

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm các giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trung điểm của AB nằm trên trục hoành.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Cho số phức z thỏa mãn: $(z - i)(1 - 2i) - 1 - 3i = 0$. Tính môđun của số phức $w = z^2 - \bar{z}$.

b) Giải phương trình: $2^{4x-2} \cdot 4^{-x+2} = 3 + 2^x$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos 2x + 2} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; -3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 12 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Ox , đi qua A và tiếp xúc với (P) .

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2}{(\sin \alpha - \cos \beta)^2 + (\cos \alpha + \sin \beta)^2}$.

b) Trong giải bóng đá của trường THPT X có 16 đội tham gia, trong đó có một đội của lớp Y và một đội của lớp Z. Ban tổ chức giải tiến hành bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai bảng A và B, mỗi bảng 8 đội. Tính xác suất để hai đội Y và Z ở cùng một bảng.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi I là trung điểm của cạnh AB . Các mặt phẳng (SBD) và (SIC) cùng vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và IC theo a .

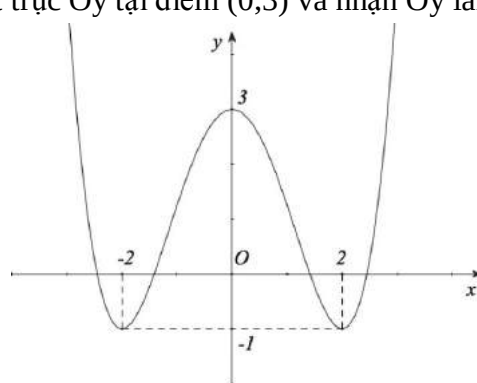
Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC . Đường thẳng đi qua A vuông góc với CD có phương trình $4x - 3y + 20 = 0$. Biết rằng phương trình đường thẳng $AD: x - 2y + 10 = 0$, điểm B nằm trên đường thẳng $d: x + y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B, C .

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-y}} + 2^{-\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}} = \frac{5}{2} \\ 4x\sqrt{y} - \sqrt{8x+y+1} = 4y-x-2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

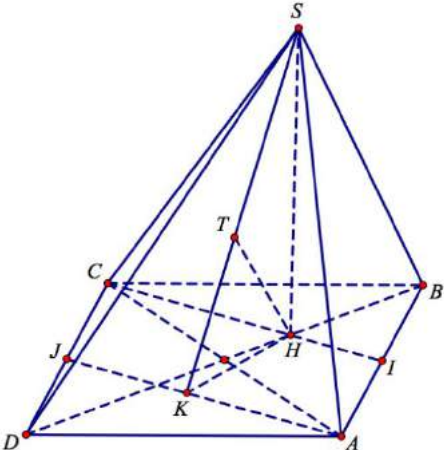
Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a+1)(b+1)(c+1) + \frac{4}{\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+5}}$.

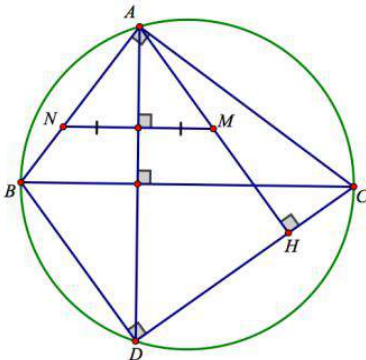
Hết

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu	Đáp án	Điểm																													
1 (1,0 điểm)	(1 điểm)																														
	- TXĐ: $D = \mathbb{R}$	0.25																													
	- Sự biến thiên: $y' = x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$	0.25																													
	- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 \right) = +\infty.$																														
	- Bảng biến thiên Bảng biến thiên	0.25																													
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> 		x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		y	$+\infty$				3			
	x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$																					
	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$																						
	y	$+\infty$				3				$+\infty$																					
	- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$ - Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$ - Hàm số đạt CĐ tại $(0; 3)$ và đạt CT tại $(-2; -1); (2; -1)$ - Hàm số đạt cực đại $x = 0, y_{cd} = 3$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 2, y_{ct} = -1$.	0.25																													
- Vẽ đồ thị: Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; 3)$ và nhận Oy làm trục đối xứng																															
2 (1 điểm)	(1 điểm)																														
	*Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1-2x}{x+1} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m+3)x + m-1 = 0$ (1). (vì $x = -1$ không là nghiệm).	0.25																													
	*Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . $\Leftrightarrow \Delta = (m+3)^2 - 4(m-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 13 > 0, \forall m$.	0.25																													
	*Khi đó $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$ và trung điểm I của AB là $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2 + 2m}{2}\right).$	0.25																													
	*Vì I thuộc Ox nên $x_1 + x_2 + 2m = 0$; theo vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -m - 3$. Vậy ta có phương trình: $-m - 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.	0.25																													

