

CÂU HỎI & BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 12

NGUYỄN PHÚ KHÁNH – HUỖNH ĐỨC KHÁNH

Đăng ký mua trọn bộ trắc nghiệm 12 **FILE WORD**

Liên hệ tác giả HUỖNH ĐỨC KHÁNH – 0975 120 189

<https://www.facebook.com/duckhanh0205>

Khi mua có sẵn file word đề riêng;

file word đáp án riêng thuận tiện cho việc dạy

○ Bài 01

SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng.

1) Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

2) Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K (hàm số $y = f(x)$ còn gọi là hàm hằng trên K).

3) Định lý mở rộng

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K . Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K .

Chú ý: $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm. Tuy nhiên một số hàm số có $f'(x) = 0$ tại vô hạn điểm nhưng các điểm rời rạc thì hàm số vẫn đơn điệu.

Ví dụ: Hàm số $y = 2x - \sin 2x$.

Ta có $y' = 2 - 2 \cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) có vô hạn điểm làm cho $y' = 0$ nhưng các điểm đó rời rạc nên hàm số $y = 2x - \sin 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên K . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- B. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- C. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- D. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .

Lời giải. Chọn C.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$, với x_1, x_2 bất kỳ thuộc $(a; b)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Lời giải. A sai. Sửa lại cho đúng là " $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ".

B sai: Sửa lại cho đúng là " $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ".

C sai: Sửa lại cho đúng là " $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ".

D đúng (theo định nghĩa). **Chọn D.**

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 \neq x_2$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải trên $(a; b)$.
- D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải trên $(a; b)$.

Lời giải. A sai: Sửa lại cho đúng là " $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ ".

B sai: Sửa lại cho đúng là " $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ ".

C đúng (theo dấu hiệu của đồ thị hàm đồng biến). **Chọn C.**

D sai (đối nghĩa với đáp án C).

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một hữu hạn điểm $x \in (a; b)$.
- C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 \neq x_2$.

Lời giải. Chọn C. Sửa lại cho đúng là "Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$ "

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x) + g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ và đều nhận giá trị dương trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x).g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

C. Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x).g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

D. Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ và đều nhận giá trị âm trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x).g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

Lời giải. A sai: Vì tổng của hàm đồng biến với hàm nghịch biến không kết luận được điều gì.

B sai: Để cho khẳng định đúng thì $g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

C sai: Hàm số $f(x), g(x)$ phải là các hàm dương trên $(a;b)$ mới thoả mãn.

D đúng. **Chọn D.**

Câu 6. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $-f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $\frac{1}{f(x)}$ nghịch biến trên $(a;b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x) + 2016$ đồng biến trên $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $-f(x) - 2016$ nghịch biến trên $(a;b)$.

Lời giải. Ví dụ hàm số $f(x) = x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, trong khi đó hàm số $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Do đó B sai. **Chọn B.**

Câu 7. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ thì hàm số $y = f(x + 2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-1; 2)$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-3; 0)$.

D. $(-2; 4)$.

Lời giải. Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2 đơn vị, ta sẽ được đồ thị của hàm số $y = f(x + 2)$. Khi đó, do hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ nên hàm số $y = f(x + 2)$ đồng biến trên $(-3; 0)$. **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm nhanh. Ta có $x + 2 \in (-1; 2) \longrightarrow -1 < x + 2 < 2 \leftrightarrow -3 < x < 0$.

Câu 8. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ thì hàm số $y = f(2x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0; 2)$.

B. $(0; 4)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải. Tổng quát: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $y = f(nx)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right)$. **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm nhanh. Ta óp $2x \in (0; 2) \longrightarrow 0 < 2x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- B. Hàm số $y = -f(x) - 1$ nghịch biến trên $(a; b)$.
- C. Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.
- D. Hàm số $y = f(x) + 1$ đồng biến trên $(a; b)$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến $(1; +\infty)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 11. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ nghịch biến trên khoảng nào được cho dưới đây?

- A. $(-1; 3)$.
- B. $(-\infty; -3)$ hoặc $(1; +\infty)$.
- C. $\mathbb{R}$.
- D. $(-\infty; -1)$ hoặc $(3; +\infty)$.

Lời giải. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

Ta có $y' \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$. **Chọn A.**

Câu 12. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên toàn trục số?

- A. $y = x^3 - 3x^2$.
- B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.
- C. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- D. $y = x^3$.

Lời giải. Để hàm số nghịch biến trên toàn trục số thì hệ số của x^3 phải âm. Do đó A & D không thỏa mãn.

Xét B: Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra hàm số này luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 13. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.
- B. $(0; +\infty)$.
- C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải. Ta có $y' = 8x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. **Chọn B.**

Câu 14. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- C. Trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, $y' < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến.

Lời giải. Ta có $y' = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

- Đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 15. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

B. $y = -x^3 + x^2 - 2x - 1.$

D. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Thật vậy: Với $y = -x^3 + x^2 - 2x - 1 \longrightarrow y' = -3x^2 + 2x - 2$ có $\Delta' = -5 < 0$.

B. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$.

- Hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$;

• $(1; +\infty) \subset (-2; +\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 19. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

A. $y = \frac{x-2}{x+2}$. B. $y = \frac{-x+2}{x+2}$. C. $y = \frac{x-2}{-x+2}$. D. $y = \frac{x+2}{-x+2}$.

Lời giải. Ta có

A. $y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$. B. $y' = \frac{-4}{(x+2)^2} < 0, \forall x \neq -2$.
C. $y' = 0, \forall x \neq 2$ D. $y' = \frac{4}{(x-2)^2} > 0, \forall x \neq 2$.

Chọn B.

Câu 20. Cho hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $[0;1]$
B. Hàm số đã cho đồng biến trên toàn tập xác định
C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $[0;1]$
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên toàn tập xác định.

Lời giải. Tập xác định $D = [-1;1]$. Đạo hàm $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên $[0;1]$. **Chọn C.**

Câu 21. Hàm số $y = \sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào đã cho dưới đây?

A. $(0;2)$. B. $(0;1)$. C. $(1;2)$. D. $(-1;1)$.

Lời giải. Tập xác định $D = [0;2]$. Đạo hàm $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. **Chọn C.**

Câu 22. Cho hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;4)$.
B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(1; \frac{5}{2}\right)$.
C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. Tập xác định: $D = [1;4]$. Đạo hàm $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;4) \\ x-1 = 4-x \end{cases} \longrightarrow x = \frac{5}{2} \in (1;4)$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. **Chọn C.**

Câu 23. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. B. $y = 2x - \cos 2x - 5$.
C. $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. D. $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Lời giải. **Chọn B.** Vì $y' = 2 + 2\sin 2x = 2(\sin 2x + 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$.

Phương trình $\sin 2x = -1$ có vô số nghiệm nhưng các nghiệm tách rời nhau nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 24. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = (x-1)^2 - 3x + 2$.

B. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y = \frac{x}{x+1}$.

D. $y = \tan x$.

Lời giải. Xét hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 25. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số $y = 2x + \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = -x^3 - 3x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

D. Hàm số $y = 2x^4 + x^2 + 1$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Lời giải. Xét hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$+$	0	$-$
y				5		
	$-\infty$		0		$-\infty$	

Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề sai?

I. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$.

II. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

III. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

IV. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$; nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Suy ra II. Sai; III. Đúng; IV. Đúng.

Ta thấy khoảng $(-\infty; -3)$ chứa khoảng $(-\infty; -5)$ nên I Đúng.

Vậy chỉ có II sai. **Chọn A.**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
y'	$+$	$ $	$+$	0	$-$	
y	-2	$+\infty$	$ $	$-\infty$	-2	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2; +\infty)$ và $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; 2)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2; 2)$.

Lời giải. Vì $(0; 2) \subset (-1; 2)$, mà hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ nên suy ra C đúng. **Chọn C.**

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
y'		+	+	0	-
y		$+\infty$		4	
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(3; +\infty)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số

- Đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}; 3)$.
- Nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
y'		+	0	-	+
y		$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3; -2) \cup (-2; -1)$.
- B. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng -3 .
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu là 2 .

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét sau

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1) \longrightarrow$ A sai (sai chỗ dấu $\cup$).

Hàm số có giá trị cực đại $y_{CD} = -2 \longrightarrow$ B sai.

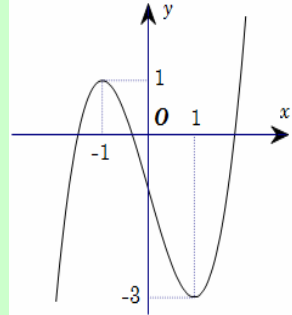
Hàm số đồng biến khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty) \longrightarrow$ C đúng.

Hàm số có điểm cực tiểu là $-1 \longrightarrow$ D sai.

Chọn C.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có kết quả: Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 1)$ nên các khẳng định **A, B, C** đúng.

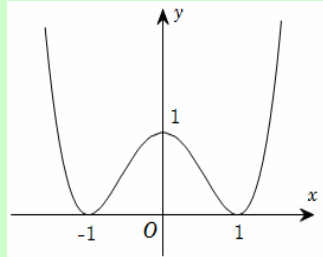
Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì khẳng định **D** sai.

Ví dụ: Ta lấy $-1, 1 \in (-\infty; -1)$, $1, 1 \in (1; +\infty)$: $-1, 1 < 1, 1$ nhưng $f(-1, 1) > f(1, 1)$.

Chọn D.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

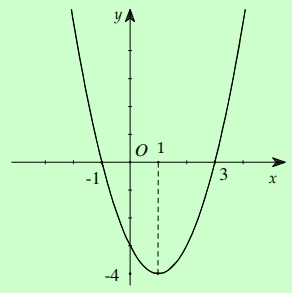


Lời giải. Chọn D.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

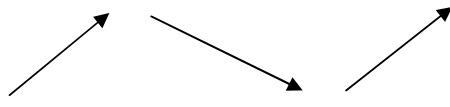


Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có nhận xét:

- $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi qua điểm $x = -1$.
- $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua điểm $x = 3$.

Do đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy B đúng. **Chọn B.**

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + 8x + \cos x$ và hai số thực a, b sao cho $a < b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(a) = f(b)$. B. $f(a) > f(b)$.
C. $f(a) < f(b)$. D. Không so sánh được $f(a)$ và $f(b)$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 2x + 8 - \sin x = (3x^2 + 2x + 1) + (7 - \sin x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. **Chọn C.**

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ và hai số thực $u, v \in (0; 1)$ sao cho $u > v$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(u) = f(v)$. B. $f(u) > f(v)$.
C. $f(u) < f(v)$. D. Không so sánh $f(u)$ và $f(v)$ được.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Vẽ bảng biến thiên ta thấy được hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

Do đó với $u, v \in (0; 1)$ thỏa mãn $u > v \Rightarrow f(u) < f(v)$. **Chọn C.**

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Biết $e \simeq 2,718$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(e) + f(\pi) < f(3) + f(4)$. B. $f(e) - f(\pi) \geq 0$.
C. $f(e) + f(\pi) < 2f(2)$. D. $f(1) + f(2) = 2f(3)$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó

- $\begin{cases} e < 3 \rightarrow f(e) < f(3) \\ \pi < 4 \rightarrow f(\pi) < f(4) \end{cases} \longrightarrow f(e) + f(\pi) < f(3) + f(4)$. Vậy A đúng. **Chọn A.**
- $e < \pi \rightarrow f(e) < f(\pi) \rightarrow f(e) - f(\pi) < 0$. Vậy B sai.

Tương tự cho các đáp án C và D.

Câu 36. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

- A. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$.

Lời giải. Quan sát các đáp án, ta sẽ xét hai trường hợp là: $a = b = 0$ và $a \neq 0$.

- Nếu $a = b = 0$ thì $y = cx + d$ là hàm bậc nhất $\rightarrow$ để y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $c > 0$.

• Nếu $a \neq 0$, ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 37. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định.

A. $m \leq 1$. B. $m \geq 3$. C. $-1 \leq m \leq 3$. D. $m < 3$.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Ycbt $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$.

Chọn B.

Cách giải trắc nghiệm. Quan sát ta nhận thấy các giá trị m cần thử là:

✓ $m = 3$ thuộc B & C nhưng không thuộc A, D.

✓ $m = 2$ thuộc C & D nhưng không thuộc A, B.

• Với $m = 3 \rightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3 \rightarrow y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó ta loại A và D.

• Với $m = 2 \rightarrow y = x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 + 6x + 2$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2 = 0$ có $\Delta > 0$ nên $m = 2$ không thỏa nên loại C.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m-3)x + 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 3$.

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + 4m - 3$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm)
 $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của tham số m thỏa mãn ycbt là $m = 3$. **Chọn D.**

Câu 39. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4. B. 6. C. 7. D. 5.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ thì $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(4m+9) \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-9; -8; \dots; -3\}$. **Chọn C.**

Sai lầm hay gặp là "Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ thì $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ". Khi đó ra giải ra $-9 < m < -3$ và chọn D.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m+3)x + m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -4$. B. $m = 0$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = mx^2 - 4x + m + 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1. • $m = 0$ thì $y' = -4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$ (không thỏa mãn).

TH2. • $\begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta'_{y'} = -m^2 - 3m + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$

Suy ra giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là $m = 1$. **Chọn D.**

Câu 41. Cho hàm số $y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + (m-8)x + m^2 - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < -2$. B. $m > -2$. C. $m \leq -2$. D. $m \geq -2$.

Lời giải. Ta có $y' = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + m - 8$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1 • $m+2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, khi đó $y' = -10 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

TH2 • $\begin{cases} a = m+2 < 0 \\ \Delta' = (m+2)^2 - (m+2)(m-8) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ 10(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$

Hợp hai trường hợp ta được $m \leq -2$. **Chọn C.**

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2; +\infty)$.

- A. $m < 5$. B. $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$. C. $m > -2$. D. $m < \frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$.

Xét phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) = 7(m^2 - m + 1) > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < x_2$ với mọi m .

Để hàm số đồng biến trên $[2; +\infty) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(m+1)}{3} < 4 \\ -\frac{(2m^2 - 3m + 2)}{3} - 2 \cdot \frac{2(m+1)}{3} + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -2 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 999. B. 1001. C. 998. D. 1998.

Lời giải. Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 6[x^2 - (2m+1)x + m(m+1)]$.

Xét phương trình $y' = 0$ có $\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < x_2$ với mọi m .

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = m(m+1) \end{cases}$.

Để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 < 4 \\ m(m+1) - 2(2m+1) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-999; -998; \dots; 1\}.$$

Vậy có 1001 số nguyên m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$.

A. $m \leq 0$.

B. $-1 < m < 0$.

C. $-1 \leq m \leq 0$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2) = 3[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)]$.

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m(m+2) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m, x = m+2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số nghịch biến trên $[0;1] \longleftrightarrow [0;1] \subset [m; m+2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0. \text{ Chọn C.}$$

Câu 45. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $m \geq \frac{12}{7}$.

B. $m \leq \frac{12}{7}$.

C. $m \geq 1$.

D. $1 \leq m \leq \frac{12}{7}$.

Lời giải. Ta có $y' = -x^2 + 2(m-1)x + m+3$.

Xét phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = (m-1)^2 + (m+3) = m^2 - m + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < x_2$ với mọi m .

Để hàm số đồng biến trên $(0;3) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 \leq 0 < 3 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y'(0) \leq 0 \\ -y'(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \geq 0 \\ -9+6(m-1)+m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ m \geq \frac{12}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}. \text{ Chọn A.}$$

Cách 2. YCBT $\Leftrightarrow y' = -x^2 + 2(m-1)x + m+3 \geq 0, \forall x \in (0;3)$

$$\longleftrightarrow m(2x+1) \geq x^2 + 2x - 3, \forall x \in (0;3) \longleftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}, \forall x \in (0;3). \quad (*)$$

Khảo sát hàm $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}$ trên khoảng $x \in (0;3)$, ta được $\max_{(0;3)} g(x) = g(3) = \frac{12}{7}$.

$$\text{Do đó } (*) \longleftrightarrow m \geq \max_{(0;3)} g(x) = \frac{12}{7}.$$

Câu 46. Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ (với m là tham số thực) nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng giao với $(x_1; x_2)$ bằng rỗng. Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$.

A. $m = -1$.

B. $m = 3$.

C. $m = -3, m = 1$.

D. $m = -1, m = 3$.

Lời giải. Ta có $y' = x^2 + 6(m-1)x + 9$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 6\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \sqrt{\Delta'} = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' = 27$$

$$\Leftrightarrow 9(m-1)^2 - 9 = 27 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-1 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 1.

A. $m = -\frac{9}{4}$. B. $m = 3$. C. $m \leq 3$. D. $m = \frac{9}{4}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 3m > 0 \\ 2 \frac{\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{9-3m}}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 2.

A. $m = 0$. B. $m < 3$. C. $m = 2$. D. $m > 3$.

Lời giải. Tính $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Ta nhớ công thức tính nhanh "Nếu hàm bậc ba ($a > 0$) nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng α thì phương trình đạo hàm có hai nghiệm và trị tuyệt đối hiệu hai nghiệm bằng α "

Với α là một số xác định thì m cũng là một số xác định chứ không thể là khoảng $\longrightarrow$ Đáp số phải là A hoặc C.

Thử với $m = 0$ phương trình đạo hàm $3x^2 + 6x = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$

và khoảng cách giữa chúng bằng 2. **Chọn A.**

Câu 49. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

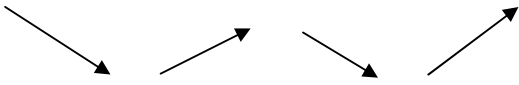
A. $1 < m \leq 2$. B. $m \leq 2$. C. $m \leq 1$. D. $1 < m < 2$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x[x^2 - (m-1)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m-1 \end{cases}$.

• Nếu $m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1 \longrightarrow y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$ và y' đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua điểm $x = 0 \longrightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1;3)$. Vậy $m \leq 1$ thỏa mãn.

• Nếu $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m-1} \\ x = \sqrt{m-1} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{m-1}$	0	$\sqrt{m-1}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y					

Dựa vào bảng biến thiên, ta có ycbt $\Leftrightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2 \xrightarrow{m>1} 1 < m \leq 2$.

Hợp hai trường hợp ta được $m \in (-\infty; 2]$. **Chọn B.**

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m = 1$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

TH1 ● $m \leq 0 \longrightarrow y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$ và y' đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua điểm $x = 0 \longrightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

TH2 ● $m > 0 \longrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $-\sqrt{m}; 0; \sqrt{m}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{m}; 0)$ và $(\sqrt{m}; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{m})$ và $(0; \sqrt{m})$. Do đó trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Cách khác. Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hàm số chỉ có một cực trị $\Leftrightarrow a.b \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ nhưng vấn đề cực trị ở bài này chưa học.

Câu 51. Cho hàm số $y = (m^2 - 2m)x^4 + (4m - m^2)x^2 - 4$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 0. B. Vô số. C. 2. D. 3.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp:

● Hệ số $a = m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \longrightarrow y = -4 \text{ (loại)} \\ m = 2 \longrightarrow y = 4x^2 - 4 \end{cases}$. Hàm số $y = 4x^2 - 4$ có đồ thị là

một parabol nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó $m = 2$ thỏa mãn. (Học sinh rất mắc phải sai lầm là không xét trường hợp $a = 0$)

● Hệ số $a = m^2 - 2m \neq 0$. Dựa vào dấu hiệu đặc trưng của hàm trùng phương thì yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị hàm số có một cực trị và đó là cực tiểu

$$\longleftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 4m - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > 2 \\ 0 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{3; 4\}.$$

Vậy $m = \{2; 3; 4\}$. **Chọn D.**

Nhận xét. (Bài này có nhắc đến cực trị của hàm số, kiến thức về cực trị nó nằm ở Bài sau)

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

- A. $m > 2$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq 2$. D. $m > 1$.

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-m+1}{(x-m)^2}$.

