $y=ax^2$ là một parabol (P) có: • Đỉnh $O(0;0)$. • Trục đối xứng: Oy. • Bề lõm: $a>0:$ quay lên. $a<0:$ quay xuống.	Khi $a>0:$ x: $-\infty$ | 0 | $+\infty$ y: $+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$	
		Khi $a<0:$ x: $-\infty$ | 0 | $+\infty$ y: $-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	
$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$	Đồ thị $y=ax^2+bx+c$ một là parabol có: • Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$. • Trục đ/x: $x=-\dfrac{b}{2a}\cdot$ • Bề lõm: $a>0:$ quay lên. $a<0:$ quay xuống.	Khi $a>0:$ x: $-\infty$ | $-b/2a$ | $+\infty$ y: $+\infty \searrow -\Delta/4a \nearrow +\infty$	
		Khi $a<0:$ x: $-\infty$ | $-b/2a$ | $+\infty$ y: $-\infty \nearrow -\Delta/4a \searrow -\infty$	

Dạng toán 1: Xác định và khảo sát sự biến của parabol (P)

1. Xác định parabol (P) trong các trường hợp sau:

a) $(P): y=ax^2+bx-3$ có đỉnh $I(3;6)$.

Lời giải tham khảo

- Ta có $I(3;6)\in(P): y=ax^2+bx-3$

$\Leftrightarrow 6=a.3^2+b.3-3$

$\Leftrightarrow 9a+3b=9 \qquad (1)$

- Hoàng độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}=3$

$\Leftrightarrow 6a+b=0 \qquad (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow \begin{cases}9a+3b=9\\6a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=6\end{cases}.$

Vậy $(P): y=-x^2+6x-3$.

b) $(P): y=ax^2+bx-3$ có đỉnh $I(-1;-5)$.

Vậy $(P): y=2x^2+4x-3$.

c) $(P): y = -x^2 + bx + c$ qua điểm $M(1;6)$ và có hoành độ đỉnh bằng 2.

Vậy $(P): y = -x^2 + 4x + 3$.

d) $(P): y = ax^2 - 4x + c$ qua điểm $M(2;3)$ và có hoành độ đỉnh bằng 1.

Vậy $(P): y = 2x^2 - 4x + 3$.

e) $(P): y = ax^2 + bx + 5$ đi qua $M(3;2)$ và có trục đối xứng $x = 2$.

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 5$.

f) $(P): y = -2x^2 + bx + c$ đi qua $M(5;9)$ và có trục đối xứng $x = 3$.

Vậy $(P): y = -2x^2 + 12x - 1$.

g) $(P): y = x^2 + bx + c$ qua hai điểm $M(6;5)$ và điểm $N(1;-5)$.

Vậy $(P): y = x^2 - 5x - 1$.

h) $(P): y = ax^2 + 3x + c$ qua hai điểm $M(3;2)$ và điểm $N(-1;-2)$.

Vậy $(P): y = -x^2 + 3x + 2$.

i) $(P): y = ax^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có tung độ đỉnh bằng -2.

Ta có: $A(2;1) \in (P): y = ax^2 + bx + 1$

$\Leftrightarrow 1 = a.2^2 + b.2 + 1$

$\Leftrightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2a.$

Tung độ đỉnh $y_I = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = -2$

$\Leftrightarrow -b^2 + 4ac = -8a$

$\xrightarrow[c=1]{b=-2a} -(-2a)^2 + 4a = -8a$

$\Leftrightarrow -4a^2 + 12a = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ (loại do : } a \neq 0) \\ a = 3 \Rightarrow b = -6 \end{array}\right.$.

Vậy $(P): y = 3x^2 - 6x + 1.$

j) $(P): y = ax^2 + bx + 7$ đi qua điểm $A(3;1)$ và có tung độ đỉnh bằng 9.

$\Rightarrow (P): y = -2x^2 + 4x + 7.$

k) $(P): y = ax^2 - 4x + c$ có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục Oy tại điểm $M(0;3)$.

$\Rightarrow (P): y = x^2 - 4x + 3.$

l) $(P): y = ax^2 + 8x + c$ có hoành độ đỉnh bằng 4 và cắt trục Ox tại điểm $M(1;0)$.

$\Rightarrow (P): y = -x^2 + 8x - 7.$

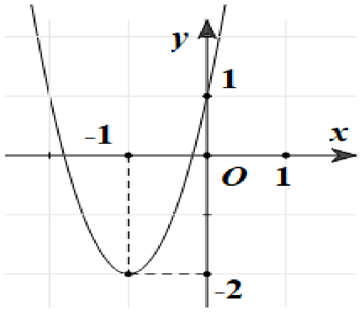
m) $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm: $A(2;5)$, $B(3;8)$ và $C(0;5)$.

$\Rightarrow (P): y = x^2 - 2x + 5.$

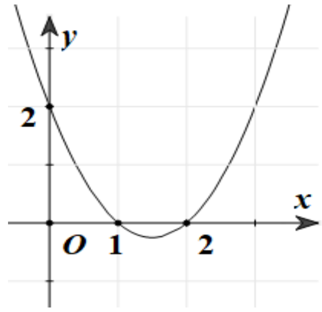
n) $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm: $A(-1;-8)$, $B(3;-8)$ và $C(0;-2)$.

$\Rightarrow (P): y = -2x^2 + 4x - 2.$

o) $(P): y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị:



p) $(P): y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị:



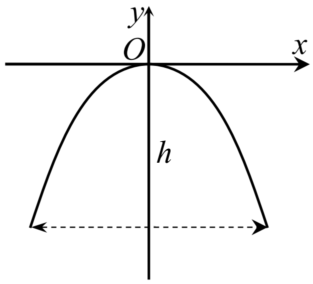
q) $(P): y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

r) $(P): y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên:

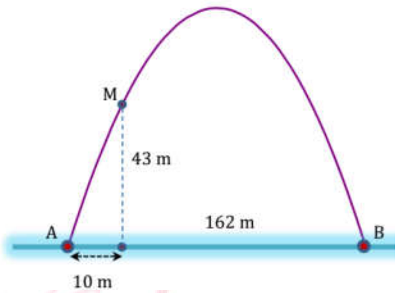
x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -0,5x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d = 5m$ (như hình vẽ). Hãy tính chiều cao h của cổng ?



Đáp số: $h = 3,125m$.

3. Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



Đáp số: $185,6m$.

4. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x - 3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (P).

- Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Tọa độ đỉnh: $I(1;-4)$.
- Trục đối xứng: $x = 1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

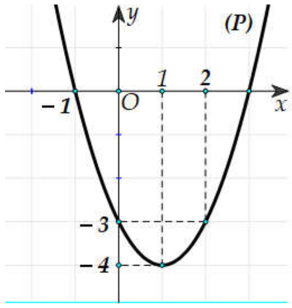
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
- Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3
y	0	-3	-4	-3	0

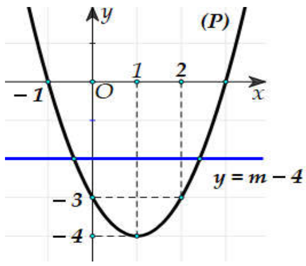
5. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 4x - 3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (P).

- Đồ thị:



b) Biện luận số nghiệm của phương trình:
$-x^2 + 2x + m - 1 = 0.$



Ta có $-x^2 + 2x + m - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = m - 4 \qquad (*)$

Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của (P) và đường thẳng nằm ngang $d : y = m - 4$.

- $m - 4 < -4 \Leftrightarrow m < 0$ thì $(*)$ vô nghiệm.
- $m - 4 = -4 \Leftrightarrow m = 0$ thì $(*)$ có 1 nghiệm.
- $m - 4 > -4 \Leftrightarrow m > 0$ thì $(*)$ có 2 nghiệm.

b) Biện luận số nghiệm của phương trình:
$x^2 - 4x + m - 2 = 0.$

6. Cho parabol $(P) : y = x^2 + 2x - 2.$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (P).

7. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + 4x - 3.$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (P).

b) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2+2x-m-2=0$ có một nghiệm âm và một nghiệm thuộc $(0;1)$.

c) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2+2x-m-2=0$ có một nghiệm âm và một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.

b) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2-4x+m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt dương lớn hơn 1.

c) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2-4x+m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt dương bé hơn 4.

8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^2+4x+3$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $y=-x^2+4x+3$ là một parabol có tọa độ đỉnh là $I(2;7)$ và $a=-1<0$ nên có bảng biến thiên trên đoạn $[0;3]$ như sau:

x	0		2		3
y	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	6

Từ bảng biến thiên, suy ra:

- $\min\limits_{[0;3]} y = 3$ khi $x=0$. • $\max\limits_{[0;3]} y = 7$ khi $x=2$.

9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4x+2$ trên đoạn $[-1;4]$.

Đáp số: $\min\limits_{[-1;4]} y = -2,\ \max\limits_{[-1;4]} y = 9.$

10. Tìm $m \neq 0$ để $y=mx^2-2mx-3m-2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

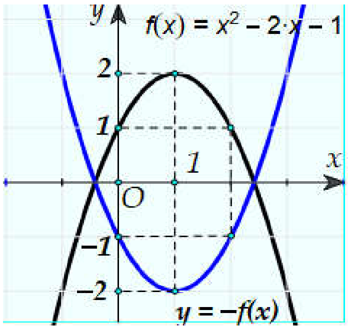
Đáp số: $m=2$.

11. Cho parabol $(P): y=mx^2-2mx-3m-2$. Tìm m để tọa độ đỉnh thuộc $d: y=3x-1$.

Đáp số: $m=-1$.

Dạng toán 2: Biến đổi đồ thị và tương giao

1. Vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$ và $y = -f(x) = -x^2 + 2x + 1$ trên cùng 1 hình.



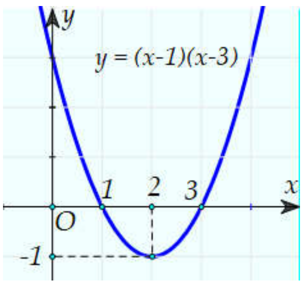
Nhận xét. Hai đồ thị đối xứng nhau qua Ox.

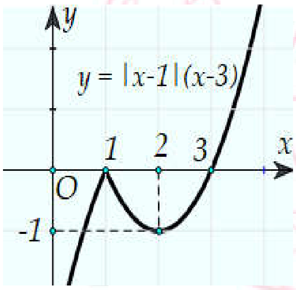
Tổng quát:

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng với đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành Ox, ta được đồ thị của hàm số $y = -f(x)$.

☞ **Cần nhớ**: $\left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$. Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng nhau qua trục Oy, hàm số lẻ nhận O làm tâm đối xứng.

2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$. Từ đồ thị của hàm số đã cho, suy ra đồ thị hàm số $y = \left|x-1\right|(x-3)$.



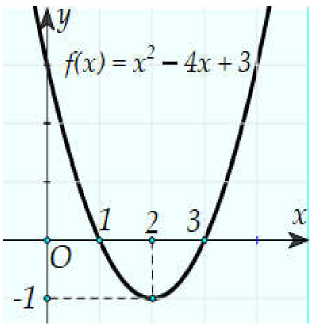


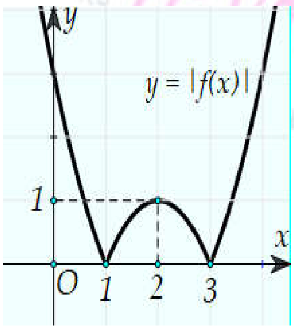
Ta có: $y = \left|x-1\right|(x-3)$

$= \begin{cases} (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ -(x-1)(x-3) = -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$

Do đó giữ đồ thị lại khi $x \geq 1$ và lấy đối xứng phần đồ thị qua Ox khi $x < 1$.

3. Vẽ đồ thị $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$. Suy ra đồ thị $y = \left|f(x)\right| = \left|x^2 - 4x + 3\right|$.



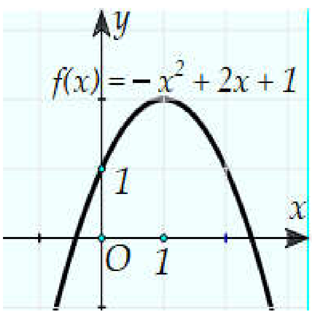


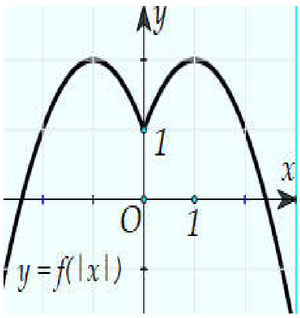
Ta có: $y = \left|f(x)\right| = \left|x^2 - 4x + 3\right|$

$= \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } 1 < x < 3 \end{cases}$

Tổng quát: *Bỏ phần dưới Ox, lấy đối xứng phần vừa bỏ qua trục Ox.*

4. Vẽ đồ thị $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$. Suy ra đồ thị $y = f\left(\left|x\right|\right) = x^2 - 4\left|x\right| + 3$.



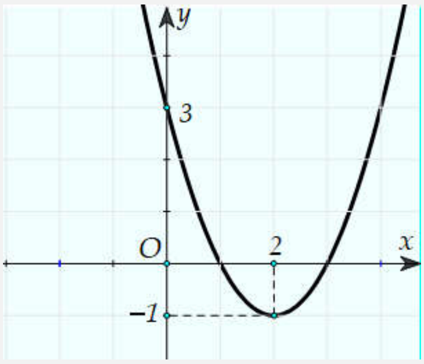


Do hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm số chẵn nên nhận trục tung Oy là trục đối xứng.

Tổng quát:

- *Bỏ phần bên trái Oy.*
- *Lấy đối xứng phần bên phải qua Oy.*

1. Cho parabol $(P): f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ:



a) Xác định $a,\ b,\ c.$

$\Rightarrow a = 1,\ b = -4,\ c = 3.$

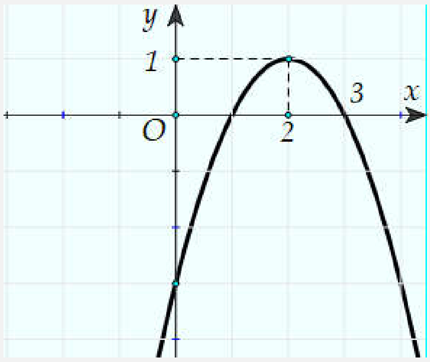
b) Tìm tham số m để phương trình: $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow 0 < m < 1.$

c) Tìm tham số m để phưng trình: $f(|x|) - 1 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow m = 2.$

2. Cho parabol $(P): f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ:



a) Xác định $a,\ b,\ c.$

b) Tìm tham số m để phương trình: $|f(x)| - m - 3 = 0$ có đúng 3 nghiệm.

$\Rightarrow m = -4.$

c) Tìm tham số m để phương trình: $f(|x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow -3 < m < 1.$

3. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 2x + 3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (P).

b) Đường thẳng $d: y = 2x - 1$ cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B. Tìm tọa độ A, B và tính độ dài đoạn thẳng AB.

4. Cho parabol $(P): y = x^2 + bx + c$.

a) Tìm b, c biết đỉnh $I(1;1)$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + bx + c$ trên đoạn $[0;3]$.

c) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của AB là $K \in d': y = 2x$.

$\Rightarrow m = 0.$

5. Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu ?

Đáp số: $m > -13/4$.

6. * Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Đáp số: $1 < m < 2$.

7. * Cho parabol $(P): y = x^2 + (2m+1)x - m - 1$. Tìm tham số m để (P) cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 1$.

Đáp số: $m = -1$ hoặc $m = -3/4$.

8. * Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Đáp số: $m = -2$.

9. * Tìm tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho $OA = 3OB$?

Đáp số: $m = 3$.

10. * Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{9}{2}\cdot$

Đáp số: $m \in \{-7; -1\}$.

11. * Tìm tọa độ điểm các điểm cố định của parabol (P) khi m thay đổi trong các trường hợp sau:

a) $(P): y = (m-1)x^2 + 2mx - 3m + 1$.

Gọi điểm cố định $M(x_\circ; y_\circ) \in (P),\ \forall m$

$\Leftrightarrow y_\circ = (m-1)x_\circ^2 + 2mx_\circ - 3m + 1,\ \forall m$

$\Leftrightarrow mx_\circ^2 - x_\circ^2 + 2mx_\circ - 3m + 1 - y_\circ = 0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow m(x_\circ^2 + 2x_\circ - 3) - x_\circ^2 - y_\circ + 1 = 0,\ \forall m$

$\Rightarrow \begin{cases} x_\circ^2 + 2x_\circ - 3 = 0 \\ -x_\circ^2 - y_\circ + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\circ = 1 \vee x_\circ = -3 \\ y_\circ = 1 - x_\circ^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_\circ = 1 \\ y_\circ = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_\circ = -3 \\ y_\circ = -8 \end{cases}$.

Vậy có hai điểm $M_1(1;0),\ M_2(-3;-8)$.

b) $(P): y = (m-2)x^2 - (m-1)x + 3m - 4$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (P). Tọa độ đỉnh của (P). là

A. $I\left(-\frac{b}{2a};\frac{\Delta}{4a}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{b}{a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **D.** $I\left(\frac{b}{2a};\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 2. Đỉnh của parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$ là

A. $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh $I(-1;3)$?

A. $y = 2x^2 - 4x - 3$. **B.** $y = 2x^2 - 2x - 1$.

C. $y = 2x^2 + 4x + 5$. **D.** $y = 2x^2 + x + 2$.

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

A. $y_{\min} = 0$. **B.** $y_{\min} = -2$.

C. $y_{\min} = 2$. **D.** $y_{\min} = 1$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

A. $y_{\max} = \sqrt{2}$. **B.** $y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

C. $y_{\max} = 2$. **D.** $y_{\max} = 4$.

Câu 6. Trục đối xứng của parabol $(P): y = 2x^2 + 6x + 3$ là

A. $x = -\frac{3}{2}$. **B.** $y = -\frac{3}{2}$.

C. $x = -3$. **D.** $y = -3$.

Câu 7. Trục đối xứng của parabol $(P): y = -2x^2 + 5x + 3$ là

A. $x = -\frac{5}{2}\cdot$ **B.** $x = -\frac{5}{4}\cdot$

C. $x = \frac{5}{2}\cdot$ **D.** $x = \frac{5}{4}\cdot$

Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị nhận đường $x = 1$ làm trục đối xứng?

A. $y = -2x^2 + 4x + 1$. **B.** $y = 2x^2 + 4x - 3$.

C. $y = 2x^2 - 2x - 1$. **D.** $y = x^2 - x + 2$.

Câu 9. Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 10. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$?

A. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$. **B.** $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$.

C. $y = \sqrt{2}(x+1)^2$. **D.** $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$.

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0;2]$?

A. $M = 0;\ m = -\dfrac{9}{4}.$ **B.** $M = \dfrac{9}{4};\ m = 0.$

C. $M = -2;\ m = -\dfrac{9}{4}.$ **D.** $M = 2;\ m = -\dfrac{9}{4}.$

Câu 12. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1.$ **B.** $m = 2.$

C. $m = -2.$ **D.** $m = -1.$

Câu 13. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây ?

A. $y = -x^2 + 4x - 9.$

B. $y = x^2 - 4x - 1.$

C. $y = -x^2 + 4x.$

D. $y = x^2 - 4x - 5.$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 14. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây ?

A. $y = 2x^2 + 2x - 1.$

B. $y = 2x^2 + 2x + 2.$

C. $y = -2x^2 - 2x.$

D. $y = -2x^2 - 2x + 1.$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

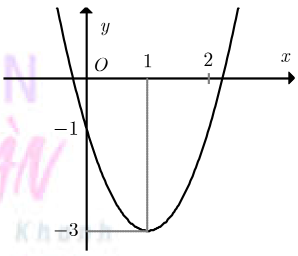
Câu 15. Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = x^2 - 4x - 1.$

B. $y = 2x^2 - 4x - 1.$

C. $y = -2x^2 - 4x - 1.$

D. $y = 2x^2 - 4x + 1.$



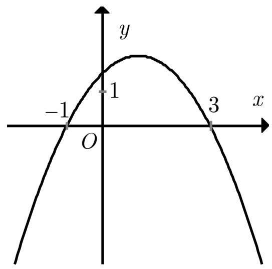
Câu 16. Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}\cdot$

B. $y = -0,5x^2 + x + 1,5.$

C. $y = x^2 - 2x.$

D. $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{3}{2}.$



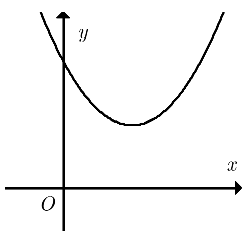
Câu 17. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0.$

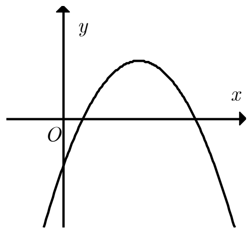
B. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0.$

C. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

D. $a < 0,\ b < 0,\ c > 0.$



Câu 18. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0.$

B. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0.$

C. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0.$

D. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0.$

D. $a < 0,\ b < 0,\ c > 0.$

Câu 19. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$. Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi (P) hoàn toàn nằm phía trên trục hoành ?

A. $a > 0,\ \Delta > 0.$ **B.** $a > 0,\ \Delta < 0.$

C. $a < 0,\ \Delta < 0.$ **D.** $a < 0,\ \Delta > 0.$

Câu 20. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$. Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

A. $a > 0,\ \Delta > 0.$ **B.** $a > 0,\ \Delta < 0.$

C. $a < 0,\ \Delta < 0.$ **D.** $a < 0,\ \Delta > 0.$

Câu 21. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{11}{4}\right)$.

A. $y = x^2 + 3x - 2.$ **B.** $y = 3x^2 + x - 4.$

C. $y = 3x^2 + x - 1.$ **D.** $y = 3x^2 + 3x - 2.$

Câu 22. Tìm giá trị thực của tham số m để parabol $(P): y = mx^2 - 2mx - 3m - 2\ \ (m \neq 0)$ có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

A. $m = 1.$ **B.** $m = -1.$

C. $m = -6.$ **D.** $m = 6.$

Câu 23. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng (P) đi qua $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

A. $y = 2x^2 + x + 2.$

B. $y = x^2 + x + 2.$

C. $y = -2x^2 + x + 2.$

D. $y = -2x^2 - x + 2.$

Câu 24. Xác định parabol $(P): y = 2x^2 + bx + c$, biết (P) đi qua $M(0;4)$ và có trục đối xứng $x = 1$.

A. $y = 2x^2 - 4x + 4.$

B. $y = 2x^2 + 4x - 3.$

C. $y = 2x^2 - 3x + 4.$

D. $y = 2x^2 + x + 4.$

Câu 25. Biết rằng $(P): y = ax^2 - 4x + c$ có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$. Tính tổng $S = a + c$.

A. $S = 5.$

B. $S = -5.$

C. $S = 4.$

D. $S = 1.$

Câu 26. Biết rằng $(P): y = ax^2 + bx + 2 \ (a > 1)$ đi qua điểm $M(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\dfrac{1}{4}\cdot$ Tính tích $P = ab.$

A. $P = -3.$ **B.** $P = -2.$

C. $P = 192.$ **D.** $P = 28.$

Câu 27. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 ?

A. $y = x^2 - 2x - 3.$

B. $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 3.$

C. $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 3.$

D. $y = -x^2 - 2x - 3.$

Câu 28. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-2.$ Hệ thức nào sau đây đúng ?

A. $a = 6b.$ **B.** $25a - 5b = 8.$

C. $b = -6a.$ **D.** $25a + 5b = 8.$

Câu 29. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$. Tính tích $P = abc.$

A. $P = -6.$ **B.** $P = 6.$

C. $P = -3.$ **D.** $P = \dfrac{3}{2}.$

Câu 30. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{4}$ tại $x = \dfrac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng $9.$ Tính $P = abc.$

A. $P = 0.$

B. $P = 6.$

C. $P = 7.$

D. $P = -6.$

Câu 31. Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là

A. $M(-1;-1),\ N(-2;0).$

B. $M(1;-3),\ N(2;-4).$

C. $M(0;-2),\ N(2;-4).$

D. $M(-3;1),\ N(3;-5).$

Câu 32. Gọi $A(a;b)$ và $B(c;d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y = 2x - x^2$ và $\Delta: y = 3x - 6.$ Giá trị $b + d$ bằng

A. $7.$

B. $-7.$

C. $15.$

D. $-15.$

Câu 33. Đường thẳng nào sau đây tiếp xúc với $(P): y = 2x^2 - 5x + 3$?

A. $y = x + 2.$

B. $y = -x - 1.$

C. $y = x + 3.$

D. $y = -x + 1.$

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số b để đồ thị hàm số $y = -3x^2 + bx - 3$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt ?

A. $\left[\begin{array}{l} b < -6 \\ b > 6 \end{array}\right.$. **B.** $-6 < b < 6.$

C. $\left[\begin{array}{l} b < -3 \\ b > 3 \end{array}\right.$. **D.** $-3 < b < 3.$

Câu 35. Cho parabol $(P): y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng $d: y = ax + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của a để (P) tiếp xúc với d ?

A. $a = -1,\ a = 3.$

B. $a = 2.$

C. $a = 1,\ a = -3.$

D. Không tồn tại a.

Câu 36. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol không cắt trục hoành Ox ?

A. $m < 2.$ **B.** $m > 2.$

C. $m \geq 2.$ **D.** $m \leq 2.$

Câu 37. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương ?

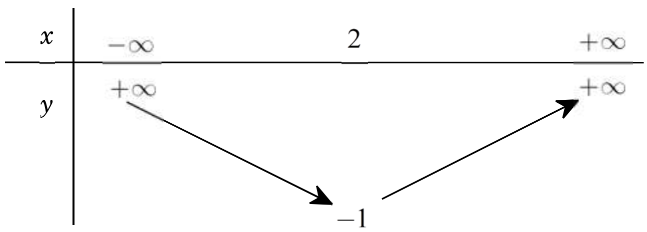
A. $1 < m < 2.$

B. $m < 2.$

C. $m > 2.$

D. $m < 1.$

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm ?

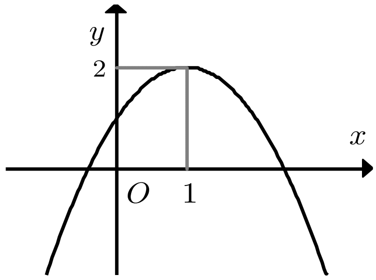
A. $m > -1.$

B. $m > 0.$

C. $m > -2.$

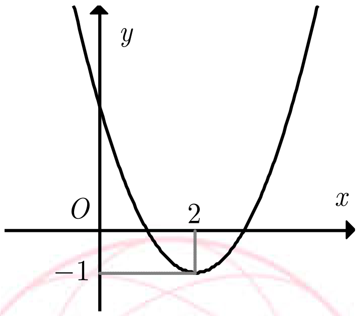
D. $m \geq -1.$

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm ?



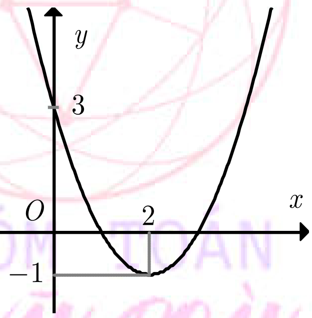
A. $m=2015.$ **B.** $m=2016.$ **C.** $m=2017.$ **D.** $m=2019.$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $\left|f(x)\right|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt ?



A. $0<m<1.$ **B.** $m>3.$ **C.** $m=-1,\ m=3.$ **D.** $-1<m<0.$

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f\left(\left|x\right|\right)-1=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt ?



A. $m=3.$ **B.** $m>3.$ **C.** $m=2.$ **D.** $-2<m<2.$

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số b để đồ thị hàm số $y=-3x^2+bx-3$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt ?

A. $\left[\begin{array}{l} b<-6 \\ b>6 \end{array}\right.$. **B.** $-6<b<6.$

C. $\left[\begin{array}{l} b<-3 \\ b>3 \end{array}\right.$. **D.** $-3<b<3.$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1.C	2.D	3.C	4.D	5.B	6.A	7.D	8.A	9.D	10.D
11.A	12.B	13.B	14.D	15.B	16.D	17.B	18.D	19.B	20.D
21.D	22.B	23.A	24.A	25.B	26.C	27.B	28.B	29.A	30.B
31.B	32.D	33.D	34.A	35.A	36.B	37.A	38.C	39.B	40.A
41.A	42.A								

Chương 3 PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

☆☆☆

KIẾN THỨC CƠ BẢN

① **Khái niệm phương trình một ẩn**

— Cho 2 hàm số $y = f(x),\ y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là $\mathscr{D}_f$ và $\mathscr{D}_g$. Đặt $\mathscr{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là phương trình một ẩn, x gọi là ẩn và $\mathscr{D}$ gọi tập xác định của phương trình.

— $x_\circ \in \mathscr{D}$ gọi là 1 nghiệm phương trình $f(x) = g(x)$ nếu "$f(x) = g(x)$" là một mệnh đề đúng.

② **Phương trình tương đương**

— Hai phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng 1 tập nghiệm. Nếu $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) = g_2(x)$ thì viết $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

— **Định lý 1**: Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ và $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathscr{D}$. Khi đó trên miền $\mathscr{D}$, phương trình tương đương với mỗi phương trình sau:

$(1):\ f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$. $\quad (2):\ f(x).h(x) = g(x).h(x)$ với $h(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathscr{D}$.

③ **Phương trình hệ quả**

— $f_1(x) = g_1(x)$ có tập nghiệm là S_1 được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ có tập nghiệm S_2 nếu $S_1 \subset S_2$. Khi đó: $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

— **Định lý 2**: Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho: $f(x) = g(x) \Rightarrow \left[f(x)\right]^2 = \left[g(x)\right]^2$.

Lưu ý:

- Nếu hai vế của 1 phương trình luôn cùng dấu thì khi bình phương 2 vế của nó, ta được một phương trình tương đương.
- Nếu phép biến đổi tương đương dẫn đến phương trình hệ quả, ta phải thử lại các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

Giải các phương trình sau:

a) $x - \sqrt{2-x} = 5 - \sqrt{2-x}$.

Điều kiện: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Ta có: $x - \sqrt{2-x} = 5 - \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = 5$: không thỏa điều kiện $x \leq 2$ nên loại $x = 5$.

Kết luận: $S = \varnothing$.

b) $\sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 1$.

Đáp số: $S = \{1\}$.

c) $x+\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}+2.$

Đáp số: $S=\{2\}.$

d) $\sqrt{3x-12}+2=\sqrt{4-x}+2x.$

Đáp số: $S=\varnothing.$

e) $\dfrac{\sqrt{4x+12}}{x+3}+x=\sqrt{-x-3}+1.$

Đáp số: $S=\varnothing.$

f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{9}{\sqrt{x-1}}\cdot$

Đáp số: $S=\{3\}.$

g) $x^2-\sqrt{1-x}=\sqrt{x-2}+3.$

Đáp số: $S=\varnothing.$

h) $5x-\sqrt{x-7}=\sqrt{7-x}+35.$

Đáp số: $S=5.$

i) $x+1+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+3}\cdot$

Đáp số: $S=\{0\}.$

j) $2x+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1}\cdot$

Đáp số: $S=\{3/2\}.$

i) $\dfrac{x^2-4x-2}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}.$

Đáp số: $S=\{5\}.$

j) $\dfrac{2x^2-x-3}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{2x-3}.$

Đáp số: $S=\varnothing.$

i) $(x^2-6x+5)\sqrt{x-3}=0.$

Điều kiện: $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3.$

Phương trình $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+5=0\\ \sqrt{x-3}=0\end{array}\right.$

Đáp số: $S=\{3;5\}.$

j) $(x+1)(\sqrt{4x+1}-1)=0.$

Đáp số: $S=\{0\}.$

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

☆☆☆

1. Giải và biện luận phương trình $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b$ (1)

Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}\cdot$
$a=0$	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm.
	$b=0$	(1) nghiệm đúng với mọi x.

2. Cách giải và công thức nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ (2)

$\Delta = b^2-4ac$	Kết luận
$\Delta>0$	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot$
$\Delta=0$	(2) có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}\cdot$
$\Delta<0$	(2) vô nghiệm.

3. Định lí Viét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thì:

$S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}\cdot$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u+v=S$ và tích $u.v=P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2-Sx+P=0.$

4. Phương trình quy về phương trình bậc nhất và bậc hai cơ bản

a) Phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế để khử giá trị tuyệt đối. Thường gặp:

- $|A|=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right. \end{cases}.$
- $|A|=|B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right..$

b) Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn. Thường gặp:

- $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B\geq 0 \\ A\geq 0 \\ A=B \end{cases}.$
- $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\geq 0 \\ A=B^2 \end{cases}.$

Dạng toán 1: Giải và biện luận phương trình bậc nhất

1. Giải và biện luận: $m(mx-1)=9x+3.$

Lời giải tham khảo

Phương trình $\Leftrightarrow m^2x-m=9x+3$

$\Leftrightarrow m^2x-9x=m+3$

$\Leftrightarrow (m^2-9)x=m+3 \qquad (*)$

- Với $m^2-9=0 \Leftrightarrow m=\pm 3.$

  Khi $m=3$ thì $(*)$ trở thành $0x=6,$ suy ra phương trình vô nghiệm.

  Khi $m=-3$ thì $(*)$ trở thành $0x=0$

  $\Rightarrow$ phương trình nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}.$
- Với $m^2-9\neq 0 \Leftrightarrow m\neq\pm 3$

  $(*)\Leftrightarrow x=\dfrac{m+3}{m^2-9}=\dfrac{1}{m-3}\cdot$

Kết luận:

- $m=3:$ Phương trình vô nghiệm.
- $m=-3:$ PT nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}.$
- $m\neq\pm 3:$ PT có nghiệm $x=\dfrac{1}{m-3}\cdot$

2. Giải và biện luận: $m^2x+2=m+4x.$

3. Giải và biện luận: $(m^2-2m-8)x=4-m.$

4. Giải và biện luận: $(4m^2-2)x=1+2m-x.$

Bài toán tìm tham số trong phương trình bậc nhất $ax+b=0$ (1)

- Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0.$
- Để phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (vô số nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}.$
- Để phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}.$
- Để (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ có nghiệm duy nhất hoặc có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right.\cdot$

★ **Lưu ý**: Có nghiệm là trường hợp ngược lại của vô nghiệm. Do đó, tìm điều kiện để (1) có nghiệm, thông thường ta tìm điều kiện để (1) vô nghiệm, rồi lấy kết quả ngược lại.

1. Tìm các tham số thực m để phương trình $(m^2-5)x=2+m-x$ vô nghiệm ?

Lời giải tham khảo

Phương trình $(m^2-5)x=2+m-x.$

$\Leftrightarrow (m^2-4)x=m+2$ (1)

(1) vô nghiệm khi $\begin{cases} m^2-4=0 \\ m+2\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 2 \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$

Vậy $m=2$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Tìm các tham số thực m để phương trình $m^2(x-1)=2(2x-m-4)$ vô nghiệm ?

$\Rightarrow m=2.$

3. Tìm các tham số thực m để phương trình $(m^2-5)x=2+m-x$ vô nghiệm ?

$\Rightarrow m=2.$

4. Tìm các tham số thực m để phương trình $(m^2-3m)x+4=4x+m$ vô nghiệm ?

$\Rightarrow m=-1.$

5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $m(mx-1)=(4m-3)x-3$?

Lời giải tham khảo

Phương trình $m(mx-1)=(4m-3)x-3$

$\Leftrightarrow m^2x-m=4mx-3x-3$

$\Leftrightarrow (m^2-4m+3)x=m-3 \qquad (1)$

(1) có nghiệm duy nhất khi $a\neq 0$

$m^2-4m+3\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1\\ m\neq 3\end{cases}.$

6. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $mx-1=x+m$?

Đáp số: $m\neq 1.$

7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $m(m-1)x=m^2-1$?

Đáp số: $m\neq 0,\ m\neq 1.$

8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $m^2(mx-1)=2m(2x+1)$?

Đáp số: $m\neq 0,\ m\neq \pm 2.$

9. Tìm tham số m để phương trình có vô số nghiệm: $m^2(x-1)=2(mx-2)$?

Lời giải tham khảo

Phương trình $m^2(x-1)=2(mx-2)$

$\Leftrightarrow m^2x-m^2=2mx-4$

$\Leftrightarrow (m^2-2m)x=m^2-4 \qquad (1)$

(1) có vô số nghiệm (tập nghiệm $\mathbb{R}$) khi

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m=0\\ m^2-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0,\ m=2\\ m=\pm 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow m=2$ là giá trị cần tìm.