3 (1 điểm)	a) (0,5 điểm)	
	* Ta có: $z - i = \frac{1 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(1 + 3i)(1 + 2i)}{5} = -1 + i \Rightarrow z = -1 + 2i.$	0.25
	*Vì vậy $w = (-1 + 2i)^2 - (-1 - 2i) = -2 - 2i \Rightarrow w = 2\sqrt{2}.$	0.25
	b) (0.5 điểm)	
	Phương trình tương đương với: $4.2^{2x} = 3 + 2^x$	0.25
	$\Leftrightarrow (2^x - 1)(4.2^x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$	0.25
4 (1 điểm)	Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos 2x + 2} dx.$ (1 điểm)	
	*Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x}{\cos 2x + 2} dx.$	0.25
	*Đặt $t = \cos 2x + 2 \Rightarrow \cos 2x = t - 2 \Rightarrow -2 \sin 2x dx = dt.$	0.25
	*Với $x = 0 \Rightarrow t = 3; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2.$	0.25
	*Vì vậy $I = \int_3^2 \frac{-(t - 2)dt}{t} = \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{t}\right) dt = \left(t - 2 \ln t \right) \Big _2^3 = 1 - 2 \ln \frac{3}{2}.$	0.25
5 (1 điểm)	Viết phương trình mặt cầu (1 điểm)	
	*Gọi tâm của (S) là I, vì I thuộc Ox nên	
	$I(t; 0; 0) \Rightarrow IA = \sqrt{(t - 1)^2 + 9}; d(I; (P)) = \frac{ t - 12 }{3}.$	0.25
	*Vì (S) đi qua A và (P) tiếp xúc (S) nên: $IA = d(I; (P)) = R.$	
	*Ta có phương trình: $\sqrt{(t - 1)^2 + 9} = \frac{ t - 12 }{3} \Leftrightarrow 9(t^2 - 2t + 10) = (t - 12)^2 \Leftrightarrow 8t^2 + 6t - 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{9}{4} \end{cases}.$	0.25
	+) Với $t = -3 \Rightarrow I(-3; 0; 0), R = 5 \Rightarrow (S): (x + 3)^2 + y^2 + z^2 = 25.$	
	+) Với $t = \frac{9}{4} \Rightarrow I\left(\frac{9}{4}; 0; 0\right), R = \frac{13}{4} \Rightarrow (S): \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{169}{16}.$	0.25
	*Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn là $(x + 3)^2 + y^2 + z^2 = 25; \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{169}{16}.$	0.25
6 (1 điểm)	a) Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. Tính giá trị biểu thức P (0.5 điểm)	
	$P = \frac{2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{2 + 2(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta)} = \frac{1 + \cos(\beta - \alpha)}{1 + \sin(\beta - \alpha)}.$	0.25
	$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}.$	0.25

	b) Tính xác suất (0.5 điểm) Số phần tử của không gian mẫu là số cách chia 16 đội thành 2 bảng đầu mỗi bảng gồm 8 đội có $n(\Omega) = C_{16}^8 \cdot C_8^8$. *Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Có các khả năng xảy ra biến cố A như sau: +) Hai đội Y và Z thuộc cùng bảng A; có $1 \cdot C_{14}^6 \cdot C_8^8$ cách. +) Hai đội Y và Z thuộc cùng bảng B có $1 \cdot C_{14}^6 \cdot C_8^8$ cách. *Vậy $n(A) = 2C_{14}^6 \cdot C_8^8$ và $P(A) = \frac{2C_{14}^6 \cdot C_8^8}{C_{16}^8 \cdot C_8^8} = \frac{7}{15}$.	0.25 0.25
7 (1 điểm)	a) Tính thể tích (0.5 điểm)  * $S_{ABCD} = a^2$. *Gọi $H = IC \cap BD$, ta có: $\begin{cases} (SIC) \cap (SBD) = SH \\ (SIC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \end{cases}$ $\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SBH} = 60^\circ$	0.25
	*Theo Talets ta có: $\frac{HB}{HD} = \frac{IB}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow HB = \frac{BD}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. *Suy ra: $SH = HB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. *Vì vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.	0.25
	b) Tính khoảng cách (0.5 điểm) *Gọi J là trung điểm CD; ta có $AI = CJ, AI \parallel CJ \Rightarrow CIAJ$ là hình bình hành, do đó $CI \parallel AJ$. *Suy ra $IC \parallel (SAJ) \Rightarrow d(SA; IC) = d(IC; (SAJ)) = d(H; (SAJ))$ (1). *Kẻ $HK \perp AJ (K \in AJ), HT \perp SK (T \in SK) \Rightarrow HT \perp (SAJ) \Rightarrow HT = d(H; (SAJ))$ (2). *Ta có $CI = \sqrt{CB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow HK = d(A; CI) = \frac{2S_{ACI}}{CI} = \frac{S_{ABCD}}{2CI} = \frac{a}{\sqrt{5}}$. * Tam giác vuông SHK có $\frac{1}{HT^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{13}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{26}}{13}$ (3). *Từ (1), (2), (3) suy ra: $d(SA; IC) = \frac{a\sqrt{26}}{13}$.	0,25 0.25