Với $-m+1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $y' < 0, \forall x \neq m \longrightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Ycbt $\longleftrightarrow (-\infty; 2) \subset (-\infty; m) \Leftrightarrow m \geq 2$: (thỏa mãn). **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $y' = \frac{-m+1}{(x-m)^2}$.

$$Yc_{bt} \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x < 2 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \neq (-\infty; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \in [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Câu 53. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' > 0, \forall x \neq m$

$$\Leftrightarrow -m^2+2m+3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{0; 1; 2\}. \text{ Chọn D.}$$

Sai lầm hay gặp là cho $y' \geq 0, \forall x \neq m \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 54. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \frac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S .

- A. $T = -9$. B. $T = -5$. C. $T = -6$. D. $T = -10$.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3m-2\}$. Đạo hàm $y' = \frac{-5m+5}{(x-3m+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; -14)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5 > 0 \\ x \neq 3m-2 \end{cases}, \forall x < -14 \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5 > 0 \\ 3m-2 \notin (-\infty; -14) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5 > 0 \\ 3m-2 \geq -14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq m < 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\} \longrightarrow T = -10. \text{ Chọn D.}$$

Câu 55. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là khoảng $(a; b)$. Tính $P = b - a$.

- A. $P = -3$. B. $P = -2$. C. $P = -1$. D. $P = 1$.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3-m\}$. Đạo hàm $y' = \frac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\longleftrightarrow y' < 0, \forall x \neq 3-m \Leftrightarrow m^2-3m+2 < 0$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 2 \Leftrightarrow m \in (1; 2) \equiv (a; b) \longrightarrow P = b - a = 1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 56. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \frac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tính tổng T của các phần tử trong S .

- A. $T = 35$. B. $T = 40$. C. $T = 45$. D. $T = 50$.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2m} \right\}$. Đạo hàm $y' = \frac{m^2-10m}{(2mx+1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m < 0 \\ x \neq \frac{-1}{2m} \end{cases}, \forall x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m < 0 \\ \frac{-1}{2m} \notin (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m < 0 \\ \frac{-1}{2m} \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < m < 10 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; \dots; 9\} \longrightarrow T = 45. \text{ Chọn C.}$$

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \in [1; +\infty)$.

B. $m \in (3; +\infty)$.

C. $m \in [2; 3)$.

D. $m \in (-\infty; 1] \cup [2; 3)$.

Lời giải. Đặt $t = \tan x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow t \in (0; 1)$.

Hàm số trở thành $y(t) = \frac{t-2}{t-m+1} \longrightarrow y'(t) = \frac{3-m}{(t-m+1)^2}$.

Ta có $t' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, do đó $t = \tan x$ **đồng biến** trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1) \longleftrightarrow y'(t) > 0, \forall t \in (0; 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ t-m+1 \neq 0 \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ m-1 \neq t \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ m-1 \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 2 \leq m < 3 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

A. $m \geq -1$.

B. $m > -1$.

C. $m < -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \longrightarrow t \in (0; 1)$.

Hàm số trở thành $y(t) = \frac{t+m}{t-1} \longrightarrow y'(t) = \frac{-1-m}{(t-1)^2}$.

Ta có $t' = \cos x < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, do đó $t = \sin x$ **nghịch biến** trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1) \longleftrightarrow y'(t) > 0, \forall t \in (0; 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-m > 0 \\ t-1 \neq 0 \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow -1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$. **Chọn C.**

Nhận xét. Khi ta đặt ẩn t , nếu t là hàm đồng biến trên khoảng đang xét thì giữ nguyên câu hỏi trong đề bài. Còn nếu t là hàm nghịch biến thì ta làm ngược lại câu hỏi trong đề bài.

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2 \cos x + 3}{2 \cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

A. $m \in (-3; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -3)$.

D. $m \in (-3; 1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải. Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Hàm số trở thành $y(t) = \frac{2t+3}{2t-m} \longrightarrow y'(t) = \frac{-2m-6}{(2t-m)^2}$.

Ta có $t' = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, do đó $t = \cos x$ **nghịch biến** trên $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \longleftrightarrow y'(t) > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6 > 0 \\ 2t-m \neq 0 \end{cases}, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \neq 2t \end{cases}, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow m < -3. \text{ Chọn C.}$
 Nhận xét. Do $t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \rightarrow 2t \in (1; 2)$. Và $m \notin (1; 2) \longleftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 1}{1 - x}$ nghịch biến trên các khoảng xác định.
 A. $m < 0$. B. $m \geq 0$. C. $m = 0$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải. TXĐ: $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Đạo hàm $y' = \frac{-x^2 + 2x - m - 1}{(1 - x)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - m - 1 \leq 0, \forall x \in D \longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 + m \geq 0, \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ -4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0. \text{ Chọn B.}$

Câu 61. Biết rằng hàm số $y = 2x + a \sin x + b \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
 A. $a^2 + b^2 \leq 2$. B. $a^2 + b^2 \geq 2$. C. $a^2 + b^2 \leq 4$. D. $a^2 + b^2 \geq 4$.

Lời giải. Ta có $y' = 2 + a \cos x - b \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Để hàm số đã cho luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow 2 + a \cos x - b \sin x \geq 0 \Leftrightarrow b \sin x - a \cos x \leq 2. \quad (*)$

● Nếu $a^2 + b^2 = 0$ thì A đúng & C cũng đúng.

● Nếu $a^2 + b^2 \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \leq \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin(x - \alpha) \leq \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4. \text{ Chọn C.}$

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $f(x) = \sin x - bx + c$ nghịch biến trên toàn trục số.
 A. $b \geq 1$. B. $b < 1$. C. $b = 1$. D. $b \leq 1$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = \cos x - b$.

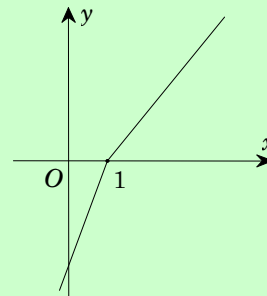
Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \longleftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow \cos x \leq b, \forall x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow b \geq 1$.

Chọn A.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

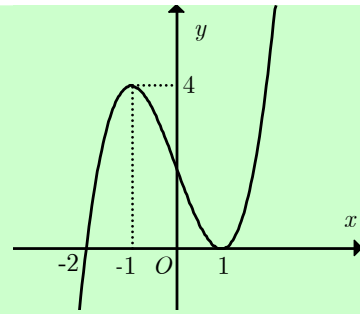
Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty)$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$). Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là sai?



- A. Trên $(-2; 1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.
- B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1; 1]$.
- C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

- $f'(x) > 0$ khi $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x > 1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$, $(1; +\infty)$.

Suy ra A và C đều đúng.

- $f'(x) < 0$ khi $x < -2 \longrightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Suy ra D đúng, B sai. **Chọn B.**

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Chọn A.

○ Bài 02

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và $x_0 \in (a; b)$.

1. Định lí 1

● Nếu tồn tại số h sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 . Khi đó:

✓ x_0 được gọi là một **điểm cực đại của hàm số** $f(x)$.

✓ $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại của hàm số** $f(x)$.

● Nếu tồn tại số h sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Khi đó:

✓ x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

✓ $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập xác định K .

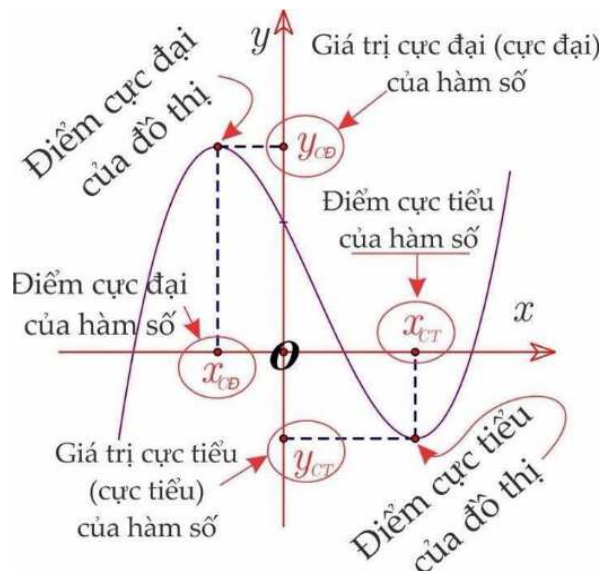
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)**.

2. Chú ý

Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập xác định K mà $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a, b) \subset K$ và (a, b) chứa x_0 .

Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định K của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và điểm có tọa độ $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số** f .



3. Định lý 2

- $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \longrightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại của } f(x).$
- $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \longrightarrow x_0 \text{ là điểm cực tiểu của } f(x).$

4. Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là $y = mx + n$, trong đó $mx + n$ là dư thức trong phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì hàm số không có cực trị trên $(a; b)$.
- B. Nếu $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ thì hàm số không có cực trị trên $(a; b)$.
- C. Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a; b)$ thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ song song hoặc trùng với trục hoành.
- D. Nếu $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0 \in (a; b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên $(a; x_0)$ và nghịch biến trên $(x_0; b)$.

Lời giải. Các Mệnh đề A, B, C đều đúng theo định nghĩa trong SGK.

Xét mệnh đề D. Vì mệnh đề này chưa chỉ rõ ngoài $x_0 \in (a; b)$ là cực đại của $f(x)$ thì còn có cực trị nào khác nữa hay không. Nếu có thêm điểm cực đại (hoặc cực tiểu khác) thì tính đơn điệu của hàm sẽ bị thay đổi theo.

Có thể xét ví dụ khác: Xét hàm $f(x) = x^4 - 2x^2$, hàm số này đạt cực đại tại $x_0 = 0 \in (-2; 2)$, nhưng hàm số này không đồng biến trên $(-2; 0)$ và cũng không nghịch biến trên $(0; 2)$. **Chọn D.**

Câu 2. Cho khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ (có thể trừ điểm x_0). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0 .
- B. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm x_0 .
- D. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .

Lời giải. **Chọn D** vì theo định lý trong SGK. Các mệnh đề sau sai vì:

Mệnh đề A sai, ví dụ hàm $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Mệnh đề B thiếu điều kiện $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0 .

Mệnh đề C sai, ví dụ hàm $y = x^4$ có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$ nhưng $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 3. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của $f'(x) = 0$.
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
- D. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

Lời giải. Chọn A vì đúng theo lý thuyết SGK. Các mệnh đề sau sai vì:

Mệnh đề B thiếu điều kiện $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0 .

Mệnh đề C sai, ví dụ hàm $y = x^4$ có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$ nhưng $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Mệnh đề D sai. Sửa lại cho đúng là "Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 ".

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và x_0 là một điểm trên khoảng đó. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $f'(x)$ bằng 0 tại x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.
- B. Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- C. Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- D. Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Lời giải. Mệnh đề A sai (phải thêm điều kiện $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0).

Mệnh đề B sai. Sửa lại cho đúng là "Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số".

Mệnh đề C đúng, từ đó hiểu rõ tại sao D sai. (**Phân biệt điểm cực tiểu của hàm số và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số**). Chọn C.

Câu 5. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- B. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.
- D. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì chưa kết luận được x_0 có là điểm cực trị của hàm số.

Lời giải. Chọn C.

Câu 6. (ĐỀ MINH HỌA 2016 - 2017) Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là?

- A. $y_{CD} = 4$. B. $y_{CD} = 1$. C. $y_{CD} = 0$. D. $y_{CD} = -1$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$.

Do đó giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 4$. Chọn A.

Câu 7. Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

- A. $x_0 = -3$ hoặc $x_0 = -\frac{1}{3}$. B. $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \frac{10}{3}$.
 C. $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -\frac{10}{3}$. D. $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = \frac{1}{3}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 10x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 8. Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

- A. $x_0 = -1$. B. $x_0 = 0$. C. $x_0 = 1$. D. $x_0 = 2$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow y(-1) = 3 \\ x = 1 \rightarrow y(1) = -1 \end{cases}$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. **Chọn A.**

Câu 9. Tìm các điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

- A. $(0;0)$ hoặc $(1;-2)$. B. $(0;0)$ hoặc $(2;4)$.
 C. $(0;0)$ hoặc $(2;-4)$. D. $(0;0)$ hoặc $(-2;-4)$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -4 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 10. Biết rằng hàm số $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ đạt cực tiểu tại x_{CT} . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_{CT} = \frac{1}{3}$. B. $x_{CT} = -3$. C. $x_{CT} = -\frac{1}{3}$. D. $x_{CT} = 1$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + 8x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Vẽ bảng biến thiên, ta kết luận được $x_{CT} = \frac{1}{3}$. **Chọn A.**

Câu 11. Gọi y_{CD}, y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $y_{CT} = 2y_{CD}$. B. $y_{CT} = \frac{3}{2}y_{CD}$. C. $y_{CT} = y_{CD}$. D. $y_{CT} = -y_{CD}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y(1) = -2 \\ x = -1 \rightarrow y(-1) = 2 \end{cases}$. Do đó $y_{CT} = -y_{CD}$. **Chọn D.**

Câu 12. Gọi y_1, y_2 lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$. Tính $P = y_1 \cdot y_2$.

- A. $P = -302$. B. $P = -82$. C. $P = -207$. D. $P = 25$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow y(3) = -23 \\ x = -1 \rightarrow y(-1) = 9 \end{cases}$.

Suy ra $P = y_1 \cdot y_2 = 9 \cdot (-23) = -207$. **Chọn C.**

Câu 13. Tính khoảng cách d giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = (x + 1)(x - 2)^2$.

- A. $d = 2\sqrt{5}$. B. $d = 2$. C. $d = 4$. D. $d = 5\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = (x - 2)^2 + (x + 1) \cdot 2(x - 2) = 3x(x - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 4 \\ x = 2 \rightarrow y = 0 \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;4)$ và $B(2;0)$.

Suy ra $AB = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 3)^2$. Giá trị cực đại của hàm số $f'(x)$ bằng:

- A. -8 . B. $\frac{1}{2}$. C. 8 . D. 9 .

Lời giải. Ta có $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9 \longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x$.

Tính $f''(x) = 12x^2 - 12$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vẽ bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại $f'(-1) = 8$.

Chọn C.

Nhận xét. Rất nhiều học sinh đọc đề không kỹ đi tìm giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và dẫn tới chọn đáp án D.

Câu 15. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

- A. $y = x - 1$. B. $y = x + 1$. C. $y = -x + 1$. D. $y = -x - 1$.

Lời giải. Ta có $y' = -6x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số đã hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(1;2)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị chính là đường thẳng AB có phương trình $y = x + 1$. **Chọn B.**

Cách 2. Lấy y chia cho y' , ta được $\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)y' + x + 1$.

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là phần dư trong phép chia, đó là $y = x + 1$.

Câu 16. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = \frac{1}{4}$. D. $m = \frac{3}{4}$.

Lời giải. Xét hàm $y = x^3 - 3x^2 + 1$, có $y' = 3x^2 - 6x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y(0) = 1 \\ x = 2 \rightarrow y(2) = -3 \end{cases}$.

Suy ra $A(0;1)$, $B(2;-3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Suy ra đường thẳng AB có một VTCP là $\overrightarrow{AB} = (2; -4) \longrightarrow$ VTPT $\overrightarrow{n_{AB}} = (2; 1)$.

Đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ có một VTCP là $\overrightarrow{n_d} = (2m - 1; -1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_{AB}} \cdot \overrightarrow{n_d} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2m - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$. **Chọn D.**

Câu 17. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.
B. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
C. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Lời giải. Ta có $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Vẽ phát họa bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại. **Chọn D.**

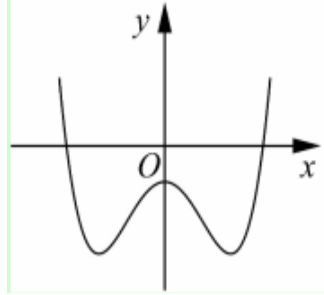
Cách 2. Ta có $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \longrightarrow ab < 0 \longrightarrow$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Vì $a = -1 < 0$ nên đồ thị có dạng chữ M. Từ đó suy ra đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Câu 18. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 - 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực.
- B. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.
- C. Phương trình $y' = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

D. Phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.



Lời giải. Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\longrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt với a, b, c là các số thực. **Chọn D.**

Câu 19. Tính diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

- A. $S = 2$.
- B. $S = 1$.
- C. $S = 4$.
- D. $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \\ x = \pm 1 \rightarrow f(\pm 1) = 2 \end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;3)$, $B(1;2)$, $C(-1;2)$.

Gọi H là trung điểm $BC \longrightarrow \begin{cases} H(0;2) \\ AH \perp BC \end{cases}$. Khi đó $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = 1$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3			1		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

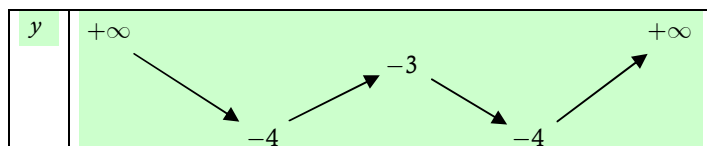
Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 0.

Lời giải. Nhận thấy y' đổi dấu khi qua $x = -3$ và $x = 2$ nên hàm số có 2 điểm cực trị. ($x = 1$ không phải là điểm cực trị vì y' không đổi dấu khi qua $x = 1$). **Chọn A.**

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có ba giá trị cực trị.
- B. Hàm số có ba điểm cực trị.
- C. Hàm số có hai điểm cực trị.
- D. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau:

● Hàm số có ba điểm cực trị, gồm các điểm $x = -1, x = 1, x = 0$ vì đạo hàm y' đổi dấu đi qua các điểm đó.

● Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$.

Chọn B. (đáp án A sai vì hàm số chỉ có hai giá trị cực trị là $y_{CD} = -3$ và $y_{CT} = -4$.

Nói đến đồ thị hàm số thì khi đó mới có ba điểm cực trị là $A(0; -3), B(-1; 4), C(1; -4)$.)

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	x_0	x_1	x_2	$+\infty$
y'	-	$\parallel$	+ 0 -	$\parallel$	+
y	$+\infty$				$+\infty$

The diagram illustrates a function y with values $+\infty$, $-\infty$, and $+\infty$. Arrows indicate a path from $+\infty$ down to $-\infty$, up to $+\infty$, down to $-\infty$, and up to $+\infty$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có hai điểm cực đại, một điểm cực tiểu.
- B. Hàm số có một điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.
- C. Hàm số có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.
- D. Hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Lời giải. ● Tại $x = x_2$ hàm số $y = f(x)$ không xác định nên không đạt cực trị tại điểm này.

● Tại $x = x_1$ thì dễ thấy hàm số đạt cực đại tại điểm này.

● Tại $x = x_0$, hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng liên tục tại x_0 thì hàm số vẫn đạt cực trị tại x_0 và theo như bảng biến thiên thì đó là cực tiểu.

Vậy hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu. **Chọn D.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'	+		-	+
y	$-\infty$		$f(x_2)$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- B. Hàm số đã cho không có cực trị.

C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

● $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua điểm x_1 nhưng tại x_1 hàm số $f(x)$ không xác định nên x_1 không phải là điểm cực đại.

● $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi đi qua điểm x_2 suy ra x_2 là điểm cực tiểu của hàm số. **Chọn A.**

Câu 24*. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất và đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

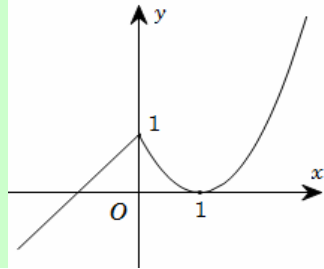
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.



Lời giải. Dễ nhận thấy hàm số có một điểm cực trị là điểm cực tiểu tại $x = 1$.

Xét hàm số $f(x)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, ta có $f(x) < f(0)$ với mọi $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị. **Chọn D.**

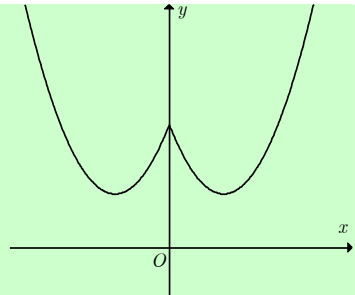
Câu 26. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.



