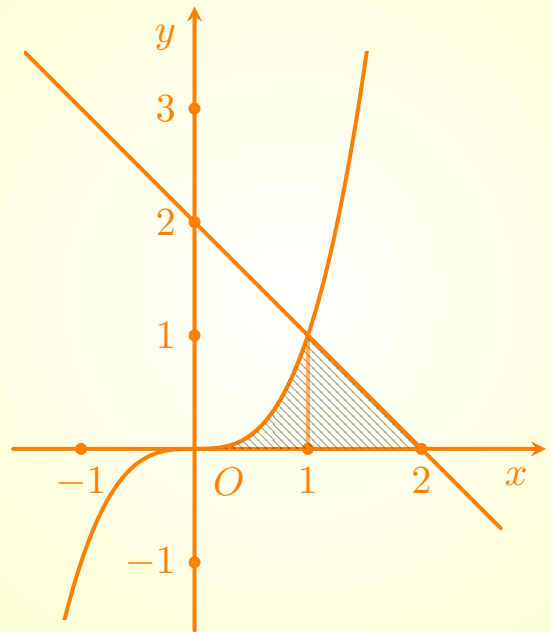


TOÁN 12

π Chuyên đề

SỐ PHỨC



TL

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Chương 4.	SỐ PHỨC	1
§1 –	Xác định các yếu tố cơ bản, biểu diễn hình học	1
(A)	Lý thuyết.....	1
(B)	Bài tập minh họa.....	2
	Bảng đáp án.....	7
§2 –	Các phép toán số phức	8
(A)	Tóm tắt lý thuyết.....	8
(B)	Bài tập minh họa.....	8
	Bảng đáp án.....	20
	Bảng đáp án.....	30
§3 –	Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình	31
(A)	Bài tập minh họa.....	31
	Bảng đáp án.....	51
§4 –	Phương trình bậc hai với hệ số thực	52
(A)	Tóm tắt lý thuyết.....	52
(B)	Bài tập minh họa.....	52
	Bảng đáp án.....	64
§5 –	Cực trị số phức	65
(A)	Tóm tắt lý thuyết.....	65
(B)	Ví dụ minh họa.....	66
	Bảng đáp án.....	81

BÀI 1. XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN, BIỂU DIỄN HÌNH HỌC

A LÝ THUYẾT

1. Phần thực, phần ảo của số phức, số phức liên hợp

- Số phức có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$). Phần thực của z là a , phần ảo của z là b và i được gọi là đơn vị ảo.
- Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

$$\oplus z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\oplus \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\oplus \text{ Tổng và tích của } z \text{ và } \bar{z} \text{ luôn là một số thực.}$$

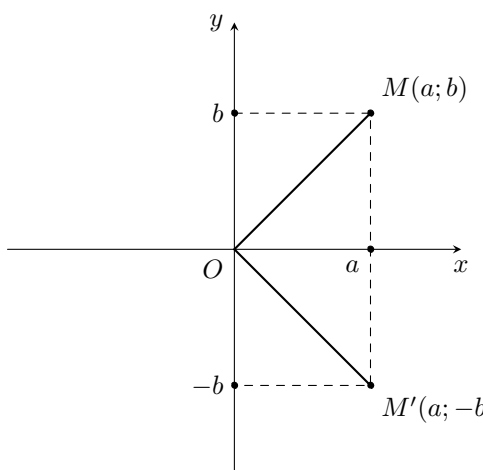
- Lưu ý: $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i$; với $n \in \mathbb{N}$.

2. Hai số phức bằng nhau

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$).
Khi đó:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức, môđun của số phức



- Biểu diễn hình học của số phức

☑ Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ.

☑ z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox .

• Mô đun của số phức

☑ Mô đun của số phức z là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

☑ Ta có: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$; $|z| = |\bar{z}|$.

B BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- (A) 2. (B) -2. (C) -1. (D) 1.

💬 Lời giải.

Ta có $z = 1 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 + 2i$.

Vậy $\bar{z}$ có phần ảo $b = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(3 - 2i)(x - yi) - 4(1 - i) = (2 + i)(x + yi)$.

- (A) $x = 3, y = -1$. (B) $x = -3, y = -1$. (C) $x = -1, y = 3$. (D) $x = 3, y = 1$.

💬 Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Có } (3 - 2i)(x - yi) - 4(1 - i) &= (2 + i)(x + yi) \Leftrightarrow 3x - 2y - 4 + (-2x - 3y + 4)i = 2x - y + (x + 2y)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 2x - y \\ -2x - 3y + 4 = x + 2y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ -3x - 5y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 - 3i$. Tính mô-đun của số phức $w = z_1^2 - z_2$.

- (A) $|w| = 7$. (B) $|w| = 5$. (C) $|w| = \sqrt{19}$. (D) $|w| = \sqrt{53}$.

💬 Lời giải.

Ta có: $w = z_1^2 - z_2 = (2 + i)^2 - (1 - 3i) = 2 + 7i \Rightarrow |w| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $2z = i(\bar{z} + 3)$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. (C) $|z| = \sqrt{5}$. (D) $|z| = \sqrt{10}$.

💬 Lời giải.

Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, suy ra $\bar{z} = a - bi$.

Thay vào đẳng thức $2z = i(\bar{z} + 3)$ ta có

$$\begin{aligned} 2(a + bi) &= i(a - bi + 3) \Leftrightarrow 2a + 2bi = b + (a + 3)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b \\ 2b = a + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $z = 1 + 2i$, suy ra $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $z + 2\bar{z} = 6 + 2i$. Điểm biểu diễn số phức z có tọa độ là

- (A) $(2; -2)$. (B) $(-2; -2)$. (C) $(2; 2)$. (D) $(-2; 2)$.

💬 Lời giải.

Gọi số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo bài ra ta có

$$(x + yi) + 2(x - yi) = 6 + 2i \Leftrightarrow 3x - yi = 6 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy điểm biểu diễn số phức z có tọa độ là $(2; -2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Tìm mô đun của số phức z , biết $z - (2 + 3i)\bar{z} = -17 + 9i$.

(A) $|z| = \sqrt{26}$.

(B) $|z| = \sqrt{17}$.

(C) $|z| = \sqrt{29}$.

(D) $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Suy ra $\bar{z} = a - bi$.

Ta có

$$\begin{aligned} z - (2 + 3i)\bar{z} = -17 + 9i &\Leftrightarrow (a + bi) - (2 + 3i)(a - bi) = -17 + 9i \\ &\Leftrightarrow a + bi - 2a + 2bi - 3ai - 3b = -17 + 9i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = -17 \\ -3a + 3b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z = 2 + 5i$. Do đó $|z| = \sqrt{29}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 7. Tìm tất cả các số thực x, y để hai số phức $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5$, $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$ là hai số phức liên hợp của nhau.

(A) $\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z_1 = \bar{z}_2 &\Leftrightarrow 9y^2 - 4 - 10xi^5 = 8y^2 - 20i^{11} \\ &\Leftrightarrow 9y^2 - 4 - 10xi = 8y^2 + 20i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 4 = 8y^2 \\ -10x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 8. Biết số phức z thỏa mãn. $\begin{cases} \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \end{cases}$. Số phức $\bar{z}$ bằng

(A) $\bar{z} = 1 + i$.

(B) $\bar{z} = 1 - i$.

(C) $\bar{z} = -1 - i$.

(D) $\bar{z} = -1 + i$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

Ta có

$$\begin{cases} \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z-3i| = |z+i| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \\ a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ 8b - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1. \end{aligned}$$

Do đó $z = 1 + i \Rightarrow \bar{z} = 1 - i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Tính môđun của số phức z , biết $(1 - 2i)z + 2 - i = -12i$.

- (A) 5. (B) $\sqrt{7}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &(1 - 2i)z + 2 - i = -12i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{-2 - 11i}{1 - 2i} = \frac{(-2 - 11i)(1 + 2i)}{1^2 + (-2)^2} = 4 - 3i \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có số phức nghịch đảo $z^{-1} = \frac{a - bi}{4}$ thì

- (A) $a^2 + b^2 = 2$. (B) $a^2 + b^2 = 4$. (C) $a^2 + b^2 = 8$. (D) $a^2 + b^2 = 16$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{a - bi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{a - bi}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a + bi} &= \frac{a - bi}{4} \Leftrightarrow (a + bi)(a - bi) = 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $z - 3 + i = |z|i$. Giá trị của $a + b$ bằng

- (A) -1. (B) 7. (C) 5. (D) 12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z - 3 + i &= |z|i \Leftrightarrow a + bi - 3 + i = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot i \\ \Leftrightarrow a - 3 + (b + 1)i &= (\sqrt{a^2 + b^2})i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = 0 \\ b + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a + b = 3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho i là đơn vị ảo. Nghiệm của phương trình $3z + i - 1 = \frac{i+2}{i-2}$ là

- (A) $\frac{2}{15} - \frac{3}{5}i$. (B) $\frac{2}{15} + \frac{3}{5}i$. (C) $-\frac{2}{15} - \frac{2}{5}i$. (D) $-\frac{2}{15} + \frac{3}{5}i$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3z + i - 1 = \frac{i+2}{i-2} &\Leftrightarrow 3z + i - 1 = \frac{(i+2)(-i-2)}{5} \\ &\Leftrightarrow 3z = \frac{-3-4i}{5} - i + 1 \Leftrightarrow 3z = \frac{2-9i}{5} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2}{15} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2 - 2018z = 2019|z|^2$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có $z^2 - 2018z = 2019|z|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2018a = 2019(a^2 + b^2) & (1) \\ 2ab - 2018b = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta được $\begin{cases} b = 0 \\ a = 1009. \end{cases}$

Thay $b = 0$ vào (1) ta được $-2018a = 2018a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1. \end{cases}$

Do đó trường hợp này ta có 2 số phức thỏa yêu cầu là $z = 0; z = -1$.

Thay $a = 1009$ vào (1) ta được $-2018 \cdot 1009 \cdot 1010 = 2020b^2$ vô nghiệm do $b \in \mathbb{R}$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hai số phức $z = 3 - 4i$ và $z' = (2 + m) + mi (m \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z'| = |iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

- (A) -1. (B) $\frac{\sqrt{46}}{2}$. (C) 0. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $|z'| = |iz| = |i| \cdot |z| \Leftrightarrow \sqrt{(2+m)^2 + m^2} = 5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-2 + \sqrt{46}}{2} \\ m = \frac{-2 - \sqrt{46}}{2}. \end{cases}$

Tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z| = 1$ và $|z^2 + 4| = 2\sqrt{3}$.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Gọi số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có $z^2 + 4 = a^2 - b^2 + 4 + 2abi$.

Từ giả thiết, ta suy ra

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a^2 - b^2 + 4)^2 + 4a^2b^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a^2 + b^2)^2 + 8a^2 - 8b^2 = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 8a^2 - 8b^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{16} \\ b^2 = \frac{13}{16} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{4}; b = \pm \frac{\sqrt{13}}{4} \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{4}; b = \pm \frac{\sqrt{13}}{4} \end{cases}$$

Vậy có 4 số phức z thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 2i\bar{z} = 3 + 3i$. Tính giá trị biểu thức: $P = (a + i)^{2019} + (b - i)^{2019}$.

(A) -2^{1010} .

(B) -2^{1009} .

(C) -2^{1011} .

(D) -2^{1008} .

Lời giải.

Ta có

$$z + 2i\bar{z} = 3 + 3i \Leftrightarrow a + bi + 2i(a - bi) = 3 + 3i \Leftrightarrow a + 2b + (2a + b)i = 3 + 3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= (a + i)^{2019} + (b - i)^{2019} = (1 + i)^{2019} + (1 - i)^{2019} \\ &= (1 + i) [(1 + i)^2]^{1009} + (1 - i) [(1 - i)^2]^{1009} \\ &= (1 + i)(2i)^{1009} + (1 - i)(-2i)^{1009} = 2^{1009}(1 + i)i - 2^{1009}(1 - i)i \\ &= 2^{1009}(i + i^2 - i + i^2) = 2^{1009}(-2) = -2^{1010}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 17. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$ và $|z| = 1$

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có

$$\begin{cases} |z + i + 1| = |\bar{z} - 2i| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = a^2 + (b + 2)^2 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ (b + 1)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức $z = -i$ và $z = 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 18. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 3; y = -1$.

(B) $x = \frac{2}{3}; y = -1$.

(C) $x = 3; y = -3$.

(D) $x = -3; y = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(3x + 2yi) + (3 - i) &= 4x - 3i \Leftrightarrow (3x + 3 - 4x) + (2y - 1 + 3)i = 0 \\ &\Leftrightarrow (3 - x) + (2y + 2)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 19. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2 + 2|z| = 0$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Khi đó

$$\begin{aligned}z^2 + 2|z| &= 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + 2abi = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -b^2 + 2\sqrt{b^2} = 0 \\ b = 0 \\ a^2 + 2\sqrt{a^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ b = 2 \\ a = 0 \\ b = -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy có 3 số phức z cần tìm.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 20. Với mọi số thuần ảo z , số $z^2 + |z|^2$ là

(A) số thực dương.

(B) số thực âm.

(C) số 0.

(D) số thuần ảo khác 0.

Lời giải.

Ta có $z = bi$ ($b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2 + |z|^2 = (bi)^2 + b^2 = 0$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 21. Cho số phức $z = 10 - 2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ là

(A) Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng $-2i$. **(B)** Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng -2 .

(C) Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng 2 . **(D)** Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng $2i$.

Lời giải.

Số phức $\bar{z} = 10 + 2i$ nên phần thực bằng 10 phần ảo bằng 2 .

Chọn đáp án **(C)**

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. C	5. A	6. C	7. C	8. B	9. A	10. B
11. B	12. A	13. C	14. D	15. D	16. A	17. C	18. A	19. C	20. C
21. C									

BÀI 2. CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép cộng và phép trừ số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d)i.$$

- ✔ Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- ✔ Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó:
 $z = a + bi, z + \bar{z} = 2a$.

2. Phép nhân số phức

- ✔ Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$), khi đó

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

- ✔ Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$kz = k \cdot (a + bi) = ka + kbi.$$

Đặc biệt, $0 \cdot z = 0$ với mọi số phức z .

- ✔ Lũy thừa của i , với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$— i^0 = 1.$$

$$— i^3 = i^2 \cdot i = -i.$$

$$— i^{4n+2} = -1.$$

$$— i^1 = i.$$

$$— i^{4n} = 1.$$

$$— i^2 = -1.$$

$$— i^{4n+1} = i.$$

$$— i^{4n+3} = -i.$$

3. Chia hai số phức

- ✔ Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$.

- ✔ Phép chia hai số phức z' và $z \neq 0$ là $\frac{z'}{z} = z' z^{-1} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$.

B BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

(A) 3.

(B) 5.

(C) 1.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có $z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i$, khi đó $w = 2z + \bar{z} = 2(1 + 2i) + (1 - 2i) = 3 + 2i$.

Phần thực của số phức w là 3, phần ảo của số phức w là 2.

$\Rightarrow$ tổng phần thực và phần ảo là $3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án (B)



Câu 2. Trên tập số phức, cho biểu thức $A = (a - bi)(1 - i)$ (a, b là số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $A = a + b - (a + b)i$. (B) $A = -a + b + (b - a)i$.
(C) $A = a - b - (a - b)i$. (D) $A = a - b - (a + b)i$.

Lời giải.

Ta có $A = (a - bi)(1 - i) = a - ai - bi + bi^2 = (a - b) - (a + b)i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- (A) 6. (B) 10. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}$ nên $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $2x - 1 + (y - 2)i = 1 + i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 1; y = 1$. (B) $x = 1; y = 2$. (C) $x = 1; y = 3$. (D) $x = -1; y = 3$.

Lời giải.

Ta có $2x - 1 + (y - 2)i = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Tìm số phức z biết $4z + 5\bar{z} = 27 - 7i$.

- (A) $z = -3 + 7i$. (B) $z = -3 - 7i$. (C) $z = 3 - 7i$. (D) $z = 3 + 7i$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Khi đó $4(a + bi) + 5(a - bi) = 27 - 7i \Leftrightarrow 9a - bi = 27 - 7i \Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 27 \\ -b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow z = 3 + 7i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho số phức $z = \frac{3i}{3 + i} - i$. Mô-đun của số phức $\bar{z}$ là

- (A) $\frac{\sqrt{370}}{10}$. (B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) $\frac{-3}{10} + \frac{1}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \frac{3i}{3 + i} - i \Leftrightarrow z = \frac{1}{3 + i} = \frac{3 - i}{10} \Rightarrow \bar{z} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho $z_1 = 2 + 4i, z_2 = 3 - 5i$. Xác định phần thực của $w = z_1 \cdot \bar{z_2^2}$

- (A) -120. (B) -32. (C) 88. (D) -152.

Lời giải.

Ta có $\bar{z_2^2} = 3 + 5i \Rightarrow \bar{z_2^2} = -16 + 30i \Rightarrow w = z_1 \cdot \bar{z_2^2} = (2 + 4i)(-16 + 30i) = -152 - 4i$.

Vậy phần thực của w là -152.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho các số thực x, y thỏa mãn $4(3i - 2) = 4x + 2yi$. Tính giá trị của $P = x + y$.

- (A) $P = 4$. (B) $P = 7$. (C) $P = -1$. (D) $P = 8$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 4(3i - 2) = 4x + 2yi \Leftrightarrow -8 + 12i = 4x + 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -8 \\ 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow P = x + y = 4.$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 9. Cho $w = \frac{z^2 - (\bar{z})^2}{1 + z \cdot \bar{z}}$ với z là số phức tùy ý cho trước với phần thực và phần ảo khác 0. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)** w là số ảo. **(B)** $w = -1$. **(C)** $w = 1$. **(D)** w là số thực.

Lời giải.

Gọi số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$\text{Ta có } w = \frac{z^2 - (\bar{z})^2}{1 + z \cdot \bar{z}} = \frac{(x + yi)^2 - (x - yi)^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{x^2 + 2xyi - y^2 - x^2 + 2xyi + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{4xy}{1 + x^2 + y^2}i.$$

Vậy w là số ảo.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 10. Các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức $x(3 + 5i) - y(1 + 2i) = 9 + 16i$ trong đó $i^2 = -1$. Giá trị của biểu thức $T = |x - y|$ là

- (A)** 3. **(B)** 5. **(C)** 0. **(D)** 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x(3 + 5i) - y(1 + 2i) = 9 + 16i \Leftrightarrow (3x - y - 9) + (5x - 2y - 16)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ 5x - 2y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Suy ra $T = |x - y| = 5$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 11. Biết phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Khi đó.

- (A)** $b + c = 2$. **(B)** $b + c = 3$. **(C)** $b + c = 1$. **(D)** $b + c = 7$.

Lời giải.

Vì phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z_1 = 1 + 2i$ là nghiệm nên ta có

$$\begin{aligned} (1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + c &= 0 \\ \Leftrightarrow -3 + 4i + b + 2bi + c &= 0 \\ \Leftrightarrow (b + c - 3) + (2b + 4)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b + c - 3 = 0 \\ 2b + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 3 \\ b = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 12. Cho ba số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 +$

$$|z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$$

- (A)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **(B)** $2\sqrt{2}$. **(C)** $\frac{8}{3}$. **(D)** $\frac{3}{8}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \\ z_3 + z_2 = -z_1 \end{cases}$

Khi đó $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |-z_1|^2 + |-z_2|^2 + |-z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 3 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13. Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- A** $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$. **B** $P = \frac{2}{3}$. **C** $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D** $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

☑ Cách 1
Ta có

$$\begin{aligned} 3z^2 - z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{11}{36} \\ &\Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}i^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i \\ z = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $P = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

☑ Cách 2

Theo tính chất phương trình bậc 2 với hệ số thực, ta có $z_1; z_2$ là hai số phức liên hợp nên $z_1 z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2$. Mà $z_1 z_2 = \frac{1}{3}$ suy ra $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $P = |z_1| + |z_2| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- A** $M(-1; 1)$. **B** $M(-1; -1)$. **C** $M(1; 1)$. **D** $M(1; -1)$.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$\begin{aligned} (3 + 2i)z + (2 - i)^2 &= 4 + i \\ \Leftrightarrow (3 + 2i)z &= -(2 - i)^2 + 4 + i \\ \Leftrightarrow (3 + 2i)z &= 1 + 5i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1 + 5i}{3 + 2i} \Leftrightarrow z = 1 + i. \end{aligned}$$

Vậy điểm M biểu diễn số phức z có tọa độ là $M(1; 1)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Tìm số phức z thỏa mãn $z + (2 + i)\bar{z} = \overline{3 - 5i}$.

(A) $z = 2 + 3i$.

(B) $z = -2 + 3i$.

(C) $z = 2 - 3i$.