10. Tìm tham số m để phương trình sau có vô số nghiệm: $(m^2+2m-3)x=m-1$?

$\Rightarrow m=1.$

11. Tìm tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$: $m^2(mx-1)=2m(2x+1)$?

$\Rightarrow m=0,\ m=2.$

12. Tìm các tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$: $(m^2-5m)x+1=m-4x$?

$\Rightarrow m=1.$

13. Tìm các m để phương trình sau có nghiệm:
$$\frac{3x-m}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\frac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}\cdot$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1.$

Quy đồng và bỏ mẫu, phương trình đã cho trở thành $3x-m+x+1=2x+5m+3$

$\Leftrightarrow 2x=6m+2$

$\Leftrightarrow x=3m+1.$

Vì $x>-1$ nên phương trình có nghiệm khi $x=3m+1>-1 \Leftrightarrow m>-\dfrac{2}{3}\cdot$

14. Tìm các m để phương trình sau có nghiệm:
$$\frac{2mx-1}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=\frac{m+1}{\sqrt{x-1}}\cdot$$

15. Tìm các m để phương trình sau có nghiệm:
$$\frac{3x-m-1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=\frac{2x+2m-3}{\sqrt{x-1}}\cdot$$

16. Tìm các m để phương trình sau có nghiệm:
$$\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=\frac{mx}{\sqrt{3x-2}}\cdot$$

17. Tìm các tham số m để phương trình sau có nghiệm nguyên: $(m-2)x=m+1$?

Lời giải tham khảo

Với $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$ thì phương trình trở thành $x=\dfrac{m+1}{m-2}=\dfrac{(m-2)+3}{m-2}$

$\Leftrightarrow x=1+\dfrac{3}{m-2}$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $3 \mathrel{\vdots} (m-2)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=3 \\ m-2=-3 \\ m-2=1 \\ m-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-1 \\ m=3 \\ m=1 \end{array}\right. \text{(so đk nhận).}$$

Kết luận: $m\in\{-1;\ 1;\ 3;\ 5\}.$

18. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm nguyên: $m(x+3)=x-m$?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. **(THPT Bùi Thị Xuân – Tp. HCM)** Giải và biện luận phương trình: $m^2(x-2)+24=16x-2m.$

2. **(THPT Tây Thạnh – Tp. HCM)** Giải và biện luận phương trình: $(m^2-2m-8)x=4-m.$

3. **(THPT Marie Curie – Tp. HCM)** Giải và biện luận phương trình: $m^2(x-2)-6m(x-1)+9m=0.$

4. **(THPT Nguyễn Thị Diệu – Tp. HCM)** Giải và biện luận: $m^2(x-1)+2mx=3(5x-m).$

5. **(THPT Hàn Thuyên – Tp. HCM)** Giải và biện luận phương trình: $m^2x-18=(6x-3)m.$

6. **(THPT Võ Thị Sáu – Tp. HCM)** Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{x-2}{x-m}=\dfrac{x+1}{x-1}\cdot$

7. **(THPT Trung Phú – Tp. HCM)** Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{x-2}{x-m}+\dfrac{2}{x+1}=1.$

8. **(THPT Nguyễn Thái Bình – Tp HCM)** Tìm tham số m để phương trình $m^2(x-1)+2m=m^2x-3$ có nghiệm đúng với mọi số thực x.

9. **(THPT Lê Thị Hồng Gấm – Tp. HCM)** Tìm tham số m để phương trình $m^2(x+1)=2mx+m+2$ có nghiệm đúng với mọi số thực x.

10. **(THPT Mạc Đỉnh Chi – Tp. HCM)** Tìm tham số m để phương trình: $m^2(x+1)-m=x(6-5m)$ có nghiệm duy nhất ?

11. **(THPT Hùng Vương – Tp. HCM)** Tìm tham số m để phương trình: $\dfrac{(m-3)x-4m}{x-2}=1$ có nghiệm duy nhất ?

12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình sau có nghiệm nguyên ?

a) $(m-2)x=m-1.$ b) $(m-1)x=2x+m-3.$

c) $(m+1)(x-2)=3m-1.$ d) $(m-2)x=m^2-4m+9.$

13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình sau có nghiệm ?

a) $m^2(x-1)=x-m.$ b) $m^2x=4x+m^2+m-2.$

c) $\dfrac{x+m}{x-1}=\dfrac{x+3}{x-2}\cdot$ d) $\dfrac{(m+1)x+m-2}{x+3}=m.$

e) $\left|x-1\right|+2x-3=m.$ f) $2\left(\left|x\right|+m-1\right)=\left|x\right|-m+3.$

g) $\dfrac{2mx-1}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=\dfrac{m+1}{\sqrt{x-1}}\cdot$ h) $\dfrac{3x-m}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\dfrac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}\cdot$

14. Tìm tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất:

a) $\dfrac{mx-m-3}{x+1}=1.$ b) $\dfrac{x+2}{x-m}=\dfrac{x+1}{x-1}\cdot$

c) $\left|2x-m\right|=\left|x-1\right|.$ d) $\left|mx-2\right|=\left|x+4\right|.$

Dạng toán 2: Giải và biện luận phương trình bậc hai

Giải và biện luận phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0 \qquad (i)$

Phương pháp:

Bước 1. Biến đổi phương trình về đúng dạng $ax^2 + bx + c = 0.$

Bước 2. Nếu hệ số a chứa tham số, ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $a = 0,$ ta giải và biện luận $bx + c = 0.$
- Trường hợp 2: $a \neq 0.$ Ta lập $\Delta = b^2 - 4ac.$ Khi đó:
  - Nếu $\Delta > 0$ thì (i) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\cdot$
  - Nếu $\Delta = 0$ thì (i) có 1 nghiệm (kép): $x = -\dfrac{b}{2a}\cdot$
  - Nếu $\Delta < 0$ thì (i) vô nghiệm.

Bước 3. Kết luận.

Lưu ý: Nếu hệ số a chứa tham số $m,$ ta cần chia ra hai trường hợp, cụ thể:

- Phương trình (i) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ (tức chia ra hai trường hợp).
- Phương trình (i) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ (chia hai trường hợp).

1. Giải và biện luận phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0.$

Lời giải tham khảo

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac$

$= [-2(m-1)]^2 - 4.1.(m^2 - 3)$

$= 4(m^2 - 2m + 1) - 4m^2 + 12$

$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12$

$= 16 - 8m.$

- Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow -8m + 16 > 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,\,2} = \dfrac{2(m-1) \pm \sqrt{16 - 8m}}{2}\cdot$
- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -b/2a = m - 1 = 1.$
- Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

2. Giải và biện luận phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 = 0.$

3. Giải và biện luận phương trình bậc hai: $mx^2 - 2(m-1)x + m - 5 = 0.$

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Với $m = 0$ thì phương trình trở thành

$2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$ là nghiệm.

Với $m \neq 0$ có $\Delta = 4(m-1)^2 - 4m(m-5)$

$=$ ....

4. Giải và biện luận phương trình bậc hai: $(m^2 + m - 2)x^2 + (m+2)x + 1 = 0.$

5. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0.$

6. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m = 2.$

7. Tìm tham số m để các phương trình sau $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó ?

8. Tìm tât cả các giá trị của tham số m để phương trình sau: $x^2+2(m+1)x+m^2-4m+1=0$ vô nghiệm ?

9. Tìm tham số m để các phương trình sau $2x^2+3x+m-1=0$ có nghiệm ?

10. Tìm tham số m để các phương trình sau $(m^2-1)x^2-2(m+1)x+1=0$ có nghiệm ?

Dạng toán 3: Định lý Viét & và các bài toán liên quan

═══════ ☆☆☆ ═══════

Định lý Viét

Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$ có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ thì $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}.$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u+v=S$ và tích $uv=P$ thì $u,\ v$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2-Sx+P=0,\ (S^2-4P\geq 0).$

Ứng dụng định lý Viét

① **Tính giá trị các biểu thức đối xứng của hai nghiệm phương trình bậc hai**:

- $x_1^2+x_2^2=S^2-2P,\ \ (x_1-x_2)^2=S^2-4P,\ \ x_1^3+x_2^3=S^3-3SP,.....$
- $\left|x_1-x_2\right|=a>0\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=a^2\Leftrightarrow S^2-4P=a^2.$

② **Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:**

- Phương trình có 2 nghiệm trái dấu: $x_1<0<x_2\Leftrightarrow P<0.$
- Phương trình có 2 nghiệm dương: $0<x_1\leq x_2\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\geq 0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\cdot$
- Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt: $0<x_1<x_2\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta> 0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\cdot$
- Phương trình có 2 nghiệm âm: $x_1\leq x_2<0\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\geq 0\\ P>0\\ S<0\end{cases}\cdot$
- Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt: $x_1<x_2<0\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta> 0\\ P>0\\ S<0\end{cases}\cdot$
- Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu: $\left[\begin{array}{l}x_1\leq x_2<0\\ 0<x_1\leq x_2\end{array}\right.\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\geq 0\\ P>0\end{cases}.$

Lưu ý: Nếu đề bài yêu cầu so sánh hai nghiệm $x_1,\ x_2$ với số $\alpha,$ thường có ba cách làm sau:

- Một là đặt ẩn phụ $t=x-\alpha$ để đưa về so sánh 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ với số 0 như trên.
- Hai là biến đổi: $\left[\begin{array}{l} x_1<a<x_2\Leftrightarrow x_1-a<0<x_2-a\Leftrightarrow (x_1-a)(x_2-a)<0 \\ a<x_1<x_2\Leftrightarrow \begin{cases}x_1>a\\ x_2>a\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_1-a>0\\ x_2-a>0\end{cases}\overset{\text{nhân}}{\underset{+}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}(x_1-a)(x_2-a)>0\\ x_1+x_2-2a>0\end{cases}\cdot\end{array}\right.$
- Định lí đảo tam thức bậc hai (tham khảo).

1. Tìm tất cả tham số m để phương trình có một nghiệm cho trước. Tính nghiệm còn lại ?

➤ ***Phương pháp***:

- *Thế nghiệm đã cho vào phương trình, tìm được các tham số m.*
- *Với các m tìm được, thế vào phương trình, giải tìm nghiệm còn lại và kết luận.*

a) $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 4 = 0 \to x = -7.$

Lời giải tham khảo

Thế $x = -7$ vào phương trình đã cho, ta được:

$(-7)^2 + 7(2m-3) + m^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 14m + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -12 \end{array}\right.$.

- Với $m = -2$ thì phương trình trở thành:

  $x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -7$.
- Với $m = -12$ thì phương trình trở thành

  $x^2 + 27x + 140 = 0 \Leftrightarrow x = -7,\ x = -20$.

Kết luận:

Với $m = -2$ thì nghiệm còn lại là $x = 0$.

Với $m = -12$ thì nghiệm còn lại là $x = -20$.

b) $(m-4)x^2 + x + m^2 + 1 - 4m = 0 \to x = -1.$

c) $mx^2 - (m+2)x + m - 1 = 0 \to x = 2.$

d) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0 \to x = 0.$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình có hai nghiệm trái dấu ?

➢ ***Phương pháp***: *Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow ac < 0.$

a) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0.$

Lời giải tham khảo

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow ac < 0$

$\Leftrightarrow (m+1).(m-2) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1>0 \\ m-2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1<0 \\ m-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>-1 \\ m<2 \end{cases} \Rightarrow -1<m<2 \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>2 \end{cases} \Rightarrow m \in \varnothing. \end{array}\right.$$

Kết luận: $-1 < m < 2.$

b) $(m-2)x^2 + 2mx + m + 1 = 0.$

c) $(m+2)x^2 - mx + m - 2 = 0.$

d) $mx^2 + 4(m-3)x + m - 5 = 0.$

e) $(m+1)x^2 + 2(m+4)x + m + 1 = 0.$

f) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0.$

3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình có hai nghiệm cùng dấu ?

➢ **Phương pháp**:

- *Tính* $\Delta = b^2 - 4ac.$
- *Phương trình có hai nghiệm cùng dấu* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$ *(Lưu ý, nếu có chữ phân biệt thì* $\Delta > 0$*).*

a) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0.$

Lời giải tham khảo

Ta có: $\Delta = 4(m-2)^2 - 4m(m-3)$

$= 4(m^2 - 4m + 4) - 4m^2 + 12m$

$= -4m + 16.$

Phương trình có hai nghiệm cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 16 \geq 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m - 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m - 3 < 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 3 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (3; 4].$$

Kếtl uận: $m \in (-\infty; 0) \cup (3; 4].$

b) $mx^2 + 2(m+3)x + m = 0.$

c) $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0.$

d) $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 1 = 0.$

4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình có hai nghiệm phân biệt dương ?

➢ **Phương pháp**:

- *Tính* $\Delta = b^2 - 4ac.$
- *Phương trình có hai nghiệm phân biệt dương* $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}.$

Nếu không có chữ "phân biệt" thì có dấu $"="$ *ở* $\Delta,$ *tức* $\Delta \geq 0.$

a) $x^2 - 3x + m - 1 = 0.$

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4.1.(m-1)$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Kếtl uận: $1 < m < \dfrac{17}{4}\cdot$

b) $3x^2 - 10x - 3m + 1 = 0.$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

c) $x^2 + (2m-3)x + m^2 + 2 = 0.$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

d) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0.$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình có hai nghiệm phân biệt âm ?

➢ ***Phương pháp***:

- *Tính* $\Delta = b^2 - 4ac.$
- *Phương trình có hai nghiệm phân biệt âm* $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}.$

Nếu không có chữ "phân biệt" thì có dấu $"="$ *ở* $\Delta,$ *tức* $\Delta \geq 0.$

a) $mx^2 + 2(m+3)x + m = 0.$

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Ta có: $\Delta = 4(m+3)^2 - 4m^2$

$= 4(m^2 + 6m + 9) - 4m^2$

$= \ldots\ldots$

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\rightarrow m > 0.$

b) $(m+1)x^2 + 2(m+4)x + m + 1 = 0.$

c) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0.$

d) $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0.$

6. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa điều kiện.

➢ ***Phương pháp:***

- *Tính* $\Delta = b^2 - 4ac$. *Phương trình có hai nghiệm phân biệt* $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)
- *Theo Viét, ta có:* $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ *và* $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}\cdot$
- *Từ điều kiện đối xứng, biến đổi về tổng, tích thường gặp* $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P,\ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS, \ldots$
- *So với* (1) *được những giá trị cần tìm của tham số* m.

a) Cho $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 4 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 17$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\Delta = (2m-3)^2 - 4(m^2-4)$

$= 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 16$

$= -12m + 25.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 : \text{LĐ} \\ -12m + 25 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{12}{25}$ (1)

Theo Viét: $S = 2m - 3$ và $P = m^2 - 4$.

Theo đề $x_1^2 + x_2^2 = 17 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 17$

$\Rightarrow (2m-3)^2 - 2(m^2-4) = 17$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 12m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 6$.

So điều kiện $(1) \Rightarrow m = 0$ là giá trị cần tìm.

b) Cho $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

c) Cho $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2.x_2 + x_1.x_2^2 = 0$.

d) Cho $x^2 + (2m+1)x - m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 1$.

e) Cho $x^2 - 4x + m - 1 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 40$.	f) Cho $(m+1)x^2 - (2m-3)x + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $3\left\|x_1 - x_2\right\| = 2$.

7. Cho phương trình $x^2 - 2(1-m)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm tất cả các tham số m để phương trình

a) Có 1 nghiệm bằng 6. Tìm nghiệm còn lại ?	b) Biểu thức $A = 2(x_1 + x_2) - x_1x_2$ đạt GTLN ?

8. **(THPT An Đông – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3m - 25 = 0$

a) Có 1 nghiệm là -3. Tìm nghiệm còn lại ?	b) Có 2 nghiệm thỏa $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 29$?
ĐS: $m = 1,\ x = 7$ và $m = -10,\ x = -15$.	**ĐS**: $m = 0,\ m = 1$.

9. (THPT Bình Phú – Tp. Hồ Chí Minh) Cho phương trình $x^2+(2m+3)x+m^2-3=0.$ Tìm tham số m để phương trình

a) Có 1 nghiệm là $-2.$ Tìm nghiệm còn lại ?

Đáp số: $m=-1\to x=-2.$

b) Có 2 nghiệm $2(2x_1-x_2)(2x_2-x_1)+61=0$?

Đáp số: $m=1,\ m=-1/7.$

10. (THPT An Đông – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019) Tìm tất cả cá giá trị của tham số thực m để phương trình $(m+2)x^2-2(m+4)x+m+5=0$

a) Có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó ?

Đáp số: $m=-6,\ x=1/2.$

b) Có hai nghiệm phân biệt thỏa $9(x_1^2+x_2^2)=4$?

Đáp số: $m=-5,\ m=-38/7.$

11. (THPT Bùi Thị Xuân Tp. HCM) Cho phương trình $(m-1)x^2-2(m+4)x+m+1=0.$

a) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm ?

- Với $a=m-1=0\Leftrightarrow m=1$ thì phương trình trở thành:
- Với $a=m-1\neq 0\Leftrightarrow m=1,$ ta có $\Delta=$

$\Rightarrow m\geq -17/8.$

b) Tìm tất cả các tham số m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ trái dấu sao cho $|x_1| = \dfrac{2}{|x_2|}$?

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ |x_1| = \dfrac{2}{|x_2|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ |x_1x_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ |P| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

c) Tìm giá trị nguyên âm của m sao cho phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ đều là số nguyên ?

Theo Viét, ta có: $S = \dfrac{2(m+4)}{m-1};\ P = \dfrac{m+1}{m-1}$ và giả sử $x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 \in \mathbb{Z} \\ P = x_1.x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m+4)}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{m+1}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m-1)+10}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{(m-1)+2}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \dfrac{10}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ 1 + \dfrac{2}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 \,\vdots\, (m-1) \\ 2 \,\vdots\, (m-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-1 \in \{...\} \\ m-1 \in \{...\} \end{cases} \Rightarrow m-1 \in \{...........................\}$$

....

<u>Thử lại</u>: $m = -1$ thì phương trình trở thành ....

Do đó với $m = -1$ thì phương trình có hai nghiệm là số nguyên.

<u>12.</u> (THPT Trần Phú Tp. HCM 2018 – 2019) Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ phân biệt và $2x_1 = 5x_2$?

☞ ***<u>Nhận xét</u>**: Đây là bài toán liên quan đến Viét có biểu thức không đối xứng* $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$:

- *<u>Bước 1</u>. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt* $x_1,\ x_2$.
- *<u>Bước 2</u>. Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma \\ x_1 + x_2 = S \end{cases} \longrightarrow x_1,\ x_2$ *theo* m.
- *<u>Bước 3</u>. Thế* $x_1,\ x_2$ *vào* $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \longrightarrow m$ *và so điều kiện ở bước* 1 *để chọn* m *phù hợp.*

....

....

....

....

....

....

....

....

.... $\rightarrow m = -7,\ m = 14/9.$

13. **(THPT Nguyễn Hữu Huân Tp. HCM)** Cho phương trình $mx^2 - 4mx + 4m - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ phân biệt và $x_1 = 3x_2$?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. **(THPT An Dương Vương – Tp. HCM)** Cho phương trình: $2x^2 - (m+3)x + m - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 2$. Tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 3$.

Đáp số: a) $m = 1 \Rightarrow x = 0$. b) $m = 3$.

2. **(THPT Trần Quang Khải – Tp. HCM)** Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 4 + x_1 + x_2$.

Đáp số: a) $m < 2/3$. b) $m = 0$.

3. **(THPT Diên Hồng – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho phương trình $(m-2)x^2 + (2m-1)x + m = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 + 5x_1x_2 = 2$.

Đáp số: $m = 7/5$.

4. **(THPT Hùng Vương – Tp. Hồ Chí Minh)** Xác định giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 1$.

Đáp số: $m = -\sqrt{13}$.

5. **(THPT Tân Phong – Tp. Hồ Chí Minh)** Tìm m để $mx^2 - (2m+5)x + m + 11 = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = 22$.

Đáp số: $m = 1,\ m = -25/16$.

6. **(THPT Trần Phú – Tp. HCM)** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2(m-2) = 0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ và tìm tham số m để biểu thức $A = \left|(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 + 1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đáp số: $\min A = 1$ khi $m = 3$.

7. **(THCS, THPT Nguyễn Khuyến – Tp. HCM)** Cho phương trình $x^2-(m+5)x+m=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1+2x_2=5$.

8. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. HCM)** Cho $mx^2-2(m-3)x+m-6=0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

9. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền)** Cho phương trình: $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$ (1)

a) Tìm tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa điều kiện: $x_1<2<x_2$.

10. **(THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa – Tp. HCM)** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{x(x+3m)-1}{x+1}=m$ có hai nghiệm phân biệt ?

11. Cho phương trình: $x^2-4x+m+1=0$ $(*)$

a) Định m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

b) Định m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa: $x_1x_2=6-2\sqrt{x_1x_2}$.

c) Định m để phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm dương.

12. Cho phương trình: $x^2+2(m+1)x+2m+5=0$ $(*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng âm.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương.

c) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{42}$.

d) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt sao cho tổng lập phương 2 nghiệm và tổng 2 nghiệm bằng nhau.

13. Cho phương trình: $mx^2-2x+1=0$ $(*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm đối nhau.

c) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.

14. Cho phương trình: $2x^2-(m+2)x+7-m^2=0$ $(*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm 2 nghiệm phân biệt ?

b) Tìm m để $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu và có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau ?

15. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$ $(*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa $P=10x_1x_2+x_1^2+x_2^2$ nhỏ nhất.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho $x_1x_2-2(x_1+x_2)\le 5$.

c) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho $2x_2-x_1=8$.

16. Cho phương trình: $x^2-(m+5)x-m-6=0$. Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu sao cho nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương ?

Dạng toán 4: Phương trình chứa ẩn dưới dấu trị tuyệt đối

Nhóm 1. Phương trình $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$ hoặc $\sqrt{A^2} = |B| \Leftrightarrow |A| = |B|$ hoặc $\sqrt{A} = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

1. Giải các phương trình sau:

a) $|2x+1| = |x^2 - 3x - 4|$.

(THPT Hoàng Hoa Thám – Tp.HCM)

Lời giải tham khảo

Phương trình $|2x+1| = |x^2 - 3x - 4|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 = x^2 - 3x - 4 \\ 2x+1 = -x^2 + 3x + 4 \end{array}\right.$

b) $|x^2 + 2x| = |x^2 + 2|$.

(THPT Bình Tân – Tp.HCM)

Đáp số: $x = 1$.

b) $|6 - x^2| - |2 - 3x^2| = 0$.

(THPT An Dương Vương – Tp.HCM)

Đáp số: $S = \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$.

b) $|5x^2 - 3x - 2| - |x^2 - 1| = 0$.

(THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. HCM)

Đáp số: $x = 1,\ x = -\dfrac{1}{4},\ x = -\dfrac{1}{2}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 1

Giải các phương trình sau:

a) $|5x+1| = 2x - 3$.

b) $|3x - 4| = |x - 2|$.

c) $|3x^2 - 2x| = |6 - x^2|$.

d) $|x^2 - 2x| = |2x^2 - x - 2|$.

e) $|x^2 - 2x| - |x^2 - 4| = 0$.

f) $|x^2 - 3x + 2| - |2x^2 + 5x - 18| = 0$.

g) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x^2 - 9|$.

h) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = |x^2 - 3x - 4|$.

i) $\sqrt{x+4} = |x+2|$.

j) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2|$.

k) $\sqrt{2x^2 - 4x - 2} = |x - 1|$.

l) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$.

Nhóm 2. $\boxed{|A| = B}$ $\xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ Điều kiện $B \geq 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$

2. Giải các phương trình sau:

a) $\left|2x^2 - 3x - 5\right| - 5x = 5.$

(THPT Cần Thạnh – Tp.HCM)

Lời giải tham khảo

Phương trình $\Leftrightarrow \left|2x^2 - 3x - 5\right| = 5 + 5x \quad (1)$

Điều kiện: $5 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 5 = 5 + 5x \\ 2x^2 - 3x - 5 = -5 - 5x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 8x - 10 = 0 \\ 2x^2 + 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1. \\ x = 0 \end{array}\right.$

So với điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 0; 5\}$.

b) $\left|2x^2 - 13x - 20\right| = 16 + x.$

(Trường Trung Học Thực Hành Sài Gòn)

Đáp số: $S = \{-2;\ 9;\ 3 \pm \sqrt{11}\}$.

b) $\left|x^2 - 8x + 4\right| = x - 4.$

(THPT Nguyễn Hữu Huân – Tp.HCM)

Đáp số: $S = \{7; 8\}$.

b) $\left|x^2 - 6x + 5\right| = x + 5.$

(THPT Vĩnh Lộc B – Tp. HCM)

Đáp số: $S = \{0; 7\}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

1. **(THPT Bình Phú – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|2x^2 - 3x - 5\right| = 5x + 5.$

2. **(THPT Củ Chi – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|5x^2 - 3x - 4\right| = 3x - 4.$

3. **(THPT Trần Quang Khải – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|x^2 + 5x - 9\right| = 2x + 1.$

4. **(THPT Nguyễn Thái Bình – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|x^2 - 4x + 2\right| = x - 2.$

5. **(THPT Lê Quí Đôn – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|x^2 - 5x + 7\right| - 2x + 5 = 0.$

6. **(THPT Trần Khai Nguyên – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|x^2 - x - 3\right| = x + 1.$

Nhóm 3. Sử dụng định nghĩa $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.

3. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - x|x-1| = x$.

(THPT Gò Vấp – Tp.HCM)

Lời giải tham khảo

Trường hợp 1: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Phương trình trở thành: $x^2 - x(x-1) = x$

$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + x = x$

$\Leftrightarrow 0 = 0$: luôn đúng.

Suy ra: $S_1 = [1;+\infty)$.

Trường hợp 2: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Phương trình trở thành: $x^2 - x(1-x) = x$

....

....

....

....

....

Kết luận: $S = S_1 \cup S_2 = [1;+\infty) \cup \{0\}$.

b) $|x-2| = x^2 - 4x + 2$.

(THPT Tây Thạnh – Tp. HCM)

c) $|3x-5| = 2x^2 + x - 3$.

(THPT Diên Hồng – Tp.HCM)

d) $(x+1)|x-3| = 4(x-2)$.

(THPT Tân Bình – Tp. HCM)

e) $\dfrac{4x^2+2x+\left|2x+1\right|}{4x+3}=2x+1.$

(THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh)

f) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{1}{\left|x+1\right|}=\dfrac{2x-1}{x^2+x}\cdot$

(THPT Lê Trọng Tấn – Tp. Hồ Chí Minh)

BÀI TẬP VỀ NHÀ 3

1. **(THPT Nguyễn Hữu Cảnh – Tp. HCM)** Giải phương trình $(x+3).\left|x-1\right|=4x.$

2. **(THPT An Lạc – Tp. HCM)** Giải phương trình $x^2-5\left|x-1\right|-1=0.$

3. **(THPT Tân Bình – Tp. HCM)** Giải phương trình $x^2-2x+\left|x-1\right|-1=0.$

4. **(THPT Trần Phú – Tp. HCM)** Giải phương trình $x^3+1=\left|2x-1\right|(x+1).$

5. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. HCM)** Giải phương trình $\dfrac{x-1}{2x-3}=\dfrac{1-3x}{\left|x+1\right|}\cdot$

6. **(THPT Tây Thạnh – Tp. HCM)** Giải phương trình $\dfrac{3x}{\left|x-1\right|}=\dfrac{x-2}{x}\cdot$

7. **(THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|x^2+\left|x-1\right|\right|=x+1.$

8. **(THPT Bình Hưng Hòa – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|2x^2-\left|x-1\right|\right|=3x+1.$

9. **(THPT Trường Chinh – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|x-2\right|+\left|x-3\right|=4.$

10. **(THPT Võ Trường Toản – Tp. HCM)** Giải phương trình $\left|x+3\right|+\left|7-x\right|=10.$

11. **(THPT Nguyễn Công Trứ – Tp. HCM)** Giải phương trình $\dfrac{3}{\left|x-4\right|-1}=\left|x+3\right|.$

12. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. HCM)** Giải phương trình $\dfrac{x^2-1+\left|x+1\right|}{\left|x\right|(x-2)}=2.$

Nhóm 4. Đặt ẩn phụ của trị tuyệt đối

4. Giải các phương trình sau:

➢ **Cần nhớ**: $\left|u(x)\right|^2 = u^2(x)$ và nếu đặt $t = \left|u(x)\right| \ge 0 \Rightarrow t^2 = \left[u(x)\right]^2$.

a) $x^2 + 4x - 3\left|x+2\right| + 4 = 0.$

b) $(x+2)^2 - 3\left|x+2\right| - 4 = 0.$

c) $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| - 2\cdot\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right| = 1.$

d) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 10 = 2\cdot\left|x - \dfrac{1}{x}\right|.$

BÀI TẬP VỀ NHÀ 4

13. **(THPT Tây Thạnh – Tp. HCM)** Giải phương trình $(x^2-3)^2 - 6\left|x^2-3\right| + 5 = 0.$

14. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Tp. HCM)** Giải phương trình $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1} + \dfrac{\left|2x-4\right|}{x-1} = 3.$

15. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. HCM)** Giải phương trình $4x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \left|2x - \dfrac{1}{x}\right| - 6 = 0.$

16. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. HCM)** Giải phương trình $8x^2 + \dfrac{2}{x^2} - 9\cdot\left|2x - \dfrac{1}{x}\right| - 1 = 0.$

17. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\left|2x-m\right| = \left|x-1\right|.$ b) $\left|mx-2\right| = \left|x+4\right|.$

18. Tìm m để các phương trình $\left|mx+1\right| = \left|2x-m-3\right|$ có 2 nghiệm phân biệt ?

19. Tìm m để các phương trình $x^2 - 2x - 2m\left|x-1\right| + m - 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt ?

Dạng toán 5: Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nhóm 1. Phương trình $\sqrt{A}=\sqrt{B} \xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ Điều kiện $\begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \end{cases}$ và bình phương.

5. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2-8x+5}-\sqrt{11-x}=0.$

(THPT Bình Khánh – Tp.HCM)

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} 3x^2-8x+5\ge 0 \\ 11-x\ge 0 \end{cases} \quad (*)$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-8x+5}=\sqrt{11-x}$

$\Leftrightarrow 3x^2-8x+5=11-x$

$\Leftrightarrow 3x^2-7x-6=0 \Leftrightarrow x=3 \ \vee \ x=-\dfrac{2}{3}.$

Thế các nghiệm vào điều kiện $(*)$, các nghiệm cần tìm là $x=-\dfrac{2}{3},\ x=3.$

b) $\sqrt{x-3}=3\sqrt{x^2-9}.$

(THPT Trần Đại Nghĩa– Tp.HCM)

Đáp số: $x=3.$

c) $\sqrt{x^2-1+\sqrt{2x+3}}=\sqrt{x^2+x-1}.$

d) $\sqrt{x^2+6x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{x^3+\sqrt{x-2}}.$

BÀI TẬP VỀ NHÀ 1

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-x+2}=\left|3x-4\right|.$

2) $\sqrt{3x^2+1}=\left|x+1\right|.$

3) $\sqrt{2x^2-3x+12}=2\sqrt{-x^2+x+3}.$

4) $\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{x-3}.$

5) $\sqrt{x^2-3x+18}=\sqrt{14x+2}.$

6) $\sqrt{x^2-5x+2}=\sqrt{-x-1}.$

7) $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+8x-11}.$

8) $\sqrt{x-1}=2\sqrt{2x+5}.$

Nhóm 2. Phương trình $\boxed{\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}}$.

6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2+7x-2}=x+1.$

(THPT Trần Văn Giàu – Tp.HCM)

Lời giải tham khảo

Ta có: $\sqrt{3x^2+7x-2}=x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 3x^2+7x-2=(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 3x^2+7x-2=x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x^2+5x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1/2 \ \ (\text{nhận}) \\ x=-3 \ \ (\text{loại}) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\cdot$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

b) $-6+\sqrt{25x^2-10x+1}=x.$

(THPT Cần Thạnh – Tp.HCM)

Đáp số: $S=\left\{-\dfrac{5}{6};\dfrac{7}{4}\right\}.$

c) $\sqrt{x^2-2x-4}-x=1.$

(THPT Trưng Vương – Tp. HCM)

Đáp số: $S=\varnothing.$

d) $(x-2)(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=0.$

(THPT Năng Khiếu – Tp. HCM)

Đáp số: $S=\{3/4\}.$

BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

15. **(THPT Tây Thạnh – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{5x^2 - 25x + 31} = 5 - 2x.$

Đáp số: $S = \{2\}.$

16. **(THPT Hùng Vương – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 7} = x + 2.$

Đáp số: $S = \{1;3\}.$

17. **(THPT Bình Khánh – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{-2x^2 + 5x - 3} - 1 + 2x = 0.$

Đáp số: $S = \varnothing.$

18. **(THPT Vĩnh Lộc – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} = 4x - 1.$

Đáp số: $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}.$

19. **(THPT Võ Văn Kiệt – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 2} = x - 2.$

Đáp số: $S = \{3\}.$

20. **(THPT Vĩnh Lộc B – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2.$

Đáp số: $S = \{3\}.$

21. **(THPT Bình Phú – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 9x + 7} = x + 1.$

Đáp số: $x = -1.$

22. **(THPT Bình Tân – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{4x - 3} = x - 2.$

Đáp số: $x = 7.$

23. **(THPT Củ Chi – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x + 16} = 4 - 2x.$

Đáp số: $x = 0.$

24. **(THPT Đinh Thiện Lý – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 2x - 5} = x - 1.$

Đáp số: $x = \sqrt{3}.$

25. **(THPT An Dương Vương – Tp. HCM)** Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1.$

Đáp số: $x = \dfrac{4}{3}\cdot$

26. **(Trường Trung Học Thực Hành Sài Gòn)** Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 24x - 48} = 2x - 1.$

Đáp số: $S = \left\{\dfrac{7}{3};7\right\}.$

27. **(THPT Trần Phú – Tp. HCM)** Giải phương trình $(x + 1)(\sqrt{4x + 1} - 1) = 0.$

Đáp số: $x = 0.$

28. **(THPT Nguyễn Hữu Cầu – Tp. HCM)** Giải phương trình $(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{2 - x} - x) = 0.$

Đáp số: $x = 1.$

7. Giải các phương trình dạng $\boxed{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}=0}$

Phương pháp: *Đặt điều kiện. Chuyển vế để hai vế đều dương và bình phương giải pt hệ quả.*

a) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$.

(THPT Trần Văn Giàu – Tp. HCM)

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ 2x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ge 1 \\ x\ge 3/2 \end{cases} \Rightarrow x\ge \dfrac{3}{2}\cdot$

Phương trình $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow x+2=2x-3+x-1+2\sqrt{(2x-3)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}=3-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x\ge 0 \\ 2x^2-5x+3=(3-x)^2 \end{cases}$

Đáp số: $x=2$.

b) $\sqrt{12x+4}-\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5}$.

(Trường Trung Học Thực Hành Sài Gòn)

Đáp số: $x=5$.

c) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$.

(THPT Tân Phong – Tp. HCM)

Đáp số: $x=2$.

d) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$.

(THPT Diên Hồng – Tp. HCM)

Đáp số: $x=2,\ x=4$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1.$

2) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}=2.$

3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+2}=1.$

4) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+7}=2.$

5) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-2}=3.$

6) $\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}.$

7) $\sqrt{3x+1}=8-\sqrt{x+1}.$

8) $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}.$

9) $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}.$

10) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-4}.$

11) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}.$

12) $\sqrt{4x^2-7x-2}=2\sqrt{x^2-x+1}-1.$

13) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}.$

14) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}.$

15) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}.$

16) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}.$

17) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$

18) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0.$

19) $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4.$

20) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$

8. Giải các phương trình sau:

a) $3\sqrt{x^2-4x+5}+x^2-4x+1=0.$

(THPT Trần Phú – Tp. HCM)

Lời giải tham khảo

Đặt $x^2-4x=t$ thì phương trình trở thành

$$3\sqrt{t+5}+t+1=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{t+5}=-t-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t-1\ge 0 \\ 9(t+5)=(-t-1)^2 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

Với $t=-4 \Rightarrow x^2-4x=-4 \Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: Nghiệm cần tìm là $x=2.$

b) $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x+11}=4.$

(THPT Nguyễn Hữu Huân – Tp. HCM)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $S=\{1;2\}.$ ....