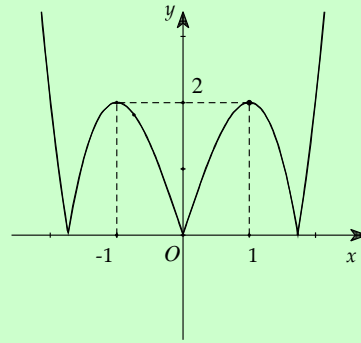
Lời giải. Dễ nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua Oy .

Vấn đề nằm ở chỗ là điểm có đồ thị gấp khúc có phải là điểm cực trị của đồ thị hàm số hay không? Câu trả lời là có (tương tự lời giải thích như câu 25).

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, gồm 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại. **Chọn A.**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

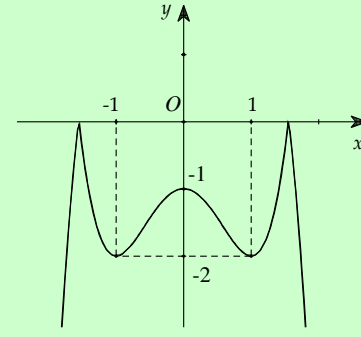
- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.



Lời giải. Chọn D.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

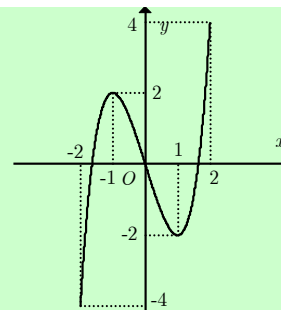
- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.



Lời giải. Chọn D.

Câu 29. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?

- A. $x = -2$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = 2$.



Lời giải. Chọn B.

Câu 30. Hỏi hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. Có hai điểm cực trị.
- B. Có một điểm cực trị.
- C. Không có điểm cực trị.
- D. Có vô số điểm cực trị.

Lời giải. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $\forall x \neq 0$.

Ta có $\begin{cases} y' > 0, & \forall x > 0 \\ y' < 0, & \forall x < 0 \end{cases} \longrightarrow y' \text{ đổi dấu khi qua } x = 0$.

Vậy $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. **Chọn B.**

Câu 31. Hỏi hàm số $y = |x|^3 - 3x + 1$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. Không có điểm cực trị.
- B. Có một điểm cực trị.
- C. Có hai điểm cực trị.
- D. Có ba điểm cực trị.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = \begin{cases} x^3 - 3x + 1, & x \geq 0 \\ -x^3 - 3x + 1, & x < 0 \end{cases} \longrightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - 3, & x > 0 \\ -3x^2 - 3, & x < 0 \end{cases}$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập bảng biến thiên ta thấy y' chỉ đổi dấu khi qua $x = 1$.

Vậy hàm số có một điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$ có hai điểm cực trị.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ D. $m \in (0; 8)$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 6m = 3(x^2 - 2mx + 2m)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + x + 2017$ có cực trị.

- A. $m \in (-\infty; 1]$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.
C. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$. D. $m \in (-\infty; 1)$.

Lời giải. Nếu $m = 0$ thì $y = x^2 + x + 2017$: Hàm bậc hai luôn có cực trị.

Khi $m \neq 0$, ta có $y' = mx^2 + 2x + 1$.

Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $mx^2 + 2x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m < 1.$$

Hợp hai trường hợp ta được $m < 1$. **Chọn D.**

Nhận xét. Sai lầm thường gặp là không xét trường hợp $m = 0$ dẫn đến chọn đáp án B.

Câu 34. Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $ab > 0$. B. $ab < 0$. C. $ab \geq 0$. D. $ab \leq 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 3(x+a)^2 + 3(x+b)^2 - 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Có } y' = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 + (x+b)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(a+b)x + a^2 + b^2 = 0. (*)$$

Để hàm số đã cho đạt cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) > 0 \Leftrightarrow ab > 0. \text{ Chọn A.}$$

Câu 35. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-3)x^3 - 2mx^2 + 3$ không có cực trị.

- A. $m = 3$. B. $m = 0, m = 3$. C. $m = 0$. D. $m \neq 3$.

Lời giải. • Nếu $m = 3$ thì $y = -6x^2 + 3$. Đây là một Parabol nên luôn có một cực trị.

• Nếu $m \neq 3$, ta có $y' = 3(m-3)x^2 - 4mx$.

Để hàm số có không có cực trị khi $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 0. \text{ Chọn C.}$$

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2 + 3m + 1)x - 4$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị là $x = 3$ và $x = 5$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải. Ta có $y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2 + 3m + 1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm $x = 3$ hoặc $x = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3(3m+2) + (2m^2 + 3m + 1) = 0 \\ 25 - 5(3m+2) + (2m^2 + 3m + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 6m + 4 = 0 \\ 2m^2 - 12m + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2. \text{ Chọn C.}$$

Câu 37. Cho hàm số $y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết $M(1; -6)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Tìm tọa độ điểm cực đại N của đồ thị hàm số.

- A. $N(2; 21)$. B. $N(-2; 21)$. C. $N(-2; 11)$. D. $N(2; 6)$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = 6x^2 + 2bx + c$ và $y'' = 12x + 2b$.

$$\text{Điểm } M(1; -6) \text{ là điểm cực tiểu} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = -6 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = -6 \\ b + c = -9 \\ 2b + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -12 \end{cases}.$$

Khi đó $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 6x^2 + 6x - 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f(-2) = 21 \\ f''(-2) < 0 \end{cases}.$$

Suy ra $N(-2; 21)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số. **Chọn B.**

Câu 38. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A. $y(-2) = 2$. B. $y(-2) = 22$. C. $y(-2) = 6$. D. $y(-2) = -18$.

Lời giải. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}; \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases}. \quad (2)$$

$$\text{Giải hệ (1) và (2), ta được } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \longrightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \longrightarrow y(-2) = -18. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 39. Biết rằng hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a \neq 0$) nhận $x = -1$ là một điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a + c = b$. B. $2a - b = 0$. C. $3a + c = 2b$. D. $3a + 2b + c = 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số nhận $x = -1$ là một điểm cực trị nên suy ra $y'(-1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 2b. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2-3)x + 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực trị tại $x = -1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 0, m = -2$. D. $m = 0, m = 2$.

Lời giải. Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 \neq x_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2-3) > 0 \\ y'(-1) = m^2 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 4 > 0 \\ m^2 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 41. Biết rằng hàm số $y = 3x^3 - mx^2 + mx - 3$ có một điểm cực trị $x_1 = -1$. Tìm điểm cực trị còn lại x_2 của hàm số.

- A. $x_2 = \frac{1}{4}$. B. $x_2 = \frac{1}{3}$. C. $x_2 = -\frac{1}{3}$. D. $x_2 = -2m - 6$.

Lời giải. Ta có $y' = 9x^2 - 2mx + m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 9 \end{cases} \quad (*)$$

Theo giả thiết: $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 9 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn $(*)$).

Với $m = -3$ thì $y' = 9x^2 + 6x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 + 5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. $m = 0, m = 2$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Lời giải. Thử từng đáp án.

- Kiểm tra khi $m = 0$ thì hàm số có đạt cực đại tại $x = 1$ không

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 3x + 5) \Big|_{x=1} = 0$$

Và tiếp theo tính tại $x = 1^-$ (cho $x = 0.9$) và $x = 1^+$ (cho $x = 1.1$)

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 3x + 5) \Big|_{x=0.9} = -\frac{57}{100} \quad \frac{d}{dx}(x^3 - 3x + 5) \Big|_{x=1.1} = \frac{63}{100}$$

Vậy y' đổi dấu từ âm sang dương qua giá trị $x = 1 \longrightarrow x = 1$ là điểm cực tiểu.

$\longrightarrow m = 0$ loại $\longrightarrow$ Đáp án A hoặc D sai.

- Tương tự kiểm tra khi $m = 2$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x - 7) \Big|_{x=1} = 0$$

Và tiếp theo tính tại $x = 1^-$ (cho $x = 0.9$) và $x = 1^+$ (cho $x = 1.1$)

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x - 7) \Big|_{x=0.9} = \frac{63}{100} \quad \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x - 7) \Big|_{x=1.1} = -\frac{57}{100}$$

Ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm qua giá trị $x = 1 \longrightarrow x = 1$ là điểm cực đại.

$\longrightarrow m = 2$ thỏa mãn $\longrightarrow$ Đáp án B chính xác. **Chọn B.**

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.

- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $m = 1, m = -3$. D. $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải. Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$.

Vì $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\longrightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $m = -3$ thỏa mãn y' đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua $x = -1$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.

A. $m = -9$. B. $m = 2$. C. $m = 9$. D. Không có m .

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 12x^2 + 2mx - 12$ và $f''(x) = 24x + 2m$.

Riêng hàm bậc ba, yêu cầu bài toán tương đương với
$$\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f''(-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 \cdot 4 - 4m - 12 = 0 \\ -48 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m > 24 \end{cases} : \text{ vô nghiệm. Chọn D.}$$

Cách trắc nghiệm. Thay ngược đáp án nhưng lâu hơn cách tự luận.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số $y = ax^3 - ax^2 + 1$ có điểm cực tiểu $x = \frac{2}{3}$.

A. $a = 0$. B. $a > 0$. C. $a = 2$. D. $a < 0$.

Lời giải. • Nếu $a = 0$ thì $y = 1$: Hàm hằng nên không có cực trị.

• Với $a \neq 0$, ta có $y' = 3ax^2 - 2ax = ax(3x - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$.

▪ $a > 0 \longrightarrow y'$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua $x = \frac{2}{3} \longrightarrow$ hàm số đạt cực tiểu

tại điểm $x = \frac{2}{3}$. Do đó $a > 0$ thỏa mãn.

▪ $a < 0 \longrightarrow y'$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi qua $x = \frac{2}{3} \longrightarrow$ hàm số đạt cực đại

tại điểm $x = \frac{2}{3}$. Do đó $a < 0$ không thỏa mãn.

Chọn B.

Nhận xét. Nếu dùng $\begin{cases} y'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \\ y''\left(\frac{2}{3}\right) > 0 \end{cases}$ mà bỏ sung thêm điều kiện $a \neq 0$ nữa thì được, tức là

giải hệ $\begin{cases} a \neq 0 \\ y'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \\ y''\left(\frac{2}{3}\right) > 0 \end{cases}$. Như vậy, khi gặp hàm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mà chưa chắc chắn

hệ số $a \neq 0$ thì cần xét hai trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$ (giải hệ tương tự như trên).

Câu 46. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$.

Tìm các giá trị của tham số m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

A. $m = 0$. B. $m = \pm \frac{9}{2}$. C. $m = \pm \frac{1}{2}$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3[x^2 - 2mx + (m^2 - 1)]$.

Do $\Delta' = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 .

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow 4m^2 - 3(m^2 - 1) = 7 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Chọn D.

Câu 47. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để $x_1 + 4x_2 = 0$.

- A. $m = \pm \frac{9}{2}$. B. $m = \pm \frac{3}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = \pm \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = 12x^2 + 2mx - 3$.

Do $\Delta' = m^2 + 36 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 .

Theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m}{6} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Mà $x_1 + 4x_2 = 0$.

Suy ra $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{9}m, x_2 = \frac{m}{18} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{9}m\right) \cdot \frac{m}{18} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{9}{2}$. **Chọn A.**

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

- A. $y = -8x + m$. B. $y = -8x + m - 3$. C. $y = -8x + m + 3$. D. $y = -8x - m + 3$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 5 + m \\ x = 3 \Rightarrow y = -27 + m \end{cases}$.

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị là $A(-1; 5 + m)$ và $B(3; -27 + m)$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm A, B có phương trình $y = -8x + m - 3$. **Chọn B.**

Câu 49. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (2m+3)x + 2017$ với m là tham số thực.

Tìm tất cả các giá trị của m để $x = 1$ là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số.

- A. $m = -1$. B. $m \neq -1$.
C. $m = -\frac{3}{2}$. D. Không tồn tại giá trị m .

Lời giải. Đạo hàm $y' = x^2 - 2(m+2)x + (2m+3)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m+3 \end{cases}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi $2m+3 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -1$. (*)

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2m + 4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{2m+4}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -1$: không thỏa mãn (*). **Chọn D.**

Nhận xét. Qua khảo sát 99% học sinh chọn đáp án A, lý do là quên điều kiện để có hai cực trị. Tôi cố tình ra giá trị m đúng ngay giá trị loại đi.

Nếu gặp bài toán không ra nghiệm đẹp như trên thì ta giải như sau: " x_0 là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$) và $y''(x_0) = 0$ ".

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để khoảng cách từ điểm $M(0; 3)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

- A. $m = 1, m = -1$. B. $m = -1$. C. $m = 3, m = -1$. D. Không tồn tại m .

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + 3m$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = -m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$. (*)

Thực hiện phép chia y cho y' ta được phần dư $2mx + 1$, nên đường thẳng $\Delta: y = 2mx + 1$ chính là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow d[M, \Delta] = \frac{2}{\sqrt{4m^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Đối chiếu điều kiện (*), ta chọn $m = -1$. **Chọn B.**

Câu 51. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

A. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$.

B. $m \in (1; 3)$.

C. $m \in (3; 4)$.

D. $m \in (-1; 4)$.

Lời giải. Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - m \end{cases}$.

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 3$.

• Nếu $-1 < 2 - m \Leftrightarrow m < 3$, ycbt $\Leftrightarrow -2 < -1 < 2 - m < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

• Nếu $2 - m < -1 \Leftrightarrow m > 3$, ycbt $\Leftrightarrow -2 < 2 - m < -1 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 4$.

Vậy $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$. **Chọn A.**

Câu 52. Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

A. $m > 1$.

B. $m < 1$.

C. $m > -1$.

D. $m < -1$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + 12x + 3(m+2) = 3[x^2 + 4x + (m+2)]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$

$\Leftrightarrow y'(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 1$. **Chọn B.**

Nhận xét. Nhắc lại kiến thức lớp dưới "phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1 < x_0 < x_2 \Leftrightarrow af(x_0) < 0$ ".

Câu 53. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2018]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(0; +\infty)$.

A. 2015.

B. 2016.

C. 2018.

D. 4035.

Lời giải. Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m-2) > 0 \\ 2m > 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \Leftrightarrow m > 2 \\ m > 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z} \text{ \& } m \in [-2017; 2018]} m = \{3; 4; 5; \dots 2018\} \longrightarrow$ có 2016 giá trị. **Chọn B.**

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ có các điểm cực trị nhỏ hơn 2.

A. $m \in (0; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 1)$.

C. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 9m > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ x_1 + x_2 < 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2 < 4 \\ m - 2 \cdot 2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 55. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2a + 1)x^2 + 6a(a + 1)x + 2$ với a là tham số thực. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Tính $P = |x_2 - x_1|$.

- A. $P = a + 1$. B. $P = a$. C. $P = a - 1$. D. $P = 1$.

Lời giải. Ta có $y' = 6x^2 - 6(2a + 1)x + 6a(a + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a = x_1 \\ x = a + 1 = x_2 \end{cases}$.

Vậy $P = |x_2 - x_1| = |(a + 1) - a| = 1$. **Chọn D.**

Nhận xét. Nếu phương trình $y' = 0$ không ra nghiệm đẹp như trên thì ta dùng công thức tổng quát $P = |x_2 - x_1| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$.

Câu 56. Cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị cách đều trục tung.

- A. $m = 2$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 6x^2 + 2mx - 12$.

Do $\Delta' = m^2 + 72 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{m}{3}$.

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = -x_2$ (do $x_1 \neq x_2$)

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0. \text{ Chọn D.}$$

Câu 57. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

- A. $m = 1$. B. $m = -2$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

Lời giải. Ta có $y' = -3x^2 + 6mx = -3x(x - 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó gọi $A(0; -3m - 1)$ và $B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Suy ra trung điểm của AB là điểm $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3) = 2m(1; 2m^2)$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (8; -1)$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ 8 - 2m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2. \text{ Chọn D.}$$

Câu 58. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 1)x^2 + (2m + 1)x - \frac{4}{3}$ với $m > 0$ là tham số thực.

Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại thuộc trục hoành.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = 1$.

C. $m = \frac{3}{4}$.

D. $m = \frac{4}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = x^2 - 2(m+1)x + (2m+1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m+1 \end{cases}$.

Do $m > 0 \longrightarrow 2m+1 \neq 1$ nên đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Do $m > 0 \longrightarrow 2m+1 > 1 \longrightarrow$ hoành độ điểm cực đại là $x = 1$ nên $y_{\text{CD}} = y(1) = m - 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_{\text{CD}} = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - m$ có các giá trị cực trị trái dấu.

A. $m = -1, m = 0$.

B. $m < 0, m > -1$.

C. $-1 < m < 0$.

D. $0 \leq m \leq 1$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = -m \\ x = 1 \rightarrow f(1) = -m - 1 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m(m+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$. **Chọn C.**

Câu 60. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ với m là tham số thực, có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

A. $m < 2$.

B. $m \leq 3$.

C. $m < 3$.

D. $m \leq 2$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m$. Ta có $\Delta_{y'} = 9 - 3m$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Ta có } y = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) \cdot y' + \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \left(\frac{2m}{3} - 2\right).$$

$$\text{Gọi } x_1, x_2 \text{ là hoành độ của hai điểm cực trị khi đó } \begin{cases} y_1 = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x_1 + \left(\frac{2m}{3} - 2\right) \\ y_2 = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x_2 + \left(\frac{2m}{3} - 2\right) \end{cases}$$

$$\text{Theo định lí Viet, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}.$$

Hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi $y_1 \cdot y_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} - 2\right)^2 (x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} - 2\right)^2 (x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} - 2\right)^2 \left(\frac{m}{3} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3: \text{thỏa mãn. Chọn C.}$$

Câu 61. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khi đó, điều kiện nào sau đây cho biết đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ O ?

A. $c = 0$.

B. $9 + 2b = 3a$.

C. $ab = 9c$.

D. $a = 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

$$\text{Thực hiện phép chia } y \text{ cho } y', \text{ ta được } y = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) \cdot y' + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)x + c - \frac{1}{9}ab.$$

$$\text{Suy ra phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)x + c - \frac{1}{9}ab.$$

Do AB đi qua gốc tọa độ $O \longrightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$. **Chọn C.**

Câu 62. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo với đường thẳng $d: x + 4y - 5 = 0$ một góc $\alpha = 45^\circ$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Ta có $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + 2 - \frac{m}{3}$.

$\longrightarrow$ đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A và B là $\Delta: y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + 2 - \frac{m}{3}$.

Đường thẳng $d: x + 4y - 5 = 0$ có một VTPT là $\vec{n}_d = (1; 4)$.

Đường thẳng $\Delta: y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + 2 - \frac{m}{3}$ có một VTPT là $\vec{n}_\Delta = \left(\frac{2m}{3} + 2; 1\right)$.

$$\text{Ycbt} \longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \cos(d, \Delta) = |\cos(\vec{n}_d, \vec{n}_\Delta)| = \frac{\left|1 \cdot \left(\frac{2m}{3} + 2\right) + 4 \cdot 1\right|}{\sqrt{1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2m}{3} + 2\right)^2 + 1^2}}$$

$$\longleftrightarrow 60m^2 + 264m + 117 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = -\frac{39}{10} \end{cases} \xrightarrow{m > -3} m = -\frac{1}{2}: \text{thỏa mãn. Chọn A.}$$

Câu 63. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - 3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung.

- A. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$. B. $m \in (0; 2)$.
C. $m \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt và cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m - 1) > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 64. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx + m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{2}$.

- A. $m = 0$. B. $m = 0, m = 2$.
C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải. Ta có $y' = 6x^2 - 6(m + 1)x + 6m$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m + 1)x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m \end{cases}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A(1; m^3 + 3m - 1)$ và $B(m; 3m^2)$.