(D) $z = -2 - 3i$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} a + bi + (2 + i)(a - bi) &= 3 + 5i \\ \Leftrightarrow a + bi + 2a + b + ai - 2bi &= 3 + 5i \\ \Leftrightarrow 3a + b + ai - bi &= 3 + 5i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - b = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $z = 2 - 3i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

(A) $2i$.

(B) 4 .

(C) 2 .

(D) -4 .

Lời giải.

Ta có $z = (1 + i)^2(1 + 2i) = 2i(1 + 2i) = -4 + 2i$.

Do đó phần ảo của z là 2 .

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính $(1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018})$.

(A) 1 .

(B) 3 .

(C) 4 .

(D) 2 .

Lời giải.

Ta có $z^3 = 1 \Rightarrow z^{2018} = (z^3)^{672} \cdot z^2 = z^2 \cdot z^3 = 1 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$, mà $z \neq 1$ nên $z^2 + z + 1 = 0$.
Do đó

$$\begin{aligned} &(1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018}) \\ &= (1 - z + z^2)(1 + z - z^2) \\ &= (1 + z + z^2 - 2z)(1 + z + z^2 - 2z^2) \\ &= -2z \cdot (-2z^2) = 4z^3 = 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6$, biết z có mô-đun bằng $\sqrt{5}$?

(A) 3 .

(B) 4 .

(C) 2 .

(D) 0 .

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ với $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} |z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6 \\ |z| = \sqrt{5} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} |a + (b + \sqrt{5})i| + |a + (b - \sqrt{5})i| = 6 \\ |a + bi| = \sqrt{5} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{a^2 + (b + \sqrt{5})^2} + \sqrt{a^2 + (b - \sqrt{5})^2} = 6 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{5}b + 5} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{5}b + 5} = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}b} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}b} = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 20 + 2\sqrt{100 - 20b^2} = 36 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{100 - 20b^2} = 8 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 100 - 20b^2 = 64 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{16}{5} \\ b^2 = \frac{9}{5} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{bmatrix} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có bốn số phức cần tìm là

$$z = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i, z = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i, z = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i, z = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 19. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = \sqrt{17}$, $|z + 2w| = \sqrt{58}$ và $|z - 2w| = 5\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \bar{z}.w + z.\bar{w}$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

 **Lời giải.**

Ta có $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $\overline{az_1 + bz_2} = a\bar{z_1} + b\bar{z_2}$ nên

$$\begin{aligned} |z + 2w| &= \sqrt{58} \\ \Leftrightarrow |z + 2w|^2 &= 58 \\ \Leftrightarrow (z + 2w)(\bar{z} + 2\bar{w}) &= 58 \\ \Leftrightarrow |z|^2 + 2\bar{z} \cdot w + 2z \cdot \bar{w} + 4|w|^2 &= 58 \\ \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|w|^2 &= 58. \end{aligned}$$

Tương tự $|z - 2w| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58 \\ |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow 4P = 8 \Leftrightarrow P = 2$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 20. Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.

(A) 2.

(B) -2.

(C) -3.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.

Chia hai vế cho i ta được: $z + \frac{5}{|z|} = -7i + zi$.

$$\text{Hay } z(1 - i) = -7i - \frac{5}{|z|} \Rightarrow |z(1 - i)| = \left| -7i - \frac{5}{|z|} \right| \Leftrightarrow \sqrt{2}|z| = \sqrt{49 + \frac{25}{(|z|)^2}}.$$

$$\text{Bình phương 2 vế, ta được } 2|z|^2 = 49 + \frac{25}{|z|^2} \Rightarrow 2|z|^4 - 49|z|^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 25 & (\text{thỏa mãn}) \\ |z|^2 = -\frac{1}{2} & (\text{loại}). \end{cases}$$

Do $|z| > 0$ nên $|z| = 5$. Thế $|z| = 5$ vào đề bài ta được $\left(z + \frac{5}{5}\right)i = 7 - z \Leftrightarrow (z + 1)i = 7 - z$.

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Thế vào ta được

$$\begin{aligned} (x + yi + 1)i &= 7 - x - yi \\ \Leftrightarrow -y + (x + 1)i &= 7 - x - yi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 7 - x \\ x + 1 = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ thấy số phức $3 - 4i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng phần thực của các số phức cần tìm là 3.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 21. Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo và $|z_1 - z_2| = 10$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 10.

(B) $10\sqrt{2}$.

(C) $10\sqrt{3}$.

(D) 20.

Lời giải.

Cách 1:

Vì $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo nên $\frac{z_1}{z_2} = ai \Leftrightarrow z_1 = aiz_2$.

Ta có $|z_1 - z_2| = 10 \Leftrightarrow |aiz_2 - z_2| = 10 \Leftrightarrow |z_2| \cdot |ai - 1| = 10 \Leftrightarrow |z_2| \sqrt{1 + a^2} = 10 \Leftrightarrow |z_2| = \frac{10}{\sqrt{1 + a^2}}$.

Từ $z_1 = aiz_2$ $|z_1| = |aiz_2| = \frac{10|a|}{\sqrt{1 + a^2}}$.

Do đó $|z_1| + |z_2| = \frac{10|a|}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{10}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{10(1 + |a|)}{\sqrt{1 + a^2}} \leq \frac{10\sqrt{(1 + 1)(1 + a^2)}}{\sqrt{1 + a^2}} \leq 10\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra $a = \pm 1$ $z_1 = \pm iz_2$.

Vậy $\max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}$.

Cách 2:

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}(a_1; b_1)$, $\overrightarrow{OB}(a_2; b_2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}(a_1; b_1)$, $\overrightarrow{OB}(a_2; b_2)$.

Ta có $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{|z_2|^2}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

Suy ra $\triangle OAB$ vuông tại O .

Khi đó $|z_1 - z_2| = AB = 10$.

Ta có $|z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{(OA^2 + OB^2) \cdot (1^2 + 1^2)} = \sqrt{2AB^2} = 10\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra $OA = OB$.

Vậy $\max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 22. Cho các số phức z thỏa mãn $|2iz - 2i^{2021}| = |3\overline{z} - 1|$ và $|\overline{z}| = 1$. Điểm biểu diễn cho số phức z có hoành độ bằng

(A) -4.

(B) 4.

(C) -1.

(D) 1.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |2iz - 2i^{2021}| &= |3\overline{z} - 1| \\ \Leftrightarrow |2i(a + bi) - 2(i^2)^{1010}i| &= |3(a - bi) - 1| \\ \Leftrightarrow |(2a - 2)i - 2b| &= |(3a - 1) - 3bi| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(2a - 2)^2 + 4b^2} &= \sqrt{(3a - 1)^2 + 9b^2} \\ \Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) + 2a - 3 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $|\overline{z}| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

(2).

Thay (2) vào (1) ta được $5 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 23. Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 2\overline{z}$.

(A) $z = 2 + i$.

(B) $z = 2 - i$.

(C) $z = 3 - 2i$.

(D) $z = 3 + i$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), suy ra $\overline{z} = x - yi$.

Ta có $z + 2 - 3i = 2\overline{z} \Leftrightarrow (x + 2) + (y - 3)i = 2x - 2yi$.

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} x + 2 = 2x \\ y - 3 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy số phức $z = 2 + i$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 24. Mô-đun của số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$ và $17(z + \bar{z}) - 5z \cdot \bar{z} = 0$ bằng
 (A) $\sqrt{53}$. (B) $\sqrt{34}$. (C) $\sqrt{29}$ và $\sqrt{13}$. (D) $\sqrt{29}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |z - 1| = 5 \\ 17(z + \bar{z}) - 5z \cdot \bar{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + b^2 = 25 \\ 17 \cdot 2a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a^2 + b^2) - 2a - 24 = 0 \\ 34a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5[(a^2 + b^2) - 2a - 24] = 0 \\ 34a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 34a + 5(-2a - 24) = 0 \\ 5(a^2 + b^2) = 34a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a^2 + b^2 = 34. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho số phức u, v thỏa mãn: $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2019}$. Ta có $|4u + 3v|$ là
 (A) $\sqrt{2890}$. (B) $\sqrt{2981}$. (C) $\sqrt{2891}$. (D) $\sqrt{2982}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & |3u - 4v| = \sqrt{2019} \Leftrightarrow |3u - 4v|^2 = 2019 \\ \Leftrightarrow & (3u - 4v)(\overline{3u - 4v}) = 2019 \\ \Leftrightarrow & (3u - 4v)(3\bar{u} - 4\bar{v}) = 2019 \\ \Leftrightarrow & 9(\bar{u})^2 - 12(u\bar{v} + \bar{u}v) + 16(\bar{v})^2 = 2019. \end{aligned}$$

Suy ra $u\bar{v} + \bar{u}v = \frac{481}{12}$.

Tương tự như trên ta có

$$|4u + 3v|^2 = (4u + 3v)(\overline{4u + 3v}) = (4u + 3v)(4\bar{u} + 3\bar{v}) = 16(\bar{u})^2 + 12(u\bar{v} + \bar{u}v) + 9(\bar{v})^2 = 2981.$$

Do đó $|4u + 3v| = \sqrt{2981}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho khai triển $(\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2019}x^{2019}$. Hãy tính tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots + a_{2016} - a_{2018}$.

(A) 0. (B) 2^{2019} . (C) $(\sqrt{3})^{1009}$. (D) 2^{1009} .

Lời giải.

Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ và $(-i)^{4k} = 1$, $(-i)^{4k+1} = -i$, $(-i)^{4k+2} = -1$, $(-i)^{4k+3} = i$.

Xét khai triển $(\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2019}x^{2019}$.

Thay $x = i$ ta được

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{2019} &= a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + a_5i - a_6 - \dots - a_{2018} - a_{2019}i \\ &= (a_0 - a_2 + a_4 - \dots - a_{2018}) + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots - a_{2019})i. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } (\sqrt{3} + i)^{2019} = 2^{2019} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)^{2019} = 2^{2019} \cos \frac{2019\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{2019\pi}{6} = 0 + i.$$

Suy ra $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{2018} = 0$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Biết rằng $a; b$ là các số thực thỏa mãn $a + bi = (1 + \sqrt{3}i)^{2017}$. Giá trị của $a + b$ bằng
(A) $(1 + \sqrt{3}) 8^{672}$. **(B)** $(1 + \sqrt{3}) 8^{671}$. **(C)** $(\sqrt{3} - 1) 8^{672}$. **(D)** $(\sqrt{3} - 1) 8^{671}$.

Lời giải.

Ta có $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i)^{2017} &= 2^{2017} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2017} \\ &= 2^{2017} \left(\cos \frac{2017\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2017\pi}{3} \right) \\ &= 2^{2016} \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) = 8^{672} (1 + \sqrt{3}i) \\ &= 8^{672} + 8^{672}\sqrt{3}i \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 8^{672} \\ b = 8^{672}\sqrt{3} \end{cases} \\ \Rightarrow a + b &= (1 + \sqrt{3}) 8^{672}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + m$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

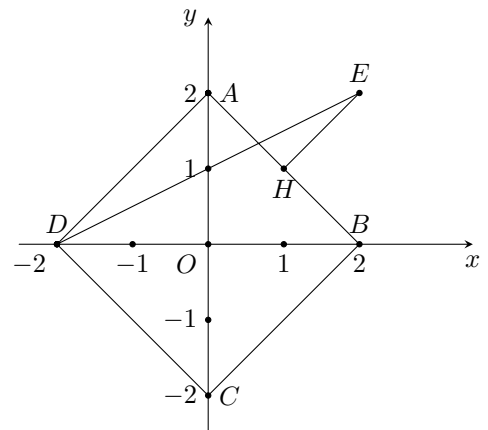
(A) $A \in [4; 3\sqrt{3})$. **(B)** $A \in (\sqrt{34}; 6)$. **(C)** $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. **(D)** $A \in (6; \sqrt{42})$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Khi đó

$$\begin{aligned} |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| &= 4 \\ \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| &= 4 \\ \Leftrightarrow |x| + |y| &= 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \text{ khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y = -2 \text{ khi } x \leq 0, y \leq 0 \\ x - y = 2 \text{ khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ -x + y = 2 \text{ khi } x \leq 0, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Hình biểu diễn hệ nói trên là hình vuông $ABCD$ như trong hình vẽ.

Khi đó $P = |z - 2 - 2i| = EM$ với $E(2; 2)$ và $M(x; y)$.

Dễ thấy $m = \min P = d(E; AB) = EH = \sqrt{2}$; $M = \max P = ED = \sqrt{20}$.

Do đó $M + m = \sqrt{2} + \sqrt{20} \in (\sqrt{34}; 6)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 29. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$ và $|z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

(A) $T = 36\sqrt{2}$. **(B)** $T = 36\sqrt{3}$. **(C)** $T = 24\sqrt{3}$. **(D)** $T = 18$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và iz_2 .
Gọi E, F lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $3iz_2$ và $-3iz_2$.

☑ Theo bài ra ta có $|z_1| = 6$ nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R = 6$, gọi là đường tròn (C_1) ; $|z_2| = 2 \Rightarrow |iz_2| = |i| \cdot |z_2| = 2$ do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức iz_2 thuộc đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$, gọi là đường tròn (C_2) .

☑ Lại thấy $|3iz_2| = 6$ và $|-3iz_2| = 6$ suy ra các điểm E, F thuộc đường tròn (C_1) .
Hơn nữa $3iz_2$ và $-3iz_2$ là các số phức đối nên EF là một đường kính của (C_1) .

☑ Mặt khác $\overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{ON}$ nên N nằm giữa O và $E \Rightarrow \widehat{MOE} = 60^\circ$, suy ra tam giác MOE là tam giác đều cạnh bằng 6 và tam giác MEF vuông tại M .

$$\text{Khi đó } T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1^2 - (3iz_2)^2| = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = ME \cdot MF.$$

$$\text{Nhận thấy } ME \cdot MF = 2 \cdot S_{\Delta MEF} = 4 \cdot S_{\Delta MOE} = 4 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}.$$

Vậy $T = 36\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Xét các số phức z thỏa mãn $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số thuần ảo. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là

(A) Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(B) Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ đi hai điểm $A(2; 0)$, $B(0; 1)$.

(C) Đường tròn có tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(D) Đường tròn có tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

💬 **Lời giải.**

Gọi $z = x + yi$, ($x; y \in \mathbb{R}$).

Ta có $(2 - z)(\bar{z} + i) = (2 - x - yi)(x - yi + i) = -x^2 - y^2 + 2x + y - (x + 2y - 2)i$.

Các số phức z thỏa mãn $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số thuần ảo khi $-x^2 - y^2 + 2x + y = 0$ hay $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn

có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + i)|z| = \frac{-2 + 14i}{z} + 1 - 3i$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

(B) $\frac{13}{4} < |z| < 4$.

(C) $\frac{7}{4} < |z| < \frac{11}{5}$.

(D) $1 < |z| < \frac{3}{2}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $(3 + i)|z| = \frac{-2 + 14i}{z} + 1 - 3i$ ($z \neq 0$) $\Leftrightarrow z((3|z| - 1) + (3 + |z|)i) = -2 + 14i$.

Lấy mô đun hai vế ta được một phương trình theo ẩn $|z| > 0$, ta có

$$\begin{aligned} & |z| |(3|z| - 1) + (3 + |z|)i| = |-2 + 14i| \\ \Leftrightarrow & |z| \sqrt{(3|z| - 1)^2 + (3 + |z|)^2} = 10\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & |z|^2 + |z|^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 4 \\ |z|^2 = -5 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ |z| = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại $|z| = 2$ ta được $z = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $z_1 + z_2$ bằng

(A) 2.

(B) 3.

(C) $\sqrt{2}$.

(D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

❖ **Cách 1.** Gọi các số phức $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.)

Ta có $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i; z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 = 3; |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a_2^2 + b_2^2 = 3$. Khi đó

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2a_1a_2 + 2b_1b_2 &= 2. \end{aligned}$$

Do đó $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

❖ **Cách 2.** $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 4$.

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 8 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$.

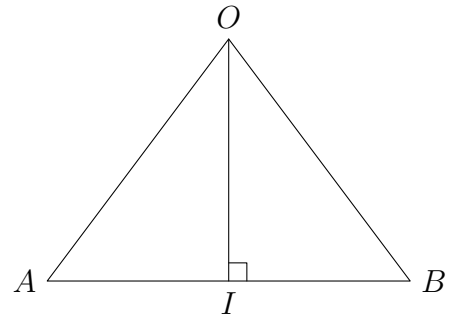
❖ **Cách 3.**

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 .

Khi đó tam giác OAB cân có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$.

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó OI là đường cao của tam giác OAB ;

$OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{2}; |z_1 + z_2| = 2\vec{OI} = 2\sqrt{2}$.



❖ **Cách 4.** Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 .

Khi đó tam giác OAB có $OA = OB = \sqrt{3}; AB = 2$.

$T = |z_1 + z_2| = |\vec{OA} + \vec{OB}| \Rightarrow T^2 = OA^2 + OB^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

Mà

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos(\angle AOB) = OA \cdot OB \cdot \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = 1.$$

Vậy $T^2 = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}$.

❖ **Cách 5.** Ta có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

$\Rightarrow T = |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 4 = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}$.

❖ **Cách 6.** Chọn đại diện

$$\text{Chọn } \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i \end{cases} \Rightarrow |z_1 + z_2| = \left| \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i \right| = 2\sqrt{2}.$$

❖ **Cách 7.** Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 .

Khi đó tam giác OAB có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$.

Gọi I là trung điểm của AB .

Ta có $T = |z_1 + z_2| = |\vec{OA} + \vec{OB}| = 2|\vec{OI}| = 2\sqrt{\frac{OA^2 + OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{2}$.

☑ **Cách 8.** Tính nhanh.

Tổng quát $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)$.

Vậy $T = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn hai điều kiện $|z - 3 - 4i| \leq 2$ và $|z + \bar{z}| \leq |z - \bar{z}|$. Số phần tử của tập S là

(A) 11.

(B) 12.

(C) 13.

(D) 10.

💬 **Lời giải.**

Gọi z là số phức thỏa mãn bài toán.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} \leq 2 \\ |2a| \leq |2b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} \leq 2 \\ |a| \leq |b|. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq a \leq 5 \\ 2 \leq b \leq 6 \\ a \leq b \\ (a-3)^2 + (b-4)^2 \leq 4. \end{cases}$$

Bảng giá trị thỏa mãn

a	1	2			3				4	
b	4	3	4	5	3	4	5	6	4	5

Vậy tập S có tất cả 10 phần tử.

Chọn đáp án **(D)**



BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. C	5. D	6. B	7. D	8. A	9. A	10. B
11. B	12. C	13. D	14. C	15. C	16. C	17. C	18. B	19. B	20. D
21. B	22. C	23. A	24. B	25. B	26. A	27. A	28. B	29. B	30. A
31. C	32. D	33. D							

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z - (2-i)\bar{z} = 3$. Môđun của số phức $w = \frac{i-2z}{1-i}$ là?

(A) $\frac{\sqrt{122}}{5}$.

(B) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{45}}{4}$.

(D) $\frac{\sqrt{122}}{2}$.

💬 **Lời giải.**

Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có

$$\begin{aligned} (1+i)z - (2-i)\bar{z} &= 3 \\ \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) - (2-i)(a-bi) &= 3 \\ \Leftrightarrow a+ai+bi+bi^2 - 2a+ai+2bi-bi^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow -a-3+(2a+3b)i &= 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -a-3=0 \\ 2a+3b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow z = -3+2i. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } w = \frac{i-2z}{1-i} = \frac{i-2(-3+2i)}{1-i} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 35. Cho số phức $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2018i^{2017}$ có phần thực là a và phần ảo là b . Tính $b - a$.

(A) 1.

(B) -1.

(C) 1010.

(D) -2017.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z &= 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2018i^{2017} \\ \Rightarrow iz &= 1i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + 2017i^{2017} + 2018i^{2018} \\ \Rightarrow z - iz &= 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017} - 2018i^{2018} \\ \Rightarrow (1 - i)z &= \frac{1 - i^{2018}}{1 - i} - 2018i^{2018} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } i^{2018} = (i^2)^{1009} = (-1)^{1009} = -1.$$

$$\text{Do đó } (1 - i)z = \frac{2}{1 - i} + 2018 \Rightarrow z = 1009 + 1010i.$$

$$\text{Vậy } a = 1009, b = 1010 \Rightarrow b - a = 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z \Leftrightarrow |z|z - 5|z| - i|z| + 2i = 6z - iz \Leftrightarrow z(|z| - 6 + i) = 5|z| + (|z| - 2)i. \quad (*)$$

Mô đun hai vế của biểu thức (*) ta được

$$\begin{aligned} |z|(|z| - 6 + i) &= 5|z| + (|z| - 2)i \\ \Leftrightarrow |z||z| - 6|z| - i|z| &= \sqrt{25|z|^2 + (|z| - 2)^2} \\ \Leftrightarrow |z|\sqrt{(|z| - 6)^2 + 1} &= \sqrt{25|z|^2 + (|z| - 2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } |z| = t, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } t\sqrt{(t - 6)^2 + 1} = \sqrt{25t^2 + (t - 2)^2}.$$

Bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned} t^2[(t - 6)^2 + 1] &= 25t^2 + (t - 2)^2 \\ \Leftrightarrow t^2(t^2 - 12t + 36 + 1) &= 25t^2 + (t^2 - 4t + 4) \\ \Leftrightarrow t^2(t^2 - 12t + 36 + 1) &= 25t^2 + (t^2 - 4t + 4) \\ \Leftrightarrow t^4 - 12t^3 + 11t^2 + 4t - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)(t^3 - 11t^2 + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 \\ t^3 - 11t^2 + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \approx 10,967 \\ t \approx 0,621 \\ t \approx -0,588 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $t \geq 0$ suy ra có ba giá trị của t thỏa mãn.