➢ ***Nhận xét***. *Đặt ẩn phụ là phương pháp đi tìm đại lượng giống nhau của phương trình và đặt ẩn nhằm cho bài toán đơn giản hơn hoặc đưa về những dạng quen thuộc.*

Trong bài toán trên ta có thể đặt $t=\sqrt{x^2-4x+5}$, *nhưng trong một số tình huống (chẳng hạn câu e), việc làm như thế sẽ gây khó khăn hơn.*

c) $3\sqrt{x^2+2x-3}=2x^2+4x-5$

(THPT Trưng Vương – Tp. HCM)

Đáp số: $S=\left\{-1\pm\sqrt{5};\dfrac{-2\pm\sqrt{17}}{2}\right\}.$

d) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}.$

(THPT Hoàng Hoa Thám – Tp. HCM)

Đáp số: $S=\{-4;1\}.$

e) $(x-2)(x+3)+\sqrt{x^4-2x^3+2x^2-x}=-4.$

(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. HCM)

f) $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2=2.$

(THPT Mạc Đỉnh Chi – Tp. HCM)

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. **(THPT Diên Hồng – Tp.HCM)** Giải phương trình $3x^2-19x+2\sqrt{x^2-6x+1}=2.$

2. **(THPT Trần Quang Khải – Tp. HCM)** Giải phương trình $4x^2+x+4\sqrt{4x^2+x-4}=9.$

3. **(THPT Diên Hồng – Tp. HCM)** Giải phương trình $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

4. **(THPT Marie Curie – Tp. HCM)** Giải phương trình $5\sqrt{x^2+2x-7}=x^2+2x-3.$

5. **(THPT Tân Bình – Tp. HCM)** Giải phương trình: $10x+15=2x^2+\sqrt{x^2-5x-6}.$

6. **(THPT Lê Quí Đôn – Tp. HCM)** Giải phương trình: $\sqrt{6x^2-12x+7}-x(x-2)=0.$

7. **(THPT Trung Phú – Tp. HCM)** Giải phương trình: $6x^2-9x-7\sqrt{2x^2-3x+1}=3.$

8. Giải phương trình: $(x+1)(x-3)\sqrt{2x-x^2+3}=2-(x-1)^2.$

9. Giải phương trình: $(x^2+1)^2=5-x\sqrt{2x^2+4}.$

Nhóm: *Tổng/hiệu – Tích* $\xrightarrow{PP}$ *Đặt* $t=$ *tổng/hiệu* $\Rightarrow t^2=.....$

10. Giải phương trình: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(3+x)(6-x)}.$

11. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)}=4.$

12. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$

13. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2}+x=2x\sqrt{2-x^2}.$

Nhóm: $R\left(\sqrt{x}\pm\dfrac{a}{\sqrt{x}};\ x+\dfrac{a^2}{x}\right)$ *hoặc* $R\left(x\pm\dfrac{a}{x};x^2+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\xrightarrow{PP} t=\sqrt{x}\pm\dfrac{a}{\sqrt{x}}\Rightarrow t^2=.....$

14. Giải phương trình: $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}-7.$

15. Giải phương trình: $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}+4.$

Nhóm: *Chia để trị (đưa về những nhóm quen thuộc).*

16. Giải phương trình: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}.$

17. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+5}+\sqrt{2x^2-4x+5}=6\sqrt{x}.$

18. Giải phương trình: $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1.$

19. Giải phương trình: $x^2-6x+x.\sqrt{\dfrac{x^2-6}{x}}-6=0.$

20. Giải phương trình: $\dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+6+2\sqrt{x}=5x.$

21. Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{4-3\sqrt{x}}+8=3(x+2\sqrt{x}).$

Nhóm: *Hai căn lệch bậc hoặc căn đồng bậc cao* $\xrightarrow{PP}$ *Đặt hai ẩn* $\Rightarrow$ *Hệ phương trình.*

22. Giải phương trình: $5\sqrt{x+1}-2\sqrt[3]{7x+6}=4.$

23. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0.$

24. Giải phương trình: $2\sqrt{3x+7}-5.\sqrt[3]{x-6}=4.$

Nhóm: *Đặt hai ẩn đưa về phương trình đẳng cấp (đồng bậc)* $\longrightarrow$ *Chia đưa về bậc 2 hoặc 3.*

25. Giải phương trình: $4\sqrt[3]{(x+2)^2}-7\sqrt[3]{4-x^2}+3\sqrt[3]{(2-x)^2}=0.$

26. Giải phương trình: $4\sqrt[3]{(2x+1)^2}+3\sqrt[3]{(1-2x)^2}=8\sqrt[3]{4x^2-1}.$

27. Giải phương trình: $2\sqrt[4]{(1+x)^2}-3\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{(1-x)^2}=0.$

Nhóm: *Sử dụng đồng nhất để đưa về đẳng cấp.*

28. Giải phương trình: $2x^2-6x+10-5(x-2)\sqrt{x+1}=0.$

29. Giải phương trình: $3x^2-13x+37=8(x-3)\sqrt{x+2}.$

30. Giải phương trình: $73(x+1)\sqrt{x^2+12}=9x^2+20x-2.$

31. Giải phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}.$

32. Giải phương trình: $2(x^2+18)=7\sqrt{x^3+27}.$

33. Giải phương trình: $\sqrt{3}(x^2-3x+1)=\sqrt{x^4+x^2+1}.$

34. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+x+6}=4x-2+7\sqrt{x+1}.$

35. Giải phương trình: $x+2=\sqrt{x^2-2x-2}+2\sqrt{x+1}.$

36. Giải phương trình: $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x^2+8x+4}.$

Nhóm: *Sử dụng ẩn phụ, đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2.*

37. Giải phương trình: $x^2+4x=\sqrt{x+6}.$

38. Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}.$

39. Giải phương trình: $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}.$

Nhóm: *Sử dụng ẩn phụ không hoàn toàn* $\longrightarrow$ *Giải phương trình bậc hai bằng* Δ*. theo biến t tham x.*

40. Giải phương trình: $2x^2+3x+7=(x+5)\sqrt{2x^2+1}.$

41. Giải phương trình: $x^2-4x+(x-3)\sqrt{x^2-x-1}-1=0.$

42. Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1.$

43. Giải phương trình: $3\sqrt{1-x^2}=4\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}+3-x.$

44. Giải phương trình: $3x+1=4\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}$.

45. Giải phương trình: $3x^2+1=4\sqrt{1+x^2}-2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^4}$.

***Nhóm**: Đặt hai hoặc ba ẩn phụ đưa về hằng đẳng thức.*

46. Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$.

47. Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3$.

48. Giải phương trình: $x=\sqrt{3-x}\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}\sqrt{3-x}$.

49. Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$.

50. Giải phương trình: $x^4-2x^2\sqrt{3}+x+3-\sqrt{3}=0$.

9. Giải các phương trình dạng tích số:

- $f(x)=ax^2+bx+c=a.(x-x_1)(x-x_2)$ với $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $f(x)=0$.
- $u+v=1+uv \Leftrightarrow (u-1)-v(u-1)=0 \Leftrightarrow (u-1)(1-v)=0 \Leftrightarrow u=v=1$.
- $au+bv=ab+vu \Leftrightarrow a(u-b)-v(u-b)=0 \Leftrightarrow (u-b)(a-v)=0$.

a) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x^2-5x+4\geq 0$.

Phương trình $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$

$\Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2-5x+4}-2(x-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x^2-5x+4}=2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2-5x+4=4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \ \vee\ x=5 \end{array}\right.$.

Thế các nghiệm vào điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=0,\ x=5$.

b) $(x-3)\sqrt{x^2+4}=x^2-9$.

c) $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$.

d) $(x-1)\sqrt{2x-3}=x^2-4x+3$.

e) $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}.$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1.$

Phương trình đã cho trở thành

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{(x+1)(x+3)}$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x+3}-\sqrt{(x+1)(x+3)}\right]$

$+(2x\sqrt{x+1}-2x)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(1-\sqrt{x+1})-2x(1-\sqrt{x+1})=0$

$\Leftrightarrow (1-\sqrt{x+1}).(\sqrt{x+3}-2x)=0$

f) $\sqrt{x^2-x-2}-2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{x+1}.$

g) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=1.$

h) $\sqrt{x^2-x-2}-2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{x-1}.$

10. Giải các phương trình sau (phương trình có ẩn ở mẫu):

a) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=2.$

(THPT Nguyễn Hữu Huân – Tp.HCM)

Đáp số: $x=\dfrac{5}{4}.$

b) $\dfrac{13}{x-2}-\dfrac{52}{x^2-4}=7.$

(THPT Hưng Đạo – Tp.HCM)

Đáp số: $x=-\dfrac{1}{7}.$

c) $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{x^2+12}{x^2-9}.$

(THPT Võ Văn Kiệt – Tp. HCM)

Đáp số: $x=0,\ x=2.$

d) $\dfrac{2x-5}{x+1}-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}.$

(THPT Vĩnh Lộc B – Tp. HCM)

Đáp số: $x=1/5.$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. **(THPT Bình Tân – Tp. HCM)** Giải phương trình $\dfrac{3x+1}{x+1}-\dfrac{4x-3}{x+3}=16.$

8. **(THPT Đinh Thiện Lý – Tp. HCM)** Giải phương trình $\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{6}{x^2+3x}=0.$

9. **(THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa – TP. HCM)** Giải $(x-5)(x+1)(x^2-9)=85.$

10. **(THPT Mạc Đỉnh Chi – Tp. HCM)** Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3.$

11. **(THPT Bình Phú – Tp. HCM)** Giải phương trình: $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)=28.$

12. **(Nguyễn Thượng Hiền – TP. HCM)** Giải phương trình: $4(2x^2-3x+1)(2x^2-4x+1)=3x^2.$

13. **(THPT Tân Bình – Tp. HCM)** Giải phương trình: $(x+1)(x-2)(x+4)(x-8)=36x^2.$

14. **(THPT – Nguyễn Thị Diệu – TP. HCM))** Giải phương trình: $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6.$

15. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa – TP. HCM)** Giải phương trình: $\dfrac{4x}{x^2+2x+3}-\dfrac{5x}{x^2+4x+3}=\dfrac{10}{9}.$

11. Giải các phương trình (nhân lượng liên hợp):

a) $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}.$

b) $3\sqrt{x-2}=2x-6+\sqrt{x+6}.$

c) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4.$

d) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1) $\dfrac{2(x-1)^2}{(3-\sqrt{7+2x})^2}=x+20.$

2) $\dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x+1}+1)^2}=2x+\sqrt{x-1}+1.$

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x.$

4) $x^3+5x^2+6x=(x+2)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}).$

5) $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}\cdot$

6) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}\cdot$

7) $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}=\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}\cdot$

8) $\dfrac{(x-6)\sqrt{x-1}+8-2x}{x-3+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}\cdot$

9) $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}.$

10) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1.$

§ 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

☆☆☆

Dạng toán 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

① **Định nghĩa**:

Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn x và y là hệ có dạng $(I): \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$ với $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$.

Cặp số $(x_o; y_o)$ đồng thời thỏa (1) và (2) được gọi là nghiệm của hệ phương trình.

② **Công thức nghiệm**: Quy tắc Crame.

Ký hiệu: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$.

Xét D		Kết quả
$D \neq 0$		Hệ có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{D_x}{D};\ y = \dfrac{D_y}{D}$.
$D = 0$	$D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$	Hệ vô nghiệm.
	$D_x = D_y = 0$	Hệ có vô số nghiệm.

Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, đặt ẩn phụ đưa về cơ bản,……

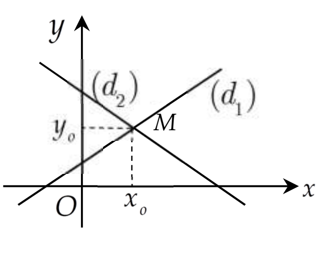
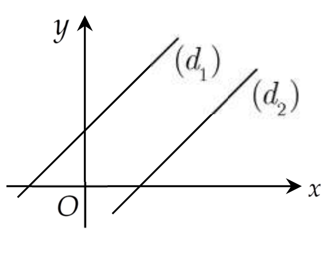
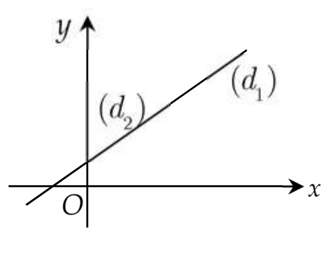
Phương pháp Crame trên dùng để giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất có chứa tham số.

③ **Biểu diễn hình học của tập nghiệm:**

Nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình (I) là tọa độ điểm $M(x;y)$ thuộc cả hai đường thẳng:

$$(d_1): a_1x + b_1y = c_1 \text{ và } (d_2): a_2x + b_2y = c_2.$$

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) cắt nhau.
- Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) song song với nhau.
- Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) trùng nhau.

$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$
		
Nghiệm duy nhất	*Vô nghiệm*	*Vô số nghiệm*

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{y}=18 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=51 \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$ và $b=\dfrac{1}{y}$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} a-8b=18 \\ 5a+4b=51 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{120}{11} \\ b=-\dfrac{39}{44} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{120} \\ y=-\dfrac{44}{39} \end{cases}.$$

So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là

$S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{11}{120};-\dfrac{44}{39}\right)\right\}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{10}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=1 \\ \dfrac{25}{x-1}+\dfrac{3}{y+2}=2 \end{cases}$.

Đáp số: $(x;y)=\left\{(6;-3)\right\}$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3x-6}{y+1}+\dfrac{x}{y-2}=1 \\ \dfrac{x-2}{y+1}+\dfrac{3x}{y-2}=7 \end{cases}$.

Đáp số: $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{5}{12};\dfrac{13}{6}\right)\right\}$.

4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+y)+2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=6 \\ 3(x-y)+2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$

Đáp số: $(x;y)=\left\{\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)\right\}$.

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left|x-6\right| + 3\left|y+1\right| = 5 \\ 5\left|x-6\right| - 4\left|y+1\right| = 1 \end{cases}$

ĐS: $(x;y) = \{(7;0);(7;-2);(5;0);(5;-2)\}$.

6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left|x+y\right| - \left|x-y\right| = 9 \\ 3\left|x+y\right| + 2\left|x-y\right| = 17 \end{cases}$

ĐS: $(x;y) = \{(-3;-2),(-2;-3),(3;2),(2;3)\}$.

7. Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m \\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1 \end{cases}$.

- **TH 1**. Nếu $D = 0 \Rightarrow m = 1$ thì $D_x = D_y = 0$ nên hệ vô số nghiệm.
- **TH 2**. Nếu $D \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1-m^2}{1-m} = 1 + m \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m-1}{1-m} = -1 \end{cases}.$$

8. Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$.

9. Cho hệ $\begin{cases} mx - 2y = m - 2 \\ (m-1)^2 x - y = m^2 - 1 \end{cases}$. Tìm tham số m để hệ đã cho vô nghiệm ?

Lời giải tham khảo

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow D = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \ \vee \ m = \dfrac{1}{2}$.

- Với $m = \dfrac{1}{2}$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 2y = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{4}x - y = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}.$$

Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Do đó loại $m = \dfrac{1}{2}$.

- Với $m = 2$ hệ trở thành

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{(vô lý)}$$

nên hệ vô nghiệm $\Rightarrow m = 2$ nhận.

10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$. Tìm tham số m để hệ đã cho vô nghiệm ?

11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$. Tìm tham số m để hệ đã cho vô nghiệm ?

12. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = m^2 \\ 2x + my = 4 \end{cases}$. Tìm tham số m để hệ đã cho vô nghiệm ?

BÀI TẬP VỀ NHÀ

BT 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} -3x^2 + \sqrt{y-2} = 1 \\ -5x^2 + 2\sqrt{y-2} = 3 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x - 2y + 3\left|y\right| = 6 \\ 2(x-2y) - \left|y\right| = 5 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x^2 + x - 3\sqrt{y-2} = 3 \\ 2x^2 + 2x + \sqrt{y-2} = 13 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} 2x^2 - 6x + 2\sqrt{y-1} = -1 \\ x(3-x)\sqrt{y-1} = 3 \end{cases}$.

BT 2. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + my + 2 = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (m-1)x - y = m + 2 \\ (m+1)x + 2y = m - 5 \end{cases}$.

BT 3. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau đây có nghiệm duy nhất $(x;y)$. Khi đó hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với tham số m.

a) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$.

b) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$.

BT 4. Tìm tham số m nguyên để các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $(x;y)$ nguyên.

a) $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$.

b) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$.

BT 5. Tìm tham số m nguyên để các hệ phương trình

a) $\begin{cases} (m+1)x - my = 3m + 2 \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x_o;y_o)$ thỏa mãn $\left|2x_o - y_o\right| = 3$.

b) $\begin{cases} mx + y = 3m + 1 \\ x - my = 2 - m - m^2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x_o;y_o)$ thỏa mãn $y_o^2 = 2x_o$.

BT 6. Tìm tham số m để các phương trình sau có vô số nghiệm.

a) $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx + y = 2m + 1 \end{cases}$.

BT 7. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$.

BT 8. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (m+1)x - y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$.

Dạng toán 2: Hệ gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai

☆☆☆

- **Dạng tổng quát**: $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ dx^2+exy+fy^2+gx+hy=i & (2) \end{cases}$
- **Phương pháp giải**: Từ phương trình bậc nhất (1), rút x theo y (hoặc y theo x) và thế vào phương trình bậc hai (2) để giải tìm x (hoặc tìm y).

1. (Trường Trung Học Thực Hành Sài Gòn) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x-2y^2=32 \\ 3x+y=22 \end{cases}$.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Từ phương trình thứ hai $3x+y=22 \Rightarrow y=22-3x$ và thế vào phương trình thứ nhất:

$5x-2y^2=32 \Rightarrow 5x-2(22-3x)^2=32$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

....

....

Đáp số: $(x;y)=\{(8;-2);(125/18;\ 7/6)\}$.

2. (THPT Nguyễn Hữu Huân – Tp.HCM) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$.

....

....

....

....

Đáp số: $(x;y)=\{(1;-3);\ (18/7;1/7)\}$.

3. (THPT Võ Văn Kiệt – Tp.HCM) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ xy+x+y+6=0 \end{cases}$.

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $(x;y)=\{(4;-2),(-5/2;\ 7/3)\}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. **(THPT Diên Hồng – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$.

2. **(THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \end{cases}$.

3. **(THPT Trung Phú – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x^2 + y^2 - xy - 5x + 2y = 4 \end{cases}$.

4. **(THPT Marie Curie – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2x - y = 8 \\ x^2 + 5x + 2y = 0 \end{cases}$.

5. **(THPT Nguyễn Hữu Quân – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + \sqrt{3 - y} = 4 \\ x^2 - y = 2 \end{cases}$.

6. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \end{cases}$.

g) $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 7x + 12y - 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

h) $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y = 4 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$.

i) $\begin{cases} (2x + 3y - 2)(x - 5y - 3) = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$.

j) $\begin{cases} (x + 2y + 1)(x + 2y + 2) = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$.

7. * Giải các hệ phương trình sau (bình phương hoặc ẩn phụ):

a) $\begin{cases} \sqrt{2x - y + 3} = 2 \\ x^2 + y^2 - xy = 19 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x - 4} + \sqrt{y - 1} = 4 \\ x + y = 15 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} \sqrt{x + 1} - \sqrt{y + 2} = 1 \\ x + y = 10 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} x + \sqrt{y + 3} = 4 \\ y + \sqrt{x + 2} = 3 \end{cases}$.

g) $\begin{cases} 2x + \sqrt{y - 2} + 4 = 0 \\ 2y + \sqrt{x + 2} = 4 \end{cases}$.

h) $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$.

Dạng toán 3: Hệ phương trình đối xứng và đẳng cấp

═══════ ☆☆☆ ═══════

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI I

- **Dấu hiệu nhận dạng**: Khi thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi và trật tự các phương trình cũng không thay đổi.
- **Phương pháp giải**: Biến đổi về dạng tổng và tích.

Đặt $S = x + y,\ P = xy.$

Giải hệ với ẩn $S,\ P$ với điều kiện có nghiệm $(x;y)$ là $S^2 \ge 4P.$

Tìm nghiệm $(x;y)$ bằng cách thế vào phương trình $X^2 - SX + P = 0.$

✶ Một số biến đổi để đưa về dạng tổng – tích thường gặp:

- $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P.$
- $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = S^3 - 3SP.$
- $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = S^2 - 4P.$
- $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2.$
- $x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) = \cdots\cdots\cdots$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

- **Dấu hiệu nhận dạng**: Khi thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ phương trình không đổi và trật tự các phương trình thay đổi (phương trình này thành phương trình kia).
- **Phương pháp giải**: Lấy vế trừ vế và phân tích thành nhân tử, lúc nào cũng đưa được về dạng $(x-y).f(x) = 0,$ tức luôn có $x = y.$

✶ **Lưu ý**: Đối với hệ đối xứng loại II chứa căn thức, sau khi trừ ta thường liên hợp.

Chẳng hạn: $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} x^2 - y^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 2(y - x)$ và nhân liên hợp $\sqrt{x} - \sqrt{y}.$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

- **Dạng tổng quát**: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases} \qquad (i)$
- **Phương pháp giải**: $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} d_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2) = d_1.d_2 & (1) \\ d_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) = d_1.d_2 & (2) \end{cases}$

Lấy $(1) - (2) \Rightarrow (a_1d_2 - a_2d_1).x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1).xy + (c_1d_2 - c_2d_1).y^2 = 0.$ Đây là phương trình đẳng cấp bậc hai nên sẽ tìm được mối liên hệ giữa $x,\ y$ bằng phép chia.

☛ **Lưu ý**. *Một số bài toán nâng cao, ta có thể sử dụng phương pháp thế cụm để tạo thành đẳng cấp.*

1. Giải các hệ phương trình sau (đối xứng loại 1):

a) $\begin{cases} 2x+2y=4+xy \\ x^2+y^2+x+y=18 \end{cases}$.

(THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. HCM)

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)=4+xy \\ (x+y)^2-2xy+x+y=18 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, (điều kiện: $S^2 \geq 4P$).

Hệ PT trở thành $\Leftrightarrow \begin{cases} 2S=4+P \\ S^2-2P+S=18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=2S-4 \\ S^2-3S-10=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} S=5 \Rightarrow P=6 \\ S=-2 \Rightarrow P=-8 \end{array}\right.$ (thỏa $S^2 \geq 4P$).

Với $\begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases} \xrightarrow{X^2-SX+P=0} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} S=-2 \\ P=-8 \end{cases} \Rightarrow$

b) $\begin{cases} x+xy+y=3 \\ x^2y+xy^2=2 \end{cases}$.

(THPT Hùng Vương – Tp. HCM)

Đáp số: $x=y=1$.

c) $\begin{cases} x+y+2xy=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

(THTP An Dương Vương – Tp. HCM)

Đáp số: $(x;y)=\{(1;0);(0;1)\}$.

d) $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$.

(THPT Võ Trường Toản – Tp. HCM)

Đáp số: $S=\{(1;3);(3;1)\}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. **(THPT Trần Văn Giàu – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ xy + 7 = x + y \end{cases}$.

2. **(THPT Hùng Vương – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 8 \end{cases}$.

3. **(THPT Trần Phú – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 2xy = 4 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$.

4. **(THPT Võ Thị Sáu – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + xy + y = -1 \\ x^2y + y^2x = -6 \end{cases}$.

5. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = -7 \\ xy - x - y = 7 \end{cases}$.

6. **(THPT Trung Phú – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = -4 \end{cases}$.

7. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. HCM)** Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2xy \\ x(y-2) + y(x-2) + 2 = 0 \end{cases}$.

8. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. HCM)** Giải hệ $\begin{cases} x + xy + y = 17 \\ x^3 + y^3 - 10xy = 33 \end{cases}$.

9. **(THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa – Tp. HCM)** Giải hệ $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$.

10. **(THPT Nguyễn Du – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 12 \\ (x^2 + x)(y^2 + y) = 36 \end{cases}$.

11. **(THPT Nguyễn Hữu Huân – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$.

12. **(THPT Tân Bình – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$.

13. **(THPT Mạc Đỉnh Chi – Tp. HCM)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ x + y = 5 + \sqrt{(x-1)(y-1)} \end{cases}$.

2. Giải các hệ phương trình sau (đối xứng loại 2):

a) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$.

(THPT Lê Quí Đôn – Tp. HCM)

Lời giải tham khảo

Lấy vế trừ vế, ta được: $3(x^2 - y^2) = x - y$

$\Leftrightarrow 3(x-y)(x+y) - (x-y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[3(x+y)-1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3(x+y) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = \dfrac{1}{3} - x \end{array}\right.$.

Với $y = x$ thế vào phương trình thứ nhất:

Với $y = \dfrac{1}{3} - x$ thế vào phương trình thứ nhất

b) $\begin{cases} x^2 + xy - 4y = 6 \\ y^2 + xy - 4x = 6 \end{cases}$.

(THPT Nguyễn Công Trứ – Tp. HCM)

c) $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$.

(THTP Trần Đại Nghĩa – Tp. HCM)

d) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{7-y} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{7-x} = 4 \end{cases}$.

(THPT Lê Hồng Phong – Tp. HCM)

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$.

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$.

3) $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 5x + 5 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} (4x+2)^2 = 2y + 15 \\ (4y+2)^2 = 2x + 15 \end{cases}$.

5) $\begin{cases} x + y^2 = y^3 \\ y + x^2 = x^3 \end{cases}$.

6) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$.

7) $\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ \sqrt{y^2+3} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x} \end{cases}$.

8) $\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 2 \\ x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} = 2 \end{cases}$.

3. Giải các hệ phương trình sau (đẳng cấp):

a) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 & (1) \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$

Với $y = 0$ thì hệ thành $\begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Với $y \neq 0$, đặt $x = ty$. Hệ trở thành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2y^2 + 2ty^2 + 3y^2 = 9 \\ 2t^2y^2 + 2ty^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2 + 2t + 3) = 9 & (3) \\ y^2(2t^2 + 2t + 1) = 2 & (4) \end{cases}$$

Lập tỉ số $\dfrac{(3)}{(4)} \Rightarrow \dfrac{t^2 + 2t + 3}{2t^2 + 2t + 1} = \dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow 16t^2 + 14t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{8}$ hoặc $t = -\dfrac{1}{2}$.

Với $t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -2x,$ thế vào (2) thì

$(2) \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Với $t = -\dfrac{3}{8} \Rightarrow y = -\dfrac{8x}{3},$ ....

b) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 18 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 111x - 10y = 0 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} 2x^2 - x(y-1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$.

e) * $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$.

f) * $\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} (x+y)(3xy-4\sqrt{x})=-2 \\ (x+y)(3xy+4\sqrt{y})=2 \end{cases}.$

2) $\begin{cases} y^4+2y^3-x=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ y^4+2x^3-y=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3} \end{cases}.$

3) $\begin{cases} x+\dfrac{78y}{x^2+y^2}=20 \\ y+\dfrac{78x}{x^2+y^2}=15 \end{cases}.$

4) $\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{x}=2 \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{y}=6 \end{cases}.$

5) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^2-xy-2y^2=-x+2y \end{cases}.$

6) $\begin{cases} x^3-3x^2y+4y^3=(x-2y)^2 \\ \sqrt{x-2y}+\sqrt{3x+2y}=4x-4 \end{cases}.$

7) $\begin{cases} 2y^2+xy-x^2=0 \\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0 \end{cases}.$

8) $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy+x-y=0 \\ x^2-3y+4y^2-1=0 \end{cases}.$

9) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 \end{cases}.$

10) $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3) \end{cases}.$

11) $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y}=3-2x-y \\ x^2-2xy-y^2=2 \end{cases}.$

12) $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4 \end{cases}.$

13) $\begin{cases} y^2+8\sqrt{1-2x}-9=0 \\ 4x^2+y^2+2x+y=2(1-2xy) \end{cases}.$

14) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{y} \\ (1-\sqrt{x})(5y-4\sqrt{5y}+8)=4x^2 \end{cases}.$

15) $\begin{cases} x^2-2=4y\sqrt{y+1} \\ 22(y-1)^2=(x^2+9)(x^2+9y) \end{cases}$

16) $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2)=6 \\ x^2+y^2-2x-2y-3=0 \end{cases}.$

17) $\begin{cases} x^4-4x^2+2y^2-6\sqrt{2}y=-9 \\ \sqrt{2}x^2y+x^2+2\sqrt{2}y=22 \end{cases}.$

18) $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}.$

19) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3x-2 \\ (x^2+xy)^4+(y^2+2)^4=17x^4 \end{cases}.$

20) $\begin{cases} xy+x-1=3y \\ x^2y-x=2y^2 \end{cases}.$

21) $\begin{cases} x^3y^3+8=16y^3 \\ x(xy+2)=8y^2 \end{cases}.$

22) $\begin{cases} \sqrt{xy+x+2}+\sqrt{x^2+x}-4\sqrt{x}=0 \\ xy+x^2+2=x.(\sqrt{xy+2}+3) \end{cases}.$

23) $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}.$

24) $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \\ 1+xy=x^2+y^2 \end{cases}.$

Chương 4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH & BẤT ĐẲNG THỨC

§ 1. BẤT ĐẲNG THỨC

☆☆☆

Điều kiện		Nội dung	
Cộng hai vế với số bất kì		$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
Nhân hai vế	một số dương: $c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	$(2a)$
	một số âm: $c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	$(2b)$
Cộng vế theo vế các bất đẳng thức cùng chiều		$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$	(3)
Nhân từng vế bất đẳng thức khi biết nó dương		$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac > bd$	(4)
Nâng lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	Mũ lẻ	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	$(5a)$
	Mũ chẵn	$0 < a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	$(5b)$
Lấy căn hai vế	$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	$(6a)$
	a bất kỳ	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	$(6b)$
Nghịch đảo	Nếu $a,\ b$ cùng dấu: $ab > 0$	$a > b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$	$(7a)$
	Nếu $a,\ b$ trái dấu: $ab < 0$	$a > b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$	$(7b)$

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY (AM – GM)

① $\forall a \geq 0;\ b \geq 0$ thì ta có: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

② $\forall a \geq 0;\ b \geq 0;\ c \geq 0$ thì ta có: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu " = " $\Leftrightarrow a = b = c$.

Hoặc có thể viết: $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$ và $a.b.c \leq \dfrac{(a+b+c)^3}{27}$.

Tổng quát: Với n số $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ thì $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3\ldots.a_n}$.

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXKI (CAUCHY SCHWARZ)

① $\forall x,\ y,\ a,\ b \in \mathbb{R}$ thì: $\begin{cases} (a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ \left|a.x + b.y\right| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \end{cases}$. Dấu " = " $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b},\ (a;b \neq 0)$.

② $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$ và $a,\ b > 0$ thì: $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$ (cộng mẫu). Dấu " = " $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

Lưu ý. Ta có thể thể áp dụng tương tự cho bộ ba số: $(x;y;z)$ và $(a;b;c)$.

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương

☆☆☆

Để chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp tương đương, có thể làm theo hai ý tưởng:
— Biến đổi BĐT cần chứng minh tương đương với một BĐT đã biết là luôn đúng.
— Sử dụng một BĐT đã biết, biến đổi để dẫn đến BĐT cần chứng minh.

Một số bất đẳng thức luôn đúng:

- $A^2 \geq 0.$
- $A^2 + B^2 \geq 0.$
- $A.B \geq 0$ với $A,\ B \geq 0.$
- $A^2 + B^2 \geq \pm 2AB.$

1. (THPT Trưng Vương – Tp. Hồ Chí Minh năm 2013 – 2014) Cho $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

Lời giải tham khảo

Giả sử $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \xleftrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$ *(thêm bớt đưa về hằng đẳng thức)*

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$: luôn đúng. Suy ra $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ luôn đúng (đpcm).

Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a - b = 0 \\ a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$

2. (THPT Trưng Vương – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019) Cho $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - bc - ac.$$

Lời giải của học sinh

....

3. (THPT An Dương Vương – Tp. Hồ Chí Minh năm 2017 – 2018) Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a+b),\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Lời giải của học sinh

....

4. (THPT Nguyễn Thái Bình – Tp. Hồ Chí Minh năm 2014 – 2015) Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $a^4 - 4a + 3 \geq 0.$

Lời giải của học sinh

5. (THPT Nguyễn Thái Bình – Tp. Hồ Chí Minh năm 2013 – 2014) Chứng minh rằng với mọi $a^2 + b^2 > 0$ thì ta luôn có $a^2 + ab + 2b^2 + \dfrac{ab^3}{a^2 - ab + b^2} > 0.$

Lời giải của học sinh

6. (THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. Hồ Chí Minh năm 2014 – 2015) Chứng minh rằng với mọi $\forall a;\ b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $\dfrac{a^4 + b^4 + 1}{2} \geq a^2b^2 - a^2 + b^2.$

Lời giải của học sinh

7. (THPT Tân Bình – Tp. Hồ Chí Minh năm 2012 – 2013) Chứng minh rằng với mọi $\forall a;\ b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2.$

Lời giải của học sinh

8. **(THPT Võ Trường Toản – Tp. HCM)** Chứng minh rằng: $a^4+b^4\ge ab^3+a^3b,\ \forall a,\ b\in\mathbb{R}.$

Lời giải tham khảo

Giả sử, ta có $a^4+b^4\ge ab^3+a^3b\Leftrightarrow(a^4-ab^3)+(b^4-a^3b)\ge 0\Leftrightarrow a(a^3-b^3)+b(b^3-a^3)\ge 0$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a^2+ab+b^2)+b(b-a)(b^2+ab+a^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a^2+ab+b^2)-b(a-b)(a^2+ab+b^2)\ge 0$

9. **(THPT Diên Hồng – Tp. HCM)** Chứng minh rằng: $x^5+y^5-x^4y-xy^4\ge 0,\ \forall x+y\ge 0.$

Lời giải của học sinh

10. **(THPT Trần Phú – Tp. HCM)** Chứng minh: $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2,\ \forall a\ge 0;\ b\ge 0.$

Lời giải của học sinh

BÀI TẬP VỀ NHÀ

BT 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $(a+b)^2 \ge 4ab,\ \forall a;\ b \in \mathbb{R}.$

b) $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2,\ \forall a;\ b \in \mathbb{R}.$

c) $a+b+\dfrac{1}{2} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \forall a;\ b \ge 0.$

d) $a+b+c+\dfrac{3}{4} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\ \forall a,b,c \ge 0.$

e) $a^2+b^2+c^2+12 \ge 4(a+b+c), \forall a,b,c.$

f) $a^4 \pm a+1 > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

g) $a^4+3 \ge 4a,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

h) $a^2+b^2+4 \ge ab+2a+2b,\ \forall a,b,c.$

i) $\dfrac{a^2}{4}+b^2+c^2 \ge ab-ac+2bc,\ \forall a,b,c.$

j) $4a^4+5a^2 \ge 8a^3+2a-1,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

k) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \ge 6abc.$

l) $a^4+b^4+c^2+1 \ge 2a(ab^2-a+c+1).$

m) $x^2+y^2+5 > xy+x+3y,\quad \forall x,y.$

n) $4a^2+4b^2+6a+3 \ge 4ab,\ \forall a;\ b \in \mathbb{R}.$

o) $x^2+2y^2+2xy-2x-5y+4 > 0, \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$

p) $x^2+y^2+xy-3x-3y+3 \ge 0,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$

q) $x^2+y^2+xy-5x-4y+7 \ge 0,\ \forall x,y.$

r) $x^2+4y^2+3z^2+14 > 2x+12y+6z, \forall x,y,z.$

s) $x^2+y^2+1 \ge xy+x+y,\ \forall x;\ y \in \mathbb{R}.$

t) $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx,\ \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}.$

u) $x^4+y^4+z^4 \ge xyz(x+y+z),\ \forall x,y,z.$

v) $ab+2bc+3ca \le 0,\ \forall a+b+c=0.$

BT 2. Cho $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$ Chứng minh: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2).$

b) $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca).$

c) $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c).$

d) $a^4+b^4+c^4 \ge abc,\ (a+b+c=1).$

BT 3. Cho $a,\ b \ge 0.$ Chứng minh: $a^3+b^3 \ge a^2b+b^2a = ab(a+b)$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \le \dfrac{1}{abc},\ \forall a>0,\ b>0,\ c>0.$

b) $\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1} \le 1,\ \forall a>0,\ b>0,\ c>0$ và $abc=1.$

BT 4. Cho $a,\ b,\ x,\ y \in \mathbb{R}.$ Chứng minh: $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \ge \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ (3) (gọi là bất đẳng thức Mincốpxki). Áp dụng (3) để chứng minh các bất đẳng thức sau hoặc tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) Chứng minh: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \ge \sqrt{5},\ \forall a \ge 0;\ b \ge 0$ và $a+b=1.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$ với $\begin{cases} a \ne 0 \\ b \ne 0 \end{cases}.$

Dạng toán 2: Các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Nhóm 1. Sử dụng tách cặp nghịch đảo cơ bản

- Tách cặp nghịch đảo là kỹ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy triệt tiêu đi biến số hoặc còn lại biến tương đồng với vế còn lại.
- Một số kỹ thuật tách ghép thường gặp:
  - $X+a+\dfrac{c}{X+b}=(X+b)+\dfrac{c}{(X+b)}+a-b\geq 2\sqrt{c}+a-b.$
  - $X+\dfrac{a}{X^2}=\dfrac{X}{2}+\dfrac{X}{2}+\dfrac{a}{X^2}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{X}{2}\cdot\dfrac{X}{2}\cdot\dfrac{a}{X^2}}=3.\sqrt[3]{\dfrac{a}{4}}.$
  - $X^2+\dfrac{a}{X}=X^2+\dfrac{a}{2X}+\dfrac{a}{2X}\geq 3\sqrt[3]{X^2\cdot\dfrac{a}{2X}\cdot\dfrac{a}{2X}}=3.\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{4}}$................