Suy ra $AB^2 = (m - 1)^2 + (m^3 - 3m^2 + 3m - 1)^2 = (m - 1)^2 + (m - 1)^6$.

$$\begin{aligned} \text{Ycbt} &\Leftrightarrow AB^2 = 2 \Leftrightarrow (m-1)^6 + (m-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow [(m-1)^2]^3 - 1 + [(m-1)^2 - 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow [(m-1)^2 - 1] \cdot [(m-1)^4 + (m-1)^2 + 2] = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=0 \end{cases} : \text{thỏa. Chọn B.} \end{aligned}$$

Câu 65. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $I(1;0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Đề đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(0; 4m^2 - 2)$ và $B(2m; 4m^2 - 4m^3 - 2)$.

Do $I(1;0)$ là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 2m = 2 \\ (4m^2 - 2) + (4m^2 - 4m^3 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 : \text{thỏa mãn. Chọn C.}$$

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

- A. $m = 0$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = -\sqrt{2}$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 2)$ và $B(2m; 2 - 4m^3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-1; 4)$, $\overrightarrow{MB} = (2m - 1; 4 - 4m^3)$.

$$\text{Theo giả thiết } A, B \text{ và } M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = \pm\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Chọn D.

Câu 67. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 0$.

Lời giải. Ta có $y' = -3x^2 + 3m = -3(x^2 - m)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(-\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m})$ và $B(\sqrt{m}; 1 + 2m\sqrt{m})$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn). **Chọn C.**

Câu 68. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$). Với điều kiện nào của các tham số a, b, c thì hàm số có ba điểm cực trị?

- A. a, b cùng dấu và c bất kì. B. a, b trái dấu và c bất kì.
C. $b = 0$ và a, c bất kì. D. $c = 0$ và a, b bất kì.

Lời giải. Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a}$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$. Khi đó a, b trái dấu và c bất kì. **Chọn B.**

Câu 69. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 1$ ($a \neq 0$). Với điều kiện nào của các tham số a, b thì hàm số có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại?

- A. $a < 0, b < 0$. B. $a < 0, b > 0$. C. $a > 0, b < 0$. D. $a > 0, b > 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Để hàm số có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 70. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 1$ ($a \neq 0$). Với điều kiện nào của các tham số a, b thì hàm số có một điểm cực trị và là điểm cực tiểu.

- A. $a < 0, b \leq 0$. B. $a < 0, b > 0$. C. $a > 0, b < 0$. D. $a > 0, b \geq 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases} (*)$.

Để hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ ab > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó, để điểm cực trị này là điểm cực tiểu thì $a > 0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $a > 0, b \geq 0$. **Chọn D.**

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị.

- A. $m = 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $m \neq 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn C.

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m+1)x^2 + 1$ có một điểm cực tiểu.

- A. $m > 0$. B. $m \geq 0$. C. $-1 < m < 0$. D. $m > -1$.

Lời giải. TH1. Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$, khi đó $y = x^2 + 1$ có đồ thị là một parabol có bề lõm quay lên nên hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu.

$\longrightarrow m = 0$ thỏa mãn.

TH2. Với $a > 0 \Leftrightarrow m > 0$, ycbt $\Leftrightarrow ab \geq 0 \Leftrightarrow m(m+1) \geq 0$: đúng với $m > 0$.

$\longrightarrow m > 0$ thỏa mãn.

TH3. Với $a < 0 \Leftrightarrow m < 0$, ycbt $\Leftrightarrow ab < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

$\longrightarrow -1 < m < 0$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m > -1$. **Chọn D.**

Nhận xét. Bài toán hỏi hàm số có một điểm cực tiểu nên hàm số có thể có điểm cực đại hoặc không có điểm cực đại. Khi nào bài toán hỏi hàm số có đúng một cực tiểu và không có cực đại thì lúc đó ta chọn đáp án B.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có đúng một điểm cực trị.

A. $m \in [1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 0]$.

C. $m \in [0; 1]$.

D. $m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải. • Nếu $m = 0$ thì $y = -x^2 + 1$ là hàm bậc hai nên chỉ có duy nhất một cực trị.

• Khi $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + 2(m-1)x = 2x[2mx^2 + (m-1)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1-m}{2m} \end{cases}$.

Để hàm số có đúng một điểm cực trị khi $\frac{1-m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 74. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = -14$.

B. $S = 14$.

C. $S = -20$.

D. $S = 34$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 6x + a$ và $y'' = 12x^2 - 6$.

Do $A(2; -2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nên $\longrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y(2) = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 12 + a = 0 \\ 16 - 12 + 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases}$.

Thử lại với $\begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases} \longrightarrow y = x^4 - 3x^2 - 20x + 34$.

Tính đạo hàm và lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ (thỏa).

Vậy $\begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases} \longrightarrow S = a + b = 14$. **Chọn B.**

Câu 75. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có điểm đại $A(0; -3)$ và có điểm cực tiểu $B(-1; -5)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = -5 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Đồ thị có điểm cực đại $A(0; -3) \longrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases} \rightarrow c = -3. \quad (1)$

Đồ thị có điểm cực tiểu $B(-1; -5) \longrightarrow \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b = 0 \\ a + b + c = -5 \end{cases}. \quad (2)$

Giải hệ gồm (1) và (2), ta được $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}$.

Thử lại với $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \longrightarrow y = 2x^4 - 4x^2 - 3$. Tính đạo hàm và lập bảng biến thiên ta

thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = -1$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 76. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = \frac{3}{2}$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x[x^2 - (m^2 - m + 1)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2 - m + 1} \end{cases}.$$

Suy ra đồ thị có hai điểm cực tiểu là $A(-\sqrt{m^2 - m + 1}; y_{CT})$ và $B(\sqrt{m^2 - m + 1}; y_{CT})$.

Khi đó $AB^2 = 4(m^2 - m + 1) = 4\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 77. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $OA \cdot OB \cdot OC = 12$ với O là gốc tọa độ?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Lời giải. Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-2m) < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Khi đó } y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; 2), B(\sqrt{m}; -m^2 + 2), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 2).$$

$$\text{Ycbt } OA \cdot OB \cdot OC = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot \left[m + (-m^2 + 2)^2\right] = 12 \longrightarrow m = 2 \longrightarrow \text{có một giá trị nguyên.}$$

Chọn B.

Câu 78. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tất cả các điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên trục tọa độ.

- A. $m = \pm 2$. B. $m = 2$.
C. $m > 0$. D. $m = -2, m > 0$.

$$\text{Lời giải. Ta có } y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; -4) \in Oy, B(-\sqrt{m}; m^2 - 4) \text{ và } C(\sqrt{m}; m^2 - 4).$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow B, C \in Ox \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 (\text{loại}) \\ m = 2 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}. \quad \text{Chọn B.}$$

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Ycbt } \longrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 (\text{loại}) \\ m = 2 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}.$$

Cho hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$. Khi đó:

y có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$		y có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$	
$a > 0$: 1 cực tiểu	$a < 0$: 1 cực đại	$a > 0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

Xét trường hợp có ba cực trị $\longrightarrow$ tọa độ các điểm cực trị

$$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

$$\bullet BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}, AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\bullet \text{ Phương trình qua điểm cực trị: } BC: y = -\frac{\Delta}{4a} \text{ và } \begin{cases} AB: y = \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c \\ AC: y = -\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Gọi } \widehat{BAC} = \alpha, \text{ luôn có } \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}.$$

$$\bullet \text{ Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}.$$

$$\bullet \text{ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ là } R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}.$$

$$\bullet \text{ Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác } ABC \text{ là } r = \frac{b^2}{4|a|\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}.$$

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1) $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
2) $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
3) $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
4) $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
5) $ABOC$ nội tiếp	$c.\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$
6) $ABOC$ là hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
-----	-----
7) Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
8) Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
9) Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3.\tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
10) Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11) Tam giác ABC có diện tích S_0	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
12) Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
14) Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
16) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
17) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
18) Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm lập thành một cấp số cộng

$$\text{thì điều kiện là } \begin{cases} ac > 0 \\ ab < 0 \\ b^2 = \frac{100}{9}ac \end{cases}.$$

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$.

- A. $m = \pm 4$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = 4$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Suy ra tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;1), B(\sqrt{m}; 1-m^2) \text{ và } C(-\sqrt{m}; 1-m^2).$$

Ycbt: $BC = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn). **Chọn C.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Ycbt: $BC = m_0 \rightarrow am_0^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow 1.4^2 + 2.(-2m) = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 80. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m > -1$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Suy ra tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; m^2), B(\sqrt{m+1}; -2m-1) \text{ và } C(-\sqrt{m+1}; -2m-1).$$

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; -2m-1-m^2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m+1}; -2m-1-m^2)$.

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 0 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$. **Chọn B.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Ycbt $\rightarrow 8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8.1 + [-2(m+1)]^3 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 81. (ĐỀ MINH HỌA 2016 - 2017) Tìm giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = 1$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;1), B(\sqrt{-m}; -m^2+1), C(-\sqrt{-m}; -m^2+1).$$

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -1 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 82. Cho hàm số $y = 3x^4 + 2(m-2018)x^2 + 2017$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có một góc bằng 120° .

- A. $m = -2018$. B. $m = -2017$. C. $m = 2017$. D. $m = 2018$.

Lời giải. Ta có $y' = 12x^3 + 4(m-2018)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 = 2018 - m \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 2018 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2018$.

Khi đó, tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;2017), B\left(\sqrt{\frac{2018-m}{3}}; -\frac{(m-2018)^2}{3} + 2017\right), C\left(-\sqrt{\frac{2018-m}{3}}; -\frac{(m-2018)^2}{3} + 2017\right)$$

Do tam giác ABC cân tại A nên ycbt $\Leftrightarrow 3AB^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow 3\left[\frac{2018-m}{3} + \frac{(m-2018)^4}{9}\right] = 4\frac{2018-m}{3} \Leftrightarrow (m-2018)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 2017 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Chọn C.

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m < 2018$.

Áp dụng công thức giải nhanh $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ (với $\alpha = \widehat{BAC}$, A là điểm cực trị thuộc

$$Oy), \text{ ta được } -\frac{1}{2} = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \longleftrightarrow -(b^3 - 8a) = 2(b^3 + 8a) \longleftrightarrow 3b^3 = -8a$$

$$\longleftrightarrow 3[2(m-2018)]^3 = -8.3 \longleftrightarrow m = 2017 : \text{thỏa mãn}.$$

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{2}{3}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{1}{3}$. D. $m = \frac{1}{3}$.

Lời giải. Ta có $y' = x^3 - 2(3m+1)x = x[x^2 - 2(3m+1)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{cases}$

$$\text{Để hàm số có ba điểm cực trị} \Leftrightarrow 2(3m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}.$$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là:

$$A(0; 2(m+1)), B(-\sqrt{2(3m+1)}; -9m^2 - 4m + 1) \text{ và } C(\sqrt{2(3m+1)}; -9m^2 - 4m + 1).$$

$$\text{Suy ra tọa độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là } G = \left(0; \frac{2(m+1) + 2(-9m^2 - 4m + 1)}{3}\right).$$

$$\text{Ycbt: } G \equiv O \Leftrightarrow 2(m+1) + 2(-9m^2 - 4m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} (\text{thỏa mãn}) \\ m = -\frac{2}{3} (\text{loại}) \end{cases} \text{ . Chọn D.}$$

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

$$\text{Ycbt: } G \equiv O \longrightarrow b^2 - 6ac = 0 \Leftrightarrow (3m+1)^2 - 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} (\text{thỏa mãn}) \\ m = -\frac{2}{3} (\text{loại}) \end{cases}.$$

Câu 84. Cho hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-3)x^2 + 4m + 2017$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 2017$.

Lời giải. Ta có $y' = \frac{9}{2}x^3 + 6(m-3)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 = 4(3-m) \end{cases} (*)$

$$\text{Để hàm số có ba điểm cực trị} \Leftrightarrow 4(3-m) > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; 4m + 2017), B\left(2\sqrt{\frac{3-m}{3}}; 4m + 2017 - 2(3-m)^2\right), C\left(-2\sqrt{\frac{3-m}{3}}; 4m + 2017 - 2(3-m)^2\right).$$

Do tam giác ABC cân tại A nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow AB^2 = BC^2$

$$\frac{4(3-m)}{3} + 4(3-m)^4 = \frac{16(3-m)}{3} \Leftrightarrow (3-m)^4 = 3-m \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m=0 \\ 3-m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3(\text{loại}) \\ m=2(\text{thỏa mãn}) \end{cases}.$$

Chọn B.

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Ycbt} \longrightarrow b^3 = -24a \Leftrightarrow 27(m-3)^3 = -27 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 85. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$. D. $0 < m < 1$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} (*)$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;0)$, $B(\sqrt{m}; -m^2)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2)$.

Tam giác ABC cân tại A , suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}d[A, BC].BC = \frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m} = m^2\sqrt{m}$.

Theo bài ra, ta có $S_{\triangle ABC} < 1 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$ (thỏa mãn). **Chọn D.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Ycbt} \longrightarrow \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^5} < 1 \longrightarrow 0 < m < 1.$$

Câu 86. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

- A. $m = -2$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 2mx = 2x(2x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 = m \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; m-2), B\left(\sqrt{\frac{m}{2}}, -\frac{m^2}{4} + m - 2\right), C\left(-\sqrt{\frac{m}{2}}, -\frac{m^2}{4} + m - 2\right).$$

Suy ra $AB = AC = \sqrt{\frac{m}{2} + \frac{m^4}{16}}$, $BC = 2\sqrt{\frac{m}{2}}$.

Ta có $S = pr = \frac{1}{2}BC.d[A, BC] \longrightarrow \frac{AB+BC+AC}{2}.r = \frac{1}{2}BC.d[A, BC]$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{2} + \frac{m^4}{16}} + \sqrt{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{4} \cdot 2\sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{m}{2}} > 0$ ta được phương trình $\sqrt{t^2 + t^8} + t = t^5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = \sqrt{2} \longrightarrow m = 4 \end{cases}$. **Chọn D.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Ycbt} \longrightarrow \frac{b^2}{4|a|\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{(-m)^2}{4\left(1 + \sqrt{1 + \frac{m^3}{8}}\right)} = 1 \longrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ (loại)} \\ m = 4 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m > 0$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 2x - m + 1}{(x - 1)^2}$.

Đặt $g(x) = x^2 - 2x - m + 1$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0. \text{ Chọn D.}$$

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

- A. $m = -1$. B. $m = -3$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Đạo hàm $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \longrightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Thử lại với $m = -1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$: không thỏa mãn.

Thử lại với $m = -3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 89. Gọi $x_{\text{CD}}, x_{\text{CT}}$ lần lượt là điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $[0; \pi]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_{\text{CD}} = \frac{\pi}{6}; x_{\text{CT}} = \frac{5\pi}{6}$. B. $x_{\text{CD}} = \frac{5\pi}{6}; x_{\text{CT}} = \frac{\pi}{6}$.
C. $x_{\text{CD}} = \frac{\pi}{6}; x_{\text{CT}} = \frac{\pi}{3}$. D. $x_{\text{CD}} = \frac{\pi}{3}; x_{\text{CT}} = \frac{2\pi}{3}$.

Lời giải. Ta có $y' = 2 \cos 2x - 1$ và $y'' = -4 \sin 2x$.

Xét trên đoạn $[0; \pi]$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$.

Do $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4 \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ và $y''\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$.

Vậy $x_{\text{CD}} = \frac{\pi}{6}; x_{\text{CT}} = \frac{5\pi}{6}$. **Chọn C.**

Câu 90. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x + 2 \cos x$ trên khoảng $(0; \pi)$.

- A. $y_{\text{CD}} = \frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}$. B. $y_{\text{CD}} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$. C. $y_{\text{CD}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. D. $y_{\text{CD}} = \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = 1 - 2 \sin x$ và $y'' = -2 \cos x$.

Xét trên khoảng $(0; \pi)$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$.

Do đó $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ và $y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$.

Vậy giá trị cực đại của hàm số là $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 91. Biết rằng trên khoảng $(0; 2\pi)$ hàm số $y = a \sin x + b \cos x + x$ đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \pi$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$. C. $S = \sqrt{3} + 1$. D. $S = \sqrt{3} - 1$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = a \cos x - b \sin x + 1$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \pi$ nên $\begin{cases} y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + 1 = 0 \\ -a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow S = a + b = \sqrt{3} + 1. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 92. Hàm số $y = (x^2 - 4)^2 (1 - 2x)^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải. Đạo hàm $y' = 2.2x(x^2 - 4)(1 - 2x)^3 + (x^2 - 4)^2.3.(-2)(1 - 2x)^2$
 $= (1 - 2x)^2 (x^2 - 4) \cdot [4x(1 - 2x) - 6(x^2 - 4)] = -2(1 - 2x)^2 (x^2 - 4)(7x^2 - 2x - 12)$.

Phương trình $y' = 0$ có 4 nghiệm đơn nên hàm số có 4 điểm cực trị. **Chọn B.**

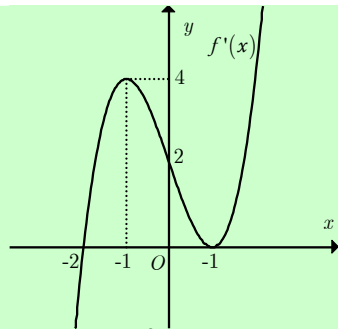
Câu 93. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x - 1)^2(x - 2)^3(x - 3)^5$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = 1 \\ x = 2, x = 3 \end{cases}$. Tuy nhiên lại xuất hiện nghiệm kép tại $x = 1$ (nghiệm kép thì y' qua nghiệm không đổi dấu) nên hàm số đã cho có ba điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
 D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.



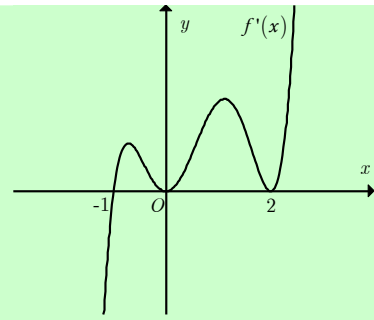
Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có các nhận xét sau:

- $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi đi qua điểm $x = -2$ suy ra $x = -2$ là điểm cực trị và là **điểm cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$.
- $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x = -1, x = 1$ suy ra $x = -1, x = 1$ không là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$. **Chọn C.**

Câu 95. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K . Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K . Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 4.



Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm đơn (cắt trục hoành tại một điểm) và hai nghiệm kép (tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua nghiệm đơn. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị. **Chọn B.**

Nhận xét. Đây là một dạng toán suy ngược đồ thị.

○ Bài 03

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D , nếu $f(x) \leq M$ với $\forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.
- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D , nếu $f(x) \geq m$ với $\forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

2. Định lý

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b] \longrightarrow$ tồn tại $\max_{[a; b]} f(x)$, $\min_{[a; b]} f(x)$.

3. Cách tìm GTLN – GTNN trên một đoạn

Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên $[a; b]$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên thì

$$\begin{cases} M = \max_{[a; b]} f(x) \\ m = \min_{[a; b]} f(x) \end{cases}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$.

A. $\max_{[1; 3]} f(x) = \frac{67}{27}$.

B. $\max_{[1; 3]} f(x) = -2$.

C. $\max_{[1; 3]} f(x) = -7$.

D. $\max_{[1; 3]} f(x) = -4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -\frac{2}{3} \notin [1; 3] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = -7 \\ f(3) = -2 \end{cases} \longrightarrow \max_{[1; 3]} f(x) = -2$. **Chọn B.**

Cách 2. Sử dụng chức năng MODE 7 và nhập hàm $f(X) = X^3 - 2X^2 - 4X + 1$ với thiết lập Start 1, End 3, Step 0,2.

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ bằng -2 khi $X = 3$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

A. $\max_{[-1; 2]} f(x) = 6$.

B. $\max_{[-1; 2]} f(x) = 10$.

C. $\max_{[-1; 2]} f(x) = 15$.

D. $\max_{[-1; 2]} f(x) = 11$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = 15 \\ f(1) = -5 \\ f(2) = 6 \end{cases} \longrightarrow \max_{[-1; 2]} f(x) = 15$. **Chọn C.**

Câu 3. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$. Tính $P = M - m$.