Mà ứng với mỗi giá trị $|z| = t$ sẽ có một số phức $z = \frac{5t + (t - 2)i}{t - 6 + i}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho số phức $1 - 2i$. Điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ là

- (A) $Q(1; 2)$. (B) $N(2; 1)$. (C) $M(1; -2)$. (D) $P(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $w = iz = i(1 - 2i) = 2 + i$.

Vậy điểm biểu diễn của số phức w là $M(2; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $2|z| = |z^2 + 4|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

- (A) $1 + \sqrt{5}$. (B) $3 + \sqrt{5}$. (C) $1 + 3\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{6 + \sqrt{13}}$.

Lời giải.

☞ **Cách 1.** Đặt $z = x + yi$. Ta có

$$\begin{aligned} 2|z| &= |z^2 + 4| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + (2xy)^2} \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) &= (x^2 - y^2 + 4)^2 + (2xy)^2 \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + 4x^2 - 12y^2 + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x^2 + y^2)^2 + 12(x^2 + y^2) - 16 &= 16x^2 \geq 0 \\ \Rightarrow 6 - 2\sqrt{5} \leq x^2 + y^2 &\leq 6 + 2\sqrt{5} \\ \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} &\leq \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $1 + \sqrt{5}$.

☞ **Cách 2.** Áp dụng bất đẳng thức trong số phức, ta có

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \Rightarrow |z^2 + 4| \geq ||z|^2 - 4| = ||z|^2 - 4| = |z|^2 - 4 \text{ khi } |z| \geq 2.$$

Theo đề ta có $2|z| = |z|^2 + 4 \geq |z|^2 - 4$

$$\Rightarrow 2|z| \geq |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $1 + \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $|(2 + i)z + 8 - i| = 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức là một đường tròn tâm I có tọa độ là

- (A) $I(3; -2)$. (B) $I(-3; 2)$. (C) $I(-8; 1)$. (D) $I(8; -1)$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$.

$$\text{Ta có } |(2 + i)z + 8 - i| = 5 \Leftrightarrow \left| z - \frac{8 - i}{2 + i} \right| = \frac{5}{|2 + i|} \Leftrightarrow |z + 3 - 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-3; 2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$.

- (A) 15π . (B) 12π . (C) 20π . (D) Đáp án khác.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} & |z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10 \\ \Leftrightarrow & |x + yi + 2 - i| + |x + yi - 4 - i| = 10 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 10. \end{aligned}$$

Đặt $A(-2; 1), B(4; 1) \Rightarrow AB = 6$.

Khi đó phương trình trở thành $MA + MB = 10$.

Vậy tập hợp những điểm M thỏa mãn phương trình là một elip có

độ dài trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$; tiêu cự $2c = AB = 6 \Rightarrow c = 3$;

độ dài trục bé $2b$ với $b^2 = a^2 - c^2 = 16 \Rightarrow b = 4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$ là diện tích Elip trên có $S = \pi ab = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 41. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$ là một đường thẳng có phương trình

- (A)** $x + 3y = 0$. **(B)** $3x - y = 0$. **(C)** $x - y = 0$. **(D)** $x + y = 0$.

Lời giải.

Gọi số phức z thỏa mãn đề bài là $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} & |z + 1 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i| \\ \Leftrightarrow & |(x + yi) + 1 - 2i| = |(x - yi) - 2 + i| \\ \Leftrightarrow & |(x + 1) + (y - 2)i| = |(x - 2) + (1 - y)i| \\ \Leftrightarrow & (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \\ \Leftrightarrow & 3x - y = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng có phương trình $3x - y = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 1. **(D)** 0.

Lời giải.

☑ **Cách 1.** Gọi số phức z thỏa mãn đề bài là $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} & (3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i \\ \Leftrightarrow & (3 + 2i)(a + bi) + (2 - i)^2 = 4 + i \\ \Leftrightarrow & (3 + 2i)(a + bi) = 4 + i - (2 - i)^2 \\ \Leftrightarrow & (3a - 2b) + (2a + 3b)i = 1 + 5i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = 0. \end{aligned}$$

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

☑ **Cách 2.** Ta có $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i \Leftrightarrow z = \frac{4 + i - (2 - i)^2}{3 + 2i} = \frac{4 + i - (4 - 4i + 1)}{3 + 2i} = \frac{4 + i - 3 + 4i}{3 + 2i} = \frac{1 + 5i}{3 + 2i}$.

Vậy phần thực $a = 1$, phần ảo $b = 1 \Rightarrow a - b = 0$.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là một đường tròn, bán kính của đường tròn đó bằng

(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 2.

Lời giải.

Cách 1. Giả sử $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} a + bi &= (1 + \sqrt{3}i)z + 2 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{a - 2 + bi}{1 + \sqrt{3}i} \\ \Leftrightarrow z - 1 &= \frac{a - 3 + (b - \sqrt{3})i}{1 + \sqrt{3}i} \\ \Leftrightarrow \left| \frac{a - 3 + (b - \sqrt{3})i}{1 + \sqrt{3}i} \right| &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(a - 3)^2 + (b - \sqrt{3})^2}}{2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(a - 3)^2 + (b - \sqrt{3})^2} &= 16. \end{aligned}$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$.

Suy ra bán kính của đường tròn đó là 4.

Cách 2. Ta có $w - 2 = (1 + \sqrt{3}i)z \Leftrightarrow w - 2 - (1 + \sqrt{3}i)z = 0 \Leftrightarrow w - 2 - (1 + \sqrt{3}i)(z - 1) = 0$.

Suy ra $|w - 3 - \sqrt{3}i| = |(1 + \sqrt{3}i)(z - 1)| \Leftrightarrow |w - (3 + \sqrt{3}i)i| = |1 + \sqrt{3}i| \cdot |z - 1| \Leftrightarrow |w - (3 + \sqrt{3}i)i| = 4$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$.

Suy ra bán kính của đường tròn đó là 4.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 44. Xét các số phức z thỏa mãn $(z - 4i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

(A) $(-1; -2)$.

(B) $(-1; 2)$.

(C) $(1; 2)$.

(D) $(1; -2)$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} (z - 4i)(\bar{z} + 2) &= (x + yi - 4i)(x - yi + 2) \\ &= x(x + 2) + y(y - 4) + (x + 2)(y - 4)i - xyi. \end{aligned}$$

$(z - 4i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x(x + 2) + y(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm $I(-1; 2)$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 45. Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2i)(\bar{z} - 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

(A) $(1; -1)$.

(B) $(1; 1)$.

(C) $(-1; 1)$.

(D) $(-1; -1)$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned}(z + 2i)(\bar{z} - 2) &= (x + yi + 2i)(x - yi - 2) \\ &= [x + (y + 2)i][(x + 2) - yi] \\ &= x(x + 2) + y(y + 2) + [(x + 2)(y + 2) - xy]i.\end{aligned}$$

$(z + 2i)(\bar{z} - 2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x(x + 2) + y(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.
Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm $I(-1; -1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z + |z|^2 i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}z + |z|^2 i - 1 - \frac{3}{4}i &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= 1 + \left(\frac{3}{4} - |z|^2\right)i \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - |z|^2\right)^2} \\ \Leftrightarrow |z|^2 &= 1 + \frac{9}{16} - \frac{3}{2}|z|^2 + |z|^4 \\ \Leftrightarrow 16|z|^4 - 40|z|^2 + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow |z|^2 &= \frac{5}{4} \\ \Rightarrow z &= 1 + \left(\frac{3}{4} - |z|^2\right)i = 1 - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Vậy có 1 số phức thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = \sqrt{10}$ và $\frac{z - 2}{z - 4}$ là số thuần ảo.

- (A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Điều kiện $z \neq 4$.

Ta có $|z - 1 + i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (C_1) : (a - 1)^2 + (b + 1)^2 = 10$ có tâm $I_1(1; -1)$ bán kính $R_1 = \sqrt{10}$.

$\frac{z - 2}{z - 4} = \frac{a - 2 + bi}{a - 4 + bi} = \frac{(a - 2 + bi)(a - 4 - bi)}{(a - 4)^2 + b^2}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow (a - 2)(a - 4) + b^2 = 0$.

Do đó $(C_2) : (a - 3)^2 + b^2 = 1$ là đường tròn có tâm $I_2(3; 0)$ bán kính $R_2 = 1$.

Ta có $I_1 I_2 = \sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{5} < R_1 + R_2$ nên (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt.

Do $z = 4 \in (C_1) \cap (C_2)$ nên có duy nhất 1 số phức thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$.

- (A) 4. (B) 6. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có điểm biểu diễn z là $M(x; y)$.

Với $m = 0$, ta có $z = 0$, thoả mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > 0$, ta có $|z| = m \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0; 0)$ bán kính $R = m$.

$|z - 4m + 3mi| = m^2 \Leftrightarrow (x - 4m)^2 + (y + 3m)^2 = m^2 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I'(4m; -3m)$ bán kính $R' = m$.

Có duy nhất một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = m^2 + m \\ 5m = |m^2 - m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 6. \end{cases}$$

Kết hợp với $m = 0$, suy ra $m \in \{0; 4; 6\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Chọn đáp án (D)



Câu 49. Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}$, ($m \in \mathbb{Z}$). Tìm các giá trị của m để $|z - i| < 1$.

(A) 0.

(B) 1.

(C) 4.

(D) vô số.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} \Leftrightarrow z - i = \frac{m+1 - (1-m)i + 2m}{1-m+2mi} = \frac{3m+1 - (1-m)i}{1-m+2mi}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & z - i < 1 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{3m+1 - (1-m)i}{1-m+2mi} \right| < 1 \\ \Leftrightarrow & (3m+1)^2 + (1-m)^2 < (1-m)^2 + (2m)^2 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{3m+1 - (1-m)i}{1-m+2mi} \right| < 1 \\ \Leftrightarrow & (m+1)(5m+1) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-1; -\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

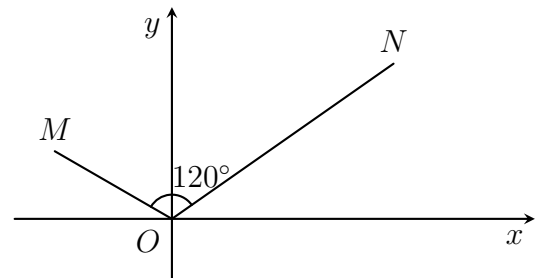
Vậy không tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện đề bài.

Chọn đáp án (A)



Câu 50.

Hai điểm M, N trong hình vẽ bên lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 . Biết $ON = 2OM = 2\sqrt{5}$.



Giá trị của $|z_1^2 + z_2^2|$ bằng

(A) $5\sqrt{13}$.

(B) $5\sqrt{37}$.

(C) $5\sqrt{21}$.

(D) $5\sqrt{11}$.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} OM = |z_1| = \sqrt{5} \\ ON = |z_2| = 2\sqrt{5} \\ \widehat{MON} = 120^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos \widehat{MON}} = \sqrt{35}.$$

Khi đó $\begin{cases} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \sqrt{7}. \end{cases}$

Đặt $\frac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a - 1)^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ -2a + 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow |z_1^2 + z_2^2| = |z_2|^2 \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + 1 \right| = 5 \left| (-1 \pm \sqrt{3}i)^2 + 1 \right| = 5 \left| -1 \pm \sqrt{3}i \right| = 5\sqrt{13}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là đường tròn có bán kính bằng R . Tính R .

(A) $R = 8$.

(B) $R = 2$.

(C) $R = 16$.

(D) $R = 4$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} w &= (1 + \sqrt{3}i)z + 2 \\ \Rightarrow w &= (1 + \sqrt{3}i)(z - 1) + 3 + \sqrt{3}i \\ \Rightarrow |w - 3 - \sqrt{3}i| &= |(1 + \sqrt{3}i)(z - 1)| \\ \Leftrightarrow |w - 3 - \sqrt{3}i| &= 4 \\ \Leftrightarrow |x - 3 + (y - \sqrt{3})i| &= 4 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 &= 16. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các số phức w là đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$, bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Trong mặt phẳng Oxy , gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z thỏa mãn $|7z - \bar{z}| \leq 10$. Diện tích của hình (H) bằng

(A) $\frac{5\pi}{2}$.

(B) $\frac{25\pi}{12}$.

(C) $\frac{7\pi}{2}$.

(D) 5π .

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có $|7z - \bar{z}| \leq 10 \Rightarrow 36x^2 + 64y^2 \leq 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{100}{36}} + \frac{y^2}{\frac{100}{64}} \leq 1$.

Phương trình $\frac{x^2}{\frac{100}{36}} + \frac{y^2}{\frac{100}{64}} = 1$ là phương trình của Elip có trục lớn và trục bé lần lượt là $2a = \frac{10}{3}$, $2b = \frac{5}{2}$.

Theo công thức tính diện tích Elip ta có $S = \pi ab = \pi \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25\pi}{12}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $(z + 1 - i)(\bar{z} - i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn hình học của z là một đường thẳng. Hệ số góc của đường thẳng đó là

(A) -1 .

(B) 1 .

(C) -2 .

(D) 2 .

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $(z + 1 - i)(\bar{z} - i) = (x + yi + 1 - i)(x - yi - i) = (x^2 + x + y^2 - 1) - (2x + y + 1)i$.

Số phức $(z + 1 - i)(\bar{z} - i)$ là số thực khi $2x + y + 1 = 0$.

Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là đường thẳng có phương trình $2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 1$.

Do đó hệ số góc của đường thẳng là -2 .

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| = 3\sqrt{2}$. Biết rằng số phức $w = (1 - i^{2019})(\bar{z} + 3i) + 2019$ có tập hợp các điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) . Diện tích S của hình tròn (C) bằng

(A) 18π .

(B) 36π .

(C) 9π .

(D) 12π .

Lời giải.

Ta có $|z - 1 + 3i| = 3\sqrt{2} \Rightarrow |\overline{z - 1 + 3i}| = 3\sqrt{2} \Rightarrow |\bar{z} - 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} w &= (1 - i^{2019})(\bar{z} + 3i) + 2019 = (1 + i)((\bar{z} - 1 - 3i) + (1 + 6i)) + 2019 \\ \text{hay } w &= (1 + i)(\bar{z} - 1 - 3i) + 2014 + 7i \\ \Leftrightarrow w - 2014 - 7i &= (1 + i)(\bar{z} - 1 - 3i) \\ \Rightarrow |w - 2014 - 7i| &= |(1 + i)(\bar{z} - 1 - 3i)| \\ \Rightarrow |w - 2014 - 7i| &= |1 + i| |\bar{z} - 1 - 3i| \\ \Rightarrow |w - 2014 - 7i| &= 6. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn (C) có tâm $I(2014; 7)$ và bán kính $R = 6$.

Suy ra diện tích của hình tròn (C) là $S = \pi R^2 = 36\pi$. □

Câu 55. Cho số phức z có mô đun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1 - i)(z + 1) - i$ là đường tròn có tâm I , bán kính R . Tổng $a + b + R$ bằng

(A) 5.

(B) 7.

(C) 1.

(D) 3.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề ta có

$$\begin{aligned} w &= (1 - i)(z + 1) - i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{w - 1 + 2i}{1 - i} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{(x - 1) + (y + 2)i}{1 - i} \\ \Rightarrow |z| &= \left| \frac{(x - 1) + (y + 2)i}{1 - i} \right| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2} &= \left| \frac{(x - 1) + (y + 2)i}{1 - i} \right| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2} &= \frac{\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 16. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường tròn có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 4$.

Vậy tổng $a + b + R = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \bar{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

- (A) $(0; 1)$. (B) $(0; -1)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(1; 0)$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $w = \bar{z} + i \Leftrightarrow \bar{z} = w - i$.

Mà $|z| = 3 \Leftrightarrow |\bar{z}| = 3 \Leftrightarrow |w - i| = 3 \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z - 1 + i}{(z + \bar{z})i + 1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức

$w = \frac{z}{2}$ là parabol có đỉnh

- (A) $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. (B) $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. (C) $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. (D) $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $z = 2w = 2x + 2yi \Rightarrow \frac{z - 1 + i}{(z + \bar{z})i + 1} = \frac{2x - 1 + (2y + 1)i}{1 + 4xi}$.

Khi đó $\frac{z - 1 + i}{(z + \bar{z})i + 1}$ là số thực $\Leftrightarrow [2x - 1 + (2y + 1)](1 - 4xi)$ là số thực

$$\Leftrightarrow -8x^2 + 4x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 4x^2 - 2x - \frac{1}{2}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \frac{\bar{z}}{1 - i}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có tâm là

- (A) $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. (B) $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. (C) $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. (D) $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $w = \frac{\bar{z}}{1 - i} \Leftrightarrow \bar{z} = (1 - i)w$.

$$\begin{aligned} &|z - 1 + 2i| = 2 \\ \Leftrightarrow &|\bar{z} - 1 - 2i| = 2 \\ \Leftrightarrow &|(1 - i)w - 1 - 2i| = 2 \\ \Leftrightarrow &\left|(1 - i)\left(w - \frac{1 + 2i}{1 - i}\right)\right| = 2 \\ \Leftrightarrow &|(1 - i)| \left|w - \frac{1 + 2i}{1 - i}\right| = 2 \\ \Leftrightarrow &\left|w - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

- Câu 59.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là
- (A) $4\pi - 4$. (B) $8\pi - 8$. (C) $2\pi - 4$. (D) $8\pi - 4$.

Lời giải.

- ☞ **Cách 1.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ là điểm $M(x; y)$. Ta có

$$\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 12 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

Hình phẳng (H) là hình tô đậm trên hình vẽ.

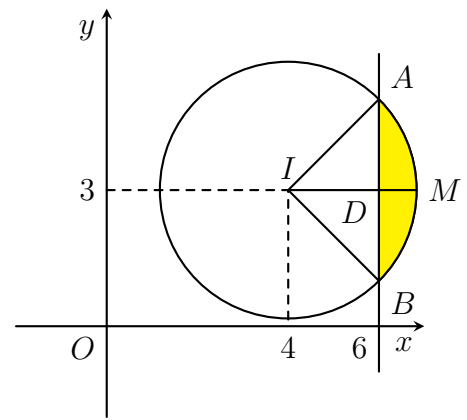
Ta có $IA = IB = 2\sqrt{2}$, $ID = 2$ và $AB = 2AD = 2\sqrt{IA^2 - ID^2} = 4$, suy ra $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{2}$.

Gọi S_1 là diện tích hình quạt AIB , ta có $S_1 = \frac{1}{4}\pi R^2$.

Diện tích tam giác AIB là $S_2 = \frac{1}{2}IA \cdot IB = 4$.

Vậy diện tích hình phẳng (H) là

$$S_{(H)} = S_1 - S_2 = 2\pi - 4.$$



- ☞ **Cách 2.** Hình phẳng (H) được biểu thị là phần tô màu trên hình vẽ, là hình giới hạn bởi đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và đường thẳng $x = 6$.

Ta có $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 8 - (x - 4)^2 \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{8 - (x - 4)^2}$.

(C) cắt đường thẳng $y = 3$ tại 2 điểm có tọa độ $(4 \pm 2\sqrt{2}; 3)$.

Gọi S_0 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3 + \sqrt{8 - (x - 4)^2}$, $y = 3$, $x = 6$, $x = 4\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } S_{(H)} = 2S_0 = 2 \cdot \int_6^{4+2\sqrt{2}} \left(3 + \sqrt{8 - (x - 4)^2} \right) dx \approx 2,2831.$$

Chọn đáp án (C)



BẢNG ĐÁP ÁN

34. B	35. A	36. B	37. C	38. A	39. B	40. C	41. B	42. D	43. C
44. B	45. D	46. A	47. D	48. D	49. A	50. A	51. D	52. B	53. C
55. D	56. A	57. A	58. B	59. C					

BÀI 3. BÀI TOÁN QUY VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - (6 + 8i)| = 2$ và $z \cdot \bar{z} = 64$.