11. **(THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh năm 2017 – 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x-2}$ với $x>2.$

Lời giải tham khảo

Ta có $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x-2}=\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{8}{x-2}+1.$

Khi $x>2,$ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{x-2}{2};\ \dfrac{8}{x-2}$ ta được:

$f(x)=\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{8}{x-2}+1\geq$ ....

....

....

....

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5 đạt được khi $x=6.$

12. **(THPT An Dương Vương – Tp. Hồ Chí Minh năm 2017 – 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1.$

Lời giải của học sinh

....

....

....

....

....

Đáp số: $\min\limits_{(1;+\infty)} y=5/2$ khi $x=3.$ ....

13. (THPT Hoàng Hoa Thám – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2 + \dfrac{2}{x+2}$ với $x > -2$.

Lời giải của học sinh

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $\min\limits_{(-2;+\infty)} y = 2\sqrt{2} - 4$ khi $x = \sqrt{2} - 2$.

14. (THPT Trưng Vương – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{3}{x-2}$ với $x > 2$.

Lời giải của học sinh

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 20/3$ khi $x = 7/2$.

15. (THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh năm 2014 – 2015) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3x^2 + x + 1}{3x - 2}$ với $x > \dfrac{2}{3}\cdot$

Lời giải của học sinh

....

....

....

....

....

....

....

16. (THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh năm 2013 – 2014) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{(x+2)(x+8)}{x}$, với $x > 0$.

Lời giải của học sinh

....

....

....

17. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. Hồ Chí Minh năm 2014 – 2015) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 9x + \dfrac{3x+1}{x-1}$ với $x > 1$.

Lời giải của học sinh

....

....

....

18. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. Hồ Chí Minh năm 2014 – 2015) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x+4}{x} + \dfrac{3x-10}{x+2}$ với $x > 0$.

Lời giải của học sinh

....

....

....

....

19. (THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{4}{1-x} + \dfrac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

Ta có $y = \dfrac{4}{1-x} + \dfrac{1}{x} = \left(\dfrac{4}{1-x} - a\right) + \left(\dfrac{1}{x} - b\right) + a + b = \dfrac{4 - a + ax}{1-x} + \dfrac{1-bx}{x} + a + b$ và chọn $\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$

thì $y = \left(\dfrac{4x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x}\right) + 5 \overset{\text{Cauchy}}{\geq}$ ....

.... $\to \min\limits_{(0;1)} y = 9$ khi $x = 1/3$.

Cách khác: *Chứng minh lại BĐT Cauchy – Schwarz dạng* $\boxed{\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}} \Leftrightarrow \dfrac{x^2b + y^2a}{ab} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$

$\Leftrightarrow (x^2b + y^2a)(a+b) \geq ab(x+y)^2 \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0:$ *luôn đúng. Dấu* $" = " \Leftrightarrow bx = ay \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}\cdot$

Áp dụng: $y = \dfrac{4}{1-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2^2}{1-x} + \dfrac{1^2}{x} \geq \dfrac{(2+1)^2}{(1-x)+x} = 9$ *và dấu* $" = " \Leftrightarrow \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\cdot$

20. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. Hồ Chí Minh năm 2017 – 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

Đáp số: $\min\limits_{(0;1)} y = 3 + 2\sqrt{2}$ khi $x = \sqrt{2} - 1$.

21. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{1-5x}$ với $0 < x < \dfrac{1}{5}\cdot$

Đáp số: $\min\limits_{(0;\,1/5)} y = 20$ khi $x = 1/10$.

22. **(THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa – Tp. Hồ Chí Minh năm 2016 – 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{2-x}$ với $0 < x < 2$.

Đáp số: $\min\limits_{(0;2)} y = 4 + 2\sqrt{3}$ khi $x = 3 - \sqrt{3}$.

23. **(THPT Cần Thạnh – Tp. Hồ Chí Minh năm 2018 – 2019)** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{9}{2x-4} - \dfrac{32}{x}$, $\forall x \in (0;2)$.

Đáp số: $\max\limits_{(0;2)} y = -121/4$ khi $x = 16/11$.

24. Với $x>0,$ hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}\cdot$

Hướng dẫn: $y=mx+\dfrac{n}{x^2}=\dfrac{mx}{2}+\dfrac{mx}{2}+\dfrac{n}{x^2}\cdot$

$y=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{4}{x^2}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}3.\sqrt[3]{\dfrac{3x}{2}\dfrac{3x}{2}\dfrac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}.$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của y là $3\sqrt[3]{9}.$

Dấu " = " xảy ra khi $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}\cdot$

25. Với $x>0,$ hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5x+\dfrac{100}{x^2}\cdot$

26. Với $x>0,$ hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5x+\dfrac{15}{x^3}\cdot$

HD: $y=mx+\dfrac{n}{x^3}=\dfrac{mx}{3}+\dfrac{mx}{3}+\dfrac{mx}{3}+\dfrac{n}{x^3}\cdot$

27. Với $x>0,$ hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^2+\dfrac{4}{x}\cdot$

Hướng dẫn: $y=mx^2+\dfrac{n}{x}=mx^2+\dfrac{n}{2x}+\dfrac{n}{2x}\cdot$

Nhóm 2. Sử dụng thêm bớt để tìm giá trị lớn nhất cơ bản

28. Với $x\in\left[0;\dfrac{5}{2}\right],$ hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x(5-2x).$

Lời giải tham khảo

Áp dụng $a+b\geq 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leq\dfrac{(a+b)^2}{4}$

Ta có: $y=x(5-2x)=\dfrac{1}{2}\cdot\underbrace{(2x)}_{a}.\underbrace{(5-2x)}_{b}$

$\Rightarrow y\overset{\text{Cauchy}}{\leq}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{[(2x)+(5-2x)]^2}{4}=\dfrac{25}{8}\cdot$ Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\dfrac{25}{8}\cdot$ Dấu " = " xảy ra khi $2x=5-2x\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}\cdot$

29. Với $x\in\left[0;\dfrac{9}{5}\right],$ hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y=4x(9-5x).$

30. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền)** Tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = (2x-1)(5-3x)$, biết rằng $1/2 \le x \le 5/3$.

31. **(THPT Năng Khiếu)** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x(1-2x)^2$, biết rằng $0 < x < 1/2$.

32. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$.

Lời giải. Tập xác định $\mathscr{D} = [2;6]$.

Vì $y \ge 0 \Rightarrow y^2 = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)} \ge 4$.

$\Rightarrow y \ge 2 \Rightarrow \min y = 2$ khi $x = 2$ hoặc $x = 6$.

Ta lại có $y^2 = 4 + 2\sqrt{\underbrace{(x-2)}_{a}.\underbrace{(6-x)}_{b}}$

$\Rightarrow y^2 \le 4 + (x-2) + (6-x) = 8 \Rightarrow y \le 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \max y = 2\sqrt{2}$ khi $x - 2 = 6 - x \Leftrightarrow x = 4$.

Kết luận: $\min y = 2$ và $\max y = 2\sqrt{2}$.

33. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.

Đáp số: $\min y = 2,\ \max y = 2\sqrt{2}$.

34. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{6-x}$.

Đáp số: $\min y = 2,\ \max y = 2\sqrt{5}$.

35. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\sqrt{x+1} + 3\sqrt{6-x}$.

Đáp số: $\min y = 3\sqrt{7},\ \max y = \sqrt{238}$.

36. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}}{xy}\cdot$

37. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{xy}{\sqrt{(x-4)(y-1)}},\ \forall x > 4,\ y > 1.$

38. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1 - x^3}},\ \forall x \in (0;1).$

Ta có: $y = \dfrac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1^3 - x^3}} = \dfrac{(x^2 + x + 1) + 2(1 - x)}{\sqrt{1-x}.\sqrt{x^2 + x + 1}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

39. * Cho $a,\ b,\ c > 0.$ Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{16c^2}{a+b} \geq \dfrac{64c - a - b}{9}\cdot$ ***(Chuyên L.H. Phong)***

Nhóm 3. Ghép đối xứng

① Cho $X,\ Y,\ Z \geq 0$. Chứng minh: $X+Y+Z \geq A+B+C$.

Chứng minh: $\begin{cases} X+Y \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2A \\ Y+Z \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2B \\ Z+X \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2C \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} X+Y+Z \geq A+B+C.$

Tổng quát: $\begin{cases} mX+nY+pZ \geq (m+n+p)A \\ mY+nZ+pX \geq (m+n+p)B \\ mZ+nX+pY \geq (m+n+p)C \end{cases}$

$\overset{\oplus}{\Rightarrow}\ (m+n+p)(X+Y+Z) \geq (m+n+p)(A+B+C).$

② Cho $X,\ Y,\ Z \geq 0$. Chứng minh: $XYZ \geq ABC$.

Nếu chứng minh được: $\begin{cases} XY \geq A^2 \\ YZ \geq B^2 \\ ZX \geq C^2 \end{cases} \overset{\textit{nhân}}{\Rightarrow}\ XYZ \geq \sqrt{A^2B^2C^2} = \left|ABC\right| \geq ABC.$

40. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \geq 0$ ta luôn có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Ta có: $\begin{cases} a^2+b^2 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \\ b^2+c^2 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{b^2c^2} = 2bc \\ c^2+a^2 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{c^2a^2} = 2ac \end{cases}$

$\overset{\oplus}{\Rightarrow}\ 2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow\ a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ (đpcm).

Dấu " = " xảy ra khi $a=b=c \geq 0$.

41. Chứng minh với mọi $a,\ b,\ c \geq 0$ thì ta luôn có: $ab+bc+ca \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

42. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ và khác 0 thì $\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\cdot$

43. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $4a^2+9b^2+5 \geq 4(a+3b)$.

(**Lưu ý**: $\sqrt{x^2} = |x| \geq x$).

44. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \ge 0$ thì ta có: $a^3 + b^3 + c^3 \ge a^2b + b^2c + c^2a.$

45. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \ge 0$ thì ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \ge a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$

Suy luận câu 47. *Nhìn vế phải thấy tỉ lệ số mũ của a^2b^1 tương ứng là $2:1$ (tương tự $b^2c,\ c^2a$) nên khi sử dụng Cauchy cho 3 số không âm thì phải sử dụng: "2 con a^3 và 1 con b^3, tức $a^3 + a^3 + b^3 \ge 3a^2b$.*

Suy luận câu 48. *Tỉ lệ số mũ của $a\sqrt{bc}$ là $1:1/2:1/2$ hay $2:1:1$ nên ghép hai số a^2, một b^2 và một c^2.*

46. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c > 0$ thì $\dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{c} + \dfrac{c^3}{a} \ge ab + bc + ca.$

47. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c > 0$ thì ta có: $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \ge \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}.$

48. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \ge 0$ thì $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc.$

49. Chứng minh rằng với $a \ge 0,\ b \ge 0$ thì ta luôn có: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \ge (1 + \sqrt[3]{abc})^3.$

50. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \geq 0$ ta có $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$

Ta có: $\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ c+a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases}$ và nhân vế theo vế

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$

Dấu "$=$" xảy ra khi $a = b = c \geq 0.$

51. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c > 0$ ta luôn có $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 16\sqrt{2}abc.$

52. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \geq 0$ ta có $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$

53. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \geq 0$ ta luôn có $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$

54. Chứng minh rằng với mọi $a > 0,\ b > 0$ ta có $(a+b+2).\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right) \geq 4.$

HD: $a+b+2 = (a+1)+(b+1).$

55. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c > 0$ thì ta có $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right) \geq \dfrac{9}{2}\cdot$

HD: $2.(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a).$

56. Cho $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$ Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ **(BĐT Nesbitt)**

Giả sử $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b+c}+1+\dfrac{b}{c+a}+1+\dfrac{c}{a+b}+1 \geq \dfrac{3}{2}+3$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{b+c}+\dfrac{a+b+c}{c+a}+\dfrac{a+b+c}{a+b} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right) \geq 9$

$\Leftrightarrow \left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right) \geq 9$

Nhóm 4. Kỹ thuật Cauchy ngược dấu

Một số trường hợp nếu đánh giá trực tiếp bằng Cauchy thì sẽ đưa về dạng $A \le P \ge B$: không nói lên được điều gì ?! Khi đó, ta biến đổi và áp dụng BĐT Cauchy ngược dấu sẽ tránh được điều này. Chẳng hạn cần chứng minh: $\dfrac{a}{1+b^2} \ge ?!$. Nếu áp dụng Cauchy dưới mẫu số được $\dfrac{a}{1+b^2} \le \dfrac{a}{2b}$ sẽ không đạt yêu cầu. Khi đó cần thêm trước nó là dấu "–".

Tức biến đổi $\dfrac{a}{1+b^2} = \dfrac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{1+b^2} \overset{Cauchy}{\ge} a - \dfrac{ab}{2}$ sẽ được dấu mong muốn.

Thông thường, sau khi sử dụng kỹ thuật ngược dấu sẽ đưa bài toán bất đẳng thức hoán vị về dạng bất đẳng thức đối xứng và giản lượt đi mẫu số, giúp ta dễ dàng xử lý hơn so với để nguyên thủy.

57. Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+z^2} + \dfrac{z}{1+x^2}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\dfrac{x}{1+y^2} = x - \dfrac{xy^2}{1+y^2} \overset{\text{Cauchy}}{\ge} x - \dfrac{xy^2}{2\sqrt{1.y^2}} = x - \dfrac{xy}{2}$ (1)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1.$

Tương tự $\dfrac{y}{1+z^2} \ge y - \dfrac{yz}{2}$ (2) và $\dfrac{z}{1+x^2} \ge z - \dfrac{zx}{2}$ (3).

Lấy $(1)+(2)+(3) \Rightarrow P \ge x+y+z - \dfrac{xy+yz+zx}{2} = 3 - \dfrac{xy+yz+zx}{2}$.

Do $3^2 = (x+y+z)^2 = \overbrace{x^2+y^2+z^2}^{\ge xy+yz+zx} + 2(xy+yz+zx) \overset{Cauchy}{\ge} 3(xy+yz+zx)$

Suy ra: $xy+yz+zx \le 3 \Rightarrow -\dfrac{xy+yz+zx}{2} \ge -\dfrac{3}{2}$ nên $P \ge 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

58. Cho các số thực không âm $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x^2}{x+2y^2} + \dfrac{y^2}{y+2z^2} + \dfrac{z^2}{z+2x^2}$.

59. Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{x+2y^3}+\dfrac{y^2}{y+2z^3}+\dfrac{z^2}{z+2x^3}\cdot$

60. Cho các số thực không âm $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x+1}{y^2+1}+\dfrac{y+1}{z^2+1}+\dfrac{z+1}{x^2+1}\cdot$

Nhóm 5. Kỹ thuật sử dụng trọng số để tìm điểm rơi

61. Cho ba số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}.$

Phân tích: *Dự đoán dấu* $"="$ *xảy ra khi* $a=b=c=2.$ *Do chỉ số căn là* 3 *nên cần thêm* 2 *hạng tử tích có giá trị bằng nhau là hằng số dạng* $\alpha=\beta=a+3b=2+3.2=8$ *và có lời giải sau:*

Ta có: $\sqrt[3]{a+3b}=\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{8.8.(a+3b)}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{8+8+a+3b}{12}\cdot$

Tương tự: ....

62. **(HSG Sơn La)** Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1.$ Chứng minh:

$$P = \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \ge \frac{3}{4}\cdot$$

Phân tích: *Bài toán có tính đối xứng nên dấu đẳng thức sẽ xảy ra tại tâm, tức ba biến bằng nhau. Hay* $\begin{cases} x = y = z \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = x = 1.$ *Các cụm trong P có dạng phân số nên ta sẽ nghĩ đến việc tách cặp nghịch đảo bằng đối số để áp dụng BĐT Cauchy nhằm triệt tiêu đi mẫu số dạng:*

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{\beta} + \frac{1+z}{\beta} \overset{\text{Cauchy}}{\ge} \ldots..\ \ ???! \text{ và lúc này cần tìm } \beta = ????$$

Xét dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)} = \dfrac{1+y}{\beta} = \dfrac{1+z}{\beta} \\ x = y = z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1^3}{2.2} = \dfrac{2}{\beta} \Leftrightarrow \beta = 8$ *và có lời giải như sau:*

Ta có: $\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \dfrac{1+y}{8} + \dfrac{1+z}{8} \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 3\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}\cdot\dfrac{1+y}{8}\cdot\dfrac{1+z}{8}} = \dfrac{3}{4}x.$

Tương tự:

63. Cho $x, y, z > 0.$ Chứng minh: $\dfrac{x^5}{y^2} + \dfrac{y^5}{z^2} + \dfrac{z^5}{x^2} \ge x^3 + y^3 + z^3.$

Phân tích và lời giải

Dự đoán dấu " = " xảy ra khi $x = y = z$ *thì* $\dfrac{x^5}{y^2} = \dfrac{y^5}{z^2} = \dfrac{z^5}{x^2} = x^3 = y^3 = z^3.$

Nên cần chọn $\alpha,\ \beta$ *sao cho:* $\alpha.\dfrac{x^5}{y^2} + \beta.y^3 \ge (\alpha+\beta).\sqrt[\alpha+\beta]{\dfrac{x^{5\alpha}}{y^{2\alpha}}.y^{3\beta}} = (\alpha+\beta)x^3.$

Từ đó chọn được $\alpha = 3;\ \beta = 2$ *và có lời giải sau:*

Ta có: $\dfrac{x^5}{y^2} + \dfrac{x^5}{y^2} + \dfrac{x^5}{y^2} + y^3 + y^3 \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 5.\sqrt[5]{\dfrac{x^5}{y^2}\cdot\dfrac{x^5}{y^2}\cdot\dfrac{x^5}{y^2}\cdot y^3\cdot y^3} = 5x^3$

Tương tự:

64. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn: $x+y+z=31$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=2x^2+3y^2+5z^2$.

Phân tích và lời giải

*Bài toán không có tính đối xứng nên có thể **dự đoán dấu** $=$ xảy ra **bằng phương pháp cân bằng hệ số**.*

Giả sử giá trị nhỏ nhất đạt được tại: $x=a;\ y=b;\ z=c$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $x^2+a^2\ge 2ax;\ y^2+b^2\ge 2by;\ z^2+c^2\ge 2cz$ *nên đánh giá* P *là*

$P=2x^2+3y^2+5z^2\ge 2(2ax+3by+5cz)-(2a^2+3b^2+5c^2)$.

Mong muốn ta lúc này là: $2ax+3by+5cz=m(x+y+z)=31.m=$ *hằng số.*

Cân bằng hệ số ta được: $\begin{cases}2a=3b=5c=m\\ x=a;\ y=b;\ z=c\\ x+y+z=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=3b=5c=m\\ a+b+c=31\end{cases}$. *Giải hệ được:* $\begin{cases}m=30\\ a=15\\ b=10\\ c=6\end{cases}$.

Từ đó có lời giải sau: ....

....

....

....

....

....

....

65. Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}+\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}+\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}.$$

Phân tích và lời giải

Ta cần sử dụng Cauchy để khử căn thức. Do có thể dự đoán giá trị nhỏ nhất đạt được tại $a=b=c$, nên cần thêm đối số sao cho đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là biến đổi:

$$\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}=\sqrt{\frac{6a^2}{3a.(2b+2c-a)}}=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3a.(2b+2c-a)}}\overset{Cauchy}{\ge}\frac{a\sqrt{6}}{\dfrac{3a+(2b+2c-a)}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{a+b+c}.$$

Tương tự: ....

....

....

....

....

....

....

66. Cho $x,\ y,\ z$ là các số dương thoả mãn: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\cdot$$

Phân tích và lời giải

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản: $\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right),\ \forall a,\ b>0$ liên tiếp hai lần ta được:

$$\frac{1}{2x+(y+z)}\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+z}\right)\le\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\qquad(1)$$

Tương tự: ....

....

....

....

BÀI TẬP VỀ NHÀ

BT 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $\dfrac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\dfrac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\dfrac{\sqrt{1+z^3+x^2}}{zx}\ge3\sqrt{3},\ \forall x,\ y,\ z>0$ và $xyz=1$.

b) $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{b}{b^2+c^2}+\dfrac{c}{a^2+c^2}\le\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương.

BT 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh: $abc\ge(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

b) $abc\le\dfrac{1}{8},\ \forall a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ và $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\ge2$.

c) $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz,\ \forall\begin{cases}x>0,\ y>0,\ z>0\\x+y+z=xyz\end{cases}$.

BT 3. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) Cho $x,\ y,\ z>0$. Chứng minh: $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\ge\dfrac{x+y+z}{2}\cdot$

b) Cho $\begin{cases}x,\ y,\ z>0\\xyz=1\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{z^2}+\dfrac{z^3}{x^2}\ge3$.

c) Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh: $\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3a}\le6$.

d) Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\le\sqrt[3]{3}$.

e) Cho $x,\ y\ge1$. Chứng minh: $x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\le\dfrac{xy}{2}\cdot$

a) Cho $x,\ y,\ z\ge1$. Chứng minh: $2xy\sqrt{z-1}+2yz\sqrt{x-1}+2zx\sqrt{y-1}\le3xyz$.

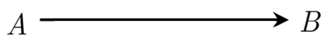
Chương 1 VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VÉCTƠ

§ 1 – 2 – 3. VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VÉCTƠ

☆☆☆

① **Các định nghĩa mở đầu**

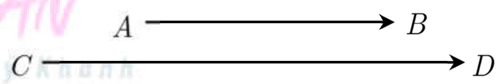
- Véctơ là 1 đoạn thẳng có hướng:
  - ○ Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.
  - ○ Hướng từ gốc đến ngọn, gọi là hướng của véctơ.
  - ○ Độ dài của véctơ là độ dài đoạn thẳng xác định bởi điểm đầu và điểm cuối của véctơ.



- Véctơ có gốc A, ngọn B được ký hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của véctơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véctơ. Ngoài ra, véctơ còn được kí hiệu bởi một chữ c¸i in thường phía trên có mũi tên như $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{u},...$ độ dài của $\vec{a}$ kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.
- Véctơ không, kí hiệu $\vec{0}$ có:
  - ○ Điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau.
  - ○ Độ dài bằng 0.
  - ○ Hướng bất kỳ.
- Hai véctơ cùng phương khi chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song nhau: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB \parallel CD. \\ A,\ B,\ C,\ D:\ \text{thẳng hàng.} \end{array}\right.$

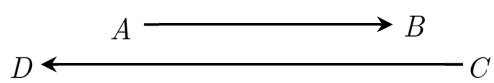
- Hướng của hai véctơ: Hai véctơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Ta chỉ xét hướng của hai véctơ khi chúng cùng phương.
  - ○ Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng, ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \circ\ AB \,\|\, CD. \\ \circ\ \text{Hai tia } AB,\ CD \text{ cùng hướng.} \end{cases}$$



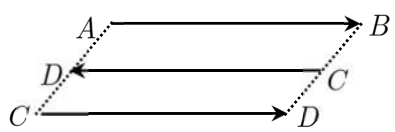
  - ○ Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng, ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \circ\ AB \,\|\, CD. \\ \circ\ \text{Hai tia } AB,\ CD \text{ ngược hướng.} \end{cases}$$



- Hai véctơ được gọi là bằng nhau khi chúng cùng hướng (cùng phương, cùng chiều) và cùng độ dài.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng hướng.} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \text{ hay } AB = CD. \end{cases}$$



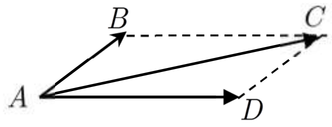
- Hai véctơ được gọi là đối nhau khi chúng ngược hướng và cùng độ dài.

② **Các phép toán trên véctơ**

a) Tổng của hai véctơ

- Hệ thức Chasles (quy tắc ba điểm hay quy tắc tam giác):
  - ○ Với ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$

- Quy tắc ba điểm còn được gọi là hệ thức Chasles dùng để cộng các véctơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều véctơ như sau:
$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$



- Quy tắc hình bình hành
  - Cho hình bình hành $ABCD$ thì $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\end{array}\right.$.
  - Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các véctơ chung gốc.
- Tính chất: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

b) Hiệu hai véctơ

- Véctơ đối: $\left\{\begin{array}{l}\circ \text{ Véctơ đối của véctơ } \vec{a}, \text{ kí hiệu là } -\vec{a}. \\ \circ \text{ Tổng của hai véctơ đối là véctơ } \vec{0}: \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.\end{array}\right.$
- Hiệu hai véctơ: với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

c) Tích của một số với một véctơ

- Định nghĩa: cho một số thực $k \neq 0$ và một véctơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khi đó:

  Tích $k.\vec{a}$ là một véctơ có $\left\{\begin{array}{l}k.\vec{a}: \text{ cùng hướng với } \vec{a} \text{ khi } k > 0. \\ k.\vec{a}: \text{ ngược hướng với } \vec{a} \text{ khi } k < 0.\end{array}\right.$
- Tính chất: $k.(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b}$, $(k+h).\vec{a} = k.\vec{a} + h.\vec{a}$ $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$, $0.\vec{a} = \vec{0}$.
- Điều kiện để hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là $\exists\ k \in \mathbb{R}$ để $\vec{a} = k.\vec{b}$.
- Điều kiện để 3 điểm A, B, C thẳng hàng là $\exists\ k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

③ Tính chất trung điểm và trọng tâm tam giác

a) Tính chất trung điểm

Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ thì ta luôn có: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

b) Tính chất trọng tâm

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ, khi đó ta luôn có:
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

④ Biểu thị một véctơ thông qua hai véctơ không cùng phương

Cho hai véctơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi véctơ $\vec{c}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số thực m và n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

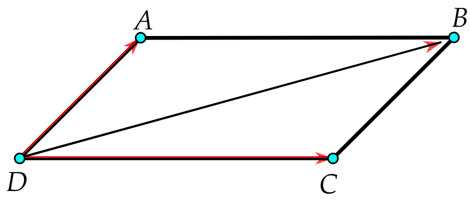
Dạng toán 1: Chứng minh đẳng thức véctơ

☆☆☆

① **Quy tắc ba điểm**: Chèn C vào véctơ $\overrightarrow{AB}$

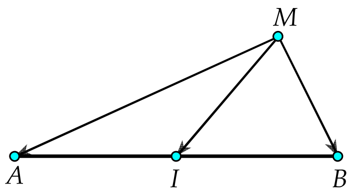
- Cộng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ (chèn giữa). • Trừ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ (C cuối – C đầu)

② **Quy tắc hình bình hành**: Cho hình bình hành $ABCD$ (quy tắc đường chéo hbh):



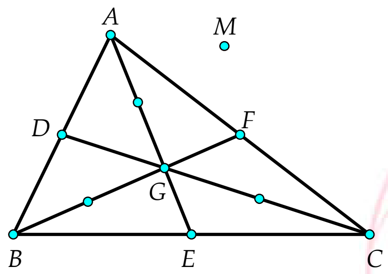
$$\boxed{\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}.}$$

③ **Tính chất trung điểm**: Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ.



$$\boxed{2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.}$$

④ **Tính chất trọng tâm**: G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ.



- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$

Cần nhớ: G chia AE thành ba đoạn bằng nhau, tức có: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 1. Cho 5 điểm $A,\ B,\ C,\ D,\ E$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}.$

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}.$

Lời giải tham khảo

Cách 1. Biến đổi vế trái theo vế phải

$$\begin{aligned}
\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} \\
&= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \\
&= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}) \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = \text{ vế phải (đpcm).}
\end{aligned}$$

Cách 2. Biến đổi vế phải theo vế trái.

$$\begin{aligned}
\text{Vế phải} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} \\
&= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{EA} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \text{ vế trái (đpcm).}
\end{aligned}$$

Cách 1. ....

Cách 2. ....

Cách 3. Giả sử ta luôn có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{ED})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}$: luôn đúng.

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$ (đpcm)

Cách 3. ....

BT 2. Cho các điểm bất kì. Hãy chứng minh đẳng thức:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}.$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}.$

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$

e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}.$

f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}.$

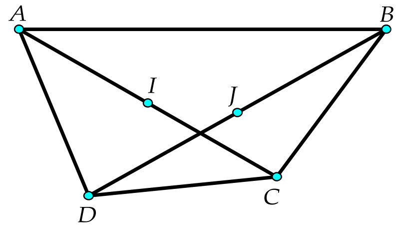
g) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}.$

h) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}.$

i) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}.$

j) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.$

BT 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi $I,\ J$ lần lượt là trung điểm của hai đường chéo $AC,\ BD$.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$.

Vế trái $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB})+(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD})$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{IJ}$.

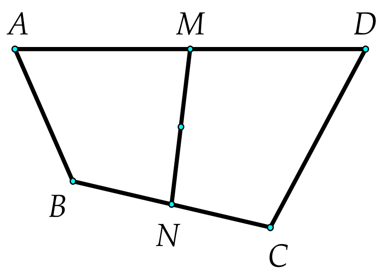
Theo câu a), ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ (1)

Cũng theo câu a), ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=$

(2)

Cộng vế theo vế, ta được:

BT 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M,\ N$ theo thứ tự là trung điểm của các đoạn $AD,\ BC$.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

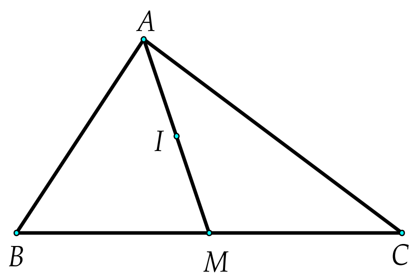
Ta có: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}$

$=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN})$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MN}$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

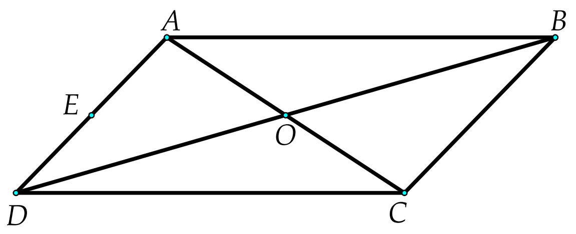
BT 5. Cho tam giác ABC, gọi M trung điểm của BC và I trung điểm của AM.



a) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Với O điểm bất kì. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

BT 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD. Chứng minh:

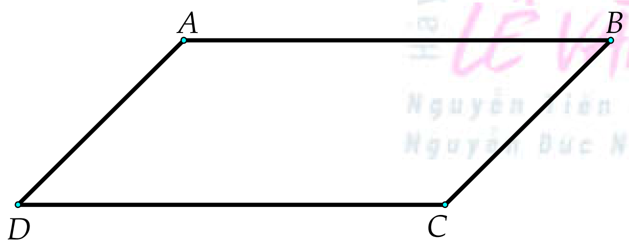


a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}$.

BT 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN=2MN$. Chứng minh rằng:

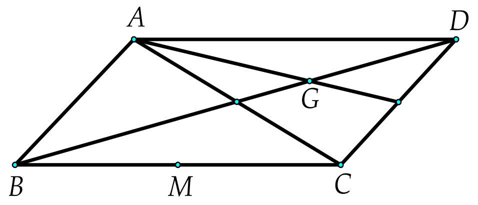


a) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}$.

b) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$.

c) $3\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}$.

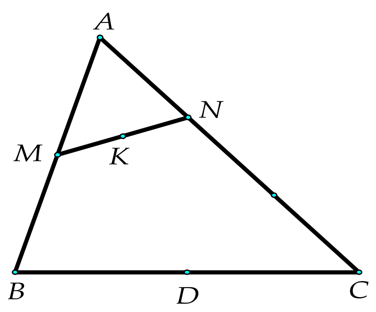
BT 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có M trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ACD.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MG} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$

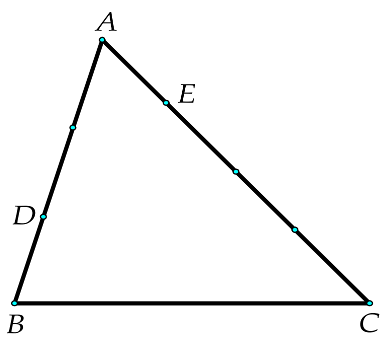
BT 9. Cho tam giác ABC có D, M lần lượt là trung điểm của BC và AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$ và gọi K là trung điểm của MN.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KD} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

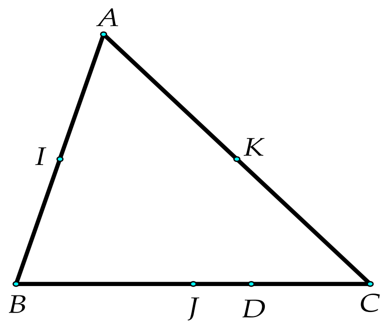
BT 10. Cho tam giác ABC. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm của DE và I là trung điểm của BC.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AC}.$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

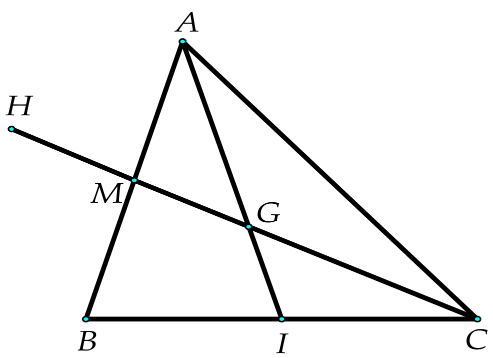
BT 11. Cho tam giác ABC với $I,\ J,\ K$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,\ BC,\ CA$. Gọi D thuộc đoạn BC sao cho $3DB = 2BC$ và M là trung điểm của AD.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

BT 12. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G.



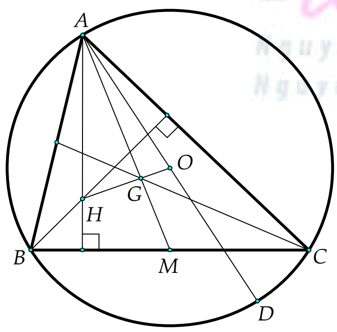
a) Chứng minh: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

☛ *Kinh nghiệm:*

b) Chứng minh: $\overrightarrow{HB} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

BT 13. Cho tam giác ABC gọi $G,\ H,\ O$ lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC.



a) Chứng minh: $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

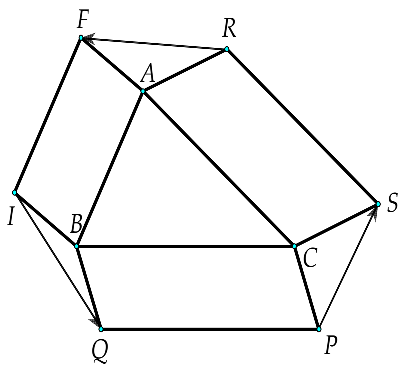
c) Chứng minh: $\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}$.

d) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.	e) Chứng minh: $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
....	....

f) Chứng minh: $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

....

BT 14. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

Hình vẽ	***Lời giải tham khảo***
	Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{RF}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AF} & (1)\\ \overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ} & (2)\\ \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS} & (3)\end{cases}$ Cộng vế theo vế của $(1),(2),(3)$, ta được: $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\underbrace{(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})}_{\vec{0}}$ Suy ra: $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$ (đpcm).

BT 15. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

Hình vẽ	a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$.
	....

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

....

BT 16. Chứng minh rằng các tam ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi đẳng thức sau được thỏa: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Lời giải tham khảo

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Tương tự, G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên ta có: $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$.

Do hai tam giác tam ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm $\Rightarrow G\equiv G'\Rightarrow \overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}&=(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'})\\&=-\underbrace{(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})}_{\vec{0}}+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Điều kiện cần và đủ để ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

☞ **Nhận xét**. Để chứng minh hai điểm A và B trùng nhau, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

BT 17. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm ?

Hình vẽ	***Bài làm của học sinh***
	....

BT 18. Cho tam giác ABC và các điểm I, J, K xác định bởi: $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JA}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

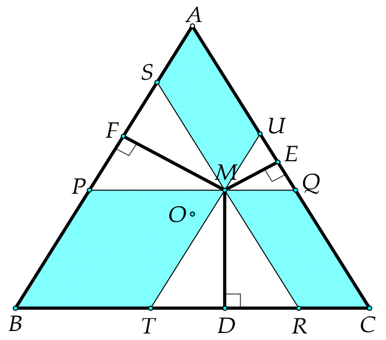
Hình vẽ	***Bài làm của học sinh***
	....

BT 19. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ BC,\ CD,\ DA$. Chứng minh hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Hình vẽ	Bài làm của học sinh
	....

BT 20. * Cho tam giác ABC đều tâm O và điểm M nằm bên trong tam giác. Gọi $D,\ E,\ F$ là hình chiếu của M trên $BC,\ AC,\ AB$. Chứng minh: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Hình vẽ | **Học sinh đọc & bổ sung lời giải**



Từ điểm M dựng lần lượt các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác (như hình vẽ), tức: $PQ \parallel BC,\ SR \parallel AC,\ TU \parallel AB$.

$\Rightarrow \begin{cases} BP \parallel TM \\ PM \parallel BT \end{cases} \Rightarrow BPMT$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}$.

Tương tự $CRMQ,\ ASMU$ là các hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA}$.

Ta có: $\widehat{PBT}=\widehat{MTR}=\widehat{QCR}=\widehat{MRT}=60^\circ$.