- A. $P = -5$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 5$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 6x^2 + 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \\ x = -1 \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(-2) = -5 \\ f(-1) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m = \min_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = -5 \\ M = \max_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 0 \end{cases} \longrightarrow P = M - m = 5$. **Chọn D.**

Câu 4. Biết rằng hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại x_0 . Tính $P = x_0 + 2018$.

- A. $P = 3$. B. $P = 2019$. C. $P = 2021$. D. $P = 2018$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 4] \\ x = 3 \in [0; 4] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 28 \\ f(3) = 1 \\ f(4) = 8 \end{cases} \longrightarrow \min_{[0; 4]} f(x) = 1 \text{ khi } x = 3 = x_0 \longrightarrow P = 2021$. **Chọn C.**

Câu 5. Xét hàm số $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 3$ trên $[-1; 1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và giá trị lớn nhất tại $x = 1$.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và giá trị lớn nhất tại $x = -1$.
C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ nhưng không có giá trị lớn nhất.
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -4x^2 - 4x - 1 = -(2x + 1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$ nên có giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và giá trị lớn nhất tại $x = -1$. **Chọn B.**

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 2]$.

- A. $\max_{[-2; 2]} f(x) = -4$. B. $\max_{[-2; 2]} f(x) = 13$.
C. $\max_{[-2; 2]} f(x) = 14$. D. $\max_{[-2; 2]} f(x) = 23$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 4x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 2] \\ x = 1 \in [-2; 2] \\ x = -1 \in [-2; 2] \end{cases}$.

Ta có
$$\begin{cases} f(-2) = f(2) = 13 \\ f(-1) = f(1) = 4 \\ f(0) = 5 \end{cases} \longrightarrow \max_{[-2;2]} f(x) = 13. \text{ Chọn B.}$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 10$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M = 10; m = -6$.

B. $M = 12; m = -6$.

C. $M = 10; m = -8$.

D. $M = 12; m = -8$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -8x^3 + 8x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{cases}$.

Ta có
$$\begin{cases} f(0) = 10 \\ f(1) = 12 \\ f(2) = -6 \end{cases} \longrightarrow M = \max_{[0;2]} f(x) = 12; m = \min_{[0;2]} f(x) = -6. \text{ Chọn B.}$$

Câu 8. (ĐỀ MINH HỌA 2016 - 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min_{[2;4]} f(x) = 6$. B. $\min_{[2;4]} f(x) = -2$. C. $\min_{[2;4]} f(x) = -3$. D. $\min_{[2;4]} f(x) = \frac{19}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2;4] \\ x = 3 \in [2;4] \end{cases}$.

Ta có
$$\begin{cases} f(2) = 7 \\ f(3) = 6 \\ f(4) = \frac{19}{3} \end{cases} \longrightarrow \min_{[2;4]} f(x) = 6. \text{ Chọn A.}$$

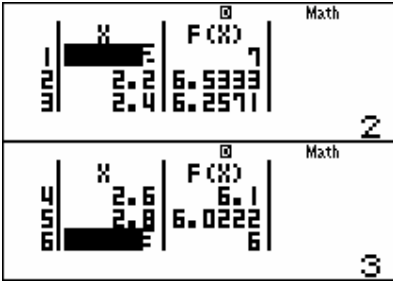
Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE (MODE 7)**.

Bước 1: Bấm tổ hợp phím **MODE 7**.

Bước 2: Nhập $f(X) = \frac{X^2 + 3}{X - 1}$.

Sau đó ấn phím $=$ (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím $=$) sau đó nhập
$$\begin{cases} \text{Start} = 2 \\ \text{End} = 4 \\ \text{Step} = 0.2 \end{cases}$$
.

(**Chú ý:** Thường ta chọn $\text{Step} = \frac{\text{End} - \text{Start}}{10}$)

Bước 3: Tra bảng nhận được và tìm GTNN:		X	$f(X)$
		2	7
		2.2	6.5333
		2.4	6.2571
		2.6	6.1
		2.8	6.0222
		3	6
		3.2	6.0181
		3.4	6.0666
		3.6	6.1384
		3.8	6.2285

Math 7 8 9 % 3.2 F(X) 6.0181 6.0666 6.1384		4	6.3333
Math 10 11 12 % 3.8 F(X) 6.2285 6.3333			

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\min_{[2;4]} f(x) = f(3) = 6$.

Câu 9. Tập giá trị của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ với $x \in [2;4]$ là đoạn $[a;b]$. Tính $P = b - a$.

- A. $P = 6$. B. $P = \frac{13}{2}$. C. $P = \frac{25}{4}$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in [2;4] \\ x = -3 \notin [2;4] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(2) = \frac{13}{2} \\ f(3) = 6 \\ f(4) = \frac{25}{4} \end{cases} \rightarrow \min_{[2;4]} f(x) = 6; \max_{[2;4]} f(x) = \frac{13}{2}$
 $\rightarrow [a;b] = \left[6; \frac{13}{2}\right] \rightarrow P = b - a = \frac{13}{2} - 6 = \frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;1]$.

- A. $M = \sqrt{2}; m = 1$. B. $M = 2; m = 1$.
C. $M = 1; m = -2$. D. $M = 2; m = \sqrt{2}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$. Ta có $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [0;1] \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Vậy $\begin{cases} M = \max_{[0;1]} f(x) = f(1) = 2 \\ m = \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = 1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

- A. $M = 5; m = \frac{1}{3}$. B. $M = -\frac{1}{3}; m = -5$.
C. $M = \frac{1}{3}; m = -5$. D. $M = 5; m = -\frac{1}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \frac{-8}{(x-3)^2}$. Ta có $f'(x) < 0, \forall x \in (0;2)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$.

Vậy $\begin{cases} M = \max_{[0;2]} f(x) = f(0) = \frac{1}{3} \\ m = \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = -5 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 12. Tìm tập giá trị T của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x \in [3; 5]$.

A. $T = \left[\frac{38}{3}; \frac{526}{15} \right]$. B. $T = \left[\frac{38}{3}; \frac{142}{5} \right]$. C. $T = \left[\frac{29}{3}; \frac{127}{5} \right]$. D. $T = \left[\frac{29}{3}; \frac{526}{15} \right]$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} > 0, \forall x \in (3; 5)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[3; 5]$ nên $\min_{[3; 5]} f(x) = f(3) = \frac{29}{3}; \max_{[3; 5]} f(x) = f(5) = \frac{127}{5}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\frac{29}{3}; \frac{127}{5} \right]$. **Chọn C.**

Câu 13. Xét hàm số $y = -x - \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-1; 2]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và giá trị lớn nhất là 2 .
- B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và không có giá trị lớn nhất.
- C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất là 2 .
- D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Lời giải. Vì $0 \in [-1; 2]$ và $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty \end{cases}$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất và

không có giá trị nhỏ nhất. **Chọn D.**

Câu 14. Hàm số nào sau đây không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 2]$?

A. $y = x^3 + 2$. B. $y = x^4 + x^2$. C. $y = \frac{x-1}{x+1}$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải. Nhận thấy hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2; 2]$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$.

Do đó hàm số này không có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[-2; 2]$. **Chọn C.**

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = 3$. D. $M = 4$.

Lời giải. TXĐ: $D = [2; 4]$.

Đạo hàm $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [2; 4]$.

Ta có $\begin{cases} f(2) = \sqrt{2} \\ f(3) = 2 \\ f(4) = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow M = 2$. **Chọn B.**

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x+14} + \sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -7$.
- B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.
- C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.
- D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải. TXĐ: $D = [-7; 5]$.

Đạo hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+14}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-7; 5]$.

Ta có
$$\begin{cases} f(-7) = 2\sqrt{3} \\ f(5) = 2\sqrt{6} \\ f(1) = 6 \end{cases} \longrightarrow \min_{[-7;5]} f(x) = f(-7) = 2\sqrt{3}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

- A. $M = 2; m = 0$. B. $M = \sqrt{2}; m = -\sqrt{2}$.
C. $M = 2; m = -2$. D. $M = \sqrt{2}; m = 0$.

Lời giải. TXĐ: $D = [-2; 2]$. Đạo hàm $f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \in [-2; 2] \\ x = -\sqrt{2} \in [-2; 2] \end{cases}.$$

Ta có
$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(-\sqrt{2}) = -2 \\ f(\sqrt{2}) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \longrightarrow M = 2; m = -2. \text{ Chọn C.}$$

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x + \sqrt{2-x^2}$.

- A. $m = -\sqrt{2}$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt{2}$.

Lời giải. TXĐ: $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Đạo hàm $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

Ta có
$$\begin{cases} f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \\ f(1) = 2 \\ f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow m = -\sqrt{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - 2\sqrt{-x^2+4x-3}$.

- A. $M = 0$. B. $M = -\sqrt{2}$. C. $M = \sqrt{2}$. D. $M = \frac{9}{4}$.

Lời giải. TXĐ: $D = [1; 3]$. Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$)

$$\longrightarrow t^2 = x-1+3-x+2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x} \longrightarrow -2\sqrt{-x^2+4x-3} = 2-t^2.$$

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = -t^2 + t + 2$ trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$ ".

Xét hàm số $g(t) = -t^2 + t + 2$ xác định và liên tục trên $[\sqrt{2}; 2]$.

Đạo hàm $g'(t) = -2t + 1 < 0, \forall t \in (\sqrt{2}; 2)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$.

Do đó $\max_{[\sqrt{2}; 2]} g(t) = g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \longrightarrow \max_{[1; 3]} f(x) = \sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$

Bình luận: Sau khi đọc xong lời giải trên sẽ có nhiều bạn đọc thắc mắc là tại sao biết được $t \in [\sqrt{2}; 2]$.

Từ phép đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = h(x)$.

Đạo hàm $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \longrightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [1;3]$.

Ta có $\begin{cases} h(1) = \sqrt{2} \\ h(2) = 2 \\ h(3) = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} h(x) = \sqrt{2} \\ \max_{[1;3]} h(x) = 2 \end{cases} \longrightarrow \sqrt{2} \leq h(x) \leq 2 \longrightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2.$

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2x-x^2}$.

A. $M = \sqrt{2}$. B. $M = 4$. C. $M = \sqrt{2}$. D. $M = 8$.

Lời giải. TXĐ: $D = [0;2]$. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$).

$\longrightarrow t^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{2-x} + 2 - x \longrightarrow 2\sqrt{2x-x^2} = t^2 - 2.$

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = t^2 + t - 2$ trên đoạn $[\sqrt{2};2]$ ".

Xét hàm số $g(t) = t^2 + t - 2$ xác định và liên tục trên $[\sqrt{2};2]$.

Đạo hàm $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in (\sqrt{2};2)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên đoạn $[\sqrt{2};2]$.

Do đó $\max_{[\sqrt{2};2]} g(t) = g(2) = 4 \longrightarrow \max_{[0;2]} f(x) = 4$. **Chọn B.**

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \frac{9}{2}\cos^2 x + 3\cos x + \frac{1}{2}$.

A. $m = -24$. B. $m = -12$. C. $m = -9$. D. $m = 1$.

Lời giải. Đặt $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$).

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t) = 2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t + \frac{1}{2}$ trên đoạn $[-1;1]$ ".

Đạo hàm $g'(t) = 6t^2 - 9t + 3 \longrightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1;1] \\ t = \frac{1}{2} \in [-1;1] \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g(-1) = -9 \\ g(\frac{1}{2}) = \frac{9}{8} \\ g(1) = 1 \end{cases} \longrightarrow \min_{[-1;1]} g(t) = g(-1) = -9 \longrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -9$. **Chọn C.**

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$.

A. $M = 1$. B. $M = \frac{90}{91}$. C. $M = \frac{110}{111}$. D. $M = \frac{70}{79}$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$).

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ".

Đạo hàm $g'(t) = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2} \longrightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1;1] \\ t = -2 \notin [-1;1] \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(0) = 1 \\ g(1) = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \max_{[-1;1]} g(t) = g(0) = 1 \longrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1. \text{ Chọn A.}$$

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sin^3 x + \cos 2x + \sin x + 3$.

- A. $M = 0$. B. $M = 5$. C. $M = 4$. D. $M = \frac{112}{27}$.

Lời giải. Ta có $f(x) = \sin^3 x + \cos 2x + \sin x + 3 = \sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x + 4$.

Đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$).

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = t^3 - 2t^2 + t + 4$ trên đoạn $[-1;1]$ ".

$$\text{Đạo hàm } g'(t) = 3t^2 - 4t + 1 \longrightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1;1] \\ t = \frac{1}{3} \in [-1;1] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(-1) = 0 \\ g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{112}{27} \\ g(1) = 4 \end{cases} \longrightarrow \max_{[-1;1]} g(t) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{112}{27} \longrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{112}{27}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 24. Xét hàm số $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có giá trị lớn nhất là -5 nhưng không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất nhưng có giá trị nhỏ nhất là -5 .
C. Hàm số có giá trị lớn nhất là 5 và có giá trị nhỏ nhất là -5 .
D. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Khi đó hàm số không có giá trị lớn nhất nhưng có giá trị nhỏ nhất là $\min_{[0; +\infty)} f(x) = f(0) = -5$. **Chọn B.**

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = |-x^2 - 4x + 5|$ trên đoạn $[-6; 6]$.

- A. $M = 0$. B. $M = 9$. C. $M = 55$. D. $M = 110$.

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = -x^2 - 4x + 5$ liên tục trên đoạn $[-6; 6]$.

Đạo hàm $g'(x) = -2x - 4 \longrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in [-6; 6]$.

$$\text{Lại có } g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-6; 6] \\ x = -5 \in [-6; 6] \end{cases}.$$

Ta có

$$\begin{cases} g(-6) = -7 \\ g(-2) = 9 \\ g(6) = -55 \\ g(1) = g(-5) = 0 \end{cases} \longrightarrow \max_{[-6; 6]} f(x) = \max_{[-6; 6]} \{|g(-6)|; |g(-2)|; |g(6)|; |g(1)|; |g(-5)|\} = 55.$$

Chọn C.

Nhận xét. Bài này rất dễ sai lầm vì không để ý hàm trị tuyệt đối không âm.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - x$ trên đoạn $[-4; 4]$.

A. $M = 2$.

B. $M = 17$.

C. $M = 34$.

D. $M = 68$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4; 4]$.

• Nếu $x \in [1; 2]$ thì $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ nên suy ra $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

Đạo hàm $f'(x) = -2x + 2 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [1; 2]$. Ta có $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = -2 \end{cases}$.

• Nếu $x \in [-4; 1] \cup [2; 4]$ thì $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ nên suy ra $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Đạo hàm $f'(x) = 2x - 4 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-4; 1] \cup [2; 4]$. Ta có $\begin{cases} f(-4) = 34 \\ f(1) = -1 \\ f(2) = -2 \\ f(4) = 2 \end{cases}$.

So sánh hai trường hợp, ta được $\max_{[-4; 4]} f(x) = f(-4) = 34$. **Chọn C.**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		-	
y			2		1
			-1		

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 và 1.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy:

• $f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$ nên GTLN của hàm số bằng 2.

• $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ và vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên không tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = 1$,

do đó hàm số không có GTNN.

Chọn A.

Có thể giải thích cách khác: y' đổi dấu qua $x = 0$ và tồn tại $y(0) = 2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 28. (ĐỀ MINH HỌA 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+		-	0	+	
y			0		-1		$+\infty$
			$-\infty$				

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải. Chọn D.

A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

D Đúng.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$				$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
 B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 .
 C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -3 .
 D. Hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải. Chọn B.

A sai vì hàm số có ba điểm cực trị là $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

D sai vì hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = -1$ và $x = 1$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5	1	7	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y					

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.
 B. $\max_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$.
 C. $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$.
 D. $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x = 1 \in [-5; 7)$.

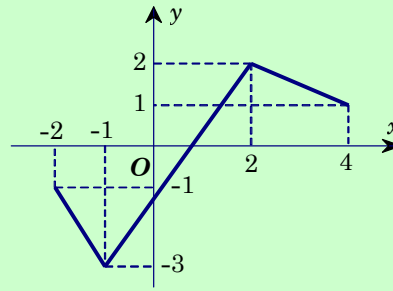
- Ta có $\begin{cases} f(x) \leq 9, \forall x \in [-5; 7) \\ \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 9 \end{cases}$. Mà $7 \notin [-5; 7)$ nên không tồn tại $x_0 \in [-5; 7)$ sao cho

$f(x_0) = 9$. Do đó hàm số không đạt GTLN trên $[-5; 7)$.

Vậy $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$. **Chọn A.**

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2;4]$.

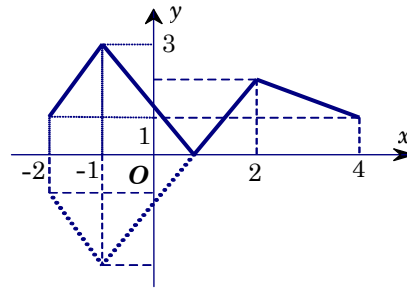
- A. $M = 2$.
- B. $M = |f(0)|$.
- C. $M = 3$.
- D. $M = 1$.



Lời giải. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ trên $[-2;4]$ như hình vẽ.

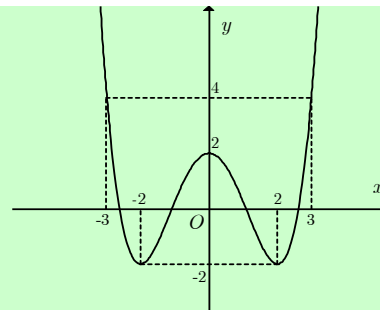
Do đó $\max_{[-2;4]} |f(x)| = 3$ tại $x = -1$.

Chọn C.



Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng:

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.

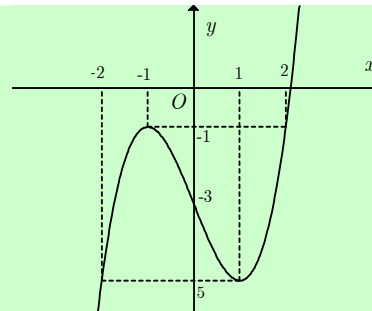


Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2;3]$ đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(3;4)$.

—→ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng 4. **Chọn C.**

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.

- A. $m = -5$, $M = 0$.
- B. $m = -5$, $M = -1$.
- C. $m = -1$, $M = 0$.
- D. $m = -2$, $M = 2$.



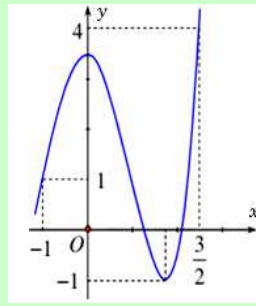
Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2;2]$

- Đồ thị hàm số có điểm thấp nhất có tọa độ $(-2;-5)$ và $(1;-5)$
—→ giá trị nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -5 .
- Đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(-1;-1)$ và $(2;-1)$
—→ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -1 .

Chọn B.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ là:

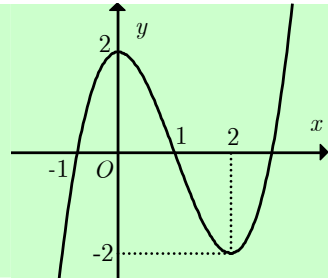
- A. $M = 4, m = 1$. B. $M = \frac{7}{2}, m = -1$.
C. $M = 4, m = -1$. D. $M = \frac{7}{2}, m = -1$.



Lời giải. Chọn C.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là sai?

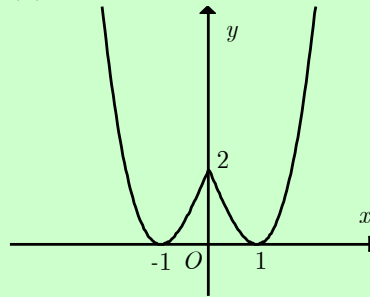
- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
B. Hàm số có GTLN là 2 và GTNN là -2.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.
D. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(0; 2)$ & $(2; -2)$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
Chọn B.