(A) 3.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

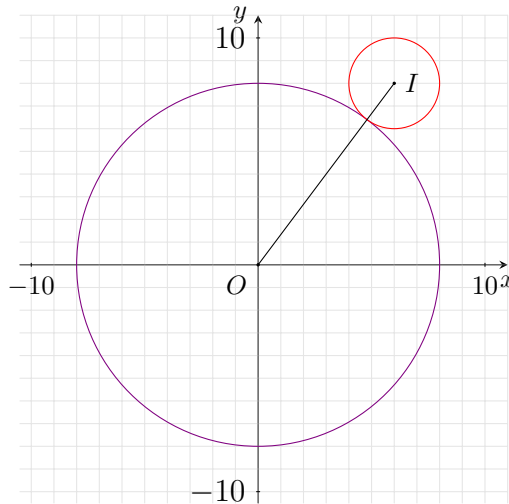
$$\text{Khi đó } \begin{cases} |z - (6 + 8i)| = 2 \\ z \cdot \bar{z} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 = 64 & (2) \end{cases}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì

(1) là phương trình của đường tròn (C_1) có tâm $I(6; 8)$, bán kính $R_1 = 2$.

(2) là phương trình của đường tròn (C_2) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R_2 = 8$.

Vì $OI = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 = R_1 + R_2$ nên đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài như hình vẽ.



Suy ra hệ phương trình (1), (2) có nghiệm duy nhất.

Vậy có đúng 1 số phức thỏa mãn ycbt.

Chú ý: Ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình (1), (2) như sau

$$\begin{aligned} \text{Hệ (1), (2)} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 12x + 96 - 16y = 0 \\ x^2 + y^2 - 64 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 40 = 0 \\ x^2 + y^2 - 64 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = \frac{32}{5} \end{cases} \\ &\Rightarrow z = \frac{24}{5} + \frac{32}{5}i. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho số thực x, y thỏa mãn $(2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i$ với i là đơn vị ảo. Giá trị của $x^2 - xy$ bằng

(A) 30.

(B) 40.

(C) 10.

(D) 20.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
(2x - y)i + y(1 - 2i) &= 3 + 7i \Leftrightarrow y - 3 + (2x - 3y - 7)i = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 = 0 \\ 2x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 8. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra $x^2 - xy = 40$.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 3.** Cho số phức z thỏa mãn $3\bar{z} + (1 + i)z = 1 - 5i$. Tìm mô đun của z

- (A)** $|z| = 5$. **(B)** $|z| = \sqrt{5}$. **(C)** $|z| = \sqrt{13}$. **(D)** $|z| = \sqrt{10}$.

Lời giải.Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

Ta có

$$\begin{aligned}
3\bar{z} + (1 + i)z &= 1 - 5i \Leftrightarrow 3(a - bi) + (1 + i)(a + bi) = 1 - 5i \\
&\Leftrightarrow 3a - 3bi + a + bi + ai - b = 1 - 5i \\
&\Leftrightarrow (4a - b) + (a - 2b)i = 1 - 5i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 1 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \\
&\Rightarrow z = 1 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 4.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + 2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20$. Tìm $|z|$.

- (A)** $|z| = 25$. **(B)** $|z| = 7$. **(C)** $|z| = 4$. **(D)** $|z| = 5$.

Lời giải.Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(1 + 2i)^2 z + \bar{z} &= 4i - 20 \Leftrightarrow (1 + 4i - 4)(a + bi) + a - bi = 4i - 20 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 4b + a = -20 \\ 4a - 3b - b = 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \\
&\Rightarrow z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = 5.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 5.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 13 + 2i$?

- (A)** 4. **(B)** 3. **(C)** 2. **(D)** 1.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$\begin{aligned}(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 13+2i &\Leftrightarrow (1+i)(x+yi) + (2-i)(x-yi) = 13+2i \\&\Leftrightarrow x-y + (x+y)i + 2x-y - (x+2y)i = 13+2i \\&\Leftrightarrow 3x-2y-yi = 13+2i \\&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 13 \\ -y = 2 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $z = 3 - 2i$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn: $z(1-2i) + \bar{z} \cdot i = 15+i$. Tìm môđun của số phức z ?

- (A)** $|z| = 5$. **(B)** $|z| = 4$. **(C)** $|z| = 2\sqrt{5}$. **(D)** $|z| = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$\begin{aligned}z(1-2i) + \bar{z}i = 15+i &\Leftrightarrow (a+bi)(1-2i) + (a-bi) \cdot i = 15+i \\&\Leftrightarrow a-2ai+bi+2b+ai+b = 15+i \\&\Leftrightarrow (a+3b) + (b-a)i = 15+i \\&\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = 15 \\ b-a = 1 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \\&\Rightarrow z = 3+4i \Rightarrow |z| = 5.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 7. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z \cdot \bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?

- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 1. **(D)** 4.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Theo đề ta có $\begin{cases} |x^2 + y^2 + x + yi| = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x+4) + yi| = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + y^2 = 4 & (C_1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (C_2) \end{cases}$.

Số số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là số giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-4; 0)$, bán kính $R_1 = 2$, đường tròn (C_2) có tâm $I_2(0; 0)$, bán kính $R_2 = 2$.

Kiểm tra thấy $I_1I_2 = R_1 + R_2$. Vậy hai đường tròn tiếp xúc ngoài, số giao điểm là 1.

Cách 2: Ta có $|z \cdot \bar{z} + z| = 2 \Leftrightarrow |z| \cdot |\bar{z} + 1| = 2 \Leftrightarrow |\bar{z} + 1| = 1 \Leftrightarrow |z + 1| = 1$.

Vậy số phức z thỏa mãn 2 phương trình $\begin{cases} |z| = 2 \\ |z + 1| = 1 \end{cases}$

Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z thì A là giao điểm của đường tròn (C_1) tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 2$ và đường tròn (C_2) tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R' = 1$.

Mặt khác ta có $OI = 1 = R - R' \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc trong, vậy số giao điểm là 1.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 8. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - i|$ và $|z|^2 + 2(z + \bar{z}) = 5$?

- (A)** 1. **(B)** 0. **(C)** 2. **(D)** 4.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned}|z - 2 + 3i| &= |z + 1 - i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 6x - 8y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6x - 11}{8}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}|z|^2 + 2(z + \bar{z}) &= 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(x + yi + x - yi) = 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0.\end{aligned}$$

Thay vào, ta được

$$\begin{aligned}x^2 + \left(\frac{6x - 11}{8}\right)^2 + 4x - 5 &= 0 \Leftrightarrow 100x^2 + 124x - 199 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} \\ x = \frac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} \end{cases}.\end{aligned}$$

$$\text{Với } x = \frac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} \Rightarrow y = \frac{-92 + 3\sqrt{371}}{50} \Rightarrow z = \frac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} + \left(\frac{-92 + 3\sqrt{371}}{50}\right)i.$$

$$\text{Với } x = \frac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} \Rightarrow y = \frac{-92 - 3\sqrt{371}}{50} \Rightarrow z = \frac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} + \left(\frac{-92 - 3\sqrt{371}}{50}\right)i.$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Số các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng số giao điểm của đường thẳng $\Delta: 6x - 8y - 11 = 0$ với đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 0)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $d(I, \Delta) = \frac{|-12 - 11|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{23}{10} < R$ nên Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Do đó, có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 9. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $(2 + 3i)z + 2\bar{z} = 16 + 3i$. Tính giá trị biểu thức $P = 3a + b$.

- A** $P = -11$. **B** $P = 17$. **C** $P = -1$. **D** $P = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(2 + 3i)z + 2\bar{z} &= 16 + 3i \Leftrightarrow (2 + 3i)(a + bi) + 2(a - bi) = 16 + 3i \\ &\Leftrightarrow (4a - 3b) + 3ai = 16 + 3i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $P = 3a + b = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $(3 + i) \cdot z - i \cdot \bar{z} = 7 - 6i$. Môđun của số phức z bằng

- A** 25. **B** $2\sqrt{5}$. **C** $\sqrt{5}$. **D** 5.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Khi đó

$$\begin{aligned}(3+i).z - i\bar{z} &= 7 - 6i \Leftrightarrow (3+i)(x+yi) - i(x-yi) = 7 - 6i \\ &\Leftrightarrow (3x-2y) + 3yi = 7 - 6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 7 \\ 3y = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ &\Rightarrow z = 1 - 2i.\end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+2i) - \bar{z}(2-3i) = -4+12i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- (A)** $M(3; 1)$. **(B)** $M(3; -1)$. **(C)** $M(-1; 3)$. **(D)** $M(1; 3)$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Suy ra $\bar{z} = a - bi$.

Khi đó

$$\begin{aligned}z(1+2i) - \bar{z}(2-3i) &= -4+12i \Leftrightarrow (a+bi)(1+2i) - (a-bi)(2-3i) = -4+12i \\ &\Leftrightarrow -a+b+(5a+3b)i = -4+12i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b = -4 \\ 5a+3b = 12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

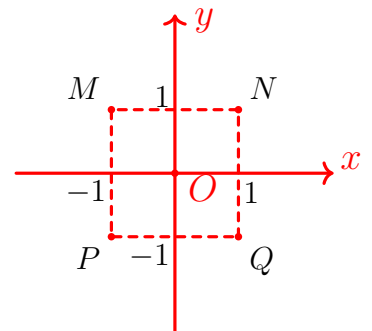
Do đó điểm M biểu diễn số phức z có tọa độ là $(3; -1)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 12.

Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 3\bar{z} = -5+7i$. Điểm nào sau đây trong các điểm M, N, P, Q biểu diễn cho số phức z ?

- (A)** Điểm M . **(B)** Điểm N . **(C)** Điểm P . **(D)** Điểm Q .



Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Suy ra $\bar{z} = a - bi$.

Khi đó

$$\begin{aligned}(1+3i)z - 3\bar{z} &= -5+7i \Leftrightarrow (1+3i)(a+bi) - 3(a-bi) = -5+7i \\ &\Leftrightarrow -2a-3b+(3a+4b)i = -5+7i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-3b = -5 \\ 3a+4b = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Do đó điểm biểu diễn cho số phức z có tọa độ là $(1; 1)$ là điểm N trên hình vẽ.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $(2i + 3)z - (1 - i)\bar{z} = -2 + 8i$. Khoảng cách từ điểm biểu diễn cho số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy đến điểm $M(1; 2)$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Suy ra $\bar{z} = a - bi$.
Khi đó

$$\begin{aligned}(2i + 3)z - (1 - i)\bar{z} = -2 + 8i &\Leftrightarrow (2i + 3)(a + bi) - (1 - i)(a - bi) = -2 + 8i \\&\Leftrightarrow 2a - b + (3a + 4b)i = -2 + 8i \\&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -2 \\ 3a + 4b = 8 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Do đó điểm N biểu diễn cho số phức z có tọa độ là $(0; 2)$.

Ta có khoảng cách cần tìm là $MN = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho các số thực a, b thỏa mãn $i[2(a - 5) - 7i] = b + (a + 3)i$, với i là đơn vị ảo. Tính $a - b$

- (A) 2. (B) 6. (C) 12. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}i[2(a - 5) - 7i] = b + (a + 3)i &\Leftrightarrow 7 + 2(a - 5)i = b + (a + 3)i \\&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a + 3 = 2(a - 5) \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 13 \end{cases} \\&\Rightarrow a - b = 13 - 7 = 6.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = 3$. (C) $|z| = \frac{13}{4}$. (D) $|z| = \frac{25}{4}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$\begin{aligned}|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 2(a - bi) = -7 + 3i + a + bi \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - 2a = -7 + a \\ 2b = 3 + b \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ \sqrt{a^2 + 9} = 3a - 7 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 3a - 7 \geq 0 \\ a^2 + 9 = (3a - 7)^2 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = 4 + 3i$$

$$\Rightarrow |z| = 5.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Tính mô đun của số phức z thỏa mãn $z(1+2i) + \bar{z}(1-i) + 4-i = 0$ với i là đơn vị ảo.

(A) $\sqrt{6}$.

(B) $\sqrt{5}$.

(C) $\sqrt{2}$.

(D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử: $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} z(1+2i) + \bar{z}(1-i) + 4-i = 0 &\Leftrightarrow (x+yi)(1+2i) + (x-yi)(1-i) + 4-i = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-3y+4) + (x-1)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \\ &\Rightarrow z = 1+2i \\ &\Rightarrow |z| = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Tìm tập hợp T gồm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

(A) $T = \{-1-i; 1-i; -1+i; 1+i\}$.

(B) $T = \{1-i; 1+i\}$.

(C) $T = \{-1+i\}$.

(D) $T = \{-1-i\}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$.

Khi đó $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$; z^2 là số thuần ảo nên ta có $x^2 - y^2 = 0$.

Từ đó ta có hệ

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = 1, y = -1 \\ x = -1, y = 1 \\ x = -1, y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho số phức $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3+2i$. Tính $P = a + b$.

(A) $P = 1$.

(B) $P = -\frac{1}{2}$.

(C) $P = \frac{1}{2}$.

(D) $P = -1$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i \Rightarrow (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a + bi + ia - b + 2a - 2bi = 3 + 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $P = a + b = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

- (A) $S = -6$. (B) $S = 6$. (C) $S = -5$. (D) $S = 5$.

Lời giải.

Ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow (a+1) + (b+3 - \sqrt{a^2+b^2})i = 0$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{1+b^2}=b+3 \end{cases} \\ (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ 1+b^2=(b+3)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 2a + 3b = -6.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

- (A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z^4 = |z| &\Leftrightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|(|z|^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0. \\ |z| = 1 &\Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases} \Rightarrow S \text{ có 5 phần tử.} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$) thỏa mãn $z + 4\bar{z} = \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right)|z|$.

Tính $S = \frac{2a+b}{2a-b}$.

- (A) $S = -2\sqrt{2} - 3$. (B) $S = 2\sqrt{2} - 2$. (C) $S = 2 - 2\sqrt{2}$. (D) $S = 2\sqrt{2} + 3$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$), ta có

$$\begin{aligned}(a + bi) + 4(a - bi) &= \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 5a - 3bi = \frac{5}{3}\sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = \frac{5}{3}\sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ -3b = -2\sqrt{2(a^2 + b^2)} & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a > 0, b > 0$.

$$\text{Chia cho được } b = 2\sqrt{2}a > 0 \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2 - 2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 22. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 2 + 3i) + 4i = (4 + 5i)z$

- (A)** 1 . **(B)** 2 . **(C)** 4 . **(D)** 3 .

Lời giải.

Đặt $t = |z|$ ($t \geq 0$).

Ta có $(z - 2 + 3i)t + 4i = (4 + 5i)z \Leftrightarrow z(t - 4 - 5i) = 2t - (3t + 4)i$.

Lấy môđun 2 vế ta được

$$\begin{aligned}|z(t - 4 - 5i)| &= |2t - (3t + 4)i| \Leftrightarrow t\sqrt{(t - 4)^2 + 25} = \sqrt{4t^2 + (3t + 4)^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2((t - 4)^2 + 25) = (4t^2 + (3t + 4)^2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^4 - 8t^3 + 28t^2 - 24t - 16 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t - 2)(t^3 - 6t^2 + 16t + 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.\end{aligned}$$

Với $t = 2$, ta có:

$$\begin{aligned}2(z - 2 + 3i) + 4i &= (4 + 5i)z \Leftrightarrow 2[x - 2 + (y + 3)i] + 4i = (4 + 5i)(x + yi) \\ &\Leftrightarrow 2(x - 2) + (2y + 10) = 4x - 5y + (5x + 4y)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2.\end{aligned}$$

Vậy có duy nhất 1 số phức z thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 23. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|2 + i|z|z - 1 - 2iz| = |1 + 3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

- (A)** $M = \sqrt{19}$. **(B)** $M = 19$. **(C)** $M = 25$. **(D)** $M = 5$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}|2 + i|z|z - 1 - 2iz| &= |1 + 3i| \Leftrightarrow |z[2|z| - 1 + |z| + 2i]| = \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow |z| \sqrt{2|z| - 1^2 + |z| + 2^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1\end{aligned}$$

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$.

Ta có $|z| = |z_2| = 1 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = 1 \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = \frac{1}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= |2z_1 + 3z_2| \\ &= |2a_1 + 3a_2 + 2b_1i + 3b_2i| \\ &= \sqrt{(2a_1 + 3a_2)^2 + (2b_1 + 3b_2)^2} \\ &= \sqrt{4a_1^2 + b_1^2 + 12a_1a_2 + b_1b_2 + 9a_2^2 + b_2^2} \\ &= \sqrt{19}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 24. Tìm mô đun của số phức số z biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

(A) $\frac{1}{9}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(C) $\frac{2}{9}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) &= 2 - 2i \Leftrightarrow 2z(1 + i) - 1 - i + (1 - i)\bar{z} + 1 - i = 2 - 2i \\ &\Leftrightarrow 2z(1 + i) = 2 - (1 - i)\bar{z}. \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2z(1 + i) &= 2(a + bi)(1 + i) \\ &= 2a - 2b + (2a + 2b)i. \\ 2 - (1 - i)\bar{z} &= 2 - (1 - i)(a - bi) \\ &= 2 - a + b + (a + b)i. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 2 - a + b \\ 2a + 2b = a + b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 25. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo.

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 5.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$; ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó ta có $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b| \quad (1).$$

Khi đó $\bar{z} = a - bi$ suy ra $|z + \bar{z}| = 2|a|, |z - \bar{z}| = 2|b|$.

Ta có $|z|^2 = |z^2| = 2|ab|$ nên kết hợp với giả thiết suy ra $|ab| = |a| + |b| \quad (2)$.

$$\text{Kết hợp (1) và (2) ta được hệ } \begin{cases} |a| = |b| \\ |ab| = |a| + |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 = 2|a| \\ |a| = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| = 2 \\ |a| = |b| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 2 \\ a = b = -2 \\ a = -b = 2 \\ a = -b = -2 \\ a = b = 0. \end{cases}$$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 12$ và $|z + 2 - 3i| = |\bar{z} - 4 + i|$?

(A) 1.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 2.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 12 \\ |z + 2 - 3i| = |\bar{z} - 4 + i| \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3|2a| + 2|2bi| = 12 \\ |(a + 2) + (b - 3)i| = |(a - 4) + (1 - b)i| \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3|a| + 2|b| = 6 \\ \sqrt{(a + 2)^2 + (b - 3)^2} = \sqrt{(a - 4)^2 + (1 - b)^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3|a| + 2|b| = 6 \\ 3a - b = 1. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

☑ **Trường hợp 1:** $a \geq 0, b \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{9} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{8}{9} + \frac{5}{3}i.$

☑ **Trường hợp 2:** $a \geq 0, b < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -5. \end{cases}$

☑ **Trường hợp 3:** $a < 0, b \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = 7. \end{cases}$

☑ **Trường hợp 4:** $a < 0, b < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{4}{9} - \frac{7}{3}i.$

Vậy có 2 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

- Câu 27.** Cho số phức z không phải là số thực và $\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$?
- (A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 8.

 **Lời giải.**

☑ **Cách 1.**

Ta có $\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực nên

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} &= \overline{\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}} \\ \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 4)(\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 4) &= (z^2 + 2z + 4)(\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 4) \\ \Leftrightarrow 4z^2 \cdot \bar{z} - 4z \cdot \bar{z}^2 - 16z + 16\bar{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow |z|^2(z - \bar{z}) - 4(z - \bar{z}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (|z|^2 - 4)(z - \bar{z}) &= 0 \\ \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \quad \text{vì } z - \bar{z} \neq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } z = a + bi \text{ với } b \neq 0, a \in \mathbb{R} \quad |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|a| + 2|b| = 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ |a| + |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \cdot |b| = 0 \\ |a| + |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 0 \\ |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$$

☑ **Cách 2.** Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Do z là số thực nên $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} &= \frac{(a + bi)^2 - 2(a + bi) + 4}{(a + bi)^2 + 2(a + bi) + 4} \\ &= \frac{(a^2 - b^2 - 2a + 4) + (2ab - 2b)i}{(a^2 - b^2 + 2a + 4) + (2ab + 2b)i} \end{aligned}$$

$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực nên phần ảo bằng 0

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -(a^2 - b^2 - 2a + 4)(2ab + 2b) + (2ab - 2b)(a^2 - b^2 + 2a + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4b(a^2 + b^2 - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 \quad \text{do } b \neq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| &= |z|^2 \\ \Leftrightarrow |2a| + |2b| &= a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow 2(|a| + |b|) &= a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow 4(a^2 + 2|ab| + b^2) &= (a^2 + b^2)^2 \end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) ta có $4(4 + 2|ab|) = 16 \Leftrightarrow |ab| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ mà $b \neq 0$ nên nhận $a = 0$.

Với $a = 0$ ta được $b = \pm 2$ nên $z = \pm 2i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

(A) $w = -3 + 8i$.

(B) $w = 1 + 3i$.

(C) $w = -1 + 7i$.