Suy ra tam giác MTR là tam giác đều nên MD là trung tuyến $\Rightarrow D$ là trung điểm của đoạn TR

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MR}$ (1)

Tương tự: ....

....

Suy ra: $2\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MQ}$ (2)

Tương tự: ....

....

Suy ra: $2\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MS}$ (3)

Ta lại có O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm bất kỳ nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}$.

Cộng $(1),\ (2),\ (3) \Rightarrow 2\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MS}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF})=(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MQ})+(\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MS})$

....

....

....

Dạng toán 2: Tìm môđun (độ dài) véctơ

☆☆☆

Phương pháp: Để tính $\left|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d}\right|$, ta thực hiện theo hai bước sau:

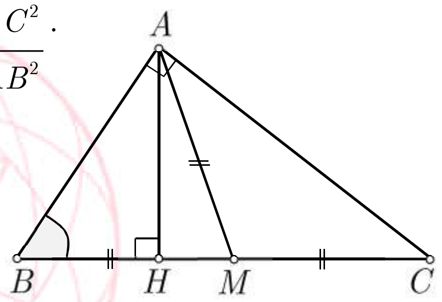
- **Bước 1**. Biến đổi và rút gọn biểu thức véctơ $\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d} = \vec{v}$ dựa vào qui tắc ba điểm, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,… sao cho $\vec{v}$ đơn giản nhất.
- **Bước 2**. Tính độ dài (môđun) của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

Một số kiến thức hình học phẳng thường được sử dụng

$+$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh} \times \sqrt{3}}{2}$. $\quad +$ Đường chéo hình vuông $=$ cạnh$\times\sqrt{2}$.

Cho tam giác ABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

$+$ Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ \bullet\ AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \\ \bullet\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \end{cases}$.



$+$ Trung tuyến: $AM = \dfrac{1}{2}BC$.

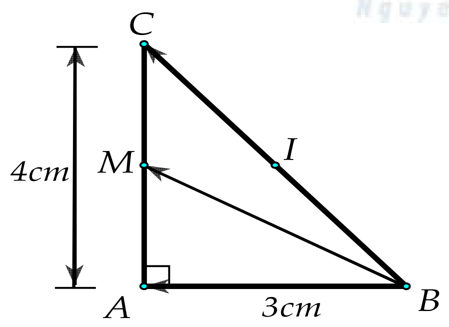
$+$ $AB^2 = BH.BC$ và $AC^2 = CH.CB$.

$+$ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB.HC$.

$+$ $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \dfrac{AC}{BC}$; $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \dfrac{AB}{BC}$; $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{\text{đối}}{\text{kề}} = \dfrac{AC}{AB}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 21. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3(\text{cm})$, $AC = 4(\text{cm})$. Gọi I là trung điểm của BC. Xác định và tính độ dài các véctơ:



a) $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải tham khảo

Gọi M là trung điểm của AC, ta có:

$\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \left|2\overrightarrow{BM}\right| = 2\left|\overrightarrow{BM}\right| = 2BM$.

Ta có: $MA = 2 \xrightarrow{\text{Pitago: } \Delta AMB} MB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Suy ra: $\left|\vec{u}\right| = 2BM = 2\sqrt{13}$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

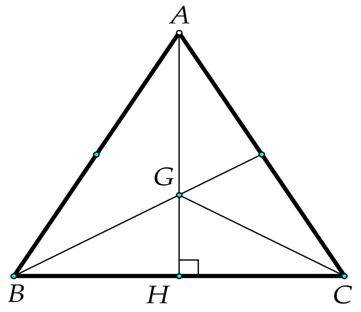
....
....
....
....

c) $\vec{w} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

....
....
....
....

d) $\vec{x} = 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CA}$.

BT 22. Cho tam giác ABC đều cạnh a, gọi G là trọng tâm tam giác và H là trung điểm BC. Tính:



a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

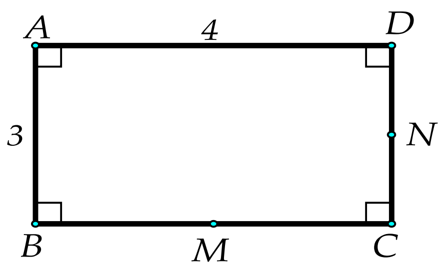
b) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

c) $\left|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}\right|$.

d) $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right|$.

e) $\left|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}\right|$.

BT 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3,\ BC = 4$. Gọi $M,\ N$ là trung điểm BC và CD. Tính:



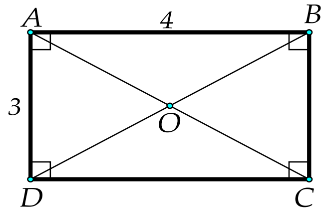
a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}\right|$

$=$

b) $\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right|$.

BT 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O và có $AB = 4,\ AD = 3.$ Gọi $M,\ N$ là các điểm tùy ý. Tính:



☛ ***Kinh nghiệm***: *Tính tổng môđun của véctơ hai đường chéo → dời về tâm O.*

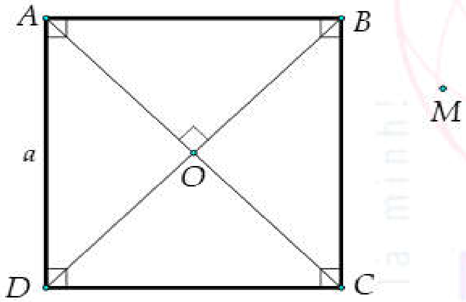
a) $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|.$

b) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|.$

☛ ***Kinh nghiệm***: *Với M bất kỳ, ta cần tách **đồng hệ số** và **sử dụng trừ** để làm mất đi điểm M tùy ý. Tức:*

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) =$

BT 25. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O, lấy M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng các véctơ sau không đổi và tính độ dài của chúng:



a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}.$

☛ ***Kinh nghiệm***: *Đưa về véctơ cùng gốc.*

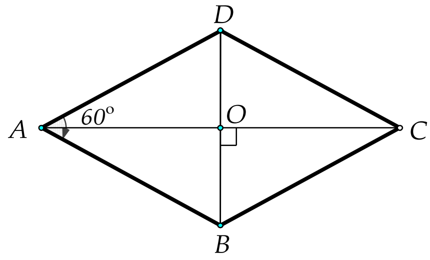
b) $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}.$

c) $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}.$

d) $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}.$

e) $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.$

BT 26. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tính:

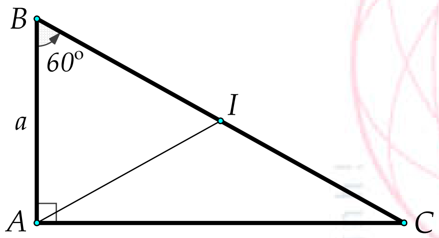


a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right|$.

c) $\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}\right|$.

BT 27. Cho tam giác ABC vuông tại A, có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính độ dài các véctơ sau:



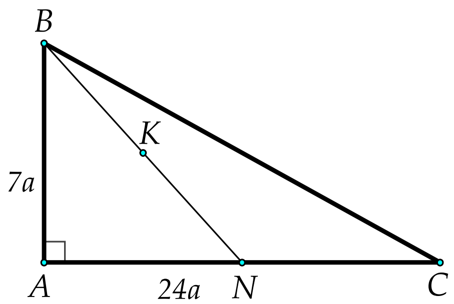
a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{d} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}$.

BT 28. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 7a$, $AC = 24a$. Gọi N và K lần lượt là trung điểm cạnh AC và BN.

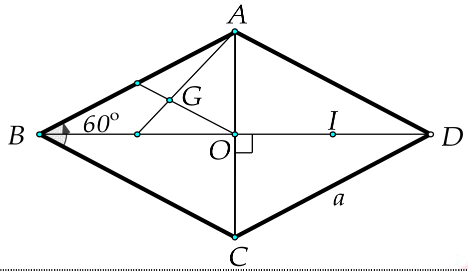


a) Chứng minh: $4\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

c) Tính $\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

BT 29. Cho hình thoi $ABCD$ cố định có tâm O, cạnh bằng a và góc $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi I là trung điểm của đoạn DO và G là trọng tâm tam giác ABO.

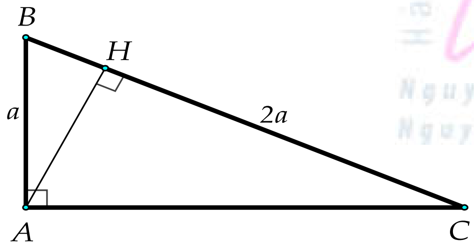


a) Tính: $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right|$.

c) Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

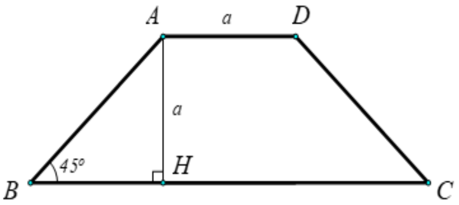
BT 30. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH, $AB=a$, $HC=2a$, $(a>0)$.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right|$.

BT 31. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AD = a$ và đường cao $AH = a$, góc $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Hãy tính: $\left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right|$?



BT 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, G là trọng tâm tam giác ABD.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right|$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}\right|$.

BT 33. Cho tam giác ABC cân tại A, có $AB = 4$, $BC = 6$. Gọi AM, BN, CK lần lượt là trung tuyến của ΔABC và G là trọng tâm.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right|$.

BT 34. Cho hình bình hành $ABCD$, có tam giác ABC vuông tại C, $AD = 8a$, $AC = 15a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD và AD.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{MA}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{BD} - 2.\overrightarrow{CN} = 2.\overrightarrow{AM}$.

c) Tính: $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN}\right|$.

BT 35. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, E là trung điểm của GD, F là trung điểm BC và M là điểm tùy ý.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{ME}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$.

c) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}\right|$.

Dạng toán 3: Phân tích véctơ – Chứng minh thẳng hàng – Song song

☆☆☆

① **Phân tích véctơ** (tính một véctơ theo 2 véctơ không cùng phương):

✍ **Phương pháp**: Dựa vào nội dung định lý: "Cho trước 2 véctơ $\vec{u},\ \vec{v},\ (\vec{u},\ \vec{v} \neq \vec{0})$ không cùng phương. Với mọi véctơ $\vec{w}$ bao giờ cũng tìm được 1 cặp số thực $\alpha,\ \beta$ duy nhất sao cho: $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$". Khi đó ta có hai hướng giải quyết:

— **Hướng 1**. Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển véctơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm, hiệu hai véctơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ……

— **Hướng 2**. Từ giả thiết lập được mối quan hệ véctơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm, hiệu hai véctơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ……

② **Chứng minh 3 điểm thẳng hàng** (cùng phương, cùng gốc).

✍ **Phương pháp**: Để chứng minh $A,\ B,\ C$ thẳng hàng, ta chứng minh $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}\quad (1)$. Để nhận được (1), ta có thể lựa chọn một trong hai hướng sau:

— **Hướng 1**. Sử dụng các qui tắc biến đổi véctơ.

— **Hướng 2**. Tính véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp véctơ trung gian.

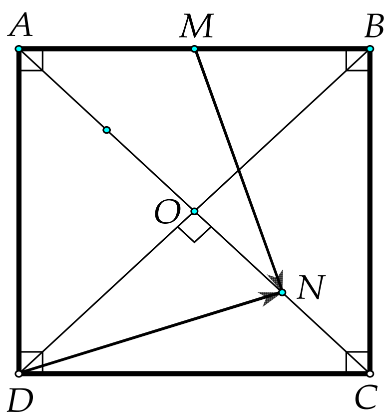
Lưu ý: Nếu không dễ nhận thấy k trong đẳng thức véctơ $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$, ta nên biểu thức phân tích véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số thực k.

③ **Chứng minh song song** (cùng phương, không cùng gốc).

✍ **Phương pháp**: Để chứng minh $AB \parallel DC$, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{DC}$.

Nhóm 1. Phân tích véctơ theo hai véctơ không cùng phương

BT 1. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M trung điểm của cạnh AB, N là điểm sao cho $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Biểu thị (phân tích) véctơ $\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{DN}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Lời giải tham khảo

• Phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$:

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

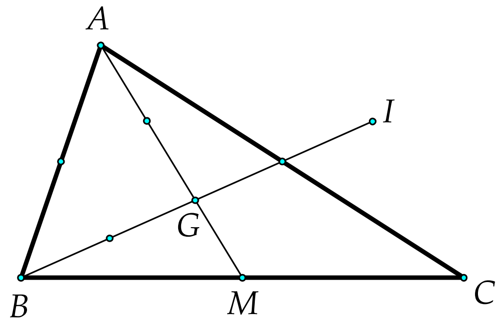
$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

• Phân tích $\overrightarrow{DN}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$:

Ta có: $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

☛ **Bình luận**. *Bản chất của việc phân tích là biễu diễn véctơ này theo véctơ đã chỉ định (đã làm ở dạng 1)*

BT 2. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm của tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm của BC.



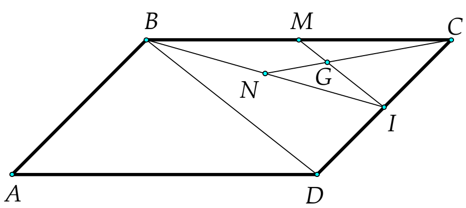
a) Phân tích $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

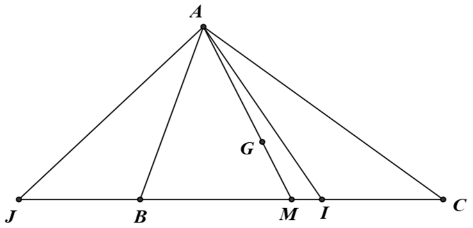
c) Phân tích $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

d) Phân tích $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AI}$.

BT 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm của tam giác BCI. Hãy phân tích các véctơ $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.



BT 4. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$. Gọi J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.



Vì I thuộc đoạn BC và $2CI = 3BI$ $\Rightarrow 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Tương tự J nằm ngoài đoạn BC và $5JB = 2JC$ nên B nằm giữa C, J và $5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$.

a) Phân tích các véctơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ ....

Tương tự: $5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ})$

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

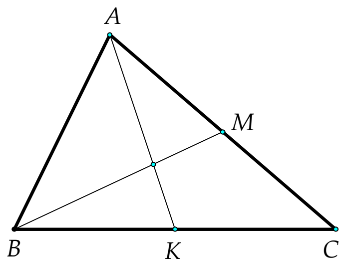
b) Gọi G là trọng tâm tâm giác ABC. Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Theo câu a), ta có: $\begin{cases} \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \\ \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} \\ 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \dfrac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{cases}$

Gọi M là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$=$ ....

BT 5. Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC.



Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK}$ (1)

Tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$

a) Phân tích các véctơ $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MB}$ (2)

Lấy $(1) - (2) \Rightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

....

b) Phân tích các véctơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

....

....

....

....

....

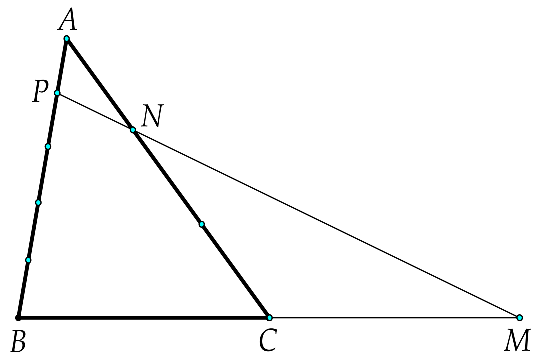
....

....

....

Nhóm 2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

BT 6. Cho tam giác ABC. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC},\ \ \overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA},$ $\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA}.$ Chứng minh các điểm $M,\ N,\ P$ thẳng hàng ?



Hướng dẫn: *Phân tích* $\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{MP}$ *theo* $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}.$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AC}$ (1)

Tương tự: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{BA}$

$= 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ (2)

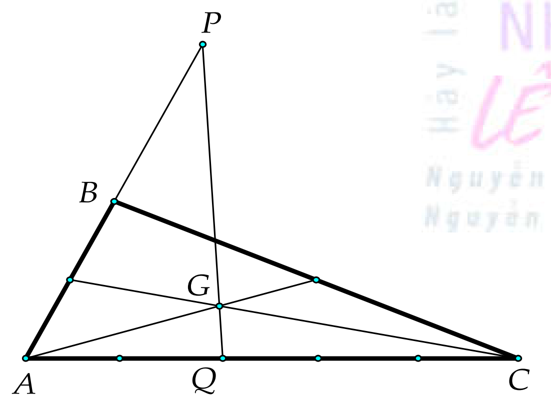
Từ $(1),(2) \Rightarrow$ ....

....

....

....

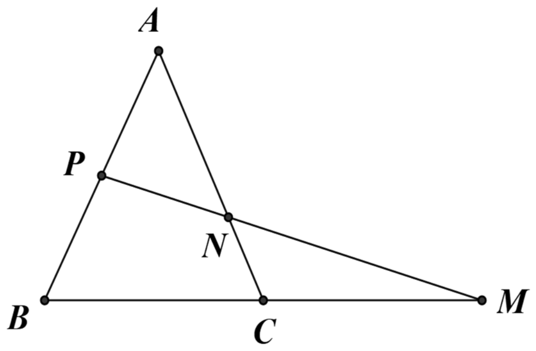
BT 7. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm $P,\ Q$ thỏa mãn: $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB},\ 3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}.$ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh ba điểm $P,\ Q,\ G$ thẳng hàng ?



Hướng dẫn: *Tính* $\overrightarrow{GP},\ \overrightarrow{GQ}$ *theo hai véctơ* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}.$

....

BT 8. Cho tam giác ABC và các điểm $M,\ N,\ P$ được xác định bởi $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0},$ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}.$



a) Xác định các điểm $M,\ N,\ P$ và vẽ hình.

Ta có $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}\Rightarrow P$ là trung điểm của đoạn AB.

Ta có: $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}-2(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC}$, do đó C là trung điểm BM.

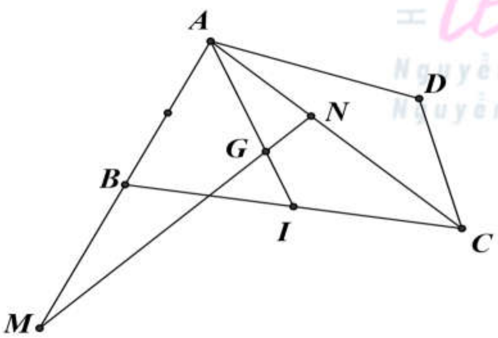
Ta có: $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}\Rightarrow N$ nằm giữa $A,\ C$ và chia đoạn AC thành 3 phần, đoạn AN chiếm 2 phần.

Suy ra: $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{NC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm $M,\ N,\ P$ thẳng hàng.

Hướng dẫn: *Phân tích hai véctơ $\overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{MN}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.*

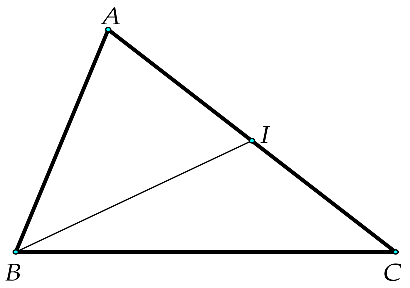
BT 9. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi $M,\ N$ là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB},\ 2\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{NA}=\vec{0}$ và G là trọng tâm tam giác ABC.



a) Chứng minh: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) Chứng minh ba điểm $G,\ M,\ N$ thẳng hàng.

BT 10. Cho tam giác ABC có trung tuyến BI và $H,\ K$ thỏa $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BH}$ và $2\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{IK} = \vec{0}.$

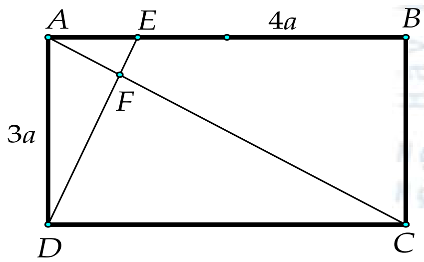


a) Xác định các điểm $H,\ K$ trên hình vẽ ?

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh ba điểm $A,\ H,\ K$ thẳng hàng.

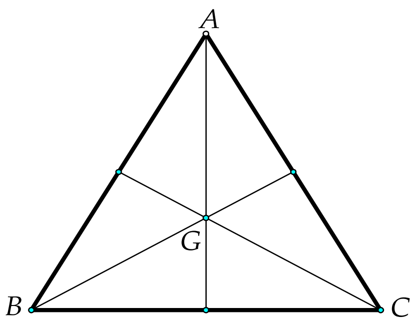
BT 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có tâm $O,\ AB = 4a,\ AD = 3a,\ M$ là một điểm tùy ý.



a) Chứng minh $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M. Tính độ dài véctơ $\vec{v}$.

b) Gọi $E,\ F$ là hai điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CF} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{CA}$. Phân tích véctơ $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DF}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$, suy ra ba điểm $D,\ E,\ F$ thẳng hàng.

BT 12. Cho tam giác ABC đều cạnh a, có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua B và E là điểm thỏa mãn đẳng thức véctơ: $5\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$.

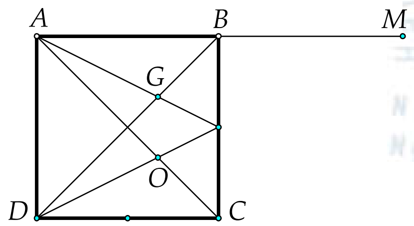


a) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}\right|$.

b) Phân tích hai véctơ $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm D, E, G thẳng hàng ?

BT 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi O là trọng tâm tam giác BCD.

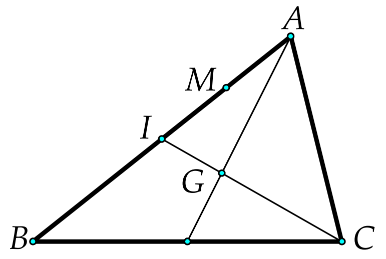


a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AO}$.

b) Xác định và tính độ dài của véctơ $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M, N là các điểm được xác định bởi: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng: M, N, G thẳng hàng.

BT 14. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, gọi I là trung điểm AB và M là trung điểm AI. Lấy điểm H đối xứng với C qua G.

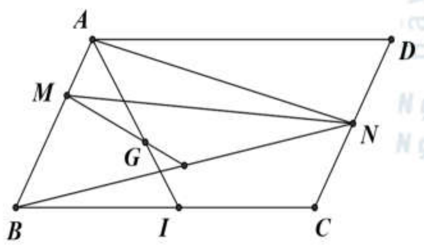


a) Chứng minh $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=4\overrightarrow{OM},\ O$ bất kì.

b) Gọi N là điểm xác định bởi $2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Tính $\overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh ba điểm $G,\ M,\ N$ thẳng hàng.

BT 15. Cho hình bình hành $ABCD$ có các điểm $M,\ I,\ N$ lần lượt thuộc các cạnh $AB,\ BC,\ CD$ sao cho $3AM=AB,\ BI=k.BC,\ 2CN=CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN. Định k để ba điểm $A,\ G,\ I$ thẳng hàng.



Do G là trọng tâm của tam giác BMN, nên có:

$$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

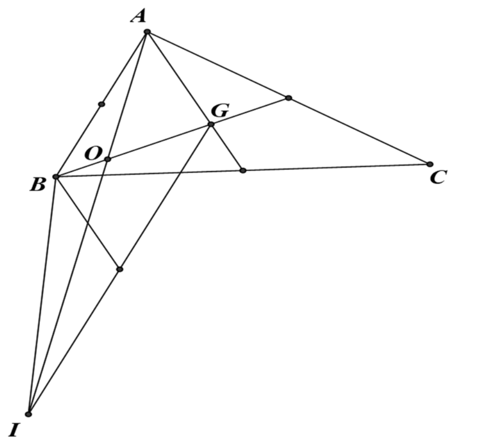
Theo đề: $BI=kBC\Rightarrow \overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.

Để ba điểm $A,\ G,\ I$ thẳng hàng thì $\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AG},\ m\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}=m\left(\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}=\frac{5m}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1-k=\dfrac{5m}{18}\\ k=\dfrac{m}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m=3k\\ 1-k=\dfrac{5k}{6}\end{cases}\Rightarrow k=\frac{6}{11}.$$

BT 16. Cho tam giác ABC có trọng tâm $G,$ I là điểm định bởi $5\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$



a) Chứng minh: $\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{AB}.$

....

....

....

....

....

....

....

b) Gọi O là giao điểm của $AI,$ BG và $\overrightarrow{BO}=k.\overrightarrow{BG}.$ Hãy tìm $k.$

....

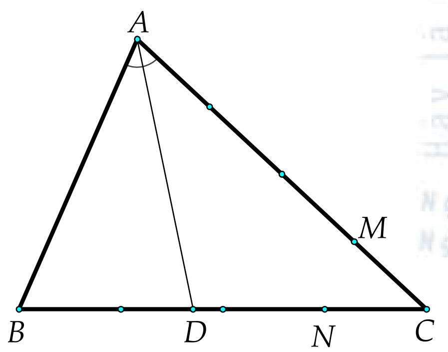
....

....

....

....

BT 17. Cho ΔABC có AD là phân giác, $AB=6,$ $AC=8.$ Gọi $M,$ N là các điểm trên AC và BC thỏa $AM=\dfrac{3}{4}AC,$ $BN=\dfrac{3}{4}BC.$ Gọi $H\in AD$ thỏa mãn $\dfrac{AH}{AD}=k>0.$



a) Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{AC}.$

Theo **tính chất phân giác**, ta có: $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}\cdot$

Suy ra: $\overrightarrow{BD}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$

Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\quad(1)$$

b) Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{AN}.$

Đặt $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{BM}+y\overrightarrow{AN}=x(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})+y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})$

$$=x\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+y\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)=x\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+y\left[\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\right]$$

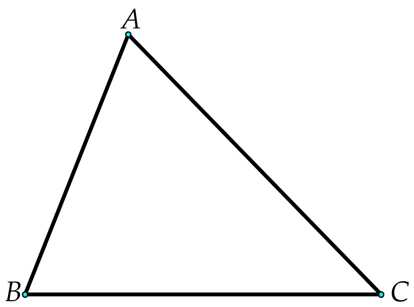
$$=\frac{3}{4}x\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}y\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}y\overrightarrow{AC}=\left(-x+\frac{1}{4}y\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}y\right)\overrightarrow{AC}\qquad(2)$$

Đồng nhất hệ số (1) và (2) $\Rightarrow\begin{cases}-x+\dfrac{1}{4}y=\dfrac{4}{7}\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}y=\dfrac{3}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-20}{21}\\ y=\dfrac{32}{21}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\dfrac{-20}{21}\overrightarrow{BM}+\dfrac{32}{21}\overrightarrow{AN}.$

c) Phân tích $\overrightarrow{DQ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ với Q là trọng tâm của tam giác CMN.

d) Tìm k để ba điểm B, H, M thẳng hàng.

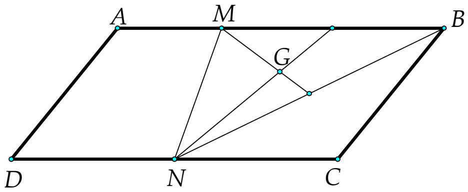
BT 18. Cho ΔABC, có trọng tâm G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Lấy hai điểm I, J sao cho: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.



a) Chứng minh rằng M, N, J thẳng hàng và J là trung điểm của BI.

b) Gọi E trên đoạn AB thỏa: $\overrightarrow{AE}=k.\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

BT 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $M,\ N$ là hai điểm lần lượt thuộc đoạn AB và CD sao cho: $AB = 3AM,\ CD = 2CN$.

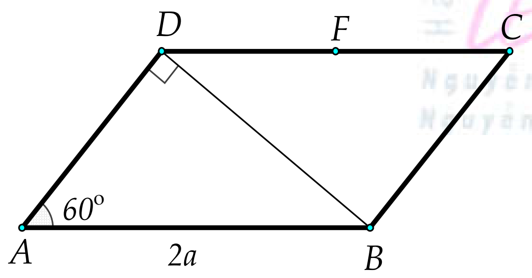


a) Tính $\overrightarrow{AN}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BMN, tính $\overrightarrow{AG}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Gọi I là điểm định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$. Tính véctơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tìm k để đường thẳng AI qua điểm G.

BT 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ,\ AB = 2a,\ AD \perp BD$, Gọi F là trung điểm CD.

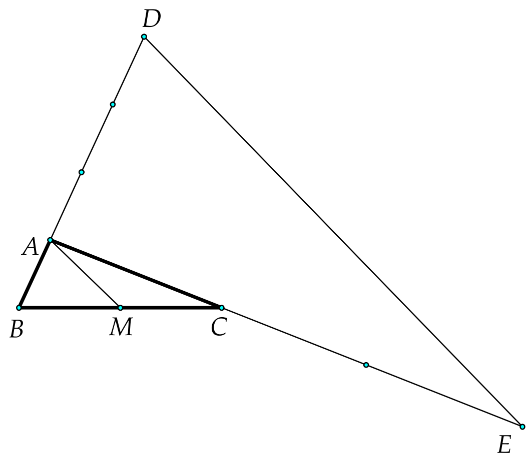


a) Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|,\ \left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right|$ theo a.

b) Gọi $M,\ N$ là hai điểm thỏa $3\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AD}$ và $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Hãy phân tích véctơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. Chứng tỏ ba điểm $M,\ N,\ F$ thẳng hàng.

Nhóm 3. Chứng minh song song

BT 21. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh: $DE \parallel AM$.



Ta có: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC} - (-3\overrightarrow{AB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \qquad (1)$

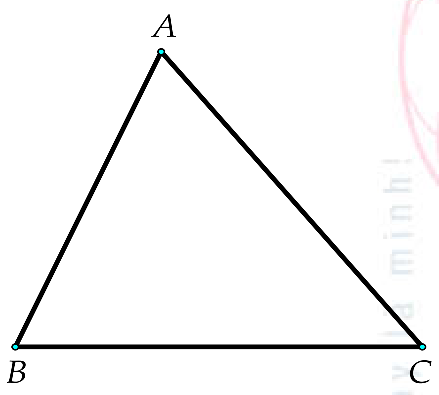
Ta lại có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

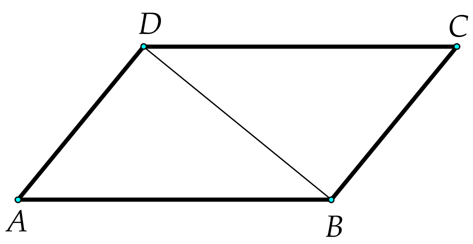
$\Rightarrow 6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \qquad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{DE} = 6\overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AM}$ cùng phương nhưng không cùng gốc, suy ra $DE \parallel AM$ (đpcm).

BT 22. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức: $4\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng: $MP \parallel BG$.



BT 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có I là trung điểm CD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCI và điểm J thỏa mãn đẳng thức véctơ $\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AJ} = \vec{0}$. Chứng minh rằng:



a) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh: $CJ \parallel AG$.

Dạng toán 4: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức véctơ

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện Ω cho trước ?

✍ **Phương pháp**: Sử dụng các phép biến đổi, biến đổi Ω về một trong những dạng sau:

— **Trường hợp 1**. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ với $A,\ B$ cho trước (cố định) thì tập hợp điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

— **Trường hợp 2**. Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right| = k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với $A,\ B,\ C$ cho trước (cố định) thì tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm C, bán kính $k.AB$.

— **Trường hợp 3**. Nếu $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{BC}$ với $A,\ B,\ C$ cho trước (cố định) và

+ Nếu $k \in \mathbb{R}^+$ thì tập hợp điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC, theo hướng của véctơ $\overrightarrow{BC}$.

+ Nếu $k \in \mathbb{R}^-$ thì tập hợp điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC, ngược hướng với véctơ $\overrightarrow{BC}$.

BT 1. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$.	b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right|$.
Gọi các điểm: I là trung điểm $AB \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. H là trung điểm $AC \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MH}$ Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ $\Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}\right| = \left|2\overrightarrow{MH}\right| \Leftrightarrow \left|MI\right| = \left|MH\right|$. Suy ra tập hợp điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng IH.	Suy ra tập hợp điểm M nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $R = 0,5.AC$.
c) $3\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.	d) $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}\right|$.
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Kết luận: M nằm trên trung trực của IG	Trên AB lấy P thỏa $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$ và trên đoạn AC lấy Q thỏa $\overrightarrow{QC}+2\overrightarrow{QA} = \vec{0}$. Kết luận: M trên trung trực của PQ.
e) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$.	f) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

BT 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:

a) $k\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Ta có: $k\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow k\overrightarrow{MA}+(1-k)(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=(1-k)\overrightarrow{AB}$.

Kết luận: tập hợp điểm M nằm trên đường thẳng AB.

b) $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}$.

c) $\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

d) $\overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.

BT 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$ tâm O. Hãy tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$.

BT 4. Cho hình thoi $ABCD$ cố định có tâm O, cạnh bằng a và góc $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi I là trung điểm của đoạn DO và G là trọng tâm tam giác ABO. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{ID}\right|$.

BT 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi $P,\ Q$ là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CQ}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

a) Chứng minh ba điểm $A,\ P,\ Q$ thẳng hàng.

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4a\sqrt{3}$.

BT 25. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi $N\in CD$ sao cho $CD=2CN$.

a) Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$.

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4AB$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nếu có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì

A. Điểm B trùng với điểm C. **B.** Tam giác ABC là tam giác đều.

C. Điểm A là trung điểm của đoạn BC. **D.** Tam giác ABC là tam giác cân.

Câu 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G. Độ dài véctơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào **sai** ?

A. $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $DA = BC$.

C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Câu 4. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Cặp véctơ cùng hướng là

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

C. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Câu 5. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai** ?

A. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.

Câu 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. 6. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

Câu 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Độ dài của véctơ $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 6. **B.** 8.

C. 13. **D.** 4.

Câu 8. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Khẳng định nào **sai** ?

A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$.

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 9. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Đẳng thức nào sau đây **đúng** ?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

C. $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

Câu 10. Cho tam giác ABC, trọng tâm G.. Kết luận nào sau đây **đúng** ?

A. Không xác định được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

B. $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}.$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

D. $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}.$

Câu 11. Cho tam giác MNP vuông tại M và $MN=3\text{cm},\ MP=4\text{cm}.$ Độ dài của $\overrightarrow{NP}$ bằng

A. 4 cm. **B.** 5 cm.

C. 6 cm. **D.** 3 cm.

Câu 12. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a và góc A bằng $60°$. Kết luận nào **đúng** ?

A. $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|.$ **B.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=a.$

C. $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$ **D.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng** ?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}.$ **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}.$

Câu 14. Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Phát biểu nào **đúng** ?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}.$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.$

C. $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.$

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3,\ BC=5$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$?

A. 4. **B.** 5.

C. 6. **D.** 3.

Câu 16. Cho 4 điểm bất kỳ $A,\ B,\ C,\ O$. Đẳng thức nào sau đây là **đúng** ?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}.$ **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}.$

C. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$

Câu 17. Điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB là

A. $OA=OB.$ **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}.$

C. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}.$ **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}.$

Câu 18. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$ **B.** $a.$

C. $2a.$ **D.** $a\sqrt{3}.$

Câu 19. Cho ΔABC vuông tại A và $AB=3,\ AC=4$. Véctơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

A. $2\sqrt{13}.$ **B.** $2\sqrt{3}.$

C. $\sqrt{3}.$ **D.** $\sqrt{13}.$

Câu 20. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng $2a$. Độ dài $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $a\sqrt{3}.$ **B.** $2a.$

C. $2a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,\ AC,\ BC$. Hỏi $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng véctơ nào ?

A. $\overrightarrow{PB}$. **B.** $\overrightarrow{AP}$.

C. $\overrightarrow{MN}$. **D.** $\overrightarrow{AM}$.

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$, giao điểm của hai đường chéo là O. Tìm mệnh đề **sai** ?

A. $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.

B. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$.

Câu 23. Cho tam giác ABC, trọng tâm là G. Phát biểu nào là **đúng** ?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

B. $\left|\overrightarrow{GA}\right|+\left|\overrightarrow{GB}\right|+\left|\overrightarrow{GC}\right|=0$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\overrightarrow{AC}$.

D. $\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=0$.

Câu 24. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào **sai** ?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Câu 25. Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ bằng

A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $2\overrightarrow{DC}$.

C. $\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{BD}$.

Câu 26. Cho ba điểm $A,\ B,\ C$ phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai** ?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $2a$. **D.** a.