Chú ý. Học sinh thường nhầm tưởng giá trị cực đại là giá trị lớn nhất, giá trị cực tiểu là giá trị nhỏ nhất nên chọn B.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau:



- (I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.
(III). Hàm số có ba điểm cực trị.
(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Trong các mệnh đề đã cho có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Xét trên $(0; 1)$ ta thấy đồ thị đi xuống (từ trái sang phải) nên hàm số nghịch biến. Do đó (I) đúng

Xét trên $(-1; 2)$ ta thấy đồ thị đi lên, rồi đi xuống, rồi đi lên. Do đó (II) sai.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy có ba điểm cực trị. Do đó (III) đúng.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Do đó (IV) sai.

Vậy có 2 mệnh đề đúng. **Chọn B.**

Câu 37. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 0$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x + \frac{1}{x}}} = \frac{x^2 - 1}{2x^2\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; +\infty) \\ x = 1 \in (0; +\infty) \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(1) = \sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 38. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(1) = 3$. **Chọn C.**

Câu 39. Gọi y_{CT} là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ trên $(0; +\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT} > \min_{(0; +\infty)} y$.

B. $y_{CT} = 1 + \min_{(0; +\infty)} y$.

C. $y_{CT} = \min_{(0; +\infty)} y$.

D. $y_{CT} < \min_{(0; +\infty)} y$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; +\infty)$.

Qua điểm $x = 1$ thì hàm số đổi dấu từ "-" sang "+" trong khoảng $(0; +\infty)$.

Suy ra trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số chỉ có một cực trị và là giá trị cực tiểu nên đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vậy $y_{CT} = \min_{(0; +\infty)} y$. **Chọn C.**

Câu 40. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 3]$.

A. $M = 3$.

B. $M = \frac{8}{3}$.

C. $M = \frac{3}{8}$.

D. $m = 0$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0; 3)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 3]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x = 3$ và

$\max_{(0; 3]} f(x) = f(3) = \frac{8}{3}$. **Chọn B.**

Câu 41. Biết rằng hàm số $f(x) = -x + 2018 - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $(0; 4)$ tại x_0 . Tính $P = x_0 + 2018$.

A. $P = 4032$.

B. $P = 2019$.

C. $P = 2020$.

D. $P = 2018$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -1 \notin (0; 4) \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 4)$ tại $x = x_0 = 1 \longrightarrow P = 2019$. **Chọn B.**

Câu 42. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 10.

- A. $m = 3$. B. $m = -6$. C. $m = -7$. D. $m = -8$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -2x + 4 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1; 3]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = -5 - m \\ f(2) = 4 - m \\ f(3) = 3 - m \end{cases} \longrightarrow \max_{[-1; 3]} f(x) = f(2) = 4 - m.$$

Theo bài ra: $\max_{[-1; 3]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 4 - m = 10 \Leftrightarrow m = -6$. **Chọn B.**

Câu 43. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng:

- A. $\frac{1 + m^2}{2}$. B. $-m^2$. C. $\frac{1 - m^2}{2}$. D. m^2 .

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \frac{1 + m^2}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0; 1] \longrightarrow \max_{[0; 1]} f(x) = f(1) = \frac{1 - m^2}{2}$. **Chọn C.**

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2}{x - 1}$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng:

- A. $\frac{m^2 - 1}{2}$. B. $-m^2$. C. $\frac{1 - m^2}{2}$. D. m^2 .

Lời giải. Đạo hàm $y' = \frac{-1 - m^2}{(x - 1)^2} < 0, \forall x \in [-1; 0]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 0] \longrightarrow \min_{[-1; 0]} f(x) = f(0) = -m^2$. **Chọn B.**

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

- A. $a = 2$. B. $a = 6$. C. $a = 0$. D. $a = 4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -3x^2 - 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = a - 2 \\ f(0) = a \\ f(1) = a - 4 \end{cases} \longrightarrow \min_{[-1; 1]} f(x) = f(1) = a - 4.$$

Theo bài ra: $\min_{[-1; 1]} f(x) = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. **Chọn D.**

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ bằng 7.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm \sqrt{7}$. C. $m = \pm \sqrt{2}$. D. $m = \pm 3$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0; 2] \longrightarrow \min_{[0; 2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2$.

Theo bài ra: $\min_{[0; 2]} f(x) = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 3$. **Chọn D.**

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -2 .

- A. $m = 4$. B. $m = 5$. C. $m = -4$. D. $m = 1$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3] \longrightarrow \min_{[0;3]} f(x) = f(0) = -\frac{m^2}{8}$.

Thao bài ra: $\min_{[0;3]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{8} = -2 \Leftrightarrow m = \pm 4 \longrightarrow$ giá trị m lớn nhất là $m = 4$.

Chọn A.

Câu 48. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 - 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $3 < m \leq 4$. B. $1 \leq m < 3$. C. $m > 4$. D. $m < -1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m > -1$ suy ra $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2} < 0; \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến

trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min_{[2;4]} y = f(4) = \frac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (chọn).

TH2. Với $m < -1$ suy ra $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2} > 0; \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến

trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min_{[2;4]} y = f(2) = m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

- A. $m = 1, m = 2$. B. $m = 1, m = -2$. C. $m = -1, m = -2$. D. $m = -1, m = 2$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \frac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1] \longrightarrow \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = -m^2 + m$.

Theo bài ra: $\min_{[0;1]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 50. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 - 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $0 < m \leq 2$. B. $2 < m \leq 4$. C. $m \leq 0$. D. $m > 4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m \neq 1$.

Khi đó $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = f(1) + f(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{5m}{6} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$. **Chọn D.**

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x+1}}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m > 1$ để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3.

- A. $m \in (1;3)$. B. $m \in (1;3\sqrt{5}-4)$. C. $m \in (1;\sqrt{5})$. D. $m \in (1;3]$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x) = \frac{2-m\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}} \longrightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{m} \Leftrightarrow x = \frac{4}{m^2} \in [0;4], \forall m > 1.$

Lập bảng biến thiên, ta kết luận được $\max_{x \in [0;4]} f(x) = f\left(\frac{4}{m^2}\right) = \sqrt{m^2 + 4}.$

Vậy ta cần có $\sqrt{m^2 + 4} < 3 \Leftrightarrow m < \sqrt{5} \xrightarrow{m > 1} m \in (1;\sqrt{5})$. **Chọn C.**

Câu 52. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích S thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $2\sqrt{S}$. B. $4\sqrt{S}$. C. $2S$. D. $4S$.

Lời giải. Gọi $a, b > 0$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Diện tích của hình chữ nhật: $S = ab$.

Chu vi hình chữ nhật: $P = 2(a+b) = 2a + \frac{2S}{a}.$

Khảo sát hàm $f(a) = 2a + \frac{2S}{a}$ trên $(0; +\infty)$, ta được $\min f(a) = 4\sqrt{S}$ khi $a = \sqrt{S}$.

Chọn B.

Cách 2. Ta có $P = 2(a+b) \geq 2.2\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{S}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Câu 53. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16 cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

- A. 36cm^2 . B. 20cm^2 . C. 16cm^2 . D. 30cm^2 .

Lời giải. Gọi $a, b > 0$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật.

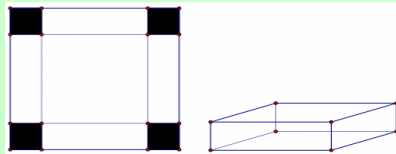
Theo giả thiết, ta có $2(a+b) = 16 \Leftrightarrow a+b = 8$.

Diện tích hình chữ nhật: $S = ab = a(8-a) = -a^2 + 8a.$

Khảo sát hàm $f(a)$ trên khoảng $(0;8)$, ta được $\max f(a) = 16$ khi $a = 4$. **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $S = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{8^2}{4} = 16\text{cm}^2$.

Câu 54. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 6$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Lời giải. Hộp có đáy là hình vuông cạnh bằng $12 - 2x(\text{cm})$ và chiều cao $x(\text{cm})$ với $0 < x < 6$.

Do đó thể tích khối hộp $V = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ trên $(0;6)$, ta được $\max_{(0;6)} f(x) = f(2) = 128$.

Vậy với $x = 2(\text{cm})$ thể tích khối hộp lớn nhất. **Chọn C.**

Cách 2. Ta có

$$V = x(12 - 2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x \cdot (12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x + 12 - 2x + 12 - 2x}{3} \right)^3 = 128.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 12 - 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 55. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn.

A. $S_{\max} = 80\text{cm}^2$. B. $S_{\max} = 100\text{cm}^2$. C. $S_{\max} = 160\text{cm}^2$. D. $S_{\max} = 200\text{cm}^2$.

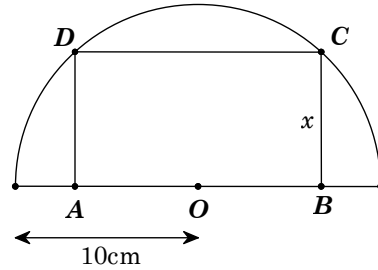
Lời giải. Đặt $BC = x$ cm là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của đường tròn ($0 < x < 10$). Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là

$$AB = 2OB = 2\sqrt{10^2 - x^2} \text{ cm.}$$

—→ Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2} \text{ cm}^2$.

Khảo sát $f(x) = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$ trên $(0; 10)$, ta được

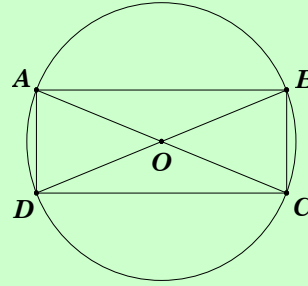
$$\max_{(0; 10)} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right) = 100. \text{ Chọn B.}$$



Cách 2. Ta có $2x\sqrt{10^2 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + (10^2 - x^2)}{2} = 100$.

Câu 56. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961m^2 , người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn. Biết tâm hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất được mở rộng.

A. $S_{\min} = 961\pi - 961(\text{m}^2)$.
 B. $S_{\min} = 1922\pi - 961(\text{m}^2)$.
 C. $S_{\min} = 1892\pi - 946(\text{m}^2)$.
 D. $S_{\min} = 480,5\pi - 961(\text{m}^2)$.



Lời giải. Gọi $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ ($x > 0$, $y > 0$) lần lượt là hai kích thước mảnh vườn hình chữ nhật; $R(\text{m})$ là bán kính hình tròn ngoại tiếp mảnh

$$\text{vườn} \longrightarrow R^2 = OB^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Theo đề bài, ta có $xy = 961\text{m}^2$.

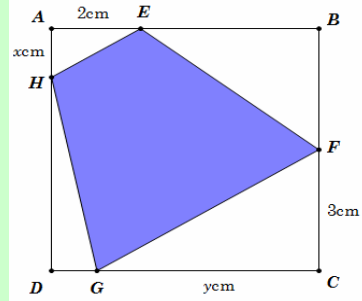
Diện tích 4 phần đất mở rộng: $S = S_{\text{tròn}} - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy$

$$= \pi \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{4} - xy \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} \pi \cdot \frac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961. \text{ Chọn D.}$$

Nhận xét. Dấu "=" xảy ra khi $ABCD$ là hình vuông. Nếu phát hiện điều này thì làm trắc nghiệm rất nhanh.

Câu 57. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $x + y = 7$. B. $x + y = 5$.
C. $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$. D. $x + y = 4\sqrt{2}$.



Lời giải. Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CGF} + S_{\triangle DGH}$ lớn nhất (do $S_{\triangle BEF}$ không đổi).

$$\text{Tính được } 2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36. \quad (1)$$

Ta có $EFGH$ là hình thang $\rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{CGF}$
 $\rightarrow \triangle AEH \sim \triangle CGF \rightarrow \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{3} \rightarrow xy = 6. \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$.

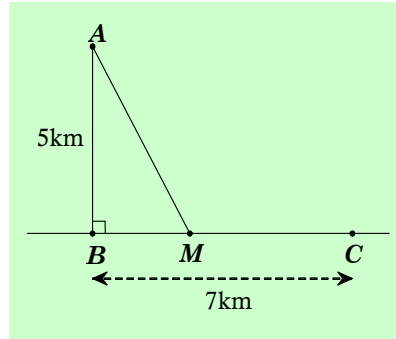
Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Mà $4x + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{18}{x}} = 12\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Chọn C.

Câu 58. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất?

- A. 3,0km. B. 7,0km.
C. 4,5km. D. 2,1km.



Lời giải. Đặt $BM = x\text{km}$ ($0 \leq x \leq 7$) $\rightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{x^2 + 25}\text{km} \\ MC = (7-x)\text{km} \end{cases}$.

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4}\text{h}$.

Thời gian đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \frac{7-x}{6}\text{h}$.

$\rightarrow$ Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là

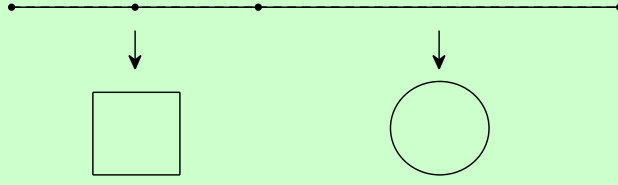
$$t = t_{AM} + t_{MC} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}\text{h}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$ trên $[0;7]$, ta được $\min_{[0;7]} f(x) = f(2\sqrt{5}) = \frac{14+5\sqrt{5}}{12}$.

Vậy người đó đến kho nhanh nhất khi vị trí của điểm M cách B một khoảng $x = 2\sqrt{5} \approx 4,5\text{km}$. **Chọn C.**

Câu 59. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r .

Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng:



A. $\frac{a}{r} = 1$.

B. $\frac{a}{r} = 2$.

C. $\frac{a}{r} = 3$.

D. $\frac{a}{r} = 4$.

Lời giải. Gọi x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn ($0 < x < 60$).

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} \rightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi \cdot r^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\frac{60-x}{4}\right)^2$.

Tổng diện tích hai hình: $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{60-x}{4}\right)^2 = \frac{(4+\pi) \cdot x^2 - 120\pi x + 3600\pi}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S' = \frac{(4+\pi) \cdot x - 60\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60\pi}{4+\pi}$; $S'' = \frac{4+\pi}{8\pi} > 0$.

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \frac{60\pi}{4+\pi}$.

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{60\pi}{4+\pi}$.

Với $x = \frac{60\pi}{4+\pi} \rightarrow r = \frac{30}{(4+\pi)}$ & $a = \frac{240}{(4+\pi) \cdot 4} \rightarrow \frac{a}{r} = \frac{240}{120} = 2$. **Chọn B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{60-x}{4}\right)^2 \geq \frac{60^2}{4\pi+16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{4\pi} = \frac{60-x}{16} \rightarrow x = \frac{60\pi}{4+\pi}$.

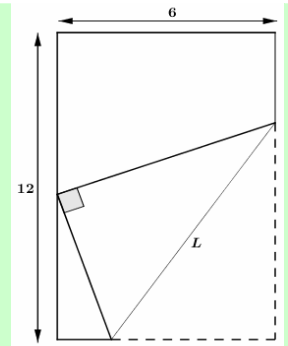
Câu 60. Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12cm và chiều rộng 6cm. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại. Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?

A. $\min L = 6\sqrt{2}$ cm.

B. $\min L = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm.

C. $\min L = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm.

D. $\min L = 9\sqrt{2}$ cm.

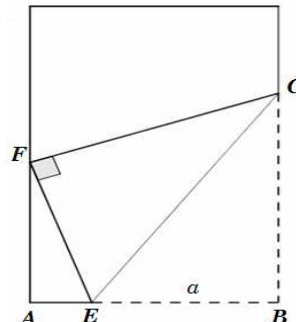


Lời giải. Đặt $EB = a > 0$ như hình vẽ $\rightarrow \begin{cases} EF = a \\ AE = 6 - a \end{cases}$.

Trong tam giác vuông AEF có

$$\cos \widehat{AEF} = \frac{6-a}{a} \rightarrow \cos \widehat{FEB} = \frac{a-6}{a} \quad (\text{hai góc bù nhau}).$$

Ta có $\triangle BEG = \triangle FEG$



$$\longrightarrow \widehat{FEG} = \widehat{BEG} = \frac{1}{2} \widehat{FEB} \xrightarrow{\cos \widehat{FEB} = \frac{a-6}{a}} \cos \widehat{FEG} = \sqrt{\frac{a-3}{a}}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } EFG \text{ có } EG = \frac{EF}{\cos \widehat{FEG}} = \sqrt{\frac{a^3}{a-3}}.$$

$$\text{Xét hàm } f(a) = \frac{a^3}{a-3} \text{ với } a > 3, \text{ ta được min } f(a) \text{ đạt tại } a = \frac{9}{2} \longrightarrow EG = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn B.

O Bài 04

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP SUY ĐỒ THỊ

1. Tịnh tiến đồ thị song song với các trục tọa độ

Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $p > 0$, ta có

- + Tịnh tiến (C) lên trên p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x) + p$.
- + Tịnh tiến (C) xuống dưới p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x) - p$.
- + Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x + p)$.
- + Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x - p)$.

2. Phép suy đồ thị

Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$ và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy

làm trục đối xứng.

Cách vẽ (C') từ (C) :

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy .

Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \end{cases}$

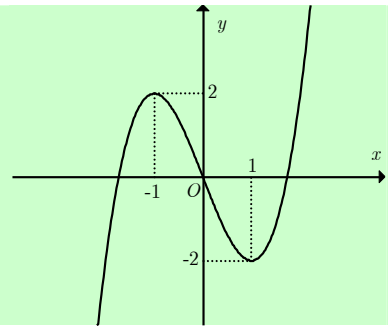
Cách vẽ (C') từ (C) :

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x$.
- B. $y = -x^3 + 3x$.
- C. $y = -x^4 + 2x^2$.
- D. $y = x^4 - 2x^2$.

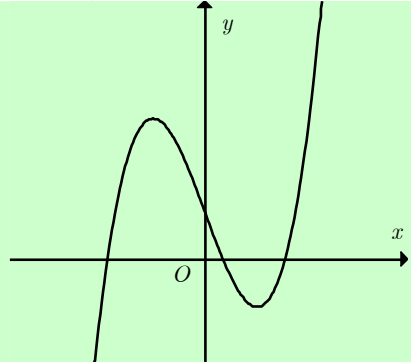


Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba nên loại C, D.

Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$ nên chỉ có A phù hợp. **Chọn A.**

Câu 2. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^2 + x - 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- C. $y = x^4 - x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 - 3x + 1$.

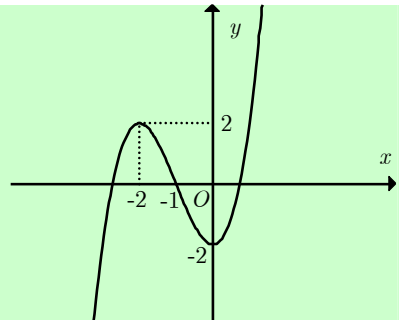


Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba. Loại đáp án A và C.

Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. **Chọn D.**

Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$.
- B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



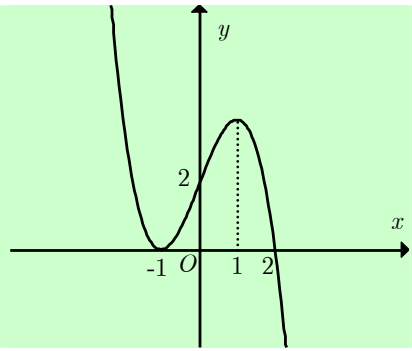
Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. Loại đáp án A, D.

Thấy đồ thị cắt trục hoành tại điểm $x = -1$ nên thay $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ vào hai đáp án B và C,

chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = (x+1)^2(1-x)$.
- B. $y = (x+1)^2(1+x)$.
- C. $y = (x+1)^2(2-x)$.
- D. $y = (x+1)^2(2+x)$.

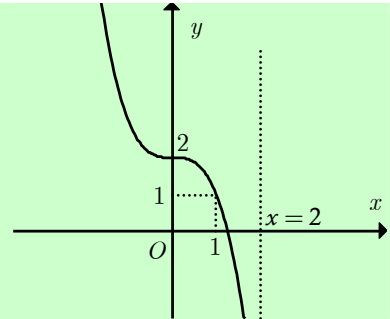


Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$. Loại đáp án B, D.