(D) $w = -4 + 8i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |z| = 5 \\ |z + 3| = |z + 3 - 10i| \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x + yi| = 5 \\ |x + 3 + yi| = |x + 3 + (y - 10)i| \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x + 3)^2 + y^2 = (x + 3)^2 + (y - 10)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 20y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 - 5^2 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z = 5i$. Từ đó ta có $w = z - 4 + 3i = -4 + 3i + 5i = -4 + 8i$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho các số phức z thỏa mãn hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Tổng bình phương phần thực của tất cả các số phức z đó bằng

(A) 5.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số thuần ảo khi $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$. Mặt khác $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = \pm y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tổng bình phương phần thực bằng 4.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?

(A) 4.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 3.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Ta có $z - 1 = a - 1 + bi$, $z - \bar{z} = 2bi$, $z + \bar{z} = 2a$.

$$i^{2019} = (i^2)^{1009} i = (-1)^{1009} i = -i$$

. Do đó

$$\begin{aligned} & |z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{(a - 1)^2 + b^2} \right)^2 + \sqrt{(2b)^2} \cdot i + 2a(-i) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ 2|b| - 2a = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a = |b| \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2 - 2|b| = 0 \\ a = |b| \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 0 \\ |b| = 1 \\ a = |b| \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 31. Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 4 - 3i| + |z - 8 - 5i| = 2\sqrt{38}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 4i|$.

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{5}{2}$.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Gọi $\begin{cases} z = x + yi \Rightarrow M(x; y) \\ z_1 = -4 + 3i \Rightarrow F_1(-4; 3) \\ z_2 = 8 + 5i \Rightarrow F_2(8; 5) \\ z_0 = 2 + 4i \Rightarrow A(2; 4) \end{cases}$. Ta thấy $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \Rightarrow A$ là trung điểm của F_1F_2 .

Theo giả thiết, ta có $|z + 4 - 3i| + |z - 8 - 5i| = 2\sqrt{38} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2\sqrt{38}$.

Suy ra, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip (E) có $\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{38}}{2} = \sqrt{38} \\ c = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \sqrt{37} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1. \end{cases}$

Ta có $|z - 2 - 4i| = MA$. Vì A là tâm Elip và M di chuyển trên Elip nên $\min AM = b = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 4i|$ bằng 1.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 32. Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z - \bar{z} + 2|$ là hình gồm

(A) hai đường thẳng.

(B) hai đường tròn.

(C) một đường tròn.

(D) một đường thẳng.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Số phức z có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Ta có

$$\begin{aligned}
 &2|z - 1| = |z - \bar{z} + 2| \\
 &\Leftrightarrow 2|x + yi - 1| = |x + yi - (x - yi) + 2| \\
 &\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4y^2} \\
 &\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 4y^2 = 4 + 4y^2 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là hai đường thẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức ω thỏa mãn $\omega = \bar{z} + 1 - i$

- (A) Hình tròn $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.
(B) Đường tròn $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.
(C) Đường tròn $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$.
(D) Hình tròn $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$.

Lời giải.

Gọi $\omega = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \omega &= \bar{z} + 1 - i \\ \Leftrightarrow \bar{z} &= (x - 1) + (y + 1)i \\ \Leftrightarrow z &= (x - 1) - (y + 1)i. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |3z + i|^2 &\leq z \cdot \bar{z} + 9 \\ \Leftrightarrow |3[(x - 1) - (y + 1)i] + i|^2 &\leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \\ \Leftrightarrow |3(x - 1) - (3y + 2)i|^2 &\leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 &\leq \frac{73}{64}. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức ω là hình tròn $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ nhận $z_1 = -1 + i$ và $z_2 = 1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm. Tính $a + b + c + d$.

- (A) 10. (B) 9. (C) -7. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1), $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

Nhận thấy Nếu z là nghiệm của (1) thì $\bar{z}$ cũng là nghiệm của (1).

Do đó, (1) có bốn nghiệm $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 + \sqrt{2}i, z_3 = \bar{z}_1 = -1 - i, z_4 = \bar{z}_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

Mà $\begin{cases} z_1 + z_3 = -2 \\ z_1 \cdot z_3 = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} z_2 + z_4 = 2 \\ z_2 \cdot z_4 = 3. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) \\ \Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= x^4 + x^2 + 2x + 6. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 0, b = 1, c = 2, d = 6$ hay $a + b + c + d = 9$.

Chọn đáp án (B) □

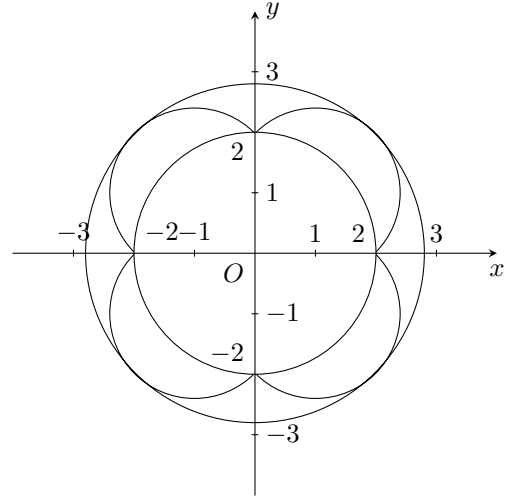
Câu 35. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ và $|z| = m$.

- (A) $\{2; 2\sqrt{2}\}$. (B) $[2; 2\sqrt{2}]$. (C) $\{2\}$. (D) $(2; 2\sqrt{2})$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$\begin{aligned} & |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2| \\ \Leftrightarrow & 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow & (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 = 2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 & \text{khi } x \leq 0, y \leq 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 & \text{khi } x \leq 0, y \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Ta có $|z| = m \Leftrightarrow x^2 + y^2 = m^2$, ($m \geq 0$).

Điều kiện cần và đủ để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ và $|z| = m$ là đường

tròn
(C): $x^2 + y^2 = m^2$ có đúng 4 điểm chung với cả 4 phần đường tròn trên.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai trường hợp thỏa mãn đó là $m = 2$ hoặc $m = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

- (A) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. (C) $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.

Đặt $w = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + bi = 2\bar{z} - 1 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \frac{a+1}{2} + \frac{b-4}{2}i$.

Ta có $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$ hay

$$\begin{aligned} & |z - 2| = |\bar{z} - 1 + 2i| \\ \Rightarrow & \left(\frac{a+1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{b-4}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b-4}{2} + 2\right)^2 \\ \Leftrightarrow & (a-3)^2 + (b-4)^2 = (a-1)^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow & a + 2b - 6 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng $(d): x + 2y - 6 = 0$.

Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến (d) là $\frac{|2 - 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Hình phẳng giới hạn bởi tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 10$ có diện tích bằng

- (A) 12π . (B) 20π . (C) 15π . (D) 25π .

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Gọi $A(3; 0)$, $B(-3; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = 3$ và $z_2 = -3$.

Khi đó $AB = 6$ và $|z - 3| + |z + 3| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10 > AB$.

Do đó quỹ tích của điểm M là đường Elip có bán trục lớn $a = 5$, nửa tiêu cự $c = 3$ và bán trục nhỏ là $b = 4$.

Vậy diện tích hình Elip là $S = \pi ab = 20\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho số phức z có $|z| = 2$. Biết tập hợp biểu diễn các số phức $w = 3 + i - (3 - 4i)z$ là một đường tròn, bán kính đường tròn đó bằng

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) $5\sqrt{5}$. (C) 10. (D) $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi số phức $w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} w &= 3 + i - (3 - 4i)z \\ \Leftrightarrow w - 3 - i &= (-3 + 4i)z \\ \Rightarrow |w - 3 - i| &= |(-3 + 4i)z| \\ \Rightarrow |w - 3 - i| &= 10 \\ \Rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} &= 10 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= 100. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng 10.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $(|z| + i)z = \sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. (B) $\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}$. (C) $|z| < \frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{2} < |z| < \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Gọi $|z| = m \geq 0$. Khi đó $(|z| + i)z = \sqrt{2}$ được viết lại thành $(m + i)z = \sqrt{2}$.

Lấy mô - đun 2 vế ta có

$$\begin{aligned} |m + i| \cdot |z| &= |\sqrt{2}| \\ \Leftrightarrow m\sqrt{m^2 + 1} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow m^2(m^2 + 1) &= 2 \\ \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \\ m^2 = -2 \text{ (vô nghiệm).} \end{cases} \end{aligned}$$

Do $m \geq 0$ nên ta có $m = 1$, suy ra $|z| = 1$. Vậy $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Mà } z = m + 3 + (m^2 - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = m \\ y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong $(C): y = x^2 - 6x + 8$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox , ta có $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4. \end{cases}$

Diện tích giới hạn bởi (C) và trục hoành là

$$S = \int_2^4 |x^2 - 6x + 8| dx = - \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_2^4 = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0, thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng Oxy . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Tam giác OMN nhọn và không đều. (B) Tam giác OMN đều.
(C) Tam giác OMN tù. (D) Tam giác OMN vuông.

Lời giải.

☑ **Cách 1**

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &= z_1 z_2 \\ \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 &= -z_1 z_2 \\ \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 &= |z_1| \cdot |z_2| \\ \Leftrightarrow MN^2 &= OM \cdot ON \quad (1) \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &= z_1 z_2 \\ \Leftrightarrow z_1^2 &= z_2(z_1 - z_2) \\ \Rightarrow |z_1|^2 &= |z_2| \cdot |z_1 - z_2| \\ \Leftrightarrow OM^2 &= ON \cdot MN \quad (2) \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$ON^2 = OM \cdot MN \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có

$$\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{ON}{OM} \Leftrightarrow OM = ON \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có $MN^2 = OM^2 \Leftrightarrow MN = OM$.

Từ đó suy ra $OM = ON = MN$. Vậy $\triangle OMN$ đều.

☑ **Cách 2**

Ta có

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &= z_1 z_2 \\ \Leftrightarrow z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2\right)^2 + \frac{3}{4}z_2^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right) \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases} &\quad (1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow |z_1 - z_2| &= |z_2| \\ \Leftrightarrow MN &= ON \quad (2) \end{aligned}$$

Cũng từ (1) ta suy ra $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow OM = ON$. (3) Từ (2) và (3) suy ra $\triangle OMN$ đều.

☑ Cách 3

Chọn $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ và $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (1 + \sqrt{3}i)^2 + (-1 + \sqrt{3}i)^2 = 4$ và $z_1 z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i) = 4$.

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ nên hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó $M(1; \sqrt{3})$ và $N(-1; \sqrt{3})$, ta có $OM = ON = MN = 2$. Vậy $\triangle OMN$ đều

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| \leq 3$. Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- (A) $S = 25\pi$. (B) $S = 16\pi$. (C) $S = 9\pi$. (D) $S = 36\pi$.

💬 Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức w .

Ta có $w = 2(z - 2 + 3i) + 4 - 6i + 1 - i \Leftrightarrow w - 5 + 7i = 2(z - 2 + 3i)$.

Khi đó $|w - 5 + 7i| = 2|z - 2 + 3i| \leq 6 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 7)^2 \leq 36$.

Suy ra tập hợp các điểm M trên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm $I(5; -7)$ bán kính $R = 6$.

Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) = 25$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Tổng $a + b + c$ bằng

- (A) 9. (B) 3. (C) 2. (D) 7.

💬 Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} (z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) &= 25 \\ \Leftrightarrow [(x + 1) + (y - 3)i][(x + 1) - (y - 3)i] &= 25 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Tập các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1; 3)$, bán kính bằng 5.

Vậy $a + b + c = -1 + 3 + 5 = 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z - 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

- (A) $R = 8$. (B) $R = 4$. (C) $R = 2\sqrt{2}$. (D) $R = 2$.

💬 Lời giải.

Giả sử A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Theo giả thiết ta có A, B thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$, bán kính $r = 5$ và $AB = 6$.

Gọi M là trung điểm của AB khi đó M cũng là điểm biểu diễn số phức $u = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{w}{2}$.

Lại có $IM^2 = IA^2 - AM^2 = r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow IM = 4$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính $r' = 4$.

Suy ra các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2 = 2u$ là một đường tròn bán kính $R = 2r' = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

- (A) $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{18\sqrt{13}}{13}$. (C) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ và $w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & |z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow & |a + bi - 2(i^2)^{1010}| = |a - bi - 1 + 2i| \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (2-b)^2} \\ \Leftrightarrow & 2a - 4b + 1 = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Theo giả thiết

$$\begin{aligned} & w = 2\bar{z} - 1 + 4i \\ \Leftrightarrow & x + yi = 2(a - bi) - 1 + 4i \\ \Leftrightarrow & x + yi = 2a - 1 + (4 - 2b)i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 4 - 2b \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = \frac{x+1}{2} \\ b = \frac{4-y}{2} \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1) ta được $2 \cdot \frac{x+1}{2} - 4 \cdot \frac{4-y}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0 \quad (\Delta)$.

Vậy $d(I, \Delta) = \frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích là

- A** $S = 25\pi$. **B** $S = 9\pi$. **C** $S = 12\pi$. **D** $S = 16\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & w = 2z + 1 - i \\ \Leftrightarrow & \frac{w - (1 - i)}{2} = z \\ \Leftrightarrow & \frac{w - (1 - i)}{2} - 3 + 4i = z - 3 + 4i \\ \Leftrightarrow & \frac{w - 7 + 9i}{2} = z - 3 + 4i \\ \Rightarrow & \left| \frac{w - 7 + 9i}{2} \right| = |z - 3 + 4i|. \end{aligned}$$

Ta được $\frac{|w - (7 - 9i)|}{2} = |z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |w - (7 - 9i)| \leq 4$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính bằng 4.

Vậy diện tích hình tròn là $S = 16\pi$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 47. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là.

- A** $\sqrt{2} + 1$. **B** $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$. **C** $\frac{3}{2}$. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| &= 2 \\ \Leftrightarrow |2x| + |2yi| &= 2 \\ \Leftrightarrow |x| + |y| &= 1. \end{aligned}$$

Đặt $z' = z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m = |z|^2 + z - \bar{z} - m$.

Mà z' là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0. Tức là $x^2 + y^2 = m$.

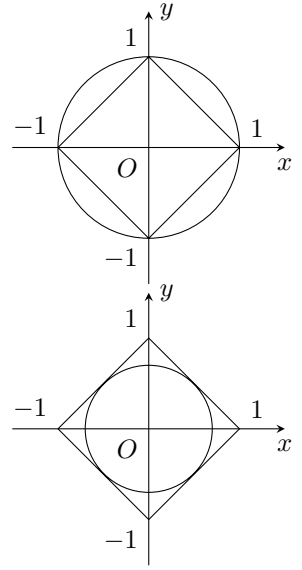
Tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn là hình vuông tâm là gốc tọa độ.

Để có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời và thì phải là một đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông nói trên. Tức là $m > 0$ và $\sqrt{m} = 1$ hoặc

$$\sqrt{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{1}{2}.$$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **C**



□

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. D	4. D	5. D	6. A	7. C	8. C	9. C	10. C
11. B	12. B	13. A	14. B	15. A	16. B	17. A	18. D	19. A	20. C
21. A	22. A	23. A	24. B	25. D	26. D	27. B	28. D	29. B	30. D
31. D	32. A	33. A	34. B	35. A	36. C	37. B	38. C	39. A	40. D
41. B	42. D	43. D	44. A	45. D	46. D	47. C			

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai của số thực âm

- ☑ Cho số z , nếu có số phức z_1 sao cho $z_1^2 = z$ thì ta nói z_1 là một căn bậc hai của z .
- ☑ Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.
- ☑ Căn bậc hai của số thực z âm là $\pm i\sqrt{|z|}$.
- ☑ Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy

- ☑ Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = \frac{-b}{2a}$.
- ☑ Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ☑ Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

B BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - z + 7 = 0$. Tính $S = |z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}|$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{27}{4}$. (C) 2. (D) $\frac{7}{2}$.

💬 **Lời giải.**

Vì phương trình $2z^2 - z + 7 = 0$ có hệ số thực và $\Delta < 0$ nên $z_1 = \overline{z_2}$ và $z_2 = \overline{z_1}$.

$$\text{Do đó } S = |z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2| = |z_1^2 + z_2^2| = |(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2| = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \right| = \frac{27}{4}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ làm nghiệm?

- (A) $z^2 + 2z + 3 = 0$. (B) $z^2 - 2z - 3 = 0$. (C) $z^2 - 2z + 3 = 0$. (D) $z^2 + 2z - 3 = 0$.

💬 **Lời giải.**

Đặt $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ và $z_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) = 2 \\ z_1 \cdot z_2 = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 3 \end{cases} \Rightarrow z_1, z_2 \text{ là nghiệm của phương trình } z^2 - 2z + 3 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 2^{2020} = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- (A) 2^{2021} . (B) 2^{1011} . (C) 2^{2020} . (D) 2^{1010} .

💬 **Lời giải.**

Nhận xét $z_1 \cdot z_2 = 2^{2020}$; $\overline{z_1} = z_2$ và $|z_1| = |z_2|$.

Ta có $|z_1| = \sqrt{|z_1|^2}$, mặt khác $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = z_1 \cdot z_2 = 2^{2020}$ nên $|z_1| = 2^{1010}$.

Vậy $|z_1| + |z_2| = 2 \cdot 2^{1010} = 2^{1011}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm là

- (A) $z^2 - z + 2 = 0$. (B) $2z^2 + z + 2 = 0$. (C) $z^2 - z + 1 = 0$. (D) $z^2 + z + 1 = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} S = z + \overline{z} = -1 \\ P = z \cdot \overline{z} = 1. \end{cases}$$

Theo Vi-et ta có z và $\overline{z}$ là nghiệm của phương trình $z^2 - S \cdot z + P = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Biết phương trình $z^2 + mz + n = 0$ có một nghiệm là $z = 1 + i$. Tính mô-đun của số phức $z = m + ni$.

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) 4. (C) 16. (D) 8.

Lời giải.

Vì $z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + mz + n = 0$ nên

$$(1 + i)^2 + m(1 + i) + n = 0 \Leftrightarrow m + n + (2 + m)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 0 \\ 2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{m^2 + n^2} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- (A) $\frac{3}{18}$. (B) $-\frac{9}{8}$. (C) 3. (D) $-\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Cách 1: Phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$ có hai nghiệm $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}i$; $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}i$.

$$\text{Suy ra biểu thức } z_1^2 + z_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 = -\frac{9}{4}.$$

Cách 2: Áp dụng định lý Vi-et cho phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$

$$\text{Biểu thức } z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB .

- (A) $8\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $4\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm $z_1; z_2$ nên $\begin{cases} z_1 + z_2 = -b \\ z_1 \cdot z_2 = c. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} z^2 - 2bz + 4c = 0 &\Leftrightarrow z^2 + 2z(z_1 + z_2) + 4z_1 \cdot z_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z + 2 \cdot z_1)(z + 2 \cdot z_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \cdot z_1 \\ z = -2 \cdot z_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $AB = |-2 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2| = 2|-z_1 + z_2| = 4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Kí hiệu n là số các giá trị của tham số a sao cho phương trình $z^2 + az + 3 = 0$, có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -5$. Tìm n .

- (A) $n = 0$. (B) $n = 1$. (C) $n = 2$. (D) $n = 3$.

Lời giải.

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 \cdot z_2 = 3. \end{cases}$

Khi đó $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = -5 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1. \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn $\Rightarrow n = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

- (A) $P = -\frac{9}{4}$. (B) $P = \frac{4}{9}$. (C) $P = \frac{9}{4}$. (D) $P = -\frac{4}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{9}{2}. \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{4}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ với a, b là các tham số thực nhận số phức $1 + i$ là một nghiệm. Tính $a - b$.

- (A) -2 . (B) -4 . (C) 4 . (D) 0 .

Lời giải.

Phương trình $z^2 + az + b = 0$ nhận $z = 1 + i$ là nghiệm nên

$$\begin{aligned} (1 + i)^2 + a(1 + i) + b &= 0 \Leftrightarrow 2i + a + ai + b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a + b) + (a + 2)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a - b = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2 \cdot z_2| + 2$ bằng

- (A) $P = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. (B) $P = 5 - 2\sqrt{3}$. (C) $P = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. (D) $P = 5 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 suy ra A thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 1$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d .

$$|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2z_2 - 6 - 8i| = 1.$$

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức $2 \cdot z_2$ suy ra B thuộc đường tròn (C_1) tâm $J(6; 8)$ bán kính $R_1 = 1$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z suy ra M thuộc đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$.

Ta có điểm I, J cùng phía so với đường thẳng d và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn (C) và đường tròn (C_1) .

Gọi (C_2) là đường tròn tâm K đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d .