Câu 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{5}.$ **B.** $a\sqrt{3}.$

C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot$

Câu 29. Cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AB = 4a$ và $AD = 3a$ thì độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ bằng

A. $5a.$ **B.** $6a.$

C. $2a\sqrt{3}.$ **D.** $7a.$

Câu 30. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}.$ **B.** $2a.$

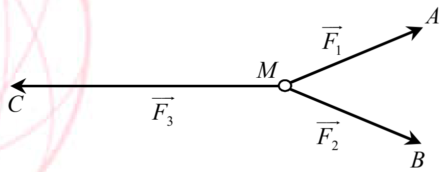
C. $2a\sqrt{2}.$ **D.** $3a.$

Câu 31. Cho tam giác đều ABC cạnh $4a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

A. $2a\sqrt{3}.$ **B.** $a\sqrt{5}.$

C. $a\sqrt{6}.$ **D.** $4a\sqrt{3}.$

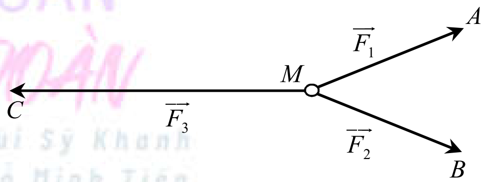
Câu 32. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{F_2}$ đều bằng $100N$ và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng



A. $50\sqrt{2}N.$ **B.** $50\sqrt{3}N.$

C. $25\sqrt{3}N.$ **D.** $100\sqrt{3}N.$

Câu 33. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{F_2}$ đều bằng $50N$ và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng



A. $50\sqrt{2}N.$ **B.** $100\sqrt{3}N.$

C. $25\sqrt{3}N.$ **D.** $50\sqrt{3}N.$

Câu 34. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}.$ **B.** $2a.$

C. $0.$ **D.** $a.$

Câu 35. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Giá trị của $\left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}.$ **B.** $a.$

C. $\dfrac{a}{2}\cdot$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

Câu 36. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a,\ BD = a$. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{5}.$ **B.** $5a.$

C. $3a.$ **D.** $a\sqrt{3}.$

Câu 37. Cho ΔABC, E là điểm trên đoạn BC sao cho $BE = \frac{1}{4}BC$. Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Câu 38. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Biểu diễn véctơ $\overrightarrow{AG}$ qua hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. **B.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

Câu 39. Tam giác ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Độ dài véctơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$.

C. a. **D.** $3a$.

Câu 40. Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right|$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Câu 41. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-2\overrightarrow{MN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$.

C. $2\overrightarrow{MN}$. **D.** $3\overrightarrow{MN}$.

Câu 42. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

A. M là trung điểm của AC.

B. M là trung điểm của AB.

C. M là trung điểm của BC.

D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và M bất kì. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$. **B.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

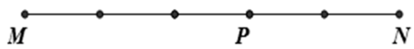
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$. **D.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

Câu 44. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Tìm mệnh đề **sai** ?

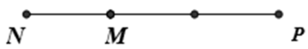
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. **B.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

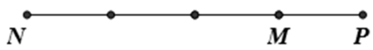
Câu 45. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



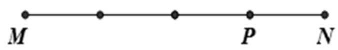
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3. **B.** Hình 4. **C.** Hình 1. **D.** Hình 2.

Câu 46. Cho tam giác ABC và I thỏa $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}$. Đẳng thức nào sau đây **đúng** ?

A. $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$.

C. $2\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$. **D.** $2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$.

Câu 47. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM. Đường thẳng BN cắt AC tại P. Khi đó $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $-\dfrac{4}{3}$.

C. $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 48. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. Đẳng thức nào **đúng** ?

A. $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. **D.** $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

Câu 49. Phát biểu nào là **sai** ?

A. Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ thì $A,\ B,\ C,\ D$ thẳng hàng.

C. $3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì A,B,C thẳng hàng. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}$.

Câu 50. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-2\overrightarrow{MN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$.

C. $2\overrightarrow{MN}$. **D.** $3\overrightarrow{MN}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.C	4.A	5.D	6.D	7.C	8.A	9.D	10.C
11.B	12.C	13.C	14.D	15.A	16.C	17.D	18.B	19.A	20.C
21.B	22.B	23.D	24.D	25.C	26.B	27.A	28.A	29.A	30.C
31.D	32.D	33.D	34.A	35.B	36.A	37.A	38.B	39.C	40.B
41.C	42.A	43.D	44.B	45.A	46.C	47.D	48.D	49.B	50.C

§ 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

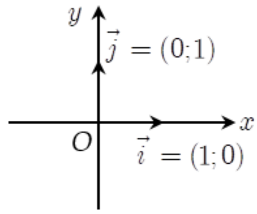
☆☆☆

① **Định nghĩa**:

Hệ trục tọa độ Oxy là hệ gồm hai trục Ox, Oy vuông góc với nhau.

Trong đó Ox : trục hoành, Oy : trục tung, O : gốc tọa độ và

$\vec{i} = (1;0)$, $\vec{j} = (0;1)$ là hai véctơ đơn vị.



② **Tọa độ véctơ**: $\vec{u} = (x;y) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.

Ví dụ: $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (.....;......)$ hoặc $\vec{a} = 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (......;.....),...$

③ **Tọa độ điểm:** $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.

Ví dụ: $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow A(......;......)$ hoặc $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} \Leftrightarrow B(.......;.......),.....$

④ **Các tính chất**: Cho hai véctơ $\vec{a} = (x_1;y_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2)$. Khi đó ta có các tính chất sau:

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ $\rightarrow$ *(hai véctơ bằng nhau khi hoành = hoành và tung = tung)*
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 + y_2)$ $\rightarrow$ *(hai véctơ cộng nhau là hoành + hoành và tung + tung)*
- $k.\vec{a} = (kx_1;\ ky_1)$ $\rightarrow$ *(nhân phân phối)*
- $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ $\rightarrow$ *(hai véctơ nhân nhau = hoành nhân hoành + tung nhân tung)*
- $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ $\rightarrow$ *(môđun của véctơ = căn của hoành bình + tung bình)*
- $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ $\rightarrow$ *(cos giữa hai véctơ = tích vô hướng chia tích độ dài)*
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$ $\rightarrow$ *(hai véctơ vuông góc nhau thì nhân nhau = 0)*
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ $\rightarrow$ *(hai véctơ cùng phương: hoành chia hoành = tung chia tung)*

⑤ **Liên hệ giữa tọa độ véctơ và tọa độ điểm:**

Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Khi đó:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)$ $\rightarrow$ *(nhớ: $B - A$).*
- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $\rightarrow$ *(nhớ: $\sqrt{(B-A)^2}$).*
- I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ $\rightarrow$ *(nhớ: $I = \dfrac{A+B}{2}$).*
- G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$ $\rightarrow$ *(nhớ: $G = \dfrac{A+B+C}{3}$).*

Dạng toán 1: Bài toán cơ bản

BT 1. Cho ba điểm $A(-2;1)$, $B(2;-3)$, $C(0;3)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là đỉnh một tam giác ?

b) Tìm chu vi của tam giác ABC ?

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC ?

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ?

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$?

f) Tìm điểm $F \in Ox$ để A, B, F thẳng hàng ?

BT 2. Cho ba điểm $A(-2;-1)$, $B(-1;4)$, $C(3;0)$

a) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là đỉnh một tam giác ?

b) Tìm chu vi của tam giác ABC ?

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC ?

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ?

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EB}$?

f) Tìm điểm $F \in Oy$ để A, C, F thẳng hàng ?

BÀI TẬP VỀ NHÀ 1

BT 3. Cho ba điểm $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(-1;-5)$

a) Tìm $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là đỉnh một tam giác ?

b) Tìm chu vi của tam giác ABC ?

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ?

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{CB}$?

f) Tìm điểm $F \in Oy$ để A, B, F thẳng hàng ?

BT 4. Cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(0;4)$, $C(3;2)$.

a) Tìm $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là đỉnh một tam giác ?

b) Tìm chu vi của tam giác ABC ?

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ?

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$?

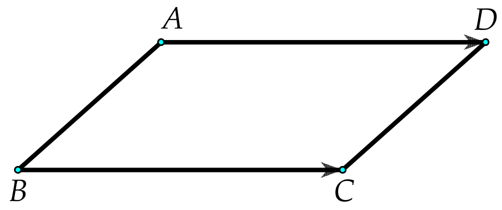
f) Tìm điểm $F \in Ox$ để A, C, F thẳng hàng ?

Dạng toán 2: Tìm điểm đặc biệt

Nhóm 1. TÌM ĐỈNH THỨ TƯ CỦA HÌNH BÌNH HÀNH

☞ **Cần nhớ**: Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành, ta làm theo các bước:

- Gọi $D(x;y)$ và tính $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(....;....)\\ \overrightarrow{BC}=(....;....)\end{cases}$
- Sử dụng $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{Hoành}=\text{Hoành}\\ \text{Tung}=\text{Tung}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=?\\ y=?\end{cases}$



BT 1. Cho ba điểm $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành ? Xác định tâm I của hình bình hành ?

Lời giải tham khảo

Gọi $D(x;y)$. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x+6;y-2)\\ \overrightarrow{BC}=(5;-14)\end{cases}$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+6=5\\ y-2=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-12\end{cases}\Rightarrow D(-1;-12).$

Tâm I của hình bình hành chính là trung điểm của đường chéo AC.

$\Rightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=-3\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};-3\right).$

Lưu ý. *Có thể tìm I trung điểm $AC\longrightarrow D$.*

BT 2. Cho ba điểm $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(-1;-5)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành ?

Đáp số: $D(-7;-8)$, $I(-5/2;-2)$.

BT 3. Cho ba điểm $A(4;3)$, $B(-1;2)$, $C(5;-2)$. Tìm điểm D để $ABCD$ là hình bình hành ? Xác định tâm I của hình bình hành ?

Đáp số: $D(10;-1)$, $I(9/2;1/2)$.

BT 4. Cho tam giác ABC có $A(-2;1)$, $B(4;1)$ và $C(-2;7)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABDC$ là hình vuông ?

Đáp số: $D(4;7)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

BT 5. Cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(9;3)$. Tìm điểm D để $ABCD$ là hình bình hành ?

Đáp số: $D(7;1)$.

BT 6. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(5;1)$, $C(3;-2)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành ?

Đáp số: $D(-3;-2)$.

BT 7. Cho ba điểm $A(-2;-1)$, $B(1;3)$, $C(10;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành ?

Đáp số: $D(7;-1)$, $I(4;1)$.

BT 8. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(7;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành ?

Đáp số: $D(5;1)$, $I(3;2)$.

BT 9. Cho tam giác ABC có $A(-1;0)$, $B(2;3)$ và $C(5;0)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình vuông ?

Đáp số: $D(2;-3)$.

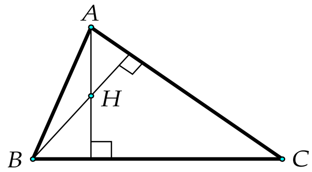
BT 10. Cho tam giác ABC có $A(5;0)$, $B(0;4)$ và $C(-4;0)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABDC$ là hình vuông ?

Đáp số: $D(-5;0)$.

Nhóm 2. TÌM TỌA ĐỘ TRỰC TÂM

☞ **Cần nhớ**: Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC):

$$\xrightarrow{\text{Phương pháp}} \begin{cases} \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0 \end{cases}$$



BT 11. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ?

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Gọi $H(x;y)$. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (5;-14) \\ \overrightarrow{AH} = (x+6;y-2) \end{cases}$.

Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0$

$\Leftrightarrow 5(x+6) - 14(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow$ .... (1)

Ta lại có: $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (13;-10) \\ \overrightarrow{BH} = (x-2;y-6) \end{cases}$.

Vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0$

....

$\Leftrightarrow$ .... (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ ....

.... $\to H\left(\dfrac{26}{33};\dfrac{146}{33}\right)$.

BT 12. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(2;4)$, $B(0;2)$, $C(-1;3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ?

....

.... $\to H(0;2)$.

BT 13. Cho tam giác ABC với $A(-2;-1)$, $B(3;0)$ và $C(-1;4)$. Tìm tọa độ điểm H là trực tâm của tam giác ABC ?

....

.... $\to H(-1/3;\ 2/3)$.

BT 14. Cho tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(3;4)$ và $C(-2;5)$. Tìm tọa độ điểm M để gốc tọa độ O là trực tâm của tam giác ABM ?

....

.... $\to M(-11;11)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 3

BT 15. Cho tam giác ABC, biết là $A(-4;1)$; $B(2;4)$; $C(2;-2)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ?

$\rightarrow H(1/2;\ 1)$.

BT 16. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(2;5)$; $B(-3;-2)$; $C(5;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ?

$\rightarrow H(43/17;\ 13/17)$.

BT 17. Cho tam giác ABC với $A(1;-4)$, $B(-2;3)$ và $H\left(\dfrac{17}{8};\dfrac{13}{8}\right)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm C ?

$\rightarrow C(3;2)$.

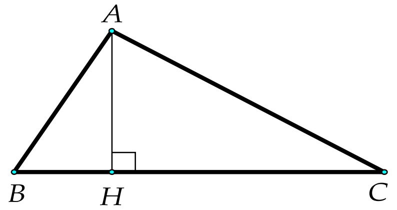
BT 18. Cho tam giác ABC với $A(4;-1)$, $C(-2;2)$ và $H\left(-\dfrac{1}{2};-1\right)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm B ?

$\rightarrow B(-2;-4)$.

Nhóm 3. TÌM TỌA ĐỘ CHÂN ĐƯỜNG CAO

☞ **Cần nhớ**: Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC):

$$\xrightarrow{\text{Phương pháp}} \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ B,\ H,\ C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \end{cases}$$



BT 19. Cho tam giác ABC với $A(1;-3)$, $B(-5;6)$ và $C(0;1)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A đến BC. Tính diện tích của tam giác ABC ?

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Tìm chân đường cao H kẻ từ A đến BC:

- Gọi $H(x;y)$. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x-1;y+3) \\ \overrightarrow{BC} = (5;-5) \\ \overrightarrow{BH} = (x+5;y-6) \end{cases}$.
- Ta có: $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$

  $\Leftrightarrow$ ....

  $\Leftrightarrow$ .... (1)
- Ta lại có: $B,\ H,\ C$ thẳng hàng

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{BC}$ cùng phương

  $\Leftrightarrow \dfrac{x+5}{5} = \dfrac{y-6}{-5}$

  $\Leftrightarrow$ ....

  $\Leftrightarrow$ .... (2)
- Từ (1), (2) $\Rightarrow$ ....

  .... $\to H\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Tính diện tích tam giác ABC:

Ta có: $\begin{cases} BC = \sqrt{(0+5)^2 + (1-6)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ AH = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}-1\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2}+3\right)^2} = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$.

Suy ra: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC =$ ....

....

BT 20. Cho tam giác ABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$ và $C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ B đến AC. Tính diện tích của tam giác ABC ?

....

$\to H(-2/5;\ -4/5)$, $S_{\Delta ABC} = 18$.

BT 21. Tìm tọa độ H là chân đường cao kẻ từ A đến BC của tam giác ABC. Biết rằng $A(-3;6),\ B(7;0),\ C(-5;-3)$.

$\rightarrow H(-1;-2)$.

BT 22. Tìm tọa độ H là chân đường cao kẻ từ A đến BC của tam giác ABC. Biết rằng $A(1;-2),\ B(2;-3),\ C(3;0)$.

$\rightarrow H(11/5;-12/5)$.

BT 23. Cho tam giác ABC có $A(2,2),\ B(0,1)$ và $C(4,-2)$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho đoạn thẳng AM có độ dài ngắn nhất ?

$\rightarrow H(4/5;\ 2/5)$.

BT 24. Cho tam giác ABC có $A(1;1);\ B(2;5)$, $C(-1;2)$. Tìm điểm H trên cạnh AB sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là ngắn nhất ?

$\rightarrow H(19/17;\ 25/17)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 4

BT 25. Tìm H là chân đường cao kẻ từ C đến AB. Biết $A(0;4), B(-2;1), C(0;2)$.

Đáp số: $H(-36/13;\ -2/13)$.

BT 26. Tìm H là chân đường cao kẻ từ B đến AC. Biết $A(-2;1),\ B(0;6),\ C(0;-4)$.

Đáp số: $H(-100/29;\ 134/29)$.

BT 27. Cho tam giác ABC có $A(3;-1);\ B(6;0)$ và $C(1;5)$. Tìm M trên đường thẳng BC sao cho AM có độ dài ngắn nhất ?

Đáp số: $M(5;1)$.

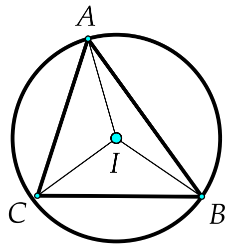
BT 28. Cho tam giác ABC có $A(1;5),\ B(-5;2)$ và $C(-1;9)$. Tìm M trên đường thẳng BC sao cho AM có độ dài ngắn nhất ?

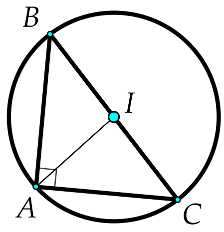
Đáp số: $M(-20/13;\ 89/13)$.

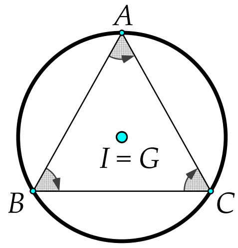
Nhóm 4. TÌM TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

☞ **Cần nhớ**: Tọa độ điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thỏa mãn:

$$IA = IB = IC \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}.$$







Giải hệ phương trình sẽ tìm được $I(x;y)$.

Đặt biệt:

- Nếu tam giác ABC vuông $\Rightarrow$ Tâm ngoại tiếp I trùng với trung điểm của cạnh huyền.
- Nếu tam giác ABC đều $\Rightarrow$ Tâm ngoại tiếp I trùng với trọng tâm G của tam giác.

$\longrightarrow$ ***Do đó khi tìm tâm ngoại, ta cần kiểm tra hai trường hợp đặc biệt này trước.***

BT 29. Tìm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

Ta có: $\begin{cases} AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (6-2)^2} = 5 \\ AC = \sqrt{(9-1)^2 + (8-2)^2} = 10 \\ BC = \sqrt{(9+2)^2 + (8-6)^2} = 5\sqrt{5} \end{cases}$.

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (do : $125 = 100 + 25$)

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền BC.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{-2+9}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_I = \dfrac{6+8}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{7}{2};7\right).$$

BT 30. Tìm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1;3), B(-1;-1), C(9;-1)$.

$\longrightarrow I(4;-1)$.

BT 31. **(HK1 – THPT Bà Điểm – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, với $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

a) Tính chu vi của tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6;3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{5} \\ \overrightarrow{AC} = (6;-3) \Rightarrow AC = 3\sqrt{5} \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } A. \\ \overrightarrow{BC} = (0;-6) \Rightarrow BC = 6 \end{cases}$

Chu vi tam giác ABC là $AB + BC + CA = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6 = 6\sqrt{5} + 6$.

b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi $I(x;y)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$\Rightarrow IA = IB = IC \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4-x)^2 + (1-y)^2 = (2-x)^2 + (4-y)^2 \\ (-4-x)^2 + (1-y)^2 = (2-x)^2 + (-2-y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 6y = 3 \\ 12x - 6y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{4};1\right).$$

BT 32. **(HK1 – THPT Bình Tân – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC với $A(2;-1);\ B(0;5);\ C(-3;7)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Đáp số: $I(79/14;\ 3/14)$.

BT 33. **(HK1 – THPT Trung Phú – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC với $A(-1;1),\ B(3;5),\ C(8;-1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Đáp số: $I(79/22;\ 9/22)$.

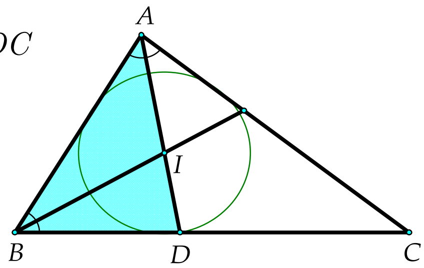
BT 34. **(HK1 – THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC với $A(6;3),\ B(-3;6),\ C(1;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Đáp số: $I(1;3)$.

Nhóm 5. TÌM TỌA ĐỘ CHÂN ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

☞ **Cần nhớ**: Nếu AD là đường phân giác trong góc A của ΔABC thì: $\boxed{\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}\cdot\overrightarrow{DC}}$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có: $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AC} \Leftrightarrow DB = \dfrac{AB}{AC}\cdot DC$



Do hai véctơ $\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC}$ cùng phương, ngược chiều nên, ta có:

$\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$ (đpcm).

Đặc biệt: Trong trường hợp tam giác ABC cân hoặc đều thì D là trung điểm của BC.

Mở rộng bài toán: Tìm I là **tâm đường tròn nội tiếp** tam giác ABC :

- Tìm chân đường phân giác D dựa vào $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$.
- Trong tam giác ABD có BI là phân giác nên $\overrightarrow{ID} = -\dfrac{BD}{BA}\cdot\overrightarrow{IA}$. Từ đó suy ra tọa độ điểm I.

BT 35. Cho tam giác ABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$ và $C(2;-2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải tham khảo

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (6;3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}\\ \overrightarrow{AC} = (6;-3) \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}\\ \overrightarrow{BC} = (0;-6) \Rightarrow BC = 6\end{cases}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A.

Do đó chân đường phân giác D của góc A là trung điểm $BC \Rightarrow D(2;1)$.

Tìm I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC :

Gọi $I(x;y)$. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{ID} = (2-x;1-y)\\ \overrightarrow{IA} = (-4-x;1-y)\end{cases}$.

Vì BI là đường phân giác của ABD nên:

$$\frac{\overrightarrow{ID}}{\overrightarrow{IA}} = -\frac{BD}{BA} = -\frac{3}{3\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ID} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases}2-x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}(-4-x)\\ 1-y = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}(1-y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2},\ y-1 \Rightarrow I\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2};1\right).$$

BT 36. Cho tam giác ABC với $A(-1;0)$, $B(2;3)$ và $C(5;0)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $D(2;0)$. ....

BT 37. Cho tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(0;4)$ và $C(4;2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đáp số: $D(2;3)$.

BT 38. Cho tam giác ABC với $A(5;-1)$, $B(1;3)$ và $C(-1;-3)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đáp số: $D(3;1)$.

BT 39. Cho ΔABC với $A(1;3)$, $B(-1;-1)$ và $C(9;-1)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đáp số: $D(7/3;-1)$.

BT 40. Cho ΔABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$ và $C(2;-2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đáp số: $D(2;1)$ và $I((7+3\sqrt{5})/2;\ 1)$.

Nhóm 6. TÌM ĐIỂM THUỘC TRỤC Ox, Oy THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

☞ **Cần nhớ**: Nếu $M \in Ox$ (trục hoành) $\Rightarrow M(x;0)$. Nếu $M \in Oy$ (trục tung) $\Rightarrow M(0;y)$.

BT 41. Cho tọa độ điểm $B(5;2)$. Tìm tọa độ điểm D trên Ox thỏa mãn $BD = 2\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo

Gọi $D(x;0) \in Ox$.

Ta có: $BD = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + 4 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy $D(7;0)$ hoặc $D(3;0)$ thỏa bài toán.

BT 42. Tìm E trên đường thẳng $d: y = -0,5x$ cách điểm $A(1;-4)$ một khoảng $= \sqrt{10}$.

Gọi $E\left(x; -\dfrac{1}{2}x\right) \in d: y = -\dfrac{1}{2}x$. ……………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Đáp số: $E(14/5;-7/5)$ hoặc $E(2;-1)$.

BT 43. **(HK I – THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(-1;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $AM = \sqrt{17}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Đáp số: $M(0;3)$ hoặc $M(0;-5)$.

BT 44. **(HK I – THPT Hùng Vương – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;3)$ và $B(2;4)$.

a) Tìm tọa độ điểm M là điểm đối xứng với A qua B.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

b) Tìm tọa độ điểm N nằm trên trục hoành Ox thỏa mãn $NA = NB$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

c) Tìm tọa độ điểm C có hoành độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Gọi $C(2;y)$. Ta có: $\overrightarrow{CA} = (3; y-3)$ và $\overrightarrow{CB} = (0; 4-y)$. Vì ΔABC vuông tại C nên:

$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow$ ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Đáp số: $M(5;5)$, $N(5/3;0)$, $C(2;3)$. ……………………………………………

BT 45. (HK I THPT Dương Văn Dương – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;1)$ và $B(1;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để tam giác ABM vuông tại A.

Đáp số: $M(-3;0)$.

BT 46. (HK I – THPT Cần Thạnh – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;6)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để tam giác MAB cân tại M.

Đáp số: $M(-35/6;\ 0)$. ***Hướng dẫn:*** *ΔMAB cân tại $M \Leftrightarrow MA = MB$.*

BT 47. (HK I – THPT Nguyễn Khuyến – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(1;2)$. Tìm điểm M thuộc trục Oy để tam giác ABM cân tại B.

Đáp số: $M(0;1)$. *Sai lầm thường gặp là nhận 2 điểm M do không kiểm tra không cùng phương.*

BT 48. (THPT Bà Điểm – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;-2)$ và $B(2;3)$.

a) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành Ox sao cho $M,\ A,\ B$ thẳng hàng.

Đáp số: $M(7/5;0)$.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tam giác OAD vuông cân tại gốc tọa độ O.

Gọi $D(x;y)$. Có: $\overrightarrow{OA} = (1;-2)$, $\overrightarrow{OD} = (x;y)$.

Vì ΔOAD vuông cân tại $O \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD} \\ OA = OD \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $D(2;1)$ hoặc $D(-2;-1)$.

BT 49. (THPT Võ Thị Sáu – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;5)$ và $B(-7;11)$. Tìm điểm M sao cho tam giác ABM vuông cân tại điểm M.

Đáp số: $M(-6;4)$ hoặc $M(0;12)$.

BT 50. (THPT Long Trường – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC, tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình chữ nhật với:

a) $A(1;2),\ B(5;4),\ C(7;0).$	b) $A(6;3),\ B(4;7),\ C(2;1).$
Đáp số: $D(3;-2)$.	**Đáp số**: $D(0;5)$.

BT 51. (THPT Long Trường – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC, tìm tọa độ điểm I với:

a) $A(1;2),\ B(5;4),\ C(7;0)$ và $I \in xOx'$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $A(6;3),\ B(4;7),\ C(2;1)$ và $I \in yOy'$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải tham khảo

Gọi $I(x;0) \in Ox$ và đặt $\vec{u} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x;2) \\ \overrightarrow{IB} = (5-x;4) \\ \overrightarrow{IC} = (7-x;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (13-3x;6).$

Khi đó: $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(13-3x)^2+6^2} \geq 6.$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi:

$13-3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{13}{3}\cdot$ Vậy $I\left(\dfrac{13}{3};0\right)\cdot$

b) **Đáp số**: $I(0;\ 11/3)$.

BT 52. (THPT Bình Hưng Hòa – Tp. HCM) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;3)$ và $B(1;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

Đáp số: $M(-1/3;0)$.

BT 53. **(THPT Bình Khánh Tp HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;2)$, $B(3;5)$, $C(5;-3)$. Tìm $D \in Oy$ sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy là AB.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Gọi $D(0;y) \in Oy$. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{CD} = (-5;y+3) \\ \overrightarrow{AB} \ = (7;3) \end{cases}$.

Vì $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy là AB nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow$ ....

....

....

Đáp số: $D(0;-36/7)$. ....

BT 54. **(HK I – THPT Hòa Bình – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;4)$, $B(1;2)$, $C(6;2)$. Gọi M là trung điểm của BC. Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng AM với trục tung Oy.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Gọi $E(0;y) \in Oy$ thỏa yêu cầu bài toán. Vì M là trung điểm của $BC \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};2\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AE} = (-2;y-4)$, $\overrightarrow{ME} = \left(-\dfrac{7}{2};y-2\right)$.

Vì E là giao điểm của AM và Oy nên M, E, A thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}$ cùng phương $\overrightarrow{ME}$

$\Leftrightarrow$ ....

....

....

Đáp số: $E(0;\ 20/3)$. ....

BT 55. **(HK I – THPT Hoàng Hoa Thám – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;-2)$ và $B(2;-3)$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng (AB) và trục tung.

....

....

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $I(0;-1)$. ....

BT 56. (THPT Nam Kỳ Khởi Nghĩa – Tp. HCM) Trong mặt phẳng $Oxy,$ cho ba điểm:

a) $A(1;1),\ B(2;3)$ và $C(5;-1)$. Tìm điểm F thỏa mãn $4\overrightarrow{AF}-3\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$. Tìm M trên Ox cách đều hai điểm B và C.

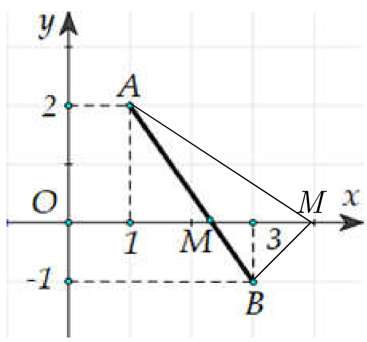
Đáp số: $F(3/2;\ 6),\ M(13/6;\ 0)$.

b) $A(-2;3),\ B(3;2)$ và $C(4;7)$. Tìm điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{AQ}-4\overrightarrow{CQ}+2\overrightarrow{BQ}=\vec{0}$. Tìm N trên Oy cách đều hai điểm A và C.

Đáp số: $Q(12;21),\ N(0;\ 13/2)$.

BT 57. (HK I – THPT Trần Cao Vân – Tp. HCM) Trong mặt phẳng $Oxy,$ cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(3;-1)$. Tìm tọa độ điểm $M\in Ox$ sao cho $MA+MB$ ngắn nhất ?

Học sinh đọc và bổ sung lời giải



Gọi $M(x;0)\in Ox.$

Vì $y_A.y_B=2.(-1)=-2<0$ nên $A,\ B$ nằm hai bên so với trục Ox

Suy ra: $MA+MB\ge AB.$

Khi đó $(MA+MB)_{\min}=AB$ khi ba điểm $A,\ M,\ B$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ ...

Đáp số: $M(7/3;\ 0)$.

☞ ***Nhận xét***. *Nếu $A,\ B$ nằm cùng bên so với Ox thì ta sẽ lấy đối xứng điểm A qua Ox là A'. Khi đó $MA+MB=MA'+MB\ge A'B$ và $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi $M,\ A',\ B$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M},\ \overrightarrow{A'B}$ cùng phương.*

BT 58. **(HK I – THPT Tân Bình – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;-1)$ và $B(2;-4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\widehat{MBA} = 45°$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(0;y) \in Oy$. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BM} = (-2;y+4) \\ \overrightarrow{BA} = (-4;3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{y^2 + 8y + 20} \\ \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \end{cases}$.

Vì $\widehat{MBA} = 45° \Rightarrow \cos\widehat{MBA} = \cos 45° \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|.\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{8+3(y+4)}{5\sqrt{y^2+8y+20}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 6y + 40 = 5\sqrt{2}\sqrt{y^2 + 8y + 20} \Leftrightarrow (6y+40)^2 = 50(y^2 + 8y + 20)$

$\Leftrightarrow 36y^2 + 480y + 1600 = 50y^2 + 400y + 1000 \Leftrightarrow 14y^2 - 80y - 600 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 10 \\ y = -\dfrac{30}{7} \end{array}\right.$.

Vậy có hai điểm M thỏa bài toán là $M(0;10)$ hoặc $M\left(0;-\dfrac{30}{7}\right)$.

BT 59. **(HK I – THPT Ngô Gia Tự – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(3;1)$ và $B(1;3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\widehat{ABM} = 60°$.

....

....

....

....

....

Đáp số: $M(0;1-\sqrt{3})$.

BT 60. **(HK I – THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(-1;2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để $\widehat{AMB} = 45°$?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $M(5;4)$.

BT 61. **(HK I – THPT Trường Chinh – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, xác định tọa độ D và E biết $D \in Ox$, $E \in Oy$ thỏa ΔADE vuông tại A và $DE = \sqrt{52}$, với $A(1;5)$.

Đáp số: $D(6;0)$, $E(0;4)$ hoặc $D(-4;0)$, $E(0;6)$.

BT 62. **(HK I – THPT Trưng Vương – Tp. HCM)** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(9;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $MNEF$, biết A là trung điểm của cạnh MN, B là điểm thuộc đường chéo NF sao cho $NB = 3BF$.

ĐS: $E(-5;1); N(-1;5); M(3;1); F(-1;-3) \vee E(3;-3); N\left(\frac{19}{5};\frac{13}{5}\right); M\left(-\frac{9}{5};\frac{17}{5}\right); F\left(-\frac{13}{5};-\frac{11}{5}\right)$.

BÀI TOÁN TỔNG HỢP

BT 1. **(HK1 – THPT Bách Việt – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C lập thành tam giác. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Đáp số: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 64$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn BC, tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Đáp số: $I(9/2;-1)$, $G(1;0)$.

c) Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Đáp số $D(-1;-12)$.

d) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC.

Đáp số: $H(26/33;\ 146/33)$.

BT 2. **(HK1 – THPT Quốc Tế Bắc Mỹ – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;4)$, $B(0;2)$, $C(-1;3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tính độ dài đường trung tuyến CM của tam giác ABC.

$\rightarrow CM = 2$.

c) Tìm D để B là trọng tâm ΔACD.

Đáp số $D(1;-1)$.

d) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC.

Đáp số: $H(0;2)$.

BT 3. **(HK1 – THPT Bình Phú – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, với $A(-2;-1)$, $B(-1;4)$, $C(3;0)$.

a) Chứng minh tam giác ABC cân. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm K sao cho $\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{KB}$.

c) Tìm tọa độ điểm H là trực tâm của tam giác ABC.

Đáp số: $S_{\Delta ABC}=12$, $K(-11/2;\ 11/2)$, $H(-1/3;\ 2/3)$.

BT 4. **(THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho đường thẳng $d: y=x-1$ và parabol $(P): y=x^2-2x$. Gọi I là đỉnh của (P) và M trên d để $MI=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$ Tìm tọa độ điểm M.

Đáp số: $M(1/2;\ \ -1/2)$.

BT 5. **(THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho ΔABC với $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $C(3;-4)$. Gọi M là trung điểm BC, K là điểm trên đường thẳng AC sao cho $BK\perp AM$. Tìm tọa độ điểm K.

Đáp số: $K(-3/11;\ 1/11)$.

BT 6. **(THPT Lê Trọng Tấn – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(-2;0)$, $B(5;3)$ và $C(3;-2)$.

a) Chứng minh ΔABC vuông cân.

Đáp số: Tam giác vuông cân tại C.

b) Tìm điểm E sao cho A là trung điểm BE.

Đáp số: $E(-9;-3)$.

c) Tìm tọa độ điểm M, N sao cho M, N chia đoạn AB thành 3 đoạn bằng nhau.

Đáp số: $M(1/3;1)$ và $N(8/3;\ 2)$.

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Đáp số: $D(-4;-5)$.

e) Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp I và trực tâm H của tam giác ABC.

Đáp số: $I(3/2;\ 3/2)$.

BT 7. **(THPT Trần Quang Khải – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại đỉnh A.

b) Tìm M là trung điểm của AC và tính độ dài trung tuyến BM của tam giác ABC.

Đáp số: $M(5;5)$, $BM = 5\sqrt{2}$.

c) Gọi N là điểm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}$. Tính diện tích tam giác ABN.

Đáp số: $S_{\Delta ABN} = \dfrac{3}{4}S_{\Delta ABC} = \dfrac{75}{4}$.

BT 8. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(0;4)$, $B(-6;1)$, $C(-2;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC tam giác vuông. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đáp số: Tam giác ABC vuông tại A nên tâm $I\left(-4;\dfrac{9}{2}\right)$ là trung điểm BC và $R = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M.

Đáp số: $M_1(-3+\sqrt{5};0)$ hoặc $M_2(-3-\sqrt{5};0)$.

BT 9. **(THPT Hàn Thuyên – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(3;5)$, $C(2;-3)$.

a) Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Đáp số: $D(-2;-7)$.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Đáp số: $H(-15/7;\ 8/7)$.

BT 10. **(THPT Tây Thạnh – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2),\ B(0;-3),\ C(2;-1)$.

a) Tìm tọa độ G thỏa $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Đáp số: $G(2/3;\ -2/3)$.

b) Tìm tọa độ điểm $D\in Ox$ để $ABCD$ là hình thang với hai đáy là $AB,\ CD$.

Đáp số: $D(2;0)$.

BT 11. **(THTP Bùi Thị Xuân – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;-4),\ B(-3;-1),\ C(1;-1)$ và G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Tìm M thỏa $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BC}$.

Đáp số: $M(4;2)$.

b) Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Đáp số: $I(-1;-2)$.

BT 12. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Tp. Hồ Chí Minh)** Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(-2;2),\ B(1;0),\ C(3;-3)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Đáp số: $H(13;12)$.

b) Tìm $D\in Oy$ để $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là BC.

Đáp số: Không có điểm D thỏa giả thiết.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, $B(1;1)$, $C(2;-7)$.

a) Tam giác ABC là tam giác gì ? Tính diện tích tam giác ABC.

b) Gọi H là chân đường cao xuất phát từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm H.