Để ý thấy khi $x = 0$ thì $y = 2$. Do đó chỉ có đáp án C phù hợp. **Chọn C.**

Câu 5*. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = -x^3 + 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x + 2$.
- C. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.
- D. $y = -x^3 + 2$.



Lời giải. Để ý thấy khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên ta loại đáp án A.

Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số không có cực trị nên ta loại đáp án B vì $y' = -3x^2 + 3$ có hai nghiệm.

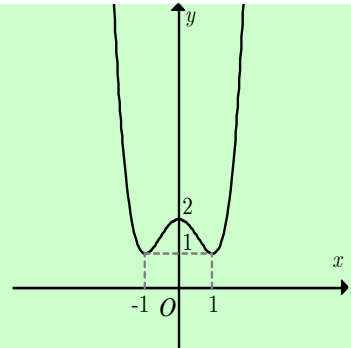
Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$, kiểm tra thấy C & D đều thỏa mãn.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{CASIO}} x = 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + 2 = 0 \longrightarrow x = \sqrt[3]{2} \in (1;2)$. Do đó chỉ có D thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 6. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
- C. $y = x^4 - 4x^2 + 2$.
- D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.



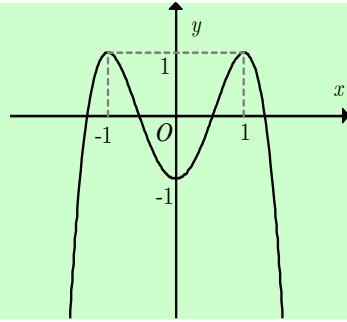
Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. Loại đáp án A.

Để ý thấy khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên ta loại đáp án D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 7. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
 B. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
 D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



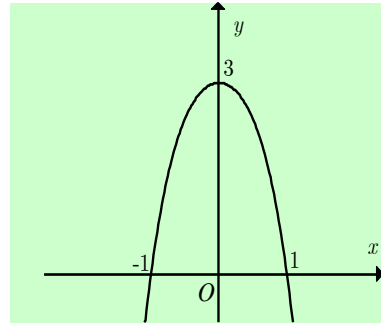
Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$. Loại A.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên thể hiện $c = -1$. Loại D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1; 1)$ nên chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 8. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.
 B. $y = -x^4 - 2x^2 - 3$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
 D. $y = x^4 + 2x^2 + 3$.



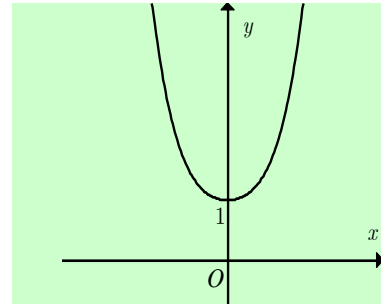
Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$. Loại D.

Dựa vào đồ thị thấy khi $x = 0$ thì $y = 3$. Loại B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu. **Chọn A.**

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = x^4 + x^2 + 2$.
 B. $y = x^4 - x^2 + 2$.
 C. $y = x^4 - x^2 + 1$.
 D. $y = x^4 + x^2 + 1$.

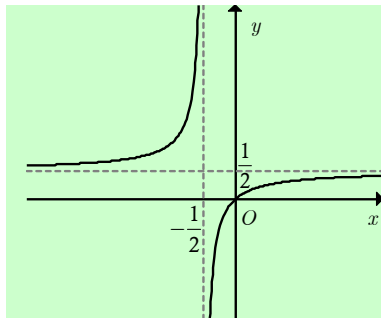


Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x = 0$ thì $y = 1$. Loại A, B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu. **Chọn D.**

Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = \frac{x+1}{2x+1}$. B. $y = \frac{x+3}{2x+1}$.
 C. $y = \frac{x}{2x+1}$. D. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.



Lời giải. Các chi tiết đồ thị hàm số có TCD: $x = -\frac{1}{2}$ và TCN: $y = \frac{1}{2}$ đều giống nhau.

Chỉ có chi tiết đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ là phù hợp cho đáp án C. **Chọn C.**

Cách 2. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định tức $y' > 0$. Kiểm tra ta thấy chỉ có C & D thỏa mãn.

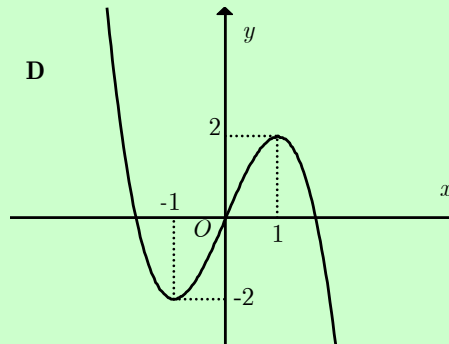
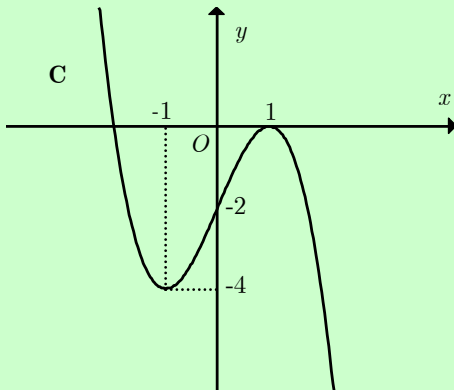
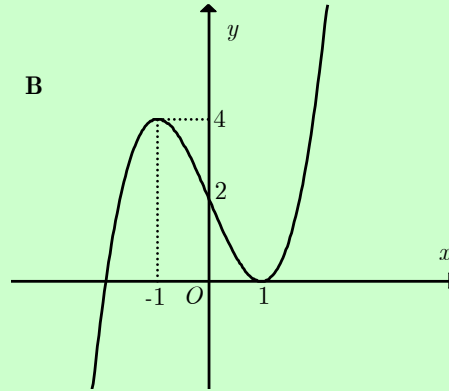
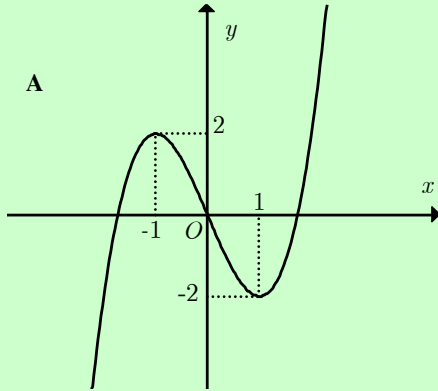
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên đáp án C thỏa mãn.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2		-2		$+\infty$

$-\infty \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow +\infty$

Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y = f(x)$?

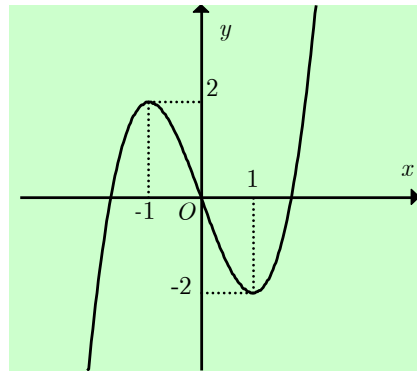


Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$. Loại C và D.
- Tọa độ các điểm cực trị là $(-1; 2)$ và $(1; -2)$ nên đáp án A là phù hợp. **Chọn A.**

Câu 12. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có hệ số $a < 0$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(1; 2)$.
- C. Hàm số không có cực trị.
- D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.



Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. Do đó A sai.

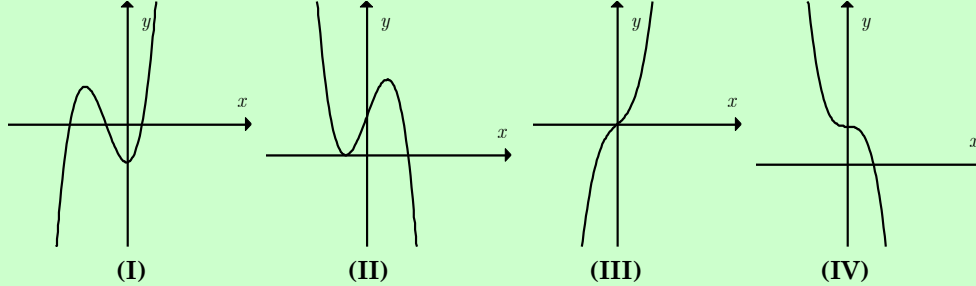
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. Do đó B đúng.

Hàm số có hai cực trị. Do đó C sai.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do của hàm số phải bằng 0. Do đó D sai.

Chọn B.

Câu 13. Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III), (IV) như hình dưới đây:



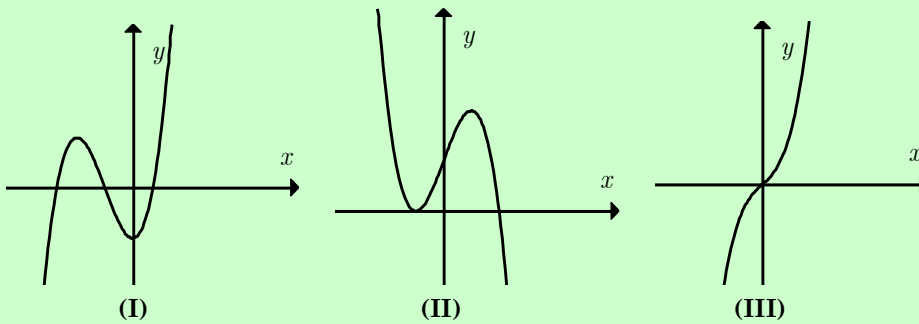
Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y = x^2 + bx^2 + cx + d$.

- A. (I).
- B. (I) và (III).
- C. (II) và (IV).
- D. (III) và (IV).

Lời giải. Hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).

Xét $y' = 3x^2 + 2bx + c$ có $\Delta'_{y'} = b^2 - 3c$. Ta chưa xác định được $\Delta'_{y'}$ mang dấu gì nên có thể xảy ra trường hợp (I) và cũng có thể xảy ra trường hợp (III). **Chọn B.**

Câu 14. Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III) như hình dưới đây:



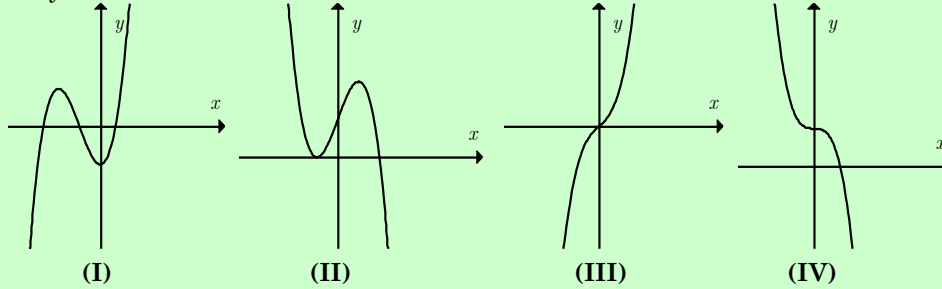
Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$.

- A. (I).
- B. (I) và (II).
- C. (III).
- D. (I) và (III).

Lời giải. Hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II).

Xét $y' = 3x^2 + 2bx - 1$ có $\Delta'_{y'} = b^2 + 3 > 0, \forall b \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số có hai cực trị. **Chọn A.**

Câu 15. Biết rằng hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị (I) xảy ra khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- C. Đồ thị (III) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.
- D. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Lời giải. Chọn C.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-4	-3	-4	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số có ba điểm cực trị.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng -3 và giá trị nhỏ nhất bằng -4 .
- D. Hàm số có ba giá trị cực trị.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$. Do đó A sai.
- Hàm số có ba điểm cực trị là $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Do đó B đúng. **Chọn B.**
- Hàm số có GTNN bằng -4 và không có GTLN. Do đó C sai.
- Hàm số có đúng hai giá trị cực trị là $y_{CD} = -3$ và $y_{CT} = -4$. (nếu nói đồ thị hàm số thì có ba điểm cực trị). Do đó D sai.

Câu 17. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							$+\infty$
	$-\infty$						

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.

B. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{2}{3}$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$.

D. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{2}{3}$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số bậc 3 có hệ số $a > 0$. Loại A và D.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;1)$ nên loại C. **Chọn B.**

Câu 18. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							$+\infty$

A. $y = 2x^3 - 6x$. B. $y = -2x^3 + 6x - 8$. C. $y = -2x^3 + 6x$. D. $y = 2x^3 - 6x + 8$.

Lời giải. Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a > 0$. Loại B & C.

Thử tại $x = 1 \rightarrow y = -4$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có A thỏa. **Chọn A.**

Câu 19. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$				$-\infty$

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

B. $y = x^3 - x^2 + 2x$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Lời giải. Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a < 0$. Loại B & C.

Thử tại $x = 1 \rightarrow y = 1$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có D thỏa. **Chọn D.**

Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y									

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số trùng phương có hệ số $a < 0$. Loại A và C.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)$ nên loại B. **Chọn D.**

Câu 21. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

A. $y = \frac{-x+2}{x+1}$. B. $y = \frac{-x-2}{x+1}$. C. $y = \frac{-x-2}{x-1}$. D. $y = \frac{-x+2}{x-1}$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có các nhận xét sau:

- Hàm số có TCD $x = -1$; TCN $y = -1$. Do đó ta loại phương án C & D.
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Thử đáp án A, ta có $y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0$

không thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 22. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	-2	$+\infty$	-2

A. $y = \frac{x-1}{x-1}$. B. $y = \frac{-2x}{x-1}$. C. $y = \frac{1-2x}{x+1}$. D. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy

Đây là dạng hàm phân thức hữu tỉ, có tiệm cận đứng là $x = -1$. Loại A và B.

Do đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -2$. **Chọn C.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$a-b+c-1$	-24	$+\infty$	

Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + 3c$.

A. $P = -3$. B. $P = -9$. C. $P = 3$. D. $P = 9$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là -1 và 3 nên ta có $\begin{cases} 3-2a+b=0 \\ 27+6a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-9 \end{cases}$.

Lại có $f(3) = -24 \rightarrow 27+9a+3b+c = -24 \rightarrow c = 3$.

Vậy $P = a + b + 3c = -3$. **Chọn A.**

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y									
	$-\infty$		2		1		2		$-\infty$

Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $P = 4$.

B. $P = 6$.

C. $P = 8$.

D. $P = 2$.

Lời giải. Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = 1$ nên ta có $2a + b = 0$. (1)

Lại có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$. (2)

Giải hệ gồm (1) và (2), ta được $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \longrightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 6$. **Chọn B.**

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$a+b$		0		-1		$+\infty$

Tính giá trị của a và b .

A. $a = 1$ và $b = -2$.

B. $a = 2$ và $b = -3$.

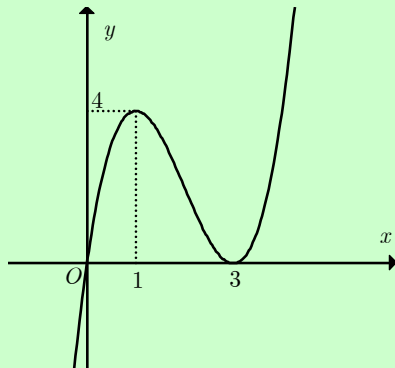
C. $a = \frac{1}{2}$ và $b = -\frac{3}{2}$.

D. $a = \frac{3}{2}$ và $b = -\frac{5}{2}$.

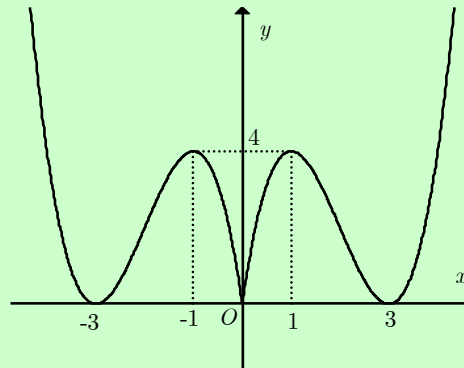
Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f'(1) = 2(2a + b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong bốn đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

B. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

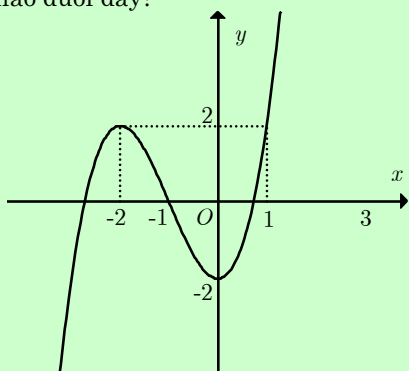
C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$

D. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

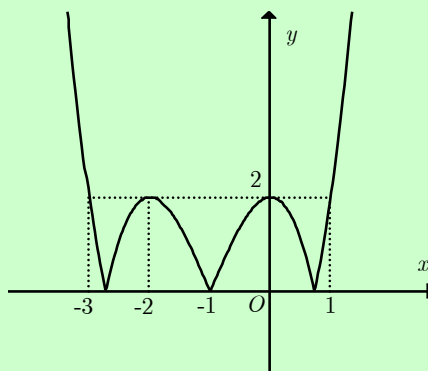
Lời giải. Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \geq 0$.
- Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ ở trên qua trục Oy . **Chọn D.**

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x|^3 + 3|x|^2 - 2$.

B. $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$.

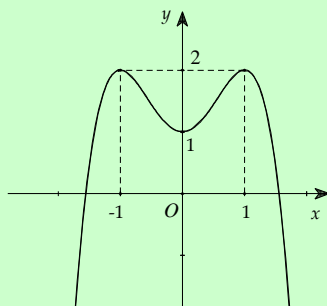
C. $y = ||x|^3 + 3x^2 - 2|$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.

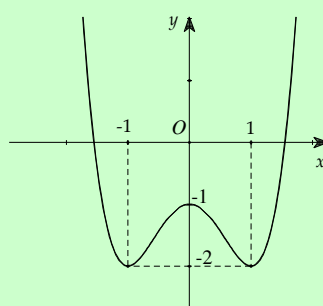
Lời giải. Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y \geq 0$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y < 0$ qua trục Ox . **Chọn B.**

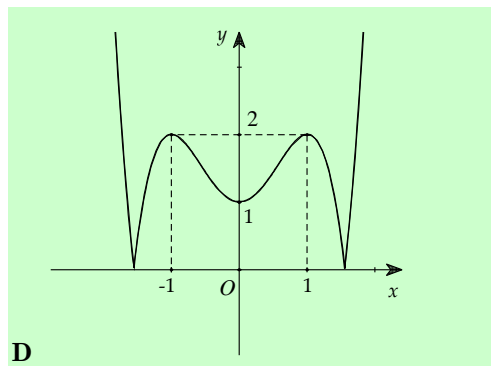
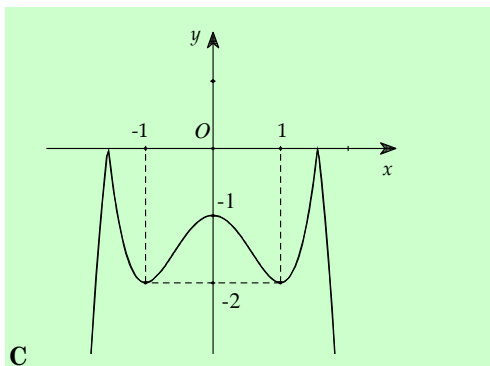
Câu 28. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = |2x^2 - x^4 + 1|$?