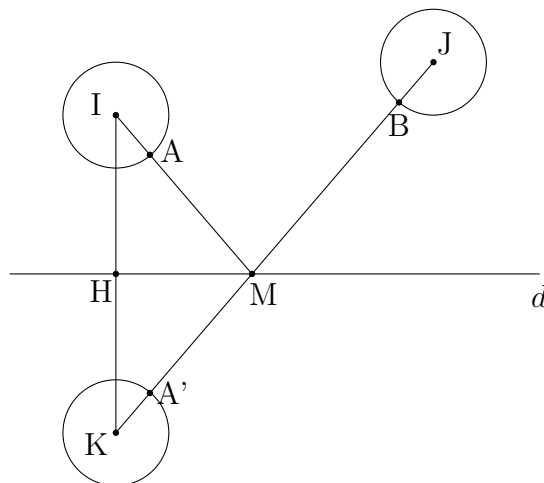
Khi đó điểm K đối xứng với điểm I qua đường thẳng d .

$$\text{Ta tìm được } K\left(\frac{105}{13}; \frac{8}{13}\right) \Rightarrow JK = \frac{\sqrt{9945}}{13}.$$

$$\text{Khi đó } P = |z - z_1| + |z - 2 \cdot z_2| + 2 = MA + MB + 2 = MA' + MB + 2 \geq A'B + 2.$$

$$\text{Suy ra } P_{\min} = A'B + 2 = JK - 1 - 1 + 2 = JK = \frac{\sqrt{9945}}{13}.$$

Chọn đáp án **(C)**



Câu 12. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - 2z + 27 = 0$. Giá trị của $z_1 |z_2| + z_2 |z_1|$ bằng

(A) 2.

(B) 6.

(C) $3\sqrt{6}$.

(D) $\sqrt{6}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z_1 + z_2 = \frac{2}{3} \text{ và } z_1 \cdot z_2 = 9.$$

$$\text{Mặt khác } |z_1| = |z_2| = \sqrt{|z_1| |z_2|} = \sqrt{|z_1 \cdot z_2|} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{Do đó } z_1 |z_2| + z_2 |z_1| = z_1 \cdot 3 + z_2 \cdot 3 = 3(z_1 + z_2) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 13. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 8z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ là

(A) 2.

(B) $\sqrt{5}$.

(C) $\frac{5}{2}$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z_1 = 1 + \frac{1}{2}i, z_2 = 1 - \frac{1}{2}i \text{ nên ta có } |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 14. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 6z + 17 = 0$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ bằng

(A) $\sqrt{34}$.

(B) 3.

(C) $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

(D) 5.

Lời giải.

Ta có $2z^2 - 6z + 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \\ z = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i. \end{cases}$

Do đó $|z_1 - z_2| = \left| \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \right) \right| = |5i| = 5.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Biểu thức $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019}$ có giá trị của bằng

- (A) 2^{1009} . (B) 2^{1010} . (C) 0. (D) -2^{1010} .

Lời giải.

Xét phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i. \end{cases}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019} &= (1 + i)^{2019} + (1 - i)^{2019} \\ &= (1 + i) \cdot ((1 + i)^2)^{1009} + (1 - i) \cdot ((1 - i)^2)^{1009} \\ &= (1 + i) \cdot (2i)^{1009} + (1 - i) \cdot (-2i)^{1009} \\ &= (2i)^{1009} ((1 + i) - (1 - i)) = (2i)^{1010} = -2^{1010}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0| = \sqrt{3}$.

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có $\Delta = -4a^2 + 8a + 3$.

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{7}}{2}.$

Khi đó, phương trình có nghiệm z_0 thì $z_0 \in \mathbb{R}$.

Theo đề bài $|z_0| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt{3} \\ z_0 = -\sqrt{3}. \end{cases}$

☑ $z_0 = -\sqrt{3}$ thay vào phương trình ta được $a^2 - 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2. \end{cases}$

☑ $z_0 = \sqrt{3}$ thay vào phương trình ta được $a^2 - 2a + 6 = 0$.

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện suy ra $a = 2$.

Trường hợp 2. $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \\ a > \frac{2 + \sqrt{7}}{2}. \end{cases}$

Khi đó, phương trình có nghiệm phức z_0 thì $\bar{z}_0$ cũng là một nghiệm của phương trình.

Ta có $z_0 \cdot \bar{z}_0 = a^2 - 2a \Leftrightarrow |z_0|^2 = a^2 - 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3. \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện suy ra $a = 3$.

Vậy có 2 giá trị a dương thỏa mãn là $a = 2; a = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$, số phức z có mô-đun nhỏ nhất có phần ảo là

(A) $\frac{3}{10}$.

(B) $\frac{3}{5}$.

(C) $-\frac{3}{5}$.

(D) $-\frac{3}{10}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

Ta có

$$\begin{aligned}|z - 1 + i| &= |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 1)i| = |(x + 1) - (y + 2)i| \\&\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 2)^2} \\&\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Cách 1: Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-2x - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5x^2 + 6x + \frac{9}{4}} = \sqrt{5\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}} \geq \frac{3\sqrt{5}}{10}, \forall x$.

Suy ra min $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x = -\frac{3}{5}; y = -\frac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô-đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Cách 2: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x + 2y + 3 = 0$.

Ta có $|z| = OM$, do đó $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d .

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là $x - 2y = 0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 2y + 3 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{10}\right)$ nên $z = -\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô-đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Nhận xét. Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

Ta có $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z - (-1 - 2i)| \quad (*)$.

Gọi M biểu diễn số phức z , điểm $A(1; -1)$ biểu diễn số phức $1 - i$, điểm $B(-1; -2)$ biểu diễn số phức $-1 - 2i$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x + 2y + 3 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$.

(A) $\frac{9}{2}$.

(B) $\frac{11}{4}$.

(C) $\frac{11}{2}$.

(D) $\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $2z^2 - 4z + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i. \end{cases}$

$$\text{Khi đó } P = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2} = \frac{\left(1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + \left(1^2 + \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{2 + 3\sqrt{2}i + 2 - 3\sqrt{2}i}{2}\right)^2} = \frac{\frac{11}{2} + \frac{11}{2}}{4} = \frac{11}{4}.$$

Cách 2: Ta có $2z^2 - 4z + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i. \end{cases}$

Khi đó $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_1 \cdot z_2 = \frac{11}{2}$; $z_1 + z_2 = 2$ nên $P = \frac{2 \cdot \frac{11}{2}}{2^2} = \frac{11}{4}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$ và $|z - 2 - 2i| = 3\sqrt{2}$.

(A) 7.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 5.

Lời giải.

Cách 1: Với $z = a + bi \Rightarrow |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |2a| + |2b| = 4 \Leftrightarrow |a| + |b| = 2$.

Khi đó $|z - 2 - 2i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 18$.

Vậy ta có hệ $\begin{cases} |a| + |b| = 2 \\ (a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a + b = 2 & (a, b \geq 0) \\ -a + b = 2 & (a \leq 0, b \geq 0) \\ a - b = 2 & (a \geq 0, b \leq 0) \\ -a - b = 2 & (a \leq 0, b \leq 0) \end{cases} \\ (a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \quad (*)$

Từ (1), (*) ta có hệ

$$\begin{cases} a = 2 - b & (a, b \geq 0) \\ b^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b & (a, b \geq 0) \\ \begin{cases} b = 1 + 2\sqrt{2} \\ b = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{2} \quad (\text{loại}).$$

Từ (2), (*) ta có hệ

$$\begin{cases} a = b - 2 & (a \leq 0, b \geq 0) \\ (b - 4)^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 & (a \leq 0, b \geq 0) \\ \begin{cases} b = 3 + 2\sqrt{2} \\ b = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 + 2\sqrt{2} & (\text{loại}) \\ a = 1 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Từ (3), (*) ta có hệ

$$\begin{cases} a = b + 2 & (a \geq 0, b \leq 0) \\ b^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2 & (a \geq 0, b \leq 0) \\ \begin{cases} b = 1 + 2\sqrt{2} & (\text{loại}) \\ b = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Từ (4), (*) ta có hệ

$$\begin{cases} a = -b - 2 & (a \leq 0, b \leq 0) \\ (b + 4)^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 2 & (a \leq 0, b \leq 0) \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1.$$

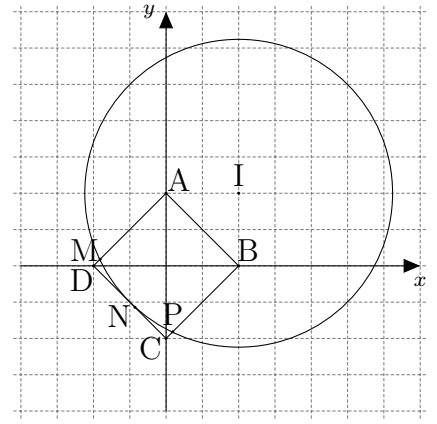
Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Với $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là 4 cạnh hình vuông $ABCD$.

Ta có $|z - 2 - 2i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 18$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2; 2)$, $R = 3\sqrt{2}$.

Dựa vào hình vẽ bên, ta thấy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với 3 điểm biểu diễn M, N, P .



Chọn đáp án (B)

Câu 20. Tổng mô-đun các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$ bằng

- (A) $\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{5}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z^2 + 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 + i \\ z = -2 - i. \end{cases}$$

Vậy tổng mô-đun các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$ bằng $|-2 + i| + |-2 - i| = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 21. Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$. Tính S .

- (A) 20. (B) 12. (C) 14. (D) 8.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 9z^2 + 6z + 1 - m = 0 \quad (*).$$

Trường hợp 1. Ta có (*) có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 9(1 - m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Ta có

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 16 \\ m = 4. \end{cases}$$

Trường hợp 2. Ta có (*) có nghiệm phức $z = a + bi$, ($b \neq 0$) $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - 9(1 - m) < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Nếu z là một nghiệm của $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ thì $\bar{z}$ cũng là một nghiệm của $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$.

Ta có

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - m}{9} = 1 \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

Chọn đáp án (B)

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z + i|$.

- (A) $\sqrt{61}$. (B) $\sqrt{41}$. (C) $5\sqrt{3}$. (D) $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } z = x + yi \text{ với } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Ta có } |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - x^2 - (y - 1)^2 \\ &= 4x + 2y + 3 = 4x - 12 + 2y - 8 + 23 = 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiaopxki cho 4 số 4, $x - 3$, 2, $y - 4$ ta có

$$P - 23 = 4(x - 3) + 2(y - 4) \leq \sqrt{16 + 4} \cdot \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = 10 \Rightarrow P \leq 33.$$

Do đó $\max P = 33$ khi $\begin{cases} \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{2} \\ 4x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ 4x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow |z+1| = |5+6i| = \sqrt{61}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0, w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

(A) $2\sqrt{2}$.

(B) $4\sqrt{2}$.

(C) 1.

(D) $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

Ta có $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min |z - w| = \min MN$

$$IJ = 5\sqrt{2}, IM = r = \sqrt{2}, NJ = R = 2\sqrt{2}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} IM + MN + NJ &\geq IJ \Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ \\ &\Rightarrow MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J .

Cách 1: Khi đó ta có $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|$ và $IN = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}.$

Mặt khác $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}; 3\overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = 3(\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}) = 3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}.$

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - (\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ})| = |2\overrightarrow{OI}| = 6\sqrt{2}.$

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}.$

Do đó $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN})| = |2\overrightarrow{OI}| = 2.OI = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$

Cách 3: Ta có $\overrightarrow{IM} = \frac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}i.$

Ta có $\overrightarrow{IN} = \frac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N = \frac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow w_0 = \frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{12\sqrt{2}}{5}i.$

Do đó $|3z_0 - w_0| = |6\sqrt{2}| = 6\sqrt{2}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z - 4 + 3i|$. Giá trị của $M \cdot m$ bằng

(A) 28.

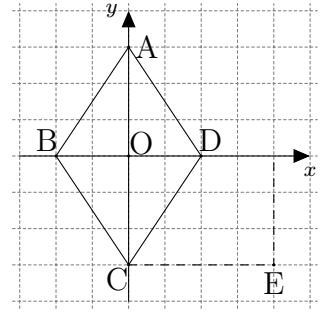
(B) 24.

(C) 26.

(D) 20.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và gọi $P(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .
Ta có $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12 \Leftrightarrow 3|2x| + 2|2yi| \leq 12 \Leftrightarrow 3|x| + 2|y| \leq 6$ (1).



- ☑ Khi $x \geq 0, y \geq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x + 2y \leq 6$.
- ☑ Khi $x \leq 0, y \leq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow -3x - 2y \leq 6$.
- ☑ Khi $x \leq 0, y \geq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow -3x + 2y \leq 6$.
- ☑ Khi $x \geq 0, y \leq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x - 2y \leq 6$.

Suy ra quỹ tích điểm P là hình thoi $ABCD$ cùng miền trong của nó.

Ta có $|z - 4 + 3i| = EP$ với $E(4; -3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 4 - 3i$.

Từ hình vẽ ta có $m = \min EP = d(E, CD)$.

Đường thẳng CD có phương trình $3x - 2y - 6 = 0$, suy ra $m = \frac{12}{\sqrt{13}}$.

Ta có $\max EP = \max \{EA, EB, EC, ED\}$.

Lại có $EA = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$, $EB = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$, $EC = 4$, $ED = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Do đó $M = EA = \sqrt{52}$. Vậy $M \cdot m = 24$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$

- (A) $\sqrt{313}$. (B) $\sqrt{313} + 8$. (C) $\sqrt{313} + 16$. (D) $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

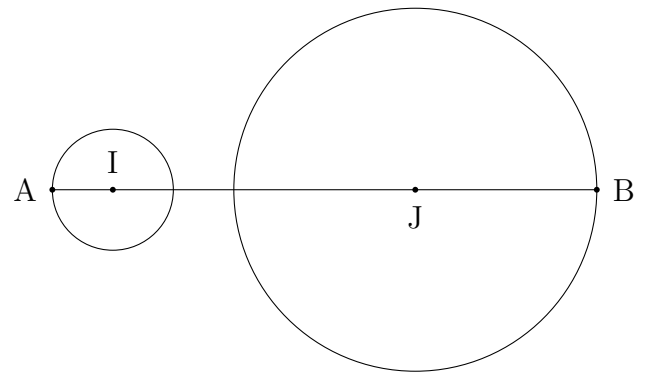
Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4$ (1).

Ta có $|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12$ (2).

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, gọi B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$.

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I(-6; -10)$, bán kính $R_1 = 4$, điểm B nằm trên đường tròn tâm $J(6; 3)$, bán kính $R_2 = 12$.

Ta có



$$\begin{aligned} T &= |2iz_1 + 3z_2| = AB \\ &\leq IJ + R_1 + R_2 \\ &= \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 \\ &= \sqrt{313} + 16. \end{aligned}$$

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + i|$ là

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 2. (D) $\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z^2 + iz + 2| &= |z^2 + z - i + 1| \Leftrightarrow |z^2 + iz - 2i^2| = |z^2 + z - i - i^2| \\ &\Leftrightarrow |(z - i)(z + 2i)| = |(z - i)(z + i + 1)| \\ &\Leftrightarrow |z - i| \cdot |z + 2i| = |z - i| \cdot |z + i + 1| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z - i| = 0 & (1) \\ |z + 2i| = |z + i + 1| & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow z = i \Rightarrow |z - 2 + i| = |2i - 2| = 2\sqrt{2}$ (*).

Xét phương trình (2): Đặt $z = x + yi$ với $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$|z + 2i| = |z + i + 1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Khi đó $|z - 2 + i| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + x^2} = \sqrt{2(x - 1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}$ (**).

Từ (*) và (**) ta có $\min |z - 2 + i| = \sqrt{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 1, y = 0$ hay $z = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z_1 + z_2|$.

(A) $\sqrt{2} - 1$.

(B) $\sqrt{2} + 1$.

(C) $2\sqrt{2} + 1$.

(D) $2\sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2; 1); B(4; 7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2 + i, 4 + 7i$. Ta có $AB = 6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d: x - y + 3 = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} |z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| &= 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow MA + MB = AB. \end{aligned}$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB .

Ta có $|iz_2 - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |iz_2 - 1 + 2i| |i| = 1 \Leftrightarrow |-z_2 - 2 - i| = 1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2; 1)$ là điểm biểu diễn số phức $2 + i$.

Ta có $IN = 1$, suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Do $d(I, AB) = 2\sqrt{2} > 1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2; 1)$ lên AB . Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB .

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C) .

Ta có $|z_1 + z_2| = MN \geq KH = d(I, AB) - R = 2\sqrt{2} - 1$.

Suy ra $\min |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} - 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $(z - 3 + i)^2 - 4z - 4i + 25 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(A) $A = 50$.

(B) $A = 70$.

(C) $A = 13$.

(D) $A = 8$.

Lời giải.

Ta có $(z - 3 + i)^2 - 4z - 4i + 25 = 0 \Leftrightarrow [(z + i) - 3]^2 - 4(z + i) + 25 = 0$

$$\Leftrightarrow (z + i)^2 - 10(z + i) + 34 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z + i = 5 + 3i \\ z + i = 5 - 3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 5 + 2i \\ z_2 = 5 - 4i. \end{cases}$$

Ta có $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |5 + 2i|^2 + |5 - 4i|^2 = 70$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Gọi S là tập tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^4 - 2iz^3 + (i - 1)z^2 + 2z - i = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

- (A) 1. (B) $1 + i$. (C) i . (D) $2i$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z^4 - 2iz^3 + (i - 1)z^2 + 2z - i &= 0 \Leftrightarrow (z - i)^2 \cdot (z^2 + i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z - i = 0 \\ z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó tập các nghiệm phức của phương trình đã cho là

$$S = \left\{ i; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng

$$i + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = i.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Phương trình $(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 = 0$ có bốn nghiệm phức là $z_1; z_2; z_3; z_4$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng

- (A) $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$. (B) 2. (C) $2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$. (D) $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 - (9 + 2z^2)z + (z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Ta có $\Delta = (9 + 2z^2)^2 - 4(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) = (6z - 3)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{2z^2 + 9 - 6z + 3}{2} = z^2 - 3z + 6 \\ z = \frac{2z^2 + 9 + 6z - 3}{2} = z^2 + 3z + 3. \end{cases}$$

☑ Với $z = z^2 - 3z + 6 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1 = 2 + \sqrt{2}i$ và $z_2 = 2 - \sqrt{2}i$.

☑ Với $z = z^2 + 3z + 3 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 3 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm là $z_3 = -1 - \sqrt{2}i$ và $z_4 = -1 + \sqrt{2}i$.

Vậy $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = |2 + \sqrt{2}i| + |2 - \sqrt{2}i| + |-1 - \sqrt{2}i| + |-1 + \sqrt{2}i| = 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\frac{z}{w}\right|$ bằng

(A) 3. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Với hai số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{3}{w} &= \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow \frac{w+3z}{zw} = \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w) = 6zw \\ &\Leftrightarrow 3z^2 - 2zw + w^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{w}\right) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z}{w} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \\ \frac{z}{w} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. D	5. A	6. D	7. C	8. C	9. B	10. B
11. C	12. A	13. C	14. D	15. D	16. B	17. D	18. B	19. B	20. C
21. B	22. A	23. D	24. B	25. C	26. B	27. D	28. B	29. C	30. A
31. D									

BÀI 5. CỰC TRỊ SỐ PHỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tập hợp điểm biểu diễn số phức

Trong mặt phẳng phức, số phức $z = x + y \cdot i$ với $x, y \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bởi điểm $M(x, y)$. Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp

- ☑ $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường thẳng.
- ☑ $x = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục tung Oy .
- ☑ $y = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục hoành Ox .
- ☑ $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2 \Rightarrow$ tập hợp điểm là hình tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R .
- ☑ $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
- ☑ $x > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên phải trục tung.
- ☑ $y < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành.
- ☑ $x < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên trái trục tung.
- ☑ $y > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía trên trục hoành.
- ☑ $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Parabol.
- ☑ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Elip.
- ☑ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Hyperbol.

2. Bài toán liên quan đến max, min mô-đun số phức

- ☑ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z + z_2| = r, (r > 0)$, thì $\begin{cases} \max |z| = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| + \frac{r}{|z_1|} \\ \min |z| = \left| \left| \frac{z_2}{z_1} \right| - \frac{r}{|z_1|} \right| \end{cases}$.