8 (1 điểm)	Tìm tọa độ các điểm B, C.	
	*Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x - 3y + 20 = 0 \\ x - 2y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 4).$	
	*Gọi H là giao điểm của CD và đường thẳng đi qua A vuông góc CD. *Vì D là điểm đối xứng của A qua BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$, do đó ABDC là tứ giác nội tiếp. *Ta có: $\widehat{DAH} = 90^\circ - \widehat{ADC}$ * $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$). * $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{DAB}$ *Từ đó suy ra: $\widehat{DAH} = \widehat{DAB} \Rightarrow AD$ là tia phân giác góc $\widehat{BAH}$	0.25
	*Lấy điểm M(-5;0) là điểm thuộc AH; gọi N là điểm đối xứng của M qua AD, ta có N thuộc AB và tọa độ điểm N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x-5}{2} - 2 \cdot \frac{y+0}{2} + 10 = 0 \\ 2(x+5) + 1(y-0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow N(-7; 4).$ *Đường thẳng AB đi qua A, N có PT: $y - 4 = 0$. *Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 4).$	0.25
	*Đường thẳng AC đi qua A, vuông góc AB có PT: $x + 2 = 0$. *Đường thẳng BC đi qua B, vuông góc AD có PT: $2x + y - 6 = 0$. *Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-2; 10).$ *Vậy B(1; 4), C(-2; 10).	0.25
9 (1 điểm)	Giải hệ (1 điểm)	
	*Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0, x^2 - y > 0$. *Đặt $t = \sqrt{x^2 - y} (t > 0)$, phương trình thứ nhất của hệ trở thành: $2^t + 2^{\frac{1}{t}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2^t + 2^{\frac{1}{t}} - \frac{5}{2} = 0 (*)$ *Xét hàm số $f(t) = 2^t + 2^{\frac{1}{t}} - \frac{5}{2}$ trên $(0; +\infty)$, ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + \frac{1}{t^2} 2^{\frac{1}{t}} \ln 2 > 0, \forall t > 0$.	0.25
	Do đó f(t) đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 0$ vì vậy () có nghiệm duy nhất $t = 1$ trên $(0; +\infty)$.	0.25

	*Vậy $\sqrt{x^2 - y} = 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$. *Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $4x\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 8x} = 4(x^2 - 1) - x - 2.$ *Kết hợp với điều kiện $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. *Phương trình tương đương với: $4\sqrt{x^2 - 1}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) + \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 8x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{4(x - 1)}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 8x}} = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} \left[\frac{\sqrt{x + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 8x}} \right] = 0 (**).$	0.25
	*Vì $x + 2 + \sqrt{x^2 + 8x} > x + \sqrt{x^2 - 1}; \sqrt{x - 1} < \sqrt{x + 1}, \forall x \geq 1$. *Suy ra: $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 8x}} > 0, \forall x \geq 1$. *Vì vậy $(**) \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. *Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$.	0.25
10 (1 điểm)	Tìm GTNN (1 điểm) *Theo giả thiết và bất đẳng thức AM – GM ta có: $3 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} \Rightarrow a + b + c \geq 3.$ *Và $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) \Rightarrow ab + bc + ca \geq a + b + c$. *Suy ra: $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = \frac{4}{3}(ab + bc + ca) + a + b + c + 1 \geq \frac{7}{3}(a + b + c) + 1$ (1). $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$ $= (a + b + c)^3 + (ab + bc + ca)(1 - 3(a + b + c))$ $\leq (a + b + c)^3 + (a + b + c)(1 - 3(a + b + c))$ (2)	0.25
	*Đặt $t = a + b + c$ ($t \geq 3$), từ (1), (2) ta có: $P \geq \frac{7}{3}t + 1 + \frac{4}{\sqrt[3]{t^3 - 3t^2 + t + 5}}$. *Xét hàm số $f(t) = \frac{7}{3}t + 1 + \frac{4}{\sqrt[3]{t^3 - 3t^2 + t + 5}}$ trên $[3; +\infty)$, ta có:	0.25
	$f'(t) = \frac{7}{3} - \frac{4(3t^2 - 6t + 1)}{3\sqrt[3]{(t^3 - 3t^2 + t + 5)^4}} = \frac{7\sqrt[3]{(t^3 - 3t^2 + t + 5)^4} - 4(3t^2 - 6t + 1)}{3\sqrt[3]{(t^3 - 3t^2 + t + 5)^4}}$ $\geq \frac{14(t^3 - 3t^2 + t + 5) - 4(3t^2 - 6t + 1)}{3\sqrt[3]{(t^3 - 3t^2 + t + 5)^4}} = \frac{14t^3 - 54t^2 + 38t + 66}{3\sqrt[3]{(t^3 - 3t^2 + t + 5)^4}} > 0, \forall t \geq 3.$	0.25
	*Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[3; +\infty)$ và $P \geq f(t) \geq f(3) = 10$. *Với $a = b = c = 1$ thì $P = 10$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 10.	0.25