BT 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-1)$, $B(5;-3)$, $C(2;0)$.

a) Chứng minh ΔABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC và chu vi của nó.

b) Xác định tọa độ chân đường cao H kẻ từ C của tam giác ABC.

c) Tìm điểm M thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 1 = 0$ sao cho $AM = \sqrt{5}$.

BT 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm: $A(0;2)$, $B(6;0)$, $C(5;7)$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

b) Tìm tọa độ đỉnh D sao cho $ADBC$ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi này.

c) Xác định tọa độ tâm I và bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi $ADBC$.

BT 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;3)$, $B(-1;-1)$, $C(6;6)$.

a) Hãy tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Suy ra chu vi và tính diện tích.

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC. Từ đó chứng minh ba điểm I, H, G thẳng hàng.

d) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng AH sao cho M cách đều A và C.

BT 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;3)$, $B(-5;2)$, $C(-2;-2)$.

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Tìm tọa độ điểm H.

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

BT 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(9;-2)$, $B(2;-3)$, $C(7;2)$.

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Tìm tọa độ điểm H.

b) Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho tam giác BCM vuông tại B.

BT 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho tứ giác $ABCD$ có $A(1;3)$, $B(-1;1)$, $C(3;-3)$, $D(3;1)$.

a) Chứng minh $ABCD$ là một hình thang vuông tại A và B.

b) Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho M cách đều A và B.

c) Tìm tọa độ điểm I sao cho tam giác IBC vuông cân tại I.

BT 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A.

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho tam giác AMB vuông tại B.

BT 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(3;1)$.

a) Chứng minh OAB vuông cân. Tính chu vi và diện tích của tam giác OAB.

b) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $OABD$ là hình vuông.

BT 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-6;4)$, $B(0;7)$, $C(3;1)$.

a) Chứng minh rằng ΔABC vuông cân. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông đáy $AD = 3BC$.

c) Tìm tọa độ điểm E trên trục hoành sao cho $CE \parallel AB$.

BT 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $C(3;2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm D thuộc Ox sao cho $T = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{CD}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

BT 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-2;4)$, $B(2;-6)$, $C(3;6)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên BC.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

BT 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$.

a) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên BC.

b) Gọi N là trung điểm AB. Tính độ dài trung tuyến CN.

c) Tìm điểm I thuộc trục hoành sao cho $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

BT 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-2;1)$, $B(1;2)$, $C(3;-1)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm E sao cho B là trọng tâm tam giác ACE.

c) Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành để $ABCD$ là hình thang có hai đáy là BC và AD. Tìm tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình thang đó.

d) Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho $MB + MC$ nhỏ nhất.

BT 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm

a) P thuộc Ox sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất.

b) Q thuộc Ox sao cho $\left|QA - QB\right|$ lớn nhất.

BT 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(5;-1)$, $B(-1;3)$, $C(-1;5)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

BT 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;4)$, $B(2;-6)$, $C(3;6)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

c) Tìm tọa độ điểm M trên Oy sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

BT 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-4;3)$, $B(1;4)$, $C(1;-2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm M thuộc đường thẳng AC sao cho $T = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

BT 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm: $A(3;-1)$, $B(2;2)$, $C(8;4)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm D trên Ox sao cho tam giác DBC cân tại D.

c) Tìm tọa độ điểm M trên Oy sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ ngắn nhất.

d) Tìm tọa độ điểm N trên Oy sao cho $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right|$ ngắn nhất.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ $\vec{i}$ là

A. $\vec{i}=(1;0)$. **B.** $\vec{i}=(1;1)$. **C.** $\vec{i}=(0;0)$. **D.** $\vec{i}=(0;1)$.

Câu 2. Cho hai véctơ $\vec{u}=(3;-4)$ và $\vec{v}=(-1;2)$. Tọa độ của véctơ $\vec{u}+2\vec{v}$ là

A. $(1;0)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(-4;6)$. **D.** $(4;-6)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(-1;3)$ và $\vec{b}=(5;-7)$. Tọa độ véctơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ là

A. $(13;-29)$. **B.** $(-6;10)$.

C. $(-13;23)$. **D.** $(6;-19)$.

Câu 4. Cho hai véctơ $\vec{a}=(1;5)$ và $\vec{b}=(-2;1)$. Tính $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(7;13)$. **B.** $\vec{c}=(1;17)$.

C. $\vec{c}=(-1;17)$. **D.** $\vec{c}=(1;16)$.

Câu 5. Cho hai véctơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Tọa độ của véctơ $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ là

A. $(2;7)$. **B.** $(1;-1)$.

C. $(3;-5)$. **D.** $(-3;5)$.

Câu 6. Tìm tọa độ véctơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ và $\vec{v}=(2;-3)$.

A. $(-2;3)$. **B.** $(2;3)$.

C. $(2;-3)$. **D.** $(-2;-3)$.

Câu 7. Cho hai véctơ $\vec{a}=(4;10)$ và $\vec{b}=(2;x)$. Nếu hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì

A. $x=6$. **B.** $x=7$.

C. $x=4$. **D.** $x=5$.

Câu 8. Cho hai véctơ $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $x=-1$. **B.** $x=2$.

C. $x=\dfrac{1}{4}\cdot$ **D.** $x=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hai véctơ $\vec{a}=(-5;0)$ và $\vec{b}=(4;x)$. Tìm x để hai véctơ $\vec{a},\ \vec{b}$ cùng phương.

A. $x=-1$. **B.** $x=-5$.

C. $x=4$. **D.** $x=0$.

Câu 10. Cho hai véctơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=m\vec{j}+\vec{i}$. Nếu hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì

A. $m=-\dfrac{2}{3}\cdot$ **B.** $m=-\dfrac{3}{2}\cdot$

C. $m=-6$. **D.** $m=6$.

Câu 11. Cho $A(-2m;-m)$, $B(2m;m)$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng AB đi qua O ?

A. $m=5$. **B.** $\forall m\in\mathbb{R}$.

C. Không có m **D.** $m=3$.

Câu 12. Cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho ba điểm $A,\ B,\ M$ thẳng hàng.

A. $M\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{17}{7};0\right)$.

C. $M(1;0)$. **D.** $M(4;0)$.

Câu 13. Cho $A(0;-2)$, $B(-3;1)$. Tìm tọa độ giao điểm M của AB với trục $x'Ox$.

A. $M(0;-2)$. **B.** $M(-2;0)$.

C. $M(2;0)$. **D.** $M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 14. Cho hai điểm $A(-2;-3)$, $B(4;7)$. Tìm điểm $M \in y'Oy$ thẳng hàng với A và B.

A. $M(1;0)$. **B.** $M\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$.

C. $M\left(\dfrac{4}{3};0\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{3};0\right)$.

Câu 15. Cho hai véctơ $\vec{u} = (2x-1;3)$ và $\vec{v} = (1;x+2)$. Có hai giá trị x_1, x_2 của x để $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$. Giá trị của tích số $x_1.x_2$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $-\dfrac{5}{2}$.

C. $-\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 16. Cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(4;7)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $(6;4)$. **B.** $(2;10)$.

C. $(3;2)$. **D.** $(8;-21)$.

Câu 17. Cho hai điểm $B(3;2)$ và $C(5;4)$. Toạ độ trung điểm M của BC là

A. $M(4;3)$. **B.** $M(2;2)$.

C. $M(2;-2)$. **D.** $M(-8;3)$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $A(3;-5)$, $B(9;7)$, $C(11;-1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tìm tọa độ véctơ $\overrightarrow{MN}$ là

A. $(10;6)$. **B.** $(5;3)$.

C. $(2;-8)$. **D.** $(1;-4)$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh lần lượt là $A(2;3)$, $B(5;4)$, $C(-1;-1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác có tọa độ là

A. $(2;2)$. **B.** $(1;1)$.

C. $(4;4)$. **D.** $(3;3)$.

Câu 20. Cho ba điểm $A(5;-2)$, $B(0;3)$, $C(-5;-1)$. Khi đó trọng tâm tam giác ABC là

A. $G(1;-1)$. **B.** $G(10;0)$.

C. $G(0;0)$. **D.** $G(0;11)$.

Câu 21. Cho tam giác ABC có $A(3;5)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác là

A. $(\sqrt{2};3)$. **B.** $(3;3)$.

C. $(-3;4)$. **D.** $(4;0)$.

Câu 22. Cho tam giác ABC với $A(-3;6)$, $B(9;-10)$ và có $G\left(\frac{1}{3};0\right)$ là trọng tâm. Tọa độ C là

A. $C(5;-4)$. **B.** $C(5;4)$.

C. $C(-5;4)$. **D.** $C(-5;-4)$.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $A(-2;2)$, $B(3;5)$ và trọng tâm là gốc O. Tọa độ đỉnh C là

A. $(-1;-7)$. **B.** $(2;-2)$.

C. $(-3;-5)$. **D.** $(1;7)$.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $A(6;1)$, $B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tọa độ đỉnh C là

A. $(-6;-3)$. **B.** $(-3;6)$.

C. $(6;-3)$. **D.** $(-6;3)$.

Câu 25. Cho hai điểm $A(5;2)$ và $B(10;8)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(15;10)$. **B.** $(2;4)$.

C. $(5;6)$. **D.** $(50;16)$.

Câu 26. Cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Khi đó

A. $\overrightarrow{BA}=(1;2)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(2;1)$.

C. $\overrightarrow{AB}=(4;9)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$.

Câu 27. Cho ba điểm $A(3;5)$, $B(6;4)$, $C(5;7)$. Tìm tọa độ điểm D biết $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

A. $D(4;3)$. **B.** $D(6;8)$.

C. $D(-4;-2)$. **D.** $D(8;6)$.

Câu 28. Cho hai điểm $M(1;6)$ và $N(6;3)$. Tìm điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{PN}$.

A. $P(0;11)$. **B.** $P(6;5)$.

C. $P(2;4)$. **D.** $P(11;0)$.

Câu 29. Cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

A. $\left(-1;\frac{8}{3}\right)$. **B.** $\left(1;\frac{2}{5}\right)$.

C. $(1;2)$. **D.** $(2;-2)$.

Câu 30. Cho $A(-4;0)$, $B(-5;0)$, $C(3;0)$. Tìm điểm $M \in Ox$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. $M(-5;0)$. **B.** $M(-2;0)$.

C. $M(2;0)$. **D.** $M(-4;0)$.

Câu 31. Cho ba điểm $A(2;5)$, $B(1;1)$, $C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

A. $E(-3;-3)$. **B.** $E(-2;-3)$.

C. $E(3;-3)$. **D.** $E(-3;3)$.

Câu 32. Cho ba điểm $A(-5;6)$, $B(-4;-1)$ và $C(4;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-3;10)$. **B.** $D(-3;-10)$.

C. $D(3;10)$. **D.** $D(3;-10)$.

Câu 33. Cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0)$, $B(2;5)$, $C(6;2)$. Tọa độ điểm D là

A. $D(-2;3)$. **B.** $D(2;-3)$.

C. $D(2;3)$. **D.** $D(-2;-3)$.

Câu 34. Cho hai véctơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ và $\vec{v} = -5\vec{i} - \vec{j}$. Gọi $(a;b)$ là tọa độ của $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ thì tích ab bằng

A. 63. **B.** -57.

C. 57. **D.** -63.

Câu 35. cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;2)$ và $C(-2;1)$. Tọa độ của véctơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ là

A. $(-1;2)$. **B.** $(4;0)$.

C. $(-5;-3)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 36. Cho tam giác ABC có $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tọa độ đỉnh A là

A. $(1;-10)$. **B.** $(1;5)$.

C. $(-3;-1)$. **D.** $(-2;-7)$.

Câu 37. Cho ba véctơ $\vec{a} = (5;3)$, $\vec{b} = (4;2)$ và $\vec{c} = (2;0)$. Khẳng định nào **đúng** ?

A. $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$. **B.** $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

C. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. **D.** $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Câu 38. Cho ba véctơ $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = (-5;1)$ và $\vec{c} = (x;7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $x = 5$. **B.** $x = -15$.

C. $x = 3$. **D.** $x = 15$.

Câu 39. Cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-3;3)$, $C(8;0)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Giá trị của $x_M + x_N + x_P$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 6.

D. 2.

Câu 40. Cho điểm $M(3;-4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy. Khẳng định nào **đúng** ?

A. $\overline{OM_1} = -3$.

B. $\overline{OM_2} = 4$.

C. $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3;-4)$.

D. $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3;-4)$.

Câu 41. Cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(3;1)$, $C(-1;1)$. Tọa độ điểm E nằm trên trục hoành sao cho $EA = EB$.

A. $E(3;0)$.

B. $E(-5;0)$.

C. $E(-3;0)$.

D. $E(5;0)$.

Câu 42. Cho tam giác ABC có $A(-3;1)$, $B(1;2)$, $C(-2;-2)$. Có hai điểm I nằm trên Ox để tam giác AIB vuông tại I. Tổng hoành độ của hai điểm đó bằng

A. -2.

B. 2.

C. 3.

D. -3.

Câu 43. Cho hai điểm $A(2;4)$, $B(1;3)$. Tìm điểm M có hoành độ dương sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

A. $M(0;4)$.

B. $M(2;-2)$.

C. $M(2;2)$.

D. $M(3;2)$.

Câu 44. Cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(6;0)$, $C(1;3)$. Biết điểm $D(x;y)$ là đỉnh của hình chữ nhật $ABDC$. Giá trị của tổng $x+y$ bằng

A. 4.

B. -5.

C. 1.

D. 5.

Câu 45. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-4;3)$, $C(3;12)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 46. Cho tam giác ABC có $A(4;1)$, $B(-4;3)$, $C(-3;7)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 47. Cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(-2;2)$, $C(3;1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{26}$.

B. $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

C. $5\sqrt{2}$.

D. $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-4;3)$, $C(3;12)$. Tọa độ điểm M để O là trực tâm tam giác ABM là

A. $M\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{2}{11}\right)$.

B. $M\left(\dfrac{2}{11};\dfrac{10}{11}\right)$.

C. $M\left(-\dfrac{2}{11};\dfrac{10}{11}\right)$.

D. $M\left(\dfrac{2}{11};-\dfrac{10}{11}\right)$.

Câu 49. Cho tam giác ABC có $A(4;1)$, $B(-4;3)$, $C(-3;7)$. Tọa độ điểm M để O là trực tâm tam giác ABM là

A. $M\left(\dfrac{13}{8};\dfrac{13}{2}\right)$.

B. $M\left(-\dfrac{13}{8};\dfrac{13}{2}\right)$.

C. $M\left(\dfrac{13}{8};-\dfrac{13}{2}\right)$.

D. $M\left(-\dfrac{13}{8};-\dfrac{13}{2}\right)$.

Câu 50. Tìm tọa độ điểm M có hoành độ là số nguyên trên đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{2}x$ cách điểm $A(1;-4)$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

A. $M(2;1)$.

B. $M(2;-1)$.

C. $M(-2;1)$.

D. $M(-2;-1)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

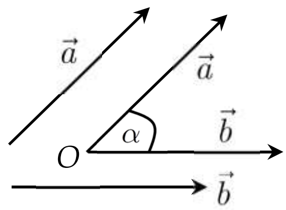
1.A	2.A	3.C	4.C	5.C	6.A	7.D	8.D	9.D	10.B
11.B	12.B	13	14.D	15.B	16.C	17.A	18.D	19.A	20.C
21.B	22.C	23.A	24.A	25.C	26.B	27.D	28.D	29.A	30.B
31.A	32.C	33.B	34.B	35.D	36.C	37.A	38.D	39.C	40.B
41.B	42.A	43.C	44.A	45.C	46.C	47.D	48.B	49.D	50.B

Chương 2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

§ 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

☆☆☆

1. Góc giữa hai véctơ



Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véctơ $\vec{0}$. Từ điểm O bất kì, ta vẽ các véctơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó góc $\widehat{AOB}$ được gọi là góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$.

2. Định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ

Tích vô hướng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a}, \vec{b})}.$$

3. Tính chất của tích vô hướng: với mọi véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k, ta luôn có:

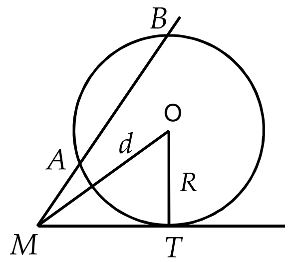
- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$.
- $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$.
- $\vec{a}.(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c}$.
- $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$.
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$.
- $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

4. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$, $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$.

- $\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy'$.
- $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.
- $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

5. Phương tích



Cho đường tròn (O) và điểm một điểm M.

Dựng cát tuyến MAB với (O), ta định nghĩa:

Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O), kí hiệu là $P_{M/(O)}$ là số được xác định bởi biểu thức:

$P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ với $d = MO$.

Nếu M nằm ngoài đường tròn (O) và MT là tiếp tuyến của (O) thì:

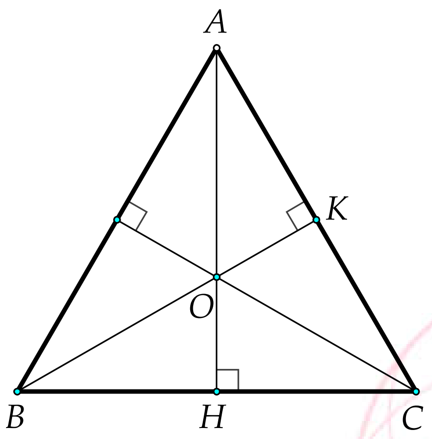
$P_{M/(O)} = \overrightarrow{MT}^2 = MT^2$. Nghĩa là $\boxed{MA.MB = MT^2}$.

Dạng toán 1: Tính tích vô hướng và bình phương vô hướng để tính độ dài

☞ **Cần nhớ:**

- Diện tích tam giác đều $S_{\Delta \text{ đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh } \times \sqrt{3}}{2}$.
- Diện tích hình vuông $S_{\text{Hình vuông}} = (\text{cạnh})^2 \Rightarrow$ Đường chéo hình vuông $=$ cạnh $\times \sqrt{2}$.

BT 1. Cho tam giác đều ABC cạnh a, tâm O.



☞ ***Nhận xét***. *Đối với những tích vô hướng đơn giản nên về cùng gốc để áp dụng công thức.*

a) Hãy tính: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

- Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = ?$

  Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

  $=$ ....

- Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = ?$

  Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

  $=$ ....

  ....

  ....

b) Hãy tính: $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

$\Rightarrow (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CB} = 2\left|\overrightarrow{OF}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{CB}) = 2.OH.CB\cos 90^\circ = 0.$

c) Hãy tính: $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$.

Ta có: $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ $(*)$

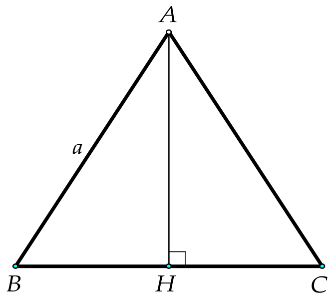
- $\overrightarrow{AB}^2 =$ ....
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} =$ ....
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ....
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} =$ ....

Thế vào $(*)$, suy ra: $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}) =$ ....

....

.... $= \dfrac{a^2}{2}$.

BT 2. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH.



a) Hãy tìm $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}$.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ....

.... $= a^2/2.$

- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH} =$ ....

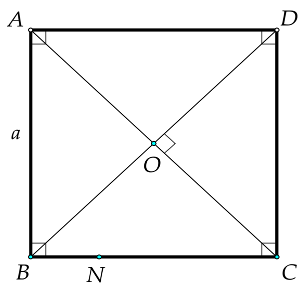
.... $= -3a^2/4.$

b) Hãy tìm $z = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$.

Ta có: $z = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) =$ ....

.... $= -13a^2/4.$

BT 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O.



a) Hãy tìm $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} =$ ....

.... $= 0.$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} =$ ....

.... $= -a^2.$

b) Hãy tính: $z = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$.

- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) =$ ....

.... $= a^2.$

c) Hãy tính: $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$, với N là điểm trên cạnh BC.

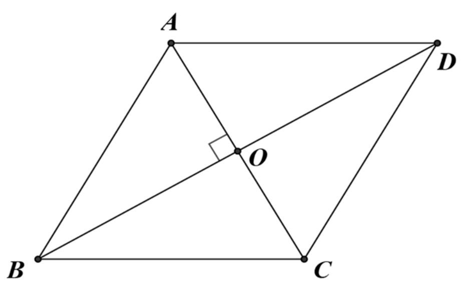
- $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BO}).\overrightarrow{AB} =$ ....

.... $= a^2/2.$

- $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN})\overrightarrow{AB} =$ ....

.... $= -a^2.$

BT 4. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60°$.



a) Hãy tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}$.

....

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ....

.... $= 49/2.$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA} =$ ....

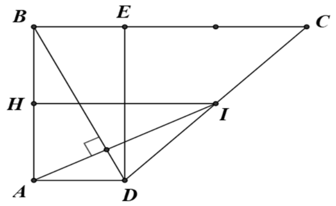
.... $= -49/4.$

b) Hãy tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}$.

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} =$ .... $= 0.$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} =$ ....

.... $= 147/4.$

BT 5. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$.



Dựng $DE \perp BC,\ E \in BC$
$\Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật.

a) Hãy tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD} =$ ....

....

....

.... $= -4a^2.$

b) Hãy tính $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} =$ ....

.... $= 3a^2.$

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) =$ ....

.... $= -a^2.$

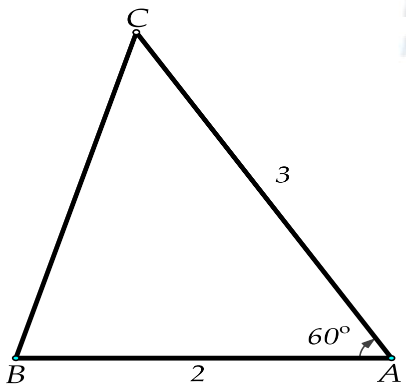
c) Gọi I là trung điểm của CD. Hãy tính góc giữa AI và BD.

....

....

.... $\to 90^\circ.$

BT 6. Cho tam giác ABC có $AB = 2,\ AC = 3,\ \widehat{BAC} = 60^\circ$.



a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài cạnh BC.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ....

.... $= 3.$

Tính BC ? Ta có: $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ....

.... $\Rightarrow BC = \sqrt{7}.$

b) Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính dộ dài AM.

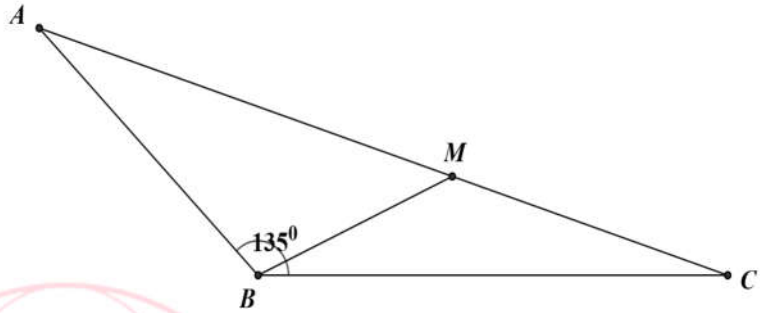
Phân tích: *Để tính AM, dựa vào đẳng thức $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Sau đó sử dụng đẳng thức bình phương vô hướng, tức $\overrightarrow{AM}^2 = (.......)^2$ để tìm ra $AM^2 \Rightarrow AM$. Đó là hướng xử lý thường gặp cho dạng toán này. Học sinh hoàn thiện lời giải sau:*

- $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} =$ ....

- Khi đó: $\overrightarrow{AM}^2 = AM^2 = \left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow AM = 2\sqrt{7}/3.$

BT 7. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2},\ BC = 5a,\ \widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $2AM = 3MC$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$. Tìm $x,\ y$ sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính độ dài đoạn BM.



- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} =$

$= -5a^2.$

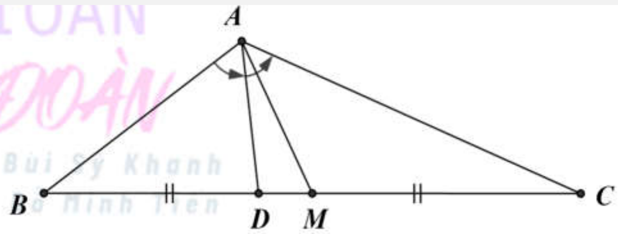
- Ta có: $AM = \dfrac{3}{2}MC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \dfrac{3}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow BM = a\sqrt{173}/5.$

BT 8. Cho tam giác ABC có $AB = 2,\ AC = 3,\ \widehat{BAC} = 120^\circ$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM.



- Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$

$= -3.$

- Tính độ dài trung tuyến AM :

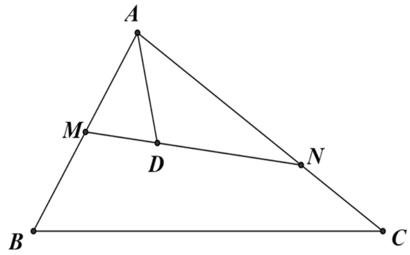
$\Rightarrow AM = \sqrt{7}/2.$

b) Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD.

$\Rightarrow AD = 6/5.$

BT 9. Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$.

a) Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.



....

....

....

....

.... $\Rightarrow x = 1/3$ và $y = 1/9$.

b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD.

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ....

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ .... $= 3a^2$.

- $\overrightarrow{AD} =$ ....

....

....

.... $\Rightarrow AD = 2a\sqrt{11}/3$.

BT 10. Tính góc giữa hai véctơ trong các trường hợp sau:

a) $\begin{cases} \vec{a} = (1;-2) \\ \vec{b} = (-1;-3) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1.(-1) + (-2).(-3)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}.\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 45°.$

b) $\begin{cases} \vec{a} = (3;-4) \\ \vec{b} = (4;3) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) =$ .... $\Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 90°.$

c) $\begin{cases} \vec{a} = (2;-5) \\ \vec{b} = (3;-7) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) =$ .... $\Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 135°.$

BT 11. Cho hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có cùng độ dài bằng $1.$ và thỏa mãn $|2\vec{u} - 3\vec{v}| = 4.$ Tính $\cos(\vec{u},\vec{v}).$

Lời giải tham khảo

Ta có: $|2\vec{u} - 3\vec{v}| = 4 \Leftrightarrow (2\vec{u} - 3\vec{v})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{u}^2 - 12\vec{u}.\vec{v} + 9\vec{v}^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4|\vec{u}|^2 - 12|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) + 9|\vec{v}|^2 = 16 \Leftrightarrow 4 - 12\cos(\vec{u},\vec{v}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = -\dfrac{1}{4}\cdot$

BT 12. Cho hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có cùng độ dài bằng $1.$ và thỏa mãn $|2\vec{u} - 3\vec{v}| = 3.$ Tính $\cos(\vec{u},\vec{v}).$

....

....

.... $\Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = 1/3.$

BT 13. Cho hai véctơ $\vec{a},\ \vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véctơ bằng 60°. Xác định cosin góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

Hướng dẫn: *Ta có:* $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}\cdot$ *Do đó cần tính* $\vec{u}.\vec{v},\ \left|\vec{u}\right|,\ \left|\vec{v}\right|$.

- $\vec{u}.\vec{v}=$ ....

.... $\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=-\dfrac{1}{2}\cdot$

- $\vec{u}^2=$ ....

.... $\Rightarrow \left|\vec{u}\right|=\sqrt{7}.$

- $\vec{v}^2=$ ....

.... $\Rightarrow \left|\vec{v}\right|=1.$

$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=$ .... $=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}\cdot$

BT 14. Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, biết $\left|\vec{a}\right|=6,\ \left|\vec{b}\right|=3,\ (\vec{a},\vec{b})=45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng:

- $\vec{a}.(2\vec{a}-\vec{b})=$ ....

....

.... $=72-9\sqrt{2}.$

- $(3\vec{a}+4\vec{b})(-2\vec{a}+3\vec{b})=$ ....

....

.... $=-108-9\sqrt{2}.$

BT 15. Cho hai véctơ $\vec{u},\ \vec{v}$ thỏa mãn $\left|\vec{u}\right|=3,\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{2},\ \left|\vec{u}-3\vec{v}\right|=3.$ Tính $\left|2\vec{u}+\vec{v}\right|$.

....

....

....

....

.... $=\sqrt{26}.$

BT 16. Cho hai véctơ $\vec{a},\ \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}.\vec{b}$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

....

....

....

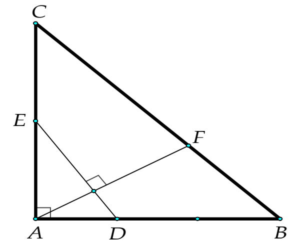
.... $=1.$

Dạng toán 2: Chứng minh vuông góc hoặc hệ thức thường gặp

Nhóm 1. CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

BT 1. **(HK1 – THPT Lê Trọng Tấn – Tp. Hồ Chí Minh 2018 – 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3,\ BC = 5.$

a) Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} =$ .... $= 0.$



b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} =$ ....

....

.... $= -9.$

c) Gọi $D,\ E,\ F$ là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{BF} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{BC}.$

Chứng minh: $DE \perp AF.$

☞ ***Phân tích***: *Tính $\overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{AF}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$. Sau đó tính tích vô hướng $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AF}$ sẽ nhận được kết quả $= 0 \Rightarrow DE \perp AF$. Ta làm tương tự nếu đề yêu cầu tính góc giữa DE và AF.*

- Ta có: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

- Ta lại có: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{11}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{AC} + \dfrac{8}{11}\overrightarrow{AB}.$

Suy ra: $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AF} =$ ....

....

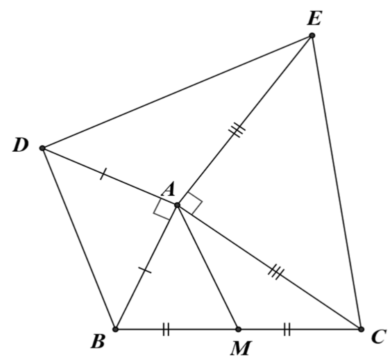
....

....

BT 2. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M trung điểm của đoạn BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.

Ta có: $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$ ....

$=$ ....



....

....

....

....

....

....

....

....

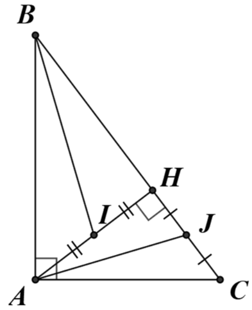
....

BT 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi $I,\ J$ lần lượt là trung điểm của AH và HC. Chứng minh: $BI \perp AJ$.

Ta có: $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC})$ và $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})$.

Suy ra: $4\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})$

$=$ ....

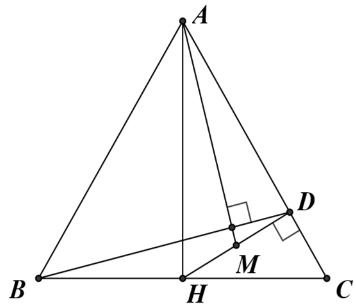


BT 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của đoạn BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, M trung điểm của đoạn HD. Chứng minh $AM \perp DB$.

Ta có M là trung điểm của HD nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$.

Xét $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD})$

$=$ ....

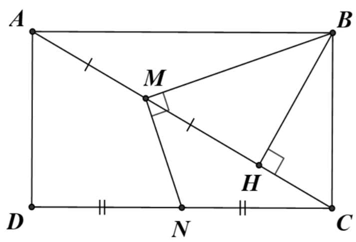


BT 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$, dựng $BH \perp AC$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của AH và DC. Chứng minh: $BM \perp MN$.

Ta có: $2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}$ và $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}$.

Suy ra: $4\overrightarrow{BM}\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC})$

$=$ ....

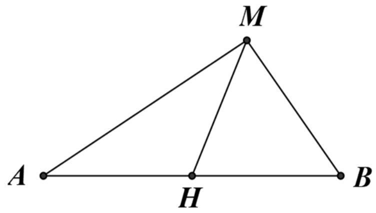


Nhóm 2. CHỨNG MINH HỆ THỨC THƯỜNG GẶP

BT 6. Cho H là trung điểm của AB và M tùy ý. Chứng minh: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})$

$=$



BT 7. Chứng minh $A,\ B,\ C,\ D$ bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

(Hệ thức Ơle – có thể dùng hệ thức này để chứng minh ba đường cao đồng quy)

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$=$

BT 8. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I,\ J$ theo thứ tự là trung điểm của $AC,\ BD$. Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.

Ta có: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2$

$\Leftrightarrow (AD^2 - AC^2) - (BD^2 - BC^2) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow$

BT 9. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$.	b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$.
Ta có: $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ $=$	Ta có: $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ ***(Định lí hàm số côsin)***

BT 10. Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC và AH là đường cao. Chứng minh:

a) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.

Ta có: $AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$

$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$

$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2$

$=$ ....

b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{2}(AB^2 - AC^2)$.

Ta có: $AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2$

$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{CB}.2\overrightarrow{AI}$

$=$ ....

BT 11. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2 - \dfrac{1}{4}BC^2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{(AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2) - (AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2)}{4}$

$=$ ....

b) Chứng minh: $AM^2 = \dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$ ***(định lý đường trung tuyến)***

Ta có: $AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left[\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right]^2 = \dfrac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$

$= \dfrac{1}{4}\left[2(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})\right] =$ ....

BT 12. Cho tam giác ABC, biết $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Có trọng tâm G. Chứng minh rằng:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$ *(Hệ thức Lep–nit)*

Vì G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 = 0$

$\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}) = 0$

$\Leftrightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) - (GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}) - (GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC})$

$-(GC^2 + GA^2 - 2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}) = 0$

$\Leftrightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})^2$

....

BT 13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta luôn có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2.$$

Vì G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC})^2$

$=$ ....

☞ ***Nhận xét***: *Từ đẳng thức* $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$.

- *Vì* A, B, C *cố định nên điểm* M *có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.*
- *Nếu tam giác* ABC *nội tiếp đường tròn* $(O;R)$ *thì* $3(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2$ *(với điểm* $M \equiv O$*).*

BT 14. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta luôn có:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Vì G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{MG}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$

$\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

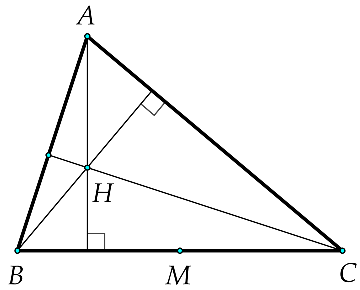
....

BT 15. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}^2 = 4.\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$.

Ta có: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})$

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA})$

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BH}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{CH}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})\right]$



$=$ ....

....

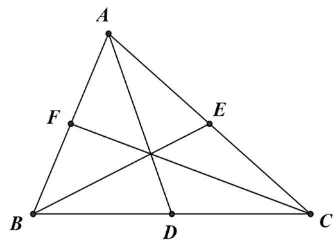
....

....

BT 16. Cho tam giác ABC có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=0$.

Có $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{BC}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CA}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC})$



$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

....

BT 17. Cho tam giác ABC, chứng minh: $S = \frac{1}{2}AB.AC\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$.

Lời giải tham khảo

Kẻ đường cao BH. Ta có: $\sin A = \frac{BH}{BA} \Rightarrow BH = AB\sin A$.

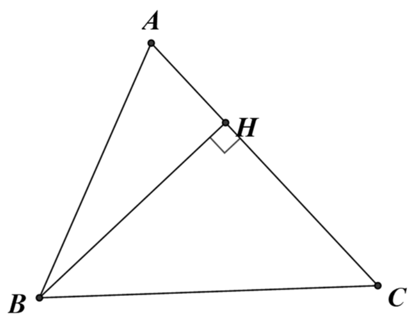
Do đó: $S = \frac{1}{2}AC.BH = \frac{1}{2}AC.AB\sin A = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$.

Suy ra: $S^2 = \left(\frac{1}{2}AB.AC.\sin A\right)^2 = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2.\sin^2 A$

$= \frac{1}{4}.\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2(1-\cos^2 A) = \frac{1}{4}.\left(\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2.\cos^2 A\right)$

$= \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos A\right)^2\right] = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2\right]$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$ (đpcm).



BT 18. Cho tam giác ABC, biết $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

Ta có: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC})^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA} = 0 \qquad (*)$

Mà $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA})^2 = \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IA}^2 - 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = IB^2 + IA^2 - AB^2$.

Tương tự:

Thế vào $(*) \Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IB^2 + IA^2 - c^2) + bc(IB^2 + IC^2 - a^2)$

$+ca(IA^2 + IC^2 - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + ab + ca)IA^2 + (b^2 + ab + bc)IB^2 + (c^2 + bc + ca)IC^2 - abc(a + b + c) = 0$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120° ?

A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$. **B.** $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$.

C. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$. **D.** $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Câu 2. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai** ?

A. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. **B.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$.

C. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$. **D.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$.

Câu 3. Cho hai véctơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

A. -30. **B.** 30.

C. 43. **D.** 3.

Câu 4. Cho hai véctơ $\overrightarrow{OM} = (-2;-1)$, $\overrightarrow{ON} = (3;-1)$. Tính góc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

A. 135°. **B.** -135°.

C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Câu 5. Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} = (1;-2)$, $\vec{b} = (-1;-3)$. Tính góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 45°. **B.** 60°.