- ☑ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z - z_2| = r, (r > 0)$.

$$\max P = \left| \frac{z_2}{z_1} - z_3 \right| + \frac{r}{|z_1|} \text{ và } \min P = \left| \left| \frac{z_2}{z_1} - z_3 \right| - \frac{r}{|z_1|} \right|.$$

- ☑ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z + z_2| + |z_1 \cdot z - z_2| = k, (r > 0)$ thì

$$\max |z| = \frac{k}{2|z_1|} \text{ và } \min |z| = \frac{\sqrt{k^2 - 4|z_2|^2}}{2|z_1|}.$$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Gọi M và m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{2z+i}{\bar{z}} \right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

- (A) $\frac{M}{m} = 3$. (B) $\frac{M}{m} = \frac{4}{3}$. (C) $\frac{M}{m} = \frac{5}{3}$. (D) $\frac{M}{m} = 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \left| \frac{2z+i}{z} \right| = \frac{|2z+i|}{|z|} \Rightarrow \frac{|2z|-|i|}{|z|} \leq P \leq \frac{|2z|+|i|}{|z|} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 2 + \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq P \leq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{M}{m} = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - i| = |\bar{z} - 2 + 3i|$, số phức z_0 có môđun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Giả sử $z_0 = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |z - i| = |\bar{z} - 2 + 3i| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x-2) + (-y+3)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (-y+3)^2 \Leftrightarrow y = -x + 3$$

$$|z_0| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-x+3)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = \sqrt{2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } |z_0|_{\min} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ khi và chỉ khi } x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \text{ suy ra phần ảo của } z_0 \text{ bằng } \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho tất cả các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1; 3)$. Tìm $P = 2x + 3y$

- (A) 9. (B) 11. (C) -3. (D) 5.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow |x + yi + 2i - 1| = |x + yi + i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0.$$

Dễ thấy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $x - y - 2 = 0 \Rightarrow M(x; x-2)$.

$$\overrightarrow{MA} = (x-1; x-5) \Rightarrow |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-5)^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 26} = \sqrt{(x\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 + 8} \geq 8.$$

$$\text{Suy ra } MA_{\min} = 8 \text{ khi } x\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1. \text{ Vậy } P = 2x + 3y = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $M \cdot m$

- (A) $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{39}{4}$. (C) $3\sqrt{3}$. (D) $\frac{13}{4}$.

Lời giải.

Do $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Suy ra $x, y \in [-1; 1]$.

Ta có $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$. Thay vào P ta được

$$P = |z + 1| + |z^2 - z + z\bar{z}| = |z + 1| + |z(z - 1 + \bar{z})| = |z + 1| + |z| \cdot |z + \bar{z} - 1| = |z + 1| + |z + \bar{z} - 1| \\ = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + |2x - 1| = \sqrt{2x + 2} + |2x - 1|.$$

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x + 2} + |2x - 1|$.

$$\text{Ta có } y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x + 2} - 2x + 1 & \text{khi } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x + 2} + 2x - 1 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x + 2}} - 2 & \text{khi } -1 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x + 2}} + 2 & \text{khi } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x + 2}} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x + 2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 1]$

x	-1	$-\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	$\sqrt{3}$	3

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m = \min_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{3} \\ M = \max_{[-1;1]} f(x) = \frac{13}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } M \cdot m = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 5. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ và N là điểm biểu diễn số phức z_2 biết $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z} - 6 - i|$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn MN .

(A) $2\sqrt{5}$.

(B) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

(C) 1.

(D) 5.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$. Từ điều kiện $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ suy ra M thuộc parabol $(P): y = x^2 - 2x + 2$.

Gọi $N(x; y)$. Từ điều kiện $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$ suy ra N thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 8 = 0$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) mà song song với $d: 2x - y - 8 = 0$.

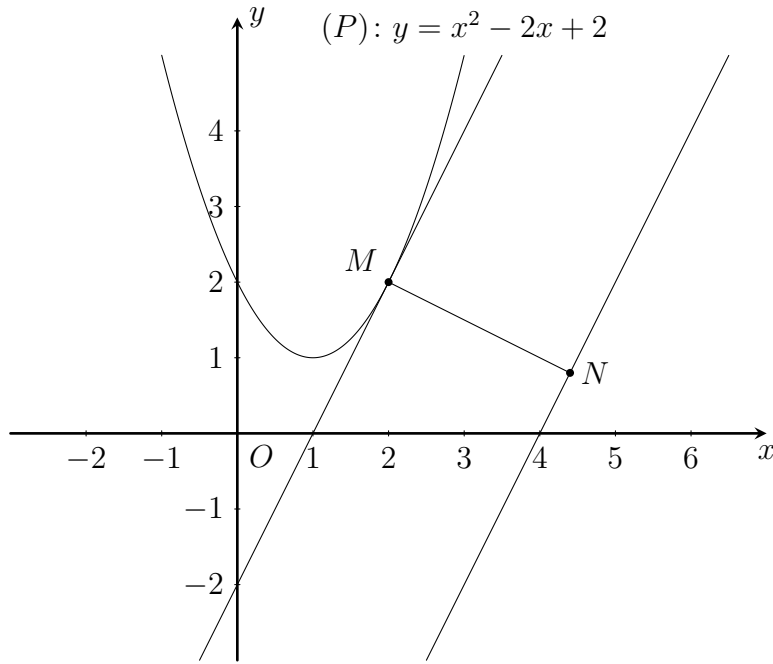
Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm mà tại đó tiếp tuyến $\Delta \parallel d$.

Ta có $y' = 2x - 2$. Do $\Delta \parallel d$ nên $y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2$ suy ra $y_0 = 2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 2(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

Khi đó: $\min MN = d(\Delta, d) = d(A, d)$ với $A \in \Delta$.

$$\text{Chọn } A(1; 0) \text{ ta có } \min MN = \frac{|2 \cdot 1 - 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án (B)



Câu 6. Cho số phức z và w biết chúng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $\left| \frac{(1+z)z}{1-i} + 2 \right| = 1$ và $w = iz$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z - w|$.

(A) $M = 3\sqrt{3}$.

(B) $M = 3$.

(C) $M = 3\sqrt{2}$.

(D) $M = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

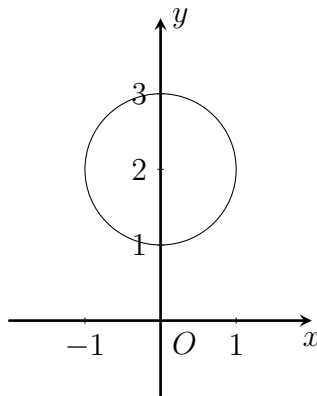
Cách 1:

Ta có $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(1+i)z + 2(1-i)}{1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = |1-i| \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2}$.

Mặt khác $|(1+i)z| - |2(1-i)| \leq |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(1+i)z| \leq |2(1-i)| + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}$

Khi đó $M = |z - w| = |z - iz| = |(1-i)z| = \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}$.

Cách 2:



$$\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(1+i)z + 2(1-i)}{1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = |1-i| \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2} \quad (1)$$

Đặt $z = x + yi$ thay vào (1) ta được $|(1+i)(x + yi) + 2(1-i)| = \sqrt{2}$.

$$\Leftrightarrow (x - y + 2)^2 + (x + y - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên hệ trục tọa độ là đường tròn tâm $I(0; 2)$ bán kính $R = 1$.

$$\text{Khi đó } 1 \leq |z| \leq 3 \Rightarrow M = |z - w| = |z - iz| = |(1-i)z| = \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (C)



Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2iz| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |iz + 1|$ bằng

- (A) 2. (B) 3. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $2 = |z^2 - 2iz| = |z^2 - 2iz + i^2 + 1| = |(z - i)^2 + 1| \geq |(z - i)^2| - 1$.

$\Rightarrow |z - i|^2 \leq 3 \Leftrightarrow |z - i| \leq \sqrt{3}$.

$P = |iz + 1| = |i(z - i)| = |z - i| \leq \sqrt{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$ là

- (A) $5 + 3\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{26}$. (C) $4\sqrt{6}$. (D) $34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

Ta có $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ nên $a + bi + c + di = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ b + d = 6 \end{cases}$.

Do đó $(a + c)^2 + (b + d)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100 - 2ac - 2bd$ (1).

Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên ta có $|a + bi - c - di| = 2 \Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 + 2ac + 2bd$ (2).

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 104$.

Áp dụng bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ ta có

$$P^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2 \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 104.$$

Do đó $P \leq 2\sqrt{26}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $2\sqrt{26}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Xét tập hợp S các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|3z - \bar{z}| = |(1 + z)(2 + 2i)|$. Biểu thức $Q = |z - \bar{z}|(2 - x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0 = x_0 + y_0i$. Tính giá trị $T = Mx_0y_0^2$.

- (A) $T = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$. (B) $T = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. (C) $T = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$. (D) $T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $|3z - \bar{z}| = |(1 + i)(2 + 2i)| \Leftrightarrow |3x + 3yi - x + yi| = 4 \Leftrightarrow |2x + 4yi| = 4$.

$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow |2y| = \sqrt{4 - x^2} \quad (-2 \leq x \leq 2)$.

Khi đó $Q = |z - \bar{z}|(2 - x) \Leftrightarrow Q = |2yi|(2 - x) = |2y|(2 - x) = \sqrt{4 - x^2}(2 - x)$.

Xét hàm số $f(x) = (2 - x)\sqrt{4 - x^2}$ với $x \in [-2; 2]$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{\sqrt{4 - x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	-2	-1	2
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$3\sqrt{3}$	0

Nên $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 3\sqrt{3} = f(-1)$.

Vậy $M = 3\sqrt{3}$; $x_0 = -1$; $y_0^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

- (A)** $\min |w| = \frac{1}{2}$. **(B)** $\min |w| = 1$. **(C)** $\min |w| = \frac{3}{2}$. **(D)** $\min |w| = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 5| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ \Leftrightarrow |(z - 1)^2 + 4| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ \Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ \Leftrightarrow |z - 1 + 2i||z - 1 - 2i| &= |z - 1 + 2i||z + 3i - 1| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z - 1 + 2i| = 0 \\ |z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1|. \end{cases} \end{aligned}$$

TH1: $|z - 1 + 2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow w = z - 2 + 2i = 1 - 2i - 2 + 2i = -1 \Rightarrow |w| = 1$.

TH2: $|z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1| \Leftrightarrow |(z - 2 + 2i) + 1 - 4i| = |(z - 2 + 2i) + 1 + i|$

$\Leftrightarrow |w + 1 - 4i| = |w + 1 + i|$.

Gọi $w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ thì $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Khi đó $|w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \geq \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ và $\min |w| = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 11. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = 1$. Gọi m, M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$. Giá trị $M + m$ bằng

- (A)** 3. **(B)** 2. **(C)** $1 + 2\sqrt{5}$. **(D)** $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = |(z - 2 - i) + (2 + i)|$.

Áp dụng bất đẳng thức $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

$||z - 2 - i| - |2 + i|| \leq |z| \leq |z - 2 - i| + |2 + i| \Leftrightarrow |1 - \sqrt{5}| \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5} - 1 \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5}$.

Vậy $m = \sqrt{5} - 1, M = \sqrt{5} + 1$, do đó $M + m = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 12. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left| z^4 + z + \frac{1}{2} \right|^2$ bằng

- (A)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **(B)** $\frac{1}{8}$. **(C)** $\frac{1}{16}$. **(D)** $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Theo đề $|z| = 1$. Đặt $z = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $z^4 = (\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \left| z^4 + z + \frac{1}{2} \right|^2 &= \left| \left(\cos 4x + \cos x + \frac{1}{2} \right) + (\sin 4x + \sin x)i \right|^2 \\ &= \left(\cos 4x + \cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + (\sin 4x + \sin x)^2 = \frac{9}{4} + \cos 4x + 2 \cos 3x + \cos x \\ &= \frac{9}{4} + 8 \cos^4 x + 8 \cos^3 x - 8 \cos^2 x - 5 \cos x + 1 \\ &= \frac{9}{4} + f(t), \text{ với } f(t) = 8t^4 + 8t^3 - 8t^2 - 5t + 1, t \in [-1; 1] \\ &\geq \frac{9}{4} + \min_{[-1; 1]} f(t) = \frac{9}{4} + f\left(\frac{-1 + \sqrt{11}}{4}\right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \neq z_2$ và $z_1^2 - 5z_1z_2 + 4z_2^2 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1\bar{z}_2$ thỏa mãn diện tích tam giác OMN bằng 12. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$ là

- (A) $14\sqrt{3}$. (B) $21\sqrt{2}$. (C) $\frac{14\sqrt{6}}{3}$. (D) $7\sqrt{6}$.

Lời giải.

Vì $z_1^2 - 5z_1z_2 + 4z_2^2 = 0$ ($z_1 \neq z_2$) suy ra $z_1 = 4z_2 \Rightarrow P = |7z_2|$.

Mặt khác $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}OM \cdot ON \sin \widehat{MON} \Leftrightarrow 12 = \frac{1}{2}|z_1||z_2| \sin \widehat{MON} \Leftrightarrow |z_2|^2 \sin \widehat{MON} = 6$.

$$\Rightarrow P = |7z_2| = 7\sqrt{\frac{6}{\sin \widehat{MON}}}. \text{ Nên } P = |7z_2| \text{ nhỏ nhất khi } \sin \widehat{MON} \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow \sin \widehat{MON} = 1.$$

Khi đó $P = 7\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho số phức z có $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ là

- (A) $\frac{13}{4}$. (B) 3. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\frac{11}{4}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 = 1$.

Ta có $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| = |z(z - 1)| + |z^2 + z + 1| = |z| \cdot |z - 1| + |z^2 + z + 1| = |z - 1| + |z^2 + z + 1|$.

$$\begin{aligned} |z - 1| &= |x + yi - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} = \sqrt{2 - 2x}. \\ z^2 + z + 1 &= x^2 - y^2 + 2xyi + x + yi + 1 = 2x^2 + x + y(2x + 1)i \\ \Rightarrow |z^2 + z + 1| &= \sqrt{x^2(2x + 1)^2 + y^2(2x + 1)^2} = \sqrt{(2x + 1)^2(x^2 + y^2)} = |2x + 1|. \end{aligned}$$

Suy ra $P = \sqrt{2 - 2x} + |2x + 1|$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2 - 2x} + |2x + 1|$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right)$, $f(x) = \sqrt{2 - 2x} - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2 - 2x}} - 2 < 0, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Mặt khác hàm số $f(x) = \sqrt{2 - 2x} - 2x - 1$ liên tục trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) \leq f(-1) = 3, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \max_{x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right)} f(x) = 3.$$

Trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$,

$$f(x) = \sqrt{2-2x} + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}.$$

Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}; f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}, f(1) = 3.$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = \frac{13}{4}$$

hay $P_{\max} = \frac{13}{4}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\frac{3}{2} < |z| < 2.$ (B) $|z| > 2.$ (C) $|z| < \frac{1}{2}.$ (D) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}.$

Lời giải.

Ta có: $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (|z|+2) + i(2|z|-1) = \frac{\sqrt{10}}{z}.$

Lấy môđun hai vế ta được

$$\frac{\sqrt{10}}{|z|} = \sqrt{(|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2} \Rightarrow |z| = 1 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$ và biểu thức $|iz+2-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức z .

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}.$ (B) $-\frac{5}{2}.$ (C) $-\frac{3}{2}.$ (D) $\frac{5}{2}.$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó,

$$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2} \Leftrightarrow a = 4-b.$$

$$|iz+2-i| = \sqrt{(2-b)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{(2-b)^2 + (3-b)^2} = \sqrt{2b^2 - 10b + 13} = \sqrt{2\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|iz+2-i|$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $b = \frac{5}{2}, a = \frac{3}{2}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i| = 2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

- (A) $z = 1 + 5i.$ (B) $z = 1 + i.$ (C) $z = 1 + 3i.$ (D) $z = 1 - i.$

Lời giải.

Gọi $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z . // Theo bài ra ta có $|z - 1 - 3i| = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$. // Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1; 3)$ bán kính $R = 2$. // Khi đó $|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = I'M$ với $I'(1; 0)$. // Do đó $|z - 1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I' . // Phương trình đường thẳng (II') là $x = 1$. // Tọa độ giao điểm của đường thẳng (II') với đường tròn tâm I bán kính $R = 2$ là $M_1(1; 1)$ và $M_1(1; 5)$. // Thử lại ta thấy $M_1(1; 1)$ thỏa mãn. Vậy $z = 1 + i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho các số phức z và w thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |w + 1 - i|$.

(A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có: $(2 + i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 1)i = \frac{z}{w}$.

$\Rightarrow |(2|z| - 1) + (|z| + 1)i| = \left| \frac{z}{w} \right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{5|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w|}$.

Vì $5|z|^2 - 2|z| + 2 > 0 \quad \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z| (t > 0)$.

Ta có: $\frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{5t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{5 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}, \forall t > 0 \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó: $T = |w + 1 - i| \leq |w| + |1 - i| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} w = k(1 - i) \quad (k \in \mathbb{R}, k \geq 0) \\ |w| = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow k\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow w = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$.

Vậy $\max T = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Cách 2:

Ta có: $(2 + i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 1)i = \frac{z}{w}$.

$\Rightarrow |(2|z| - 1) + (|z| + 1)i| = \left| \frac{z}{w} \right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{5|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w|}$.

Vì $5|z|^2 - 2|z| + 2 > 0 \quad \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z| (t > 0)$.

Ta có: $\frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{5t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{5 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}, \forall t > 0 \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó: $T = |w + 1 - i| = MI$.

Để thấy điểm $I(0; 2)$ nằm ngoài đường tròn tâm $C(O; R)$, suy ra $T = MI$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $T = MI = IO + R = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{6 + \sqrt{5}}{3}$. Vậy $\max T = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho số phức z và w thỏa mãn $(1 + i)|z| = \frac{z}{w} + 2 - i$. Tính giá trị lớn nhất của $T = |w - 2i|$.

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3} + 2$.

(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(C) $\frac{\sqrt{5}}{3} + 5$.

(D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có:

$$(1+i)|z| = \frac{z}{w} - 2 + i \Leftrightarrow |z| - 2 + (|z| + 1)i = \frac{z}{w} \Leftrightarrow \sqrt{(|z| - 2)^2 + (|z| + 1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{2|z|^2 - 2|z| + 5} = \frac{|z|}{|w|}.$$

Đánh giá: $2|z|^2 - 2|z| + 5 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z| (t > 0)$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 5}}{t} = \sqrt{2 - \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}} = \sqrt{5 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Khi đó ta có: } |w - 2i| \leq |w| + |-2i| \leq \frac{\sqrt{5}}{3} + 2.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} w = k(-2i) \quad (k \in \mathbb{R}, k > 0) \\ |w| = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ |z| = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = 2k \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}}{6} \Leftrightarrow w = -\frac{\sqrt{5}}{2}i.$$

$$\text{Vậy } \max T = \frac{\sqrt{5}}{3} + 2.$$

Cách 2:

Ta có:

$$(1+i)|z| = \frac{z}{w} - 2 + i \Leftrightarrow |z| - 2 + (|z| + 1)i = \frac{z}{w} \Leftrightarrow \sqrt{(|z| - 2)^2 + (|z| + 1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{2|z|^2 - 2|z| + 5} = \frac{|z|}{|w|}.$$

Đánh giá: $2|z|^2 - 2|z| + 5 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z| (t > 0)$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 5}}{t} = \sqrt{2 - \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}} = \sqrt{5 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Khi đó: $T = |w - 2i| = MI$.

Dễ thấy điểm $I(0; 2)$ nằm ngoài đường tròn tâm $C(O; R)$, suy ra $T = MI$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $T = MI = IO + R = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\text{Vậy } \max T = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Cho số phức z và w thỏa mãn $(3 + 2i)|z| = \frac{z}{iw - 1 + 3i} + 1 - i$. Tính giá trị lớn nhất của $T = |w|$.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{11}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$.

(C) $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

(D) $\frac{\sqrt{5}}{5} + \sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có:

$$(3 + 2i)|z| = \frac{z}{iw - 1 + 3i} + 1 - i \Leftrightarrow 3|z| - 1 + (2|z| + 1)i = \frac{z}{iw - 1 + 3i} \Leftrightarrow \sqrt{(3|z| - 1)^2 + (2|z| + 1)^2} = \frac{|z|}{|i(w + 3 + i)|} \Leftrightarrow \sqrt{13|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w + 3 + i|}.$$

Đánh giá: $13|z|^2 - 2|z| + 2 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z| (t > 0)$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w + 3 + i|} = \frac{\sqrt{13t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{13 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{25}{2}} \geq \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow |w + 3 + i| \leq \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

$$\text{Khi đó ta có: } |w| = |w + 3 + i + (-3 - i)| \leq |w + 3 + i| + |-3 - i| \leq \frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}.$$

$$\text{Điều kiện thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} w + 3 + i = k(-3 - i), (k \in \mathbb{R}, k > 0) \\ |w + 3 + i| = \frac{\sqrt{2}}{5} \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{5} = k\sqrt{10} \Rightarrow k = \frac{1}{5\sqrt{5}}.$$

$$\Leftrightarrow w + 3 + i = \frac{1}{5\sqrt{5}}(-3 - i) \Leftrightarrow w = -\left(\frac{3}{5\sqrt{5}} + 3\right) - \left(\frac{1}{5\sqrt{5}} + 1\right)i$$

$$\text{Vậy: } \max T = \frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ là

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $\sqrt{29}$. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z| = |z + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2} \Leftrightarrow 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow z = a - i$.

Xét: $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i| = |a - 1 + i| + |a + 1 + 2i| = \sqrt{(1 - a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1 + a)^2 + 2^2}$.

Áp dụng BDT Mincôpxki:

$$\sqrt{(1 - a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1 + a)^2 + 2^2} \geq \sqrt{(1 - a + 1 + a)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Suy ra: $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1 - a) = 1 + a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.

Nhận xét: Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 thỏa mãn $|z_1|z_1 = 9|z_2|z_2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và $\bar{z}_2$. Biết tam giác OMN có diện tích bằng 6, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng

- (A) 8. (B) 6. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết: $|z_1|z_1 = 9|z_2|z_2$ (1).

Lấy mô-đun hai vế ta được $|z_1|^2 = 9|z_2|^2 \Rightarrow |z_1| = 3|z_2|$.

Thay $|z_1| = 3|z_2|$ vào (1) ta được $z_1 = 3z_2$.

Gọi $z_2 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z_1 = 3a + 3bi, \bar{z}_2 = a - bi$.

Điểm $M(3a; 3b), N(a; -b) \Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{2}|-3ab - 3ab| = 3|a||b|$.

Mà $S_{OMN} = 6$ nên $|a||b| = 2$ và $|z_1 + z_2| = |4a + 4bi| = 4\sqrt{a^2 + b^2} \geq 4\sqrt{2|a||b|} = 8$.

Suy ra min $|z_1 + z_2| = 8$.

Lưu ý công thức tính diện tích tam giác OAB với $\overrightarrow{OA} = (a_1; a_2), \overrightarrow{OB} = (b_1; b_2)$ là $S_{OAB} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $w = \frac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \bar{z}_1)i + 1}$ là số thực và $|4z_2 + 8 + 13i| = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$ bằng

- (A) $\frac{21}{16}$. (B) $\frac{\sqrt{37}}{4}$. (C) 0. (D) $\frac{\sqrt{37} - 4}{4}$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$w = \frac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \bar{z}_1)i + 1} = \frac{(x+2) + (y-1)i}{1 + 2xi} = \frac{x+2 + 2x(y-1) + [y-1-2x(x+2)]i}{1+4x^2}.$$

Vì w là số thực nên $y-1-2x(x+2) = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2 + 4x + 1$.

$$|4z_2 + 8 + 13i| = 4 \Leftrightarrow \left| z_2 + 2 + \frac{13}{4}i \right| = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y + \frac{13}{4} \right)^2 = 1.$$

$$P = |z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)|.$$

Gọi M là điểm biểu diễn của z_1 thì điểm M thuộc parabol $(P): y = 2x^2 + 4x + 1$.

Gọi N là điểm biểu diễn của z_2 thì điểm N thuộc đường tròn $(C): (x+2)^2 + \left(y + \frac{13}{4} \right)^2 = 1$.

Gọi N_1 là điểm biểu diễn của $-z_2$ thì điểm N_1 thuộc đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + \left(y - \frac{13}{4} \right)^2 = 1$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (P) tại $T(x_0, 2x_0^2 + 4x_0 + 1)$, ($x_0 > -1$) là

$$y = (4x_0 + 4)(x - x_0) + 2x_0^2 + 4x_0 + 1 \Leftrightarrow (4x_0 + 4)x - y - 2x_0^2 + 1 = 0.$$

Khi đó:

$P_{\min} \Leftrightarrow (MN_1)_{\min} \Leftrightarrow T$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ , với $I\left(2, \frac{13}{4}\right)$ là tâm (C_1) .

$\Rightarrow \overrightarrow{IT}$ cùng phương với VTPT $\overrightarrow{n}_{\Delta}$, với $\overrightarrow{IT} = \left(x_0 - 2, 2x_0^2 + 4x_0 - \frac{9}{4}\right)$, $\overrightarrow{n}_{\Delta} = (4x_0 + 4, -1)$.

$$\Leftrightarrow (4x_0 + 4) \left(2x_0^2 + 4x_0 - \frac{9}{4} \right) = 2 - x_0 \Leftrightarrow 8x_0^3 + 24x_0^2 + 8x_0 - 11 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = IT - R = \frac{\sqrt{37}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{37} - 4}{4}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 24. Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w+i|$.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(C) 2.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $w \neq 1$.

$$\text{Ta có: } (3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1 - i \Leftrightarrow (3-i)|z| - 1 + i = \frac{z}{w-1} \Leftrightarrow w = \frac{z}{(3|z|-1) + (1-|z|)i} + 1.$$

$$\text{Vậy } T = |w+i| = \left| \frac{z}{(3|z|-1) + (1-|z|)i} + 1 + i \right| \leq \left| \frac{z}{(3|z|-1) + (1-|z|)i} \right| + |1+i| \leq \frac{|z|}{\sqrt{10}|z|^2 - 8|z| + 2} + \sqrt{2}.$$

Đặt $t = |z|$ điều kiện: $t \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{10t^2 - 8t + 2}} + \sqrt{2}$.

$$f'(t) = \frac{-4t + 2}{(10t^2 - 8t + 2)\sqrt{10t^2 - 8t + 2}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{10} + \sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $T = |w + i| \leq \max_{[0; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |z + 2i|$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ được viết dạng $\frac{a + b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ với a, b là số hữu tỉ. Giá trị của $3a - b$ bằng

(A) 4.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 3.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z + 2| = |z + 2i| \Leftrightarrow |(x + yi) + 2| = |(x + yi) + 2i| \Leftrightarrow |(x + 2) + yi| = |x + (y + 2)i|$
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow x = y$ hay $z = x + xi$.

Khi đó ta có: $A = |(x - 1) + (x - 2)i| + |(x - 3) + (x - 4)i| + |(x - 5) + (x - 6)i|$

$$= \sqrt{(x - 1)^2 + (x - 2)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (x - 4)^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + (x - 6)^2}$$

$$= \sqrt{2x^2 - 6x + 5} + \sqrt{2x^2 - 14x + 25} + \sqrt{2x^2 - 22x + 61}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} + \frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{17} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{11}{2} - x \\ x - \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Vậy $\min A = \frac{1 + 2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $a = 1, b = 2$ nên $3a - b = 1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 26. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

(A) -10.

(B) $-4 - 3\sqrt{5}$.

(C) -5.

(D) $-6 - 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R}). \text{ Theo đề ta có: } \begin{cases} (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 4(1) \\ (c - 3)^2 + (d - 4)^2 = 4(2) \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 1(3). \end{cases}$$

Khi lấy-theo về có $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a - c) + 8(b - d)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và sử dụng ta có:

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a - c) + 8(b - d) \geq -\sqrt{(6^2 + 8^2)} \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = -10.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } |z_1|^2 - |z_2|^2 = -10 \text{ khi } \begin{cases} (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 4 \\ (c - 3)^2 + (d - 4)^2 = 4 \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 1 \\ \frac{a - c}{6} = \frac{b - d}{8} = k < 0. \end{cases}$$

Tồn tại hai cặp số phức thỏa mãn là

$$\begin{cases} z_1 = \frac{27 - 4\sqrt{15}}{10} + \frac{144 + 12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33 - 4\sqrt{15}}{10} + \frac{176 + 12\sqrt{15}}{40}i \\ z_1 = \frac{27 + 4\sqrt{15}}{10} + \frac{144 - 12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33 + 4\sqrt{15}}{10} + \frac{176 - 12\sqrt{15}}{40}i. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 27. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|2z + 2 - 3i| = 1$. Khi biểu thức $P = 2|z + 2| + |z - 3|$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a - b$ bằng

(A) -3.

(B) 2.

(C) -2.

(D) 3.

Lời giải.

Theo giả thiết có:

$$|2(a + bi) + 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(2a + 2) + (2b - 3)i| = 1 \Leftrightarrow (2a + 2)^2 + (2b - 3)^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -3 - 2a + 3b. \text{ Từ } (*) \text{ suy ra } \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \leq b \leq 2.$$

Khi đó biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} P = 2|z + 2| + |z - 3| &= 2\sqrt{(a + 2)^2 + b^2} + \sqrt{(a - 3)^2 + b^2} \\ &= 2\sqrt{a^2 + b^2 + 4a + 4} + \sqrt{a^2 + b^2 - 6a + 9} = 2\sqrt{(-3 - 2a + 3b) + 4a + 4} + \sqrt{(-3 - 2a + 3b) + 9 - 6a} \\ &= 2\sqrt{2a + 3b + 1} + \sqrt{-8a + 3b + 6} \\ &= \sqrt{8a + 12b + 4} + \sqrt{-8a + 3b + 6} \leq \sqrt{(1 + 1)(8a + 12b + 4 - 8a + 3b + 6)} \\ &= \sqrt{2(15b + 10)} \leq \sqrt{2(15 \cdot 2 + 10)} = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} 8a + 12b + 4 = -8a + 3b + 6 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Suy ra $\text{Max } P = 4\sqrt{5}$ khi $a = -1, b = 2$. Vậy $a - b = -3$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| + |z - 4 - 6i| = 9$, giá trị lớn nhất của $|z - 10 - 14i|$ là

(A) 17.

(B) 20.

(C) 15.

(D) 12.

Lời giải.

Cách 1:

$$\text{Đặt } z = \frac{w}{3 - 4i} + \frac{5 + 8i}{2}.$$

$$\text{Ta có } |z - 1 - 2i| + |z - 4 - 6i| = \left| \frac{w}{3 - 4i} + \frac{3}{2} + 2i \right| + \left| \frac{w}{3 - 4i} - \frac{3}{2} - 2i \right| = 9 \Leftrightarrow \left| w + \frac{25}{2} \right| + \left| w - \frac{25}{2} \right| = 45.$$

Đặt $w = x + yi$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn w .

$$\text{Khi đó tập hợp điểm } M \text{ là elip có phương trình là } (E): \frac{x^2}{\left(\frac{45}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{350} = 1. \text{ Suy ra } y^2 = 350 - \frac{56}{81}x^2 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác ta có } T = |z - 10 - 14i| = \left| \frac{w}{3 - 4i} - \frac{15}{2} - 10i \right| = \frac{1}{5} \left| w - \frac{125}{2} \right| = \frac{1}{5} \sqrt{\left(x - \frac{125}{2}\right)^2 + y^2}.$$

$$\text{Suy ra } T = \frac{1}{5} \sqrt{\left(x - \frac{125}{2}\right)^2 + 350 - \frac{56}{81}x^2} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{25}{81}x^2 - 125x + \frac{17025}{4}}.$$

Từ (1) ta có $-\frac{45}{2} \leq x \leq \frac{45}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{25}{81}x^2 - 125x + \frac{17025}{4}$ trên đoạn $\left[-\frac{45}{2}; \frac{45}{2}\right]$; $f'(x) = \frac{50}{81}x - 125$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{405}{2} \notin \left[-\frac{45}{2}; \frac{45}{2}\right]$.

Ta có $f\left(-\frac{45}{2}\right) = 7225$; $f\left(\frac{45}{2}\right) = 1600$.

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng $\frac{1}{5}\sqrt{f\left(-\frac{45}{2}\right)} = 17$.

Cách 2:

Ta có $|z - 10 - 14i| \leq |z - 1 - 2i| + |-9 - 12i| = |z - 1 - 2i| + 15$.

Ta có $|z - 10 - 14i| \leq |z - 4 - 6i| + |-6 - 8i| = |z - 4 - 6i| + 10$.

Suy ra $2|z - 10 - 14i| \leq 9 + 15 + 10 = 34 \Leftrightarrow |z - 10 - 14i| \leq 17$.

Dấu “=” xảy ra khi $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. Vậy $\max |z - 10 - 14i| = 17$.

Cách 3:

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z . Gọi $F_1(1; 2)$ và $F_2(4; 6)$. Suy ra $MF_1 + MF_2 = 9$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn z là Elip và có $F_1F_2 = 5$.

Ta có $P = |z - 10 - 14i| = MA$ với $A(10; 14)$.

Ta có $\overrightarrow{F_1A} = (9; 12)$, $\overrightarrow{F_1F_2} = (3; 4) \Rightarrow \overrightarrow{F_1A} = 3\overrightarrow{F_1F_2} \Rightarrow F_1, A, F_2$ thẳng hàng và có $\begin{cases} F_1F_2 = 5 \\ F_1A = 15 \\ F_2A = 10. \end{cases}$

Ta có $MA \leq MF_2 + F_2A \leq 7 + 10 = 17$. Dấu “=” xảy ra khi M, F_1, F_2 thẳng hàng và $MF_1 + F_1F_2 = MF_2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2$, $|iw - 2 + 5i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4|$ bằng

(A) 4.

(B) $2(\sqrt{29} - 3)$.

(C) 8.

(D) $2(\sqrt{29} - 5)$.

🗨️ Lời giải.

Ta có: $|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$; $|z| = 2 \Rightarrow z.\bar{z} = 4$.

Đặt: $z = x + iy, w = a + ib$; ($x, y, a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (a + 5)^2 + (b + 2)^2 = 1. \end{cases}$

Ta có: $|z^2 - wz - 4| = |z| \left| z - w - \frac{4}{z} \right| = 2|(z - \bar{z}) - w|$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn $z - \bar{z}$ và w .

Dẫn đến: $A(0; 2y)$ với $-2 \leq y \leq 2$, B thuộc đường tròn có tâm $I(-5; -2)$ và có bán kính $R = 1$.

Khi đó: $|z^2 - wz - 4| = 2AB$. Ta có: $AB_{\min} = d(I, d) - R = 4$.

Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4| = 8$.

Nhận xét:

Ta xem bài toán trên gồm 3 giả thiết: $|z| = 2 \Rightarrow z.\bar{z} = 4$.

$|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$.

$|z^2 - wz - 4| = 2|z - w - \bar{z}|$ (*).

Việc đầu tiên, ta rút gọn các giả thiết của bài toán.

Từ (*), ta gọi A là điểm biểu diễn của $z - \bar{z}$, B là điểm biểu diễn của w .

Bài toán trở thành tìm độ dài AB nhỏ nhất.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2i| + |z - 6 - 2i|$.

A 7.

B $2\sqrt{53}$.

C $2\sqrt{58}$.

D $4\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5w+5i = 5i+(2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5|w+i| = |(2+i)z-8+i|$.

Đặt $z = x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ ta được $|(2+i)(x+yi)-8+i| = 3\sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow |2x-y-8+(x+2y+1)i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (2x-y-8)^2 + (x+2y+1)^2 = 45$.

$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 64 - 4xy - 32x + 16y + x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y = 45$.

$\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 30x + 20y + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Đặt $\begin{cases} x = 3\sin\alpha + 3 \\ y = 3\cos\alpha - 2 \end{cases}$. Khi đó

$$P = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34} + \sqrt{-18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia Copsky ta có $P \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{-48\cos\alpha + 68} \leq 2\sqrt{58}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \frac{\sqrt{18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}}{1} = \frac{\sqrt{-18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}}{1} \\ \cos\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \sin\alpha = 0. \end{cases}$

Suy ra $\max P = 2\sqrt{58}$ khi $z = 3 - 5i$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 31. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 + 3i| = 5|z_2 + 2 + 3i| = 3$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của phần thực số phức $\frac{z_1 + 2 + 3i}{z_2 + 2 + 3i}$. Tìm m_0 .

A $m_0 = \frac{3}{5}$.

B $m_0 = \frac{81}{25}$.

C $m_0 = 3$.

D $m_0 = 5$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 + 2 + 3i = a + bi \\ w_2 = z_2 + 2 + 3i = c + di \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, theo giả thiết ta có: $\begin{cases} |w_1| = 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |w_2| = \frac{3}{5} = \sqrt{c^2 + d^2} \end{cases}$.

$$\frac{z_1 + 2 + 3i}{z_2 + 2 + 3i} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{\frac{9}{25}}.$$

Phần thực của số phức $\frac{w_1}{w_2}$ là $\frac{25(ac+bd)}{9}$.

Ta có $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2) \Leftrightarrow (ac+bd)^2 \leq 9 \cdot \frac{9}{25} \Rightarrow ac+bd \leq \frac{9}{5}$.

$\Rightarrow \frac{25(ac+bd)}{9} \leq 5$. Dấu "=" xảy ra khi $ad=bc$ hay $\frac{w_1}{w_2}$ là số thực và $|w_1| = 5|w_2| = 3$.

Vậy $m_0 = 5$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+2| + |(1+i)z-2| = 4\sqrt{2}$. Gọi $m = \max|z|$; $n = \min|z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$.

A 4^{1009} .

B 5^{1000} .

C 6^{1009} .

D 2^{1009} .

Lời giải.

Gọi $z = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|(1+i)z+2| + |(1+i)z-2| = 4\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow |(1+i)z + (1+i)(1-i)| + |(1+i)z - (1+i)(1-i)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(1+i)(z+1-i)| + |(1+i)(z-1+i)| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i||z+1-i| + |1+i||z-1+i| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z+1-i| + |z-1+i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 4 (*)$.

Gọi $M(x; y), F_1(-1; 1), F_2(1; -1)$. Ta có $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4$.

Do đó tập hợp điểm M biểu diễn cho số phức z là một Elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 ; tiêu cự bằng $\frac{1}{2}F_1F_2 = \sqrt{2}$; độ dài trục lớn bằng $MF_1 + MF_2 = 4$; một nửa độ dài trục bé bằng $\sqrt{2}$.

Ta có $m = \max |z| = 2$; $n = \min |z| = \sqrt{2} \Rightarrow w = 2 + \sqrt{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{6} \Rightarrow |w|^{2018} = (\sqrt{6})^{2018} = 6^{1009}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i|$ bằng

- (A) $5\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{15}(1 + \sqrt{6})$. (C) $6\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.

Lời giải.

Ta có $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 1 - 2i| = 3$ nên tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 3$.

Đặt $a = z - 1 - 2i$, $b = 1 + i$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z + 2 + i|^2 = |a + 3b|^2 = |a|^2 + 9|b|^2 + 3(a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b) \\ |z - 2 - 3i|^2 = |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - (a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b). \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z + 2 + i|^2 + 3|z - 2 - 3i|^2 = |a + 3b|^2 + 3|a - b|^2 = 4|a|^2 + 12|b|^2 = 60.$$

$$\text{Khi đó } P = |a + 3b| + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}|a - b| \leq \sqrt{(1+2)(|a + 3b|^2 + 3|a - b|^2)} = 6\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Hai số phức z, w thay đổi nhưng luôn thỏa mãn đẳng thức

$$(1+i)|z^2 - 2iz - 1| = \frac{2019\bar{z} + 2019i}{w} + 2 - 2i. \text{ Giá trị lớn nhất của } |w| \text{ là}$$

- (A) $\frac{2019\sqrt{2}}{4}$. (B) $\frac{2019\sqrt{2}}{2}$. (C) 2019. (D) Đáp án khác.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } |z - i| = |\bar{z} + i| \text{ nên } |z^2 - 2iz - 1| = |z - i|^2 = |\bar{z} + i|^2.$$

$$\text{Như vậy: } (1+i)|z^2 - 2iz - 1| = \frac{2019\bar{z} + 2019i}{w} + 2 - 2i \Leftrightarrow (1+i)|\bar{z} + i|^2 = \frac{2019(\bar{z} + i)}{w} + 2 - 2i.$$

$$\Leftrightarrow (1+i)|\bar{z} + i|^2 + 2i - 2 = \frac{2019(\bar{z} + i)}{w} \Leftrightarrow |\bar{z} + i|^2 - 2 + (|\bar{z} + i|^2 + 2)i = \frac{2019(\bar{z} + i)}{w}.$$

Điều kiện: $w \neq 0$ suy ra $\bar{z} + i \neq 0$ hay $|\bar{z} + i| > 0$.

Đặt $t = |\bar{z} + i|$, $t > 0$ ta có $t^2 - 2 + (t^2 + 2)i = \frac{2019(\bar{z} + i)}{w}$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\sqrt{(t^2 - 2)^2 + (t^2 + 2)^2} = \frac{2019|z + i|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{(t^2 - 2)^2 + (t^2 + 2)^2} = \frac{2019t}{|w|}$$

$$\Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{(t^2 - 2)^2 + (t^2 + 2)^2}} \Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{2t^4 + 8}} \Rightarrow |w| \leq \frac{2019t}{2\sqrt{2}t} \Leftrightarrow |w| \leq \frac{2019\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \max |w| = \frac{2019\sqrt{2}}{4} \text{ khi } 2t^4 = 8 \Leftrightarrow t^4 = 4 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - i| = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. D	5. B	6. C	7. C	8. B	9. D	10. C
11. D	12. B	13. D	14. A	15. D	16. D	17. B	18. A	19. A	20. B
21. B	22. A	23. D	24. B	25. C	26. A	27. A	28. A	29. C	30. C
31. D	32. C	33. C	34. A						