C. 30°. **D.** 135°.

Câu 6. Cho hai véctơ $\vec{a} = (4;3)$ và $\vec{b} = (1;7)$. Góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 30°. **B.** 90°.

C. 60°. **D.** 45°.

Câu 7. Góc giữa hai véctơ $\vec{u} = (3;-4)$ và $\vec{v} = (-8;-6)$ bằng

A. 60°. **B.** 90°.

C. 45°. **D.** 30°.

Câu 8. Cho $\vec{a} = (2;1)$ và $\vec{b} = (3;-2)$. Tích vô hướng của hai véctơ đã cho bằng

A. 0. **B.** 1.

C. 4. **D.** -4.

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng m. Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $-m^2\sqrt{3}$. **B.** $2m^2$.

C. $\dfrac{m^2}{2}\cdot$ **D.** $-\dfrac{m^2}{2}\cdot$

Câu 10. Cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(4;-2)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 40. **B.** -12.

C. 26. **D.** -26.

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. a^2. **B.** $a^2\sqrt{2}$.

C. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}\cdot$ **D.** $\dfrac{a^2}{2}\cdot$

Câu 12. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 4. Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. -6. **B.** 6.
C. 8. **D.** -8.

Câu 13. Cho hình vuông $MNPQ$ có $I,\ J$ lần lượt là trung điểm của $PQ,\ MN$. Tích vô hướng $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{NJ}$ bằng

A. $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PI}$. **B.** $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PN}$.
C. $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PQ}$. **D.** $-\dfrac{\overrightarrow{PQ}^2}{4}$.

Câu 14. Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véctơ khác $\vec{0}$. Khi đó $(\vec{u}+\vec{v})^2$ bằng

A. $\vec{u}^2+\vec{v}^2$. **B.** $\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\vec{v}$.
C. $(\vec{u}+\vec{v})^2+2\vec{u}\vec{v}$. **D.** $\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\vec{v}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=60^\circ,\ AB=5,\ AC=8$. Giá trị của $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 64. **B.** 60.
C. 20. **D.** 44.

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. Giá trị của $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^2}{2}$.
C. $-a^2$. **D.** a^2.

Câu 17. Trong tam giác có $AB=10,\ AC=12$, góc $\widehat{BAC}=120^\circ$. Giá trị của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 30. **B.** 60.
C. -60. **D.** -30.

Câu 18. Cho hai vescto $\vec{a}=(-3;2),\ \vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ véctơ $\vec{c}$ biết $\vec{a}.\vec{c}=9,\ \vec{b}.\vec{c}=-20$.

A. $\vec{c}=(-1;-3)$. **B.** $\vec{c}=(-1;3)$.
C. $\vec{c}=(1;-3)$. **D.** $\vec{c}=(1;3)$.

Câu 19. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$, I là trung điểm của AD. Câu nào sau đây **sai** ?

A. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0$. **B.** $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$.
C. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=0$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=8a^2$.

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC=a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=a\sqrt{2}$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=a$.
C. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=a^2$.

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $\sqrt{5}a^2$. **B.** $5a^2$.
C. $2a^2$. **D.** $\sqrt{3}a^2$.

Câu 22. Cho tam giác đều ABC cạnh $a=2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}.$

B. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -2.$

C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{AC} = -4.$

D. $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BA} = 4.$

Câu 23. Cho đoạn thẳng $AB = 4,\ AC = 3,\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = k.$ Hỏi có mấy điểm C để $k = 8$?

A. 2. **B.** 0.

C. 3. **D.** 1.

Câu 24. Cho tam giác đều ABC cạnh $a.$ Giá trị của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $-\dfrac{3a^2}{2}.$ **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

C. $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\dfrac{3a^2}{2}.$

Câu 25. Trong tam giác ABC có $AB = 10,\ AC = 12,$ góc $\widehat{BAC} = 120^\circ.$ Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 60. **B.** $-60.$

C. $-30.$ **D.** 30.

Câu 26. Tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 135^\circ,\ BC = 3,\ AB = \sqrt{2}.$ Cạnh AC bằng

A. $2{,}25.$ **B.** 5.

C. $\sqrt{5}.$ **D.** $\sqrt{17}.$

Câu 27. Cho biết $(\vec{a},\vec{b}) = 120^\circ,\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5.$ Độ dài của véctơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng

A. 4. **B.** 2.

C. $\sqrt{19}.$ **D.** 7.

Câu 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a.$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}.$

A. $\dfrac{a^2}{2}.$ **B.** $a^2.$

C. 0. **D.** $a.$

Câu 29. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a.$ Khi đó $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$ bằng

A. $-3a^2.$ **B.** $2a^2.$

C. $-1.$ **D.** $3a^2.$

Câu 30. Cho tam giác ABC vuông tại $A,$ có $AB = 3,\ AC = 5.$ Vẽ đường cao $AH.$ Tích vô hướng $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$ bằng

A. $\sqrt{34}.$ **B.** $-\sqrt{34}.$

C. $-\dfrac{225}{34}.$ **D.** $\dfrac{225}{34}.$

Câu 31. Tam giác ABC vuông ở $A,\ AB = c,\ AC = b.$ Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $b^2.$ **B.** $c^2.$

C. $b^2 + c^2.$ **D.** $b^2 - c^2.$

Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Khi đó $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA})$ bằng

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $-\dfrac{3a^2}{2}\cdot$

C. 0. **D.** $-2a^2$.

Câu 33. Tam giác ABC có $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$. Giá trị của $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}\cdot$ **B.** $-a^2$.

C. $\dfrac{c^2+b^2}{2}\cdot$ **D.** $\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}\cdot$

Câu 34. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM=BN=CP=DQ=x$ $(0<x<a)$. Giả sử ta có $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{DC}=0,5a^2$ thì giá trị của x bằng

A. $\dfrac{3a}{4}\cdot$ **B.** $\dfrac{a}{4}\cdot$

C. $0,5a$. **D.** a.

Câu 35. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$, I là trung điểm của AD. Giá trị của $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 0. **B.** $-4a^2$.

C. $-9a^2$. **D.** $15a^2$.

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ có I là trung điểm của AD. Tính $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BI})$ bằng

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{10}}\cdot$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot$ **D.** $\dfrac{1}{3}\cdot$

Câu 37. Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu hai véctơ $\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau và $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$.

A. $60°$. **B.** $45°$.

C. $90°$. **D.** $180°$.

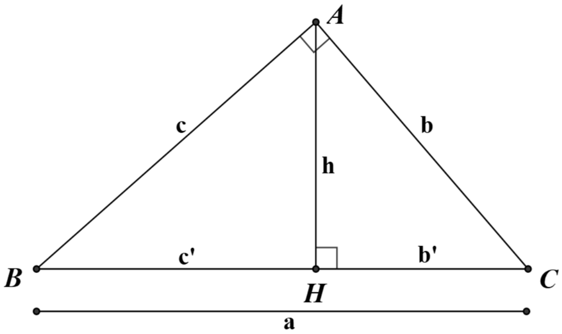
BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.A	5.A	6.D	7.B	8.C	9.C	10.B
11.A	12.C	13.D	14.D	15.D	16.A	17.C	18.B	19.C	20.D
21.C	22.C	23.A	24.A	25.B	26.D	27.C	28.C	29.A	30.C
31.B	32.D	33.B	34.A	35.C	36.A	37.D			

§ 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

☆☆☆

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông



- $b^2 = a.b'$.
- $c^2 = ac'$.
- $a^2 = b^2 + c^2$.
- $b'.c' = h^2$.
- $a.h = b.c$.
- $\dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b^2}{c^2}\cdot$
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\cdot$

2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

- Định lí côsin: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \cos B = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \cos C = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

- Định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

- Trung tuyến: $m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$; $m_b^2 = \dfrac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$; $m_c^2 = \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}\cdot$

- Công thức diện tích tam giác:

  $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, với $p = \dfrac{a+b+c}{2}\cdot$

  Trong đó $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

3. Bán kính đường tròn nội tiếp (nâng cao)

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}\cdot$$

<u>**Đặc biệt**</u>:

Nếu tam giác ABC là đều thì $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3b}{2} = \dfrac{3c}{2}$ và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$ nên:

$$r = \frac{a}{2}\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Nếu tam giác ABC là vuông thì $r = \dfrac{\text{tổng hai cạnh góc vuông} - \text{cạnh huyền}}{2}\cdot$

4. Độ dài đường phân giác (nâng cao)

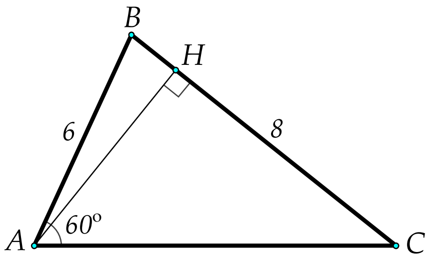
$$\ell_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}.p(p-a),\quad \ell_b^2 = \frac{4ca}{(c+a)^2}.p(p-b),\quad \ell_c^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2}.p(p-c).$$

Dạng toán 1: Tính các giá trị cơ bản

BT 1. Cho tam giác ABC, hãy tính h_a, R, r và số đo các góc trong các trường hợp sau:

a) $AB=6,\ AC=8$ và $\widehat{BAC}=60^\circ.$	b) $BC=8,\ AB=5,\ \widehat{ABC}=60^\circ.$

Học sinh đọc và bổ sung lời giải



Theo định lý hàm cos, ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$

$\quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Suy ra $BC= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Diện tích tam giác ABC :

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Mà $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow AH=\dfrac{20\sqrt{3}}{7}.$

Áp dụng định lý hàm sin:

$2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{BC}{\sin A}\Rightarrow R= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow R= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Ta lại có: $S_{\Delta ABC}=pr\Rightarrow r= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow r=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB+BC+CA}= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Ta lại có: $\cos B=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA.BC}$

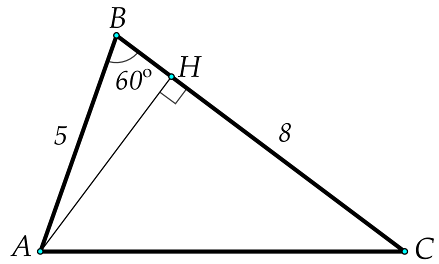
$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Tương tự $\cos C=\dfrac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA.CB}$

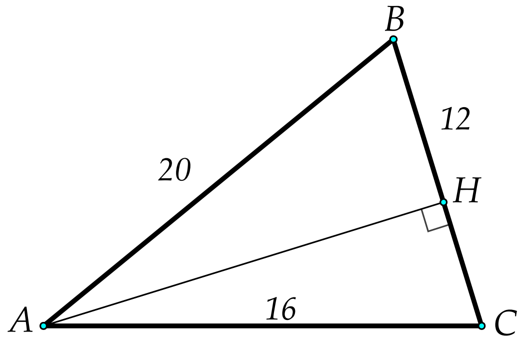
$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lời giải của học sinh

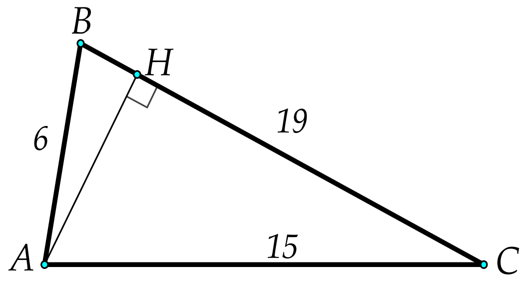


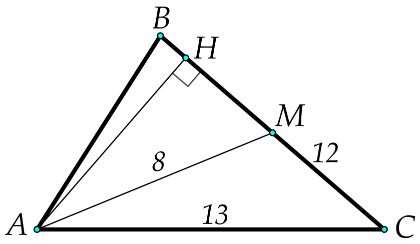
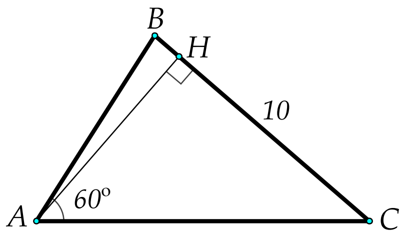
$\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $AB = 20,\ AC = 16,\ BC = 12.$



d) $BC = 19,\ AC = 15,\ AB = 6.$



e) $BC = 12,\ AC = 13,\ m_a = AM = 8.$	f) $\widehat{BAC} = 60^\circ,\ BC = 10,\ 3r = 5\sqrt{3}.$
	

BT 2. **(THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho tam giác ABC có $AB = 2,\ AC = 2\sqrt{3},\ \widehat{A} = 30°$. Tính độ dài BC, bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác ABC ?

Đáp số: $BC = 2,\ R = 2,\ S = \sqrt{3}$.

BT 3. **(THPT Lê Trọng Tấn – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho tam giác ABC có $AB = 3,\ BC = 4$ và $\widehat{ABC} = 120°$.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

Đáp số: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -6$.

b) Tính độ dài cạnh AC.

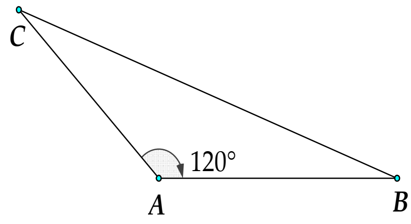
Đáp số: $AC = \sqrt{37}$.

BT 4. **(THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho tam giác ABC có $AB = 5,\ AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60°$.

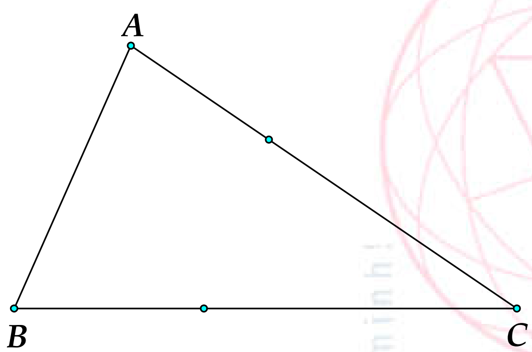
a) Tìm độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

BT 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 30°$, diện tích tam giác ABC bằng $9\sqrt{3}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.



BT 6. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 7$ và góc $\widehat{B} = 60°$.



a) Tính cạnh BC.

Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b) Trên đoạn AC, BC lấy lần lượt các điểm D, E sao cho $CD = CE = 4$. Tính đoạn DE.

BT 7. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{7}$ và $BC = 4$.

a) Tính góc B, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và diện tích tam giác ABC.

Đáp số: $\widehat{\mathrm{B}} = 120^\circ,\ R = \dfrac{2\sqrt{21}}{3},\ S_{ABC} = 2\sqrt{3}.$

b) Tính độ dài đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ góc B.

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}AB.BD.\sin\widehat{ABD} + \frac{1}{2}CB.BD.\sin\widehat{CBD}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}.2.BD.\sin 60^\circ + \frac{1}{2}.4.BD.\sin 60^\circ$$

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow BD = 4/3.$

BT 8. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho tam giác ABC có $AB = 2,\ AC = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài BC, diện tích tam giác ABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

BT 9. **(THPT Bùi Thị Xuân – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho tam giác ABC có $AB = 3,\ AC = 5$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB và E là trên AC thỏa $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}$.

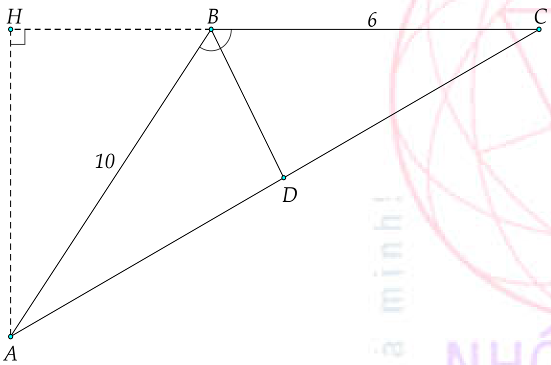
a) Tính CM và bán kính nội tiếp ΔAMC.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC}$.

Đáp số: $CM = \dfrac{\sqrt{79}}{2}$ và $S_{AMC} = \dfrac{15\sqrt{3}}{8}$.

Đáp số: $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{5}{4}$.

BT 10. Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $BC = 6$, góc $\widehat{B} = 120^\circ$.



a) Tính AC và diện tích tam giác ABC.

b) Tính đường cao AH và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

c) Tính độ dài đường phân giác trong BD của tam giác ABC.

Dạng toán 2: Chứng minh đẳng thức và nhận dạng tam giác

Nhóm 1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

BT 1. Cho tam giác ABC nhọn có diện tích S và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b.$

Chứng minh: $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}\cdot$

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Định lí hàm cos, ta có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc.\sin\text{A}} \Leftrightarrow \cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ (1)

Tương tự: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Cộng (1), (2), (3) được: $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

BT 2. Cho tam giác ABC nhọn có diện tích S và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b.$

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

a) Chứng minh: $a^2 = b^2 + c^2 - 4S.\cot A.$

Theo định lí hàm cos, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4.\left(\dfrac{1}{2}bc\sin A\right).\dfrac{\cos A}{\sin A} \Leftrightarrow$ ……………………………………

b) Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C).$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

BT 3. Gọi S là diện tích và $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp $\Delta ABC.$

a) Chứng minh: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$

Định lí hàm sin có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R},\ \sin B = \dfrac{b}{2R},\ \sin C = \dfrac{c}{2R}\cdot$

Ta có: $VT = 2R^2 \sin A \sin B \sin C =$ ……………………………………

……………………………………………………………………………………

b) Chứng minh: $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Ta có: $VT = Rr(\sin A + \sin B + \sin C) =$ ....

....

....

BT 4. Gọi S là diện tích và $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC.

a) Chứng minh: $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R.$

Định lí hàm cos có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\cdot$

Định lí hàm sin có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{2R}{a},\ \dfrac{1}{\sin B} = \dfrac{2R}{b},\ \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{2R}{c}\cdot$

Ta có: $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \cos A.\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\cdot\dfrac{2R}{a} = \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)R}{abc}$ (1)

Tương tự: $\cot B =$ ....

....

Tương tự: $\cot C =$ ....

....

Cộng $(1),(2),(3)$ vế theo vế được: ....

....

....

b) Chứng minh: $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$.

Ta có: $VP = a(b\cos C - c\cos B) = ab\cos C - ac\cos B =$ ....

$=$ ....

....

....

c) Chứng minh: $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$.

Ta có: $VP = a(c\cos C - b\cos B) = ac\cos C - ab\cos B = ac.\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - ab.\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$=$ ....

....

....

....

....

....

d) Chứng minh: $\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$.

Ta có: $VP = \sin A\cos B + \sin B\cos A = \dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ……………

$=$ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

e) Chứng minh: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Ta có: $VT = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} + \dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} + \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

$=$ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

f) Chứng minh: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$ với G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có: $VT = GA^2 + GB^2 + GC^2 = \left(\dfrac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}m_c\right)^2$ ……………

$=$ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

BT 5. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh: $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}\cdot$

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S},\ \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S},\ \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S}$ và $S = pr \Rightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{p}{S}\cdot$

Khi đó: $VT = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} =$ ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

BT 6. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 = 2c^2$. Chứng minh: $m_a + m_b + m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$.

Ta có: $VT = m_a + m_b + m_c = \sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}} + \sqrt{\dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}} + \sqrt{\dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}}$

$=$ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

BT 7. Cho tam giác ABC không vuông ở A, chứng minh: $S = \dfrac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\tan A.$

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}bc\cos A.\dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{1}{2}bc.\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\tan A$

$=$ ....

....

BT 8. Cho tam giác ABC có $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$ và trung tuyến $AM = \dfrac{c}{2}\cdot$

a) Chứng minh: $2b^2 = a^2 - c^2.$

Theo công thức trung tuyến: $m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

b) Chứng minh: $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C.$

Định lí hàm sin có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C.$

Theo câu $a)$, ta có: $2b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow 2(2R\sin B)^2 = (2R\sin A)^2 - (2R\sin C)^2$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

....

BT 9. Cho tam giác $ABC.$

a) Chứng minh rằng: $(p-a)(p-b)(p-c) \le \dfrac{1}{8}abc.$

Vì $(p-a) > 0;\ (p-b) > 0;\ (p-c) > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy (AM – GM) có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{2p-(a+b)}{2} = \frac{(a+b+c)-(a+b)}{2} = \frac{c}{2} \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $p - a = p - b \Leftrightarrow a = b.$

Tương tự: ....

....

....

....

....

Nhân vế theo vế của $(1), (2), (3)$ được: ....

....

....

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{r}{R} \le \dfrac{1}{2}\cdot$

Ta có: $\begin{cases} S = pr \\ S = \dfrac{abc}{4R} \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases} \Rightarrow S^2 = pr.\dfrac{abc}{4R} \Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{r}{R}\cdot\dfrac{pabc}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{r}{R}\cdot\dfrac{abc}{4} = (p-a)(p-b)(p-c) \le \dfrac{abc}{8}$ (theo câu a)) $\Leftrightarrow \dfrac{r}{R} \le \dfrac{1}{2}$ (đpcm).

BT 10. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$.

Công thức đường trung tuyến, có: $m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2) = 4m_a^2 + 3a^2 \overset{Cauchy}{\ge} 2\sqrt{4m_a^2.3a^2} = 4\sqrt{3}am_a \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 2\sqrt{3}am_a$

$\xrightarrow{Chia:\ a^2>0} \dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2} \ge \dfrac{2\sqrt{3}am_a}{a^2} \Rightarrow \dfrac{a}{m_a} \ge \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2}$ (1)

Tương tự: ....

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} b^2+c^2 = 2a^2 \\ a^2+c^2 = 2b^2 \\ a^2+b^2 = 2c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$

Nhóm 2. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

BT 11. Chứng minh rằng nếu $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Ta có: $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Leftrightarrow 5.\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} + \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

$\Leftrightarrow 10b^2 + 10c^2 - 5a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

....

....

BT 12. Chứng minh rằng nếu ba góc của tam giác ABC thỏa hệ thức $\sin A = 2\sin B \sin C$ thì tam giác ABC cân.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Định lí hàm sin, có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R},\ \sin B = \dfrac{b}{2R}\cdot$

Định lí hàm cos, có: $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot$ Theo đề, ta có: $\sin A = 2\sin B\cos C$

$\Leftrightarrow$ ....

....

....

BT 13. Chứng minh rằng nếu $a = 2b\cos C$ và $\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2$ thì tam giác ABC đều.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Theo đề, ta có: $\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Leftrightarrow b^3+c^3-a^3 = a^2(b+c-a)$

$\Leftrightarrow b^3+c^3-a^3 = a^2(b+c)-a^3 \Leftrightarrow (b^3+c^3)-a^2(b+c) = 0$

$\Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-bc)-a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-bc-a^2) = 0$

$\Leftrightarrow b+c = 0$ (vô lý vì $b+c>0$) hoặc $b^2+c^2-bc-a^2 = 0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 = bc.$

Theo định lí hàm cos, có: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{bc}{2bc} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$

Theo đề, ta lại có: $a = 2b\cos C \Leftrightarrow a = 2b.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow$ ....

....

....

....

....

BT 14. Tam giác ABC có đặc điểm gì, nếu $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$.

Học sinh đọc và bổ sung lời giải

Ta có: $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \Leftrightarrow \dfrac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \dfrac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2} \Leftrightarrow \dfrac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B} = \dfrac{(2a+c)^2}{(2a-c)(2a+c)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos B}{1-\cos B} = \dfrac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow \dfrac{1+\cos B}{2a+c} = \dfrac{1-\cos B}{2a-c} = \dfrac{(1+\cos B)+(1-\cos B)}{(2a+c)+(2a-c)} = \dfrac{1}{2a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos B}{2a+c} = \dfrac{1}{2a} \Rightarrow 1+\cos B = \dfrac{2a+c}{2a} \Rightarrow \cos B = \dfrac{c}{2a}$

$\Leftrightarrow$ ....

....

BT 15. Tam giác ABC có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$. Chứng minh: ABC là tam giác cân.

Lời giải tham khảo

Diện tích $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow ah_a = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Theo đề có: $h_a = \sqrt{p(p-a)} \Rightarrow a\sqrt{p(p-a)} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \overset{Cauchy}{\leq} (p-b)+(p-c) = 2p-(b+c) = 2.\dfrac{a+b+c}{2} - b - c = a.$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $p-b = p-c \Leftrightarrow b = c$. Do đó tam giác ABC cân.

BT 16. Chứng minh tam giác ABC có $S = \dfrac{1}{6}(ch_a + bh_c + ah_b)$ thì nó là tam giác đều.

Lời giải tham khảo

Theo đề bài, ta có: $S = \dfrac{1}{6}\left(ch_a + bh_c + ah_b\right) \Leftrightarrow S = \dfrac{1}{6}\left(c.\dfrac{2S}{a} + b.\dfrac{2S}{c} + a.\dfrac{2S}{b}\right)$

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{a}{b}\right) \Leftrightarrow 3 = \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{a}{b} \overset{Cauchy}{\geq} 3.\sqrt[3]{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{a}{b}} = 3.$

Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c \Rightarrow$ tam giác ABC là tam giác đều.

BT 17. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều nếu thỏa mãn:

$$2(a^2+b^2+c^2) = a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2).$$

Lời giải tham khảo

Ta có: $2(a^2+b^2+c^2) = a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

$\Leftrightarrow \left[a^2+b^2-ab(a+b)\right] + \left[b^2+c^2-bc(b+c)\right] + \left[c^2+a^2-ca(c+a)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Rightarrow$ Tam giác ABC đều (đpcm).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC. Trung tuyến AM có độ dài bằng

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. **B.** $\sqrt{3a^2-2b^2-2c^2}$.

C. $\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. **D.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$.

Câu 2. Trong tam giác ABC, câu nào sau đây **đúng** ?

A. $a^2=b^2+c^2+2bc.\cos A$. **B.** $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$.

C. $a^2=b^2+c^2+bc.\cos A$. **D.** $a^2=b^2+c^2-bc.\cos A$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ AC=b,\ p$ là nửa chu vi và S là diện tích tam giác đã cho. Xét hai mệnh đề sau đây:

$(i):\ S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

$(ii):\ 16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Trong các mệnh đề (i) và (ii) mệnh đề nào đúng ?

A. (i) và (ii). **B.** Không có. **C.** (i). **D.** (ii).

Câu 4. Diện tích tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3},\ \sqrt{2}$ và 1 bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ **B.** $\sqrt{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=AC=30\text{cm}$. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC bằng

A. $50\sqrt{2}\ \text{cm}^2$. **B.** $75\ \text{cm}^2$.

C. $15\sqrt{105}\ \text{cm}^2$. **D.** 50cm^2.

Câu 6. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $5,\ 12,\ 13$. Độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất bằng

A. 12. **B.** $\frac{120}{13}\cdot$

C. $\frac{30}{13}\cdot$ **D.** $\frac{60}{13}\cdot$

Câu 7. Tam giác có ba cạnh là $9,\ 10,\ 11$. Đường cao lớn nhất của tam giác bằng

A. $\frac{60\sqrt{2}}{9}\cdot$ **B.** $3\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{70}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho tam giác với ba cạnh $a=13,\ b=14,\ c=15$. Đường cao h_c bằng

A. $5\frac{3}{5}\cdot$ **B.** 12.

C. $10\frac{1}{5}\cdot$ **D.** $11\frac{1}{5}\cdot$

Câu 9. Tam giác ABC có tổng hai góc B và C bằng 135° và độ dài cạnh BC bằng a. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng

A. $a\sqrt{3}.$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$

C. $a\sqrt{2}.$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

Câu 10. Cho tam giác ABC biết $A = 60°$, $b = 10$ và $c = 20$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $50\sqrt{5}.$ **B.** $50.$

C. $50\sqrt{2}.$ **D.** $50\sqrt{3}.$

Câu 11. Tam giác ABC có $BC = 5\sqrt{5}$, $AC = 5\sqrt{2}$ và $AB = 5$. Số đo của góc $\widehat{BAC}$ bằng

A. $60°.$ **B.** $45°.$

C. $30°.$ **D.** $120°.$

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$ và $CA = 9\text{cm}$. Giá trị $\cos A$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}\cdot$ **B.** $\dfrac{1}{2}\cdot$

C. $\dfrac{2}{3}\cdot$ **D.** $\dfrac{1}{3}\cdot$

Câu 13. Tam giác ABC có $AC = 3\sqrt{3}$, $AB = 3$ và $BC = 6$. Số đo góc $\widehat{ABC}$ bằng

A. $60°.$ **B.** $45°.$

C. $30°.$ **D.** $120°.$

Câu 14. Tam giác ABC có góc B tù, $AB = 3$, $AC = 4$ và có diện tích bằng $3\sqrt{3}$. Góc A có số đo bằng

A. $30°.$ **B.** $60°.$

C. $45°.$ **D.** $120°.$

Câu 15. Tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 13$, $\widehat{BAC} = 30°$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $39\sqrt{3}.$ **B.** $78\sqrt{3}.$

C. $39.$ **D.** $78.$

Câu 16. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 105°$, $\widehat{ABC} = 45°$ và $AC = 10$. Độ dài cạnh AB bằng

A. $5\sqrt{6}.$ **B.** $5\sqrt{6}/2.$

C. $5\sqrt{2}.$ **D.** $10\sqrt{2}.$

Câu 17. Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = \sqrt{6}$ và $c = \sqrt{3} + 1$. Góc B gần bằng

A. $115°.$ **B.** $75°.$

C. $60°.$ **D.** $53°32'.$

Câu 18. Cho tam giác DEF có $DE = DF = 10$ cm và $EF = 12$ cm. Gọi I là trung điểm của cạnh EF. Đoạn thẳng DI có độ dài bằng

A. 8 cm. **B.** 4 cm.

C. 6,5 cm. **D.** 7 cm.

Câu 19. Tam giác ABC có $AB = 9$, $BC = 10$ và $CA = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là trung điểm AM. Độ dài BN bằng

A. $5.$ **B.** $\sqrt{34}.$

C. $6.$ **D.** $4\sqrt{2}.$

Câu 20. Tam giác ABC có $AB = 5,\ BC = 8$ và $CA = 6$. Gọi G là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng AG bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\cdot$ **B.** $\dfrac{\sqrt{58}}{2}\cdot$

C. $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}\cdot$ **D.** $\dfrac{\sqrt{58}}{3}\cdot$

Câu 21. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5,\ AC = 8$ và diện tích bằng 12. Độ dài cạnh BC bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4.

C. 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 22. Tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng

A. $4S$. **B.** $6S$.

C. $2S$. **D.** $3S$.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $BC = 6,\ CA = 4$ và $AB = 5$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{8}\cdot$

B. $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{1}{8}\cdot$

C. $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = -\dfrac{1}{8}\cdot$

D. $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{3}{4}\cdot$

Câu 24. Tam giác ABC có $AB = 10,\ AC = 24$ và diện tích tam giác ABC bằng 120. Độ dài đường trung tuyến AM bằng

A. 13. **B.** $7\sqrt{3}$.

C. 26. **D.** $11\sqrt{2}$.

Câu 25. Tam giác ABC có $a = 8,\ b = 7$ và $c = 5$. Diện tích của tam giác đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$.

C. $5\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 26. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài bằng

A. 9 cm. **B.** $7,5$ cm.

C. 8 cm. **D.** 10 cm.

Câu 27. Tam giác ABC có $AB = 5,\ AC = 9$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Độ dài cạnh BC bằng

A. 22. **B.** $\sqrt{17}$.

C. $\sqrt{129}$. **D.** $2\sqrt{17}$.

Câu 28. Tam giác ABC có $AB = 4,\ AC = 6$ và trung tuyến $BM = 3$. Độ dài cạnh BC bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $2\sqrt{5}$.

C. 4. **D.** 8.

Câu 29. Tam giác ABC có $AB = 4,\ AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Độ dài cạnh BC bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{22}$.

C. $2\sqrt{22}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 30. Tam giác ABC có các góc $\widehat{ABC} = 30^\circ,\ \widehat{ACB} = 45^\circ$ và $AB = 3$. Độ dài cạnh AC bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot$ **B.** $\sqrt{6}$

C. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\cdot$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\cdot$

Câu 31. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC có ba cạnh là $13,\ 14,\ 15$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3.

C. 2. **D.** 4.

Câu 32. Tam giác ABC có $AB = 1,\ AC = 3,\ \widehat{BAC} = 60^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{5}{2}\cdot$ **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}\cdot$

C. $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 33. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là $5,\ 12,\ 13$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$.

C. 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 34. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 75^\circ,\ \widehat{ABC} = 45^\circ$ và $AC = 2$. Độ dài cạnh AB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 35. Cho tam giác ABC có $AB = 8\text{cm},\ AC = 18\text{cm}$ và có diện tích là $64\ \text{cm}^2$. Giá trị $\sin A$ bằng

A. $\dfrac{8}{9}\cdot$ **B.** $\dfrac{3}{8}\cdot$

C. $\dfrac{4}{5}\cdot$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Câu 36. Tam giác ABC có các góc $\widehat{BAC} = 75^\circ$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$ bằng

A. $\dfrac{6}{5}\cdot$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot$

C. $\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot$

Câu 37. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R, $AB = R$, $AC = R\sqrt{2}$. Tính góc $\widehat{BAC}$ biết $\widehat{BAC}$ là góc tù.

A. 120°. **B.** 150°.

C. 135°. **D.** 105°.

Câu 38. Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=4$ và $\tan A=2\sqrt{2}$. Độ dài cạnh BC bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{33}$.

C. $\sqrt{17}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 39. Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=4$ và $\tan A=-2\sqrt{2}$. Độ dài cạnh BC bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{33}$.

C. 7. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 40. Tam giác ABC có $AB=7,\ AC=5$ và $\cos(B+C)=-\dfrac{1}{5}\cdot$ Độ dài đoạn BC bằng

A. $2\sqrt{22}$. **B.** $4\sqrt{22}$.

C. $4\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Câu 41. Tam giác ABC có $AB=4,\ AC=6\ \cos B=\dfrac{1}{8}$ và $\cos C=\dfrac{3}{4}\cdot$ Độ dài cạnh BC Bằng

A. 5. **B.** $3\sqrt{3}$

C. 2. **D.** 7.

Câu 42. Tam giác ABC có $BC=\sqrt{5},\ AC=3$ và $\cot C=-2$. Độ dài cạnh AB bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{26}$.

C. $\sqrt{21}$. **D.** $\dfrac{9}{5}\cdot$

Câu 43. Tam giác ABC có $BC=10$ và $\dfrac{\sin A}{5}=\dfrac{\sin B}{4}=\dfrac{\sin C}{3}\cdot$ Chu vi của tam giác đó bằng

A. 36.

B. 24.

C. 22.

D. 12.

Câu 44. Tam giác ABC có $BC=12,\ CA=9$ và $AB=6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM=4$. Độ dài đoạn thẳng AM bằng

A. $\sqrt{19}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{20}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Câu 45. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{BAC}=120^\circ$ và $AB=AC=a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $5BM=2BC$. Độ dài đoạn thẳng AM bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$ **B.** $\dfrac{11a}{5}\cdot$

C. $\dfrac{a\sqrt{7}}{5}\cdot$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\cdot$

Câu 46. Trong tam giác ABC nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì

A. $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} - \dfrac{1}{\sin C}\cdot$

B. $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}\cdot$

C. $2\sin A = \sin B + \sin C.$

D. $\sin A = 2\sin B + 2\sin C.$

Câu 47. Cho tam giác ABC, biết rằng $AB = 6$ và $2\sin A = 3\sin B = 4\sin C.$ Chu vi tam giác bằng

A. $10\sqrt{6}.$

B. $26.$

C. $13.$

D. $5\sqrt{26}.$

Câu 48. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = b$ và $AB = c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM} = 30°$. Tỉ số $\dfrac{MB}{MC}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}c}{b}\cdot$ **B.** $\dfrac{b-c}{b+c}\cdot$

C. $\dfrac{b\sqrt{3}}{3c}\cdot$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}c}{3b}\cdot$

Câu 49. Hình bình hành có hai cạnh là 3 và 5, một đường chéo bằng 5. Tìm độ dài đường chéo còn lại.

A. $\sqrt{43}.$

B. $2\sqrt{13}.$

C. $8.$

D. $8\sqrt{3}.$

Câu 50. Trong tam giác ABC nếu có $a^2 = b.c$ thì

A. $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c}\cdot$ **B.** $h_a^2 = h_b.h_c.$

C. $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}\cdot$ **D.** $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{2}{h_b} + \dfrac{2}{h_c}\cdot$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.A	4.A	5.B	6.D	7.A	8.D	9.D	10.D
11.A	12.C	13.A	14.B	15.C	16.C	17.C	18.A	19.B	20.D
21.C	22.B	23.C	24.A	25.A	26.B	27.D	28.B	29.C	30.A
31.D	32.B	33.C	34.D	35.A	36.D	37.D	38.C	39.B	40.D
41.A	42.C	43.B	44.A	45.C	46.B	47.B	48.D	49.A	50.B