A

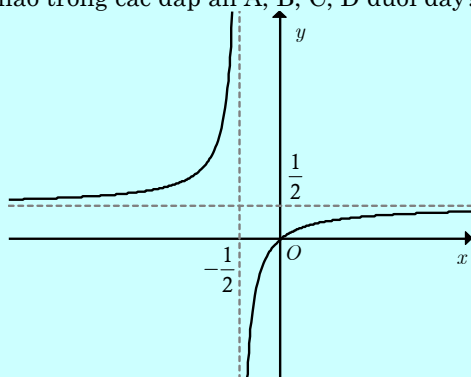


B

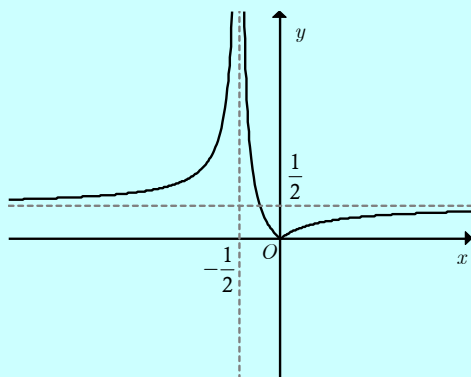


Lời giải. Ta có $y = |2x^2 - x^4 + 1| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị luôn nằm phía trên trục hoành. **Chọn D.**

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1

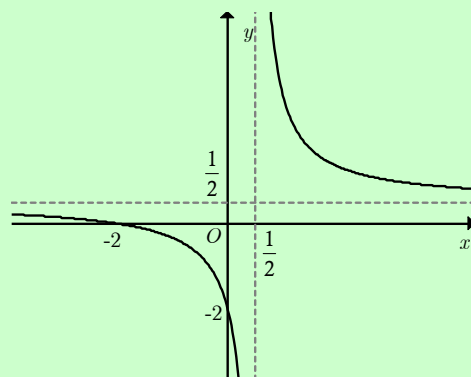


Hình 2

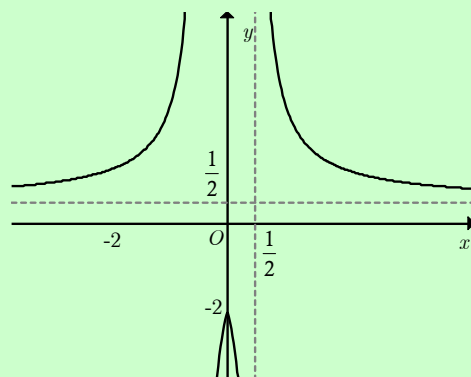
- A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$. B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$. C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$. D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1

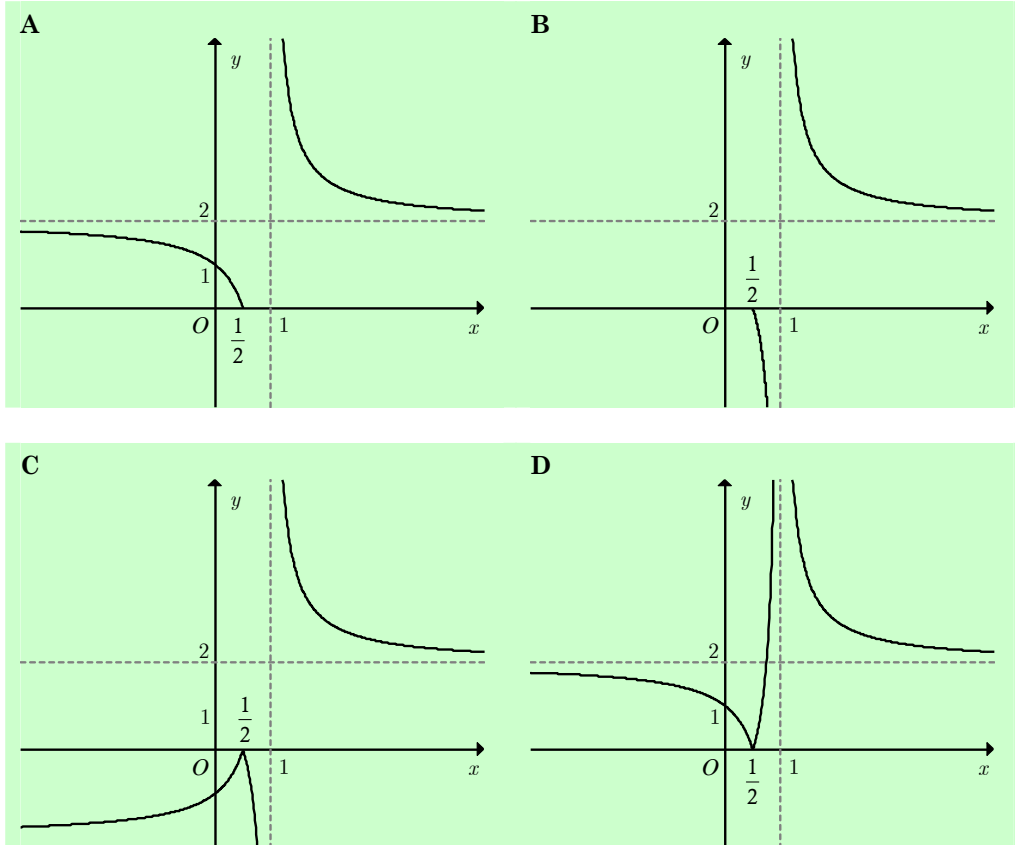
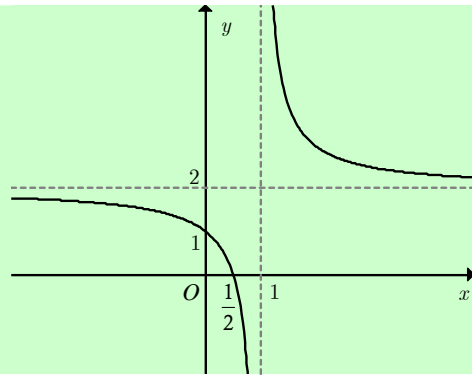


Hình 2

- A. $y = -\left(\frac{x+2}{2x-1} \right)$. B. $y = \frac{|x|+2}{2|x|-1}$. C. $y = \left| \frac{x+2}{2x-1} \right|$. D. $y = \frac{|x|+2}{2x-1}$.

Lời giải. Chọn B.

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$ có đồ thị là hình nào trong các đáp án sau:



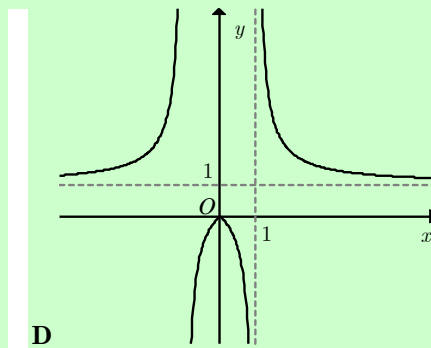
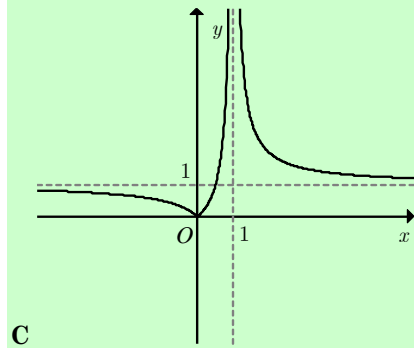
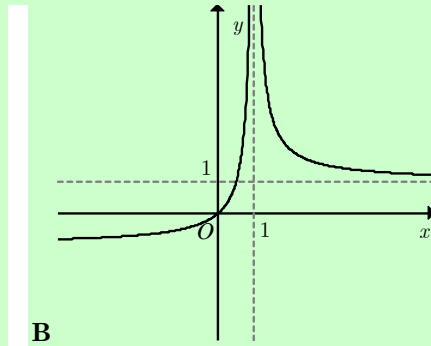
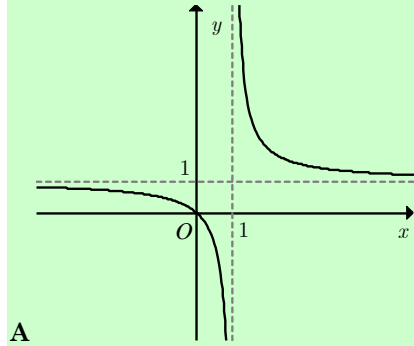
Lời giải. Ta có $y = \frac{|2x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x = \frac{1}{2}$.
- Phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ thì lấy đối xứng qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$. **Chọn C.**

Câu 32. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$?



Lời giải. Ta có $y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

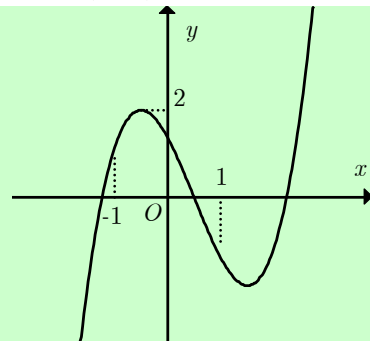
Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x = 1$.
- Phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x = 1$ thì lấy đối xứng qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$. **Chọn B.**

Câu 33. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

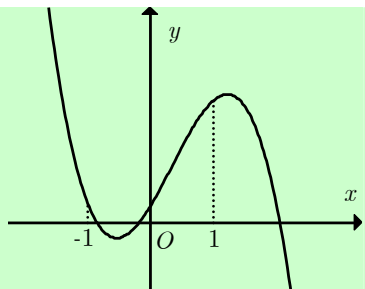
Hàm số có $-1 < x_{\text{CD}} < 0, x_{\text{CT}} > 1 \longrightarrow \begin{cases} x_{\text{CD}} + x_{\text{CT}} > 0 \\ x_{\text{CD}} \cdot x_{\text{CT}} < 0 \end{cases}$. (*)

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$. Do đó (*) $\leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} c < 0 \end{cases}$.

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. **Chọn C.**

Câu 34. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- C. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a < 0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

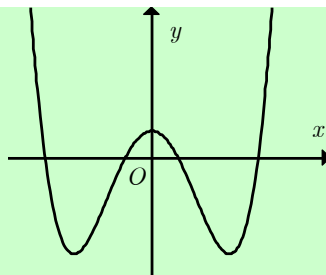
Hàm số có $x_{CD} > 1, -1 < x_{CT} < 0 \longrightarrow \begin{cases} x_{CD} + x_{CT} > 0 \\ x_{CD} \cdot x_{CT} < 0 \end{cases}$. (*)

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$. Do đó (*) $\leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a<0} b > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a<0} c > 0 \end{cases}$.

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. **Chọn A.**

Câu 35. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$.

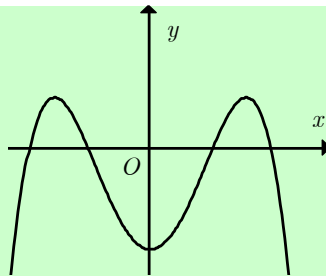
Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$. **Chọn C.**

Câu 36. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0$.
- B. $a < 0, b > 0, c < 0$.
- C. $a < 0, b < 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a < 0$.

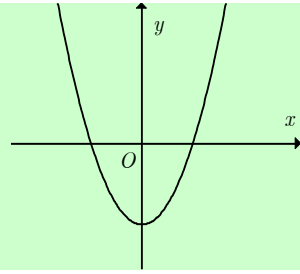
Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \longrightarrow b > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$. **Chọn B.**

Câu 37. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b \geq 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c \leq 0$.
- C. $a > 0, b \geq 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



Lời giải. Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a > 0$.

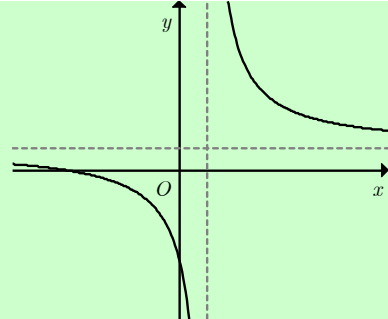
Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab \geq 0 \xrightarrow{a > 0} b \geq 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a > 0, b \geq 0, c < 0$. **Chọn A.**

Câu 38. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $b > 0, c < 0, d < 0$.
- C. $b < 0, c < 0, d < 0$.
- D. $b < 0, c > 0, d < 0$.



Lời giải. Từ đồ thị hàm số, ta thấy

• Khi $y = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$.

• Khi $x = 0 \rightarrow y = \frac{b}{d} < 0 \xrightarrow{b > 0} d < 0$.

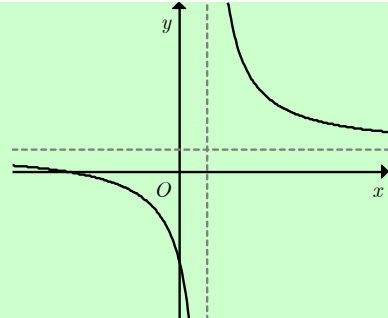
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} > 0 \xrightarrow{d < 0} c > 0$.

Vậy $b > 0, c > 0, d < 0$. **Chọn A.**

Câu 39. Hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c - ab > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c - ab = 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.



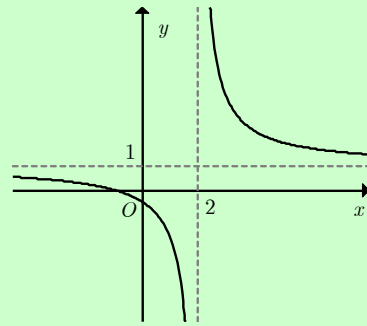
Lời giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a > 0$; tiệm cận ngang $y = b > 0$.

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên $y' = \frac{c-ab}{(x-a)^2} < 0, \forall x \neq a \rightarrow c - ab < 0$.

Vậy $a > 0, b > 0, c - ab < 0$. **Chọn A.**

Câu 40. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \neq 1.$
- B. $y' < 0, \forall x \neq 2.$
- C. $y' > 0, \forall x \neq 1.$
- D. $y' > 0, \forall x \neq 2.$



Lời giải. Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số suy ra $y' < 0, \forall x \neq 2.$

Chọn B.

O Bài 05

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Khái niệm tiệm cận

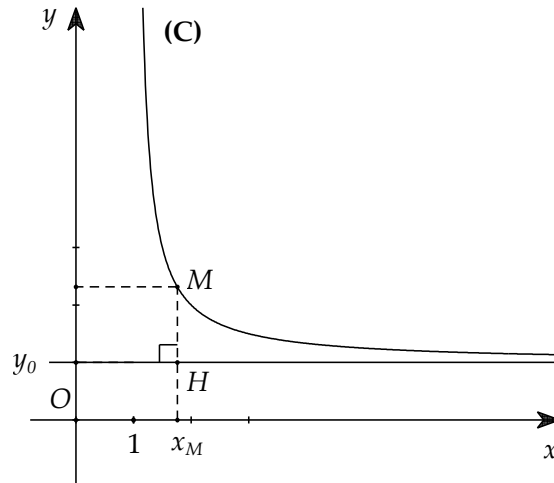
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Điểm $M \in (C)$, MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d . Đường thẳng d gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH dần về 0 khi $|x| \rightarrow +\infty$ hoặc $|x| \rightarrow x_0$.

2. Định nghĩa tiệm cận đứng (TCD), tiệm cận ngang (TCN)

a. Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$



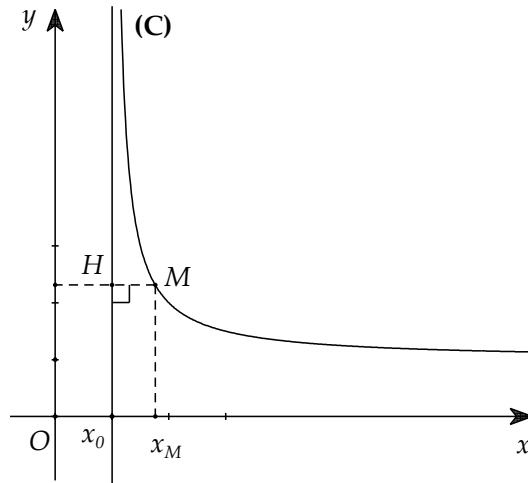
Chú ý :

- Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ thì ta viết chung là $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$.
- Hàm số có TXĐ không phải các dạng sau: $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$ thì đồ thị không có tiệm cận ngang.

b. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$



Chú ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 1. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1$ là TCN. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
- C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.
- D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.

Câu 2. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Đáp án B sai vì chọn hàm $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x \leq -1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x \geq 1 \end{cases}$.

Vậy ta chỉ có đáp án C đúng. **Chọn C.**

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

B. Trục hoành và trục tung là hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.

D. Hàm số đã cho có tập xác định là $D = (0, +\infty)$.

Câu 3. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

● $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

● $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD. **Chọn B.**

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ và tiệm cận đứng $x = 1$.

D. Đồ thị hàm số hai tiệm cận ngang là các đường $y = -1$ và $y = 1$.

Câu 4. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

● $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1$ là TCN.

● $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD. **Chọn C.**

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$ và đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 10$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nhưng có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Câu 5. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

● $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.

● $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10 \longrightarrow x = 0$ không phải là TCD. **Chọn A.**

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D = (-3; 3) \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên các khoảng của tập D và có

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty.$$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng hai TCD là các đường thẳng $x = -3$ và $x = 3$.

B. Đồ thị hàm số có đúng hai TCD là các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$.

C. Đồ thị hàm số có đúng bốn TCD là các đường thẳng $x = \pm 1$ và $x = \pm 3$.

D. Đồ thị hàm số có sáu TCD.

Câu 6. Chọn C.

Câu 7. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = x_0$

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bất kì có nhiều nhất hai đường tiệm cận ngang.

Câu 7. A sai vì chỉ cần một trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ tồn tại thì đã suy ra được tiệm cận ngang là $y = 1$.

B sai, ví dụ hàm số $y = \sqrt{x^3 - 1}$ không xác định tại $x = -2$ nhưng $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ không tiến đến vô cùng nên $x = -2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

C sai vì chỉ cần tồn tại một trong bốn giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

D đúng vì chỉ có hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. **Chọn D.**

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2	$+\infty$	-2

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.
- B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Câu 8. Từ bảng biến thiên, ta có :

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1 \text{ là TCD. } \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2 \end{cases} \longrightarrow y = -2 \text{ là TCN.}$$

Chọn D.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	5	$+\infty$	2

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số có hai TCN $y = 2, y = 5$ và một TCD $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

Câu 9. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1 \text{ là TCD.}$$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5 \longrightarrow y = 5 \text{ là TCN và } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \longrightarrow y = 2 \text{ là TCN. Chọn C.}$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1				1

$\swarrow \quad \searrow$
 $-\sqrt{2}$

Kết luận nào sau đây đầy đủ về đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$?

- A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$.
- B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$, tiệm cận đứng $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$, tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 10. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \sqrt{2} \neq \pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có TCD.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1$ là TCN; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN. **Chọn A.**

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	2				1		

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 $-\infty \quad -\infty \quad 1 \quad -\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.
- D. Hàm số không có cực trị.

Câu 11. Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét như sau:

A đúng vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \longrightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B sai vì tại $x = 0$ hàm số không xác định.

C sai vì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 trên khoảng $(0; +\infty)$ mà không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D sai vì đạo hàm y' đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua điểm $x = 1 \longrightarrow x = 1$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn A.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'		+	+	+
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -3$.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.
- D. Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 12. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -3$ là TCD;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = 3$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả ba đường tiệm cận. Do đó D sai. **Chọn D.**

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$	0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 13. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \longrightarrow x = -2$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng ba đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'			$-$	$+$
y		$+\infty$		$+\infty$

Diagram showing a function with vertical asymptotes at $x = -2$ and $x = 1$. The function approaches $+\infty$ as $x \rightarrow -2^+$ and $-\infty$ as $x \rightarrow 1^-$. The function approaches $+\infty$ as $x \rightarrow 1^+$ and $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. The region $x < -2$ is shaded black.

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 14. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang;
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty \longrightarrow x = -2$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 15. Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-2}{x+2}.$$

- A. $(-2; 2)$. B. $(2; 1)$. C. $(-2; -2)$. D. $(-2; 1)$.

Câu 15. TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Để thấy đồ thị hàm số có TCĐ: $x = -2$ và TCN: $y = 1$.

Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-2; 1)$. **Chọn D.**

Câu 16. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}.$$

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 16. Xét phương trình $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -4} y = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+1}{x+4} = \infty \rightarrow x = -4$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 4} y = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{8} \rightarrow x = 4$ không là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng. **Chọn D.**

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-9}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 17. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = +\infty \longrightarrow x = 3$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = -\infty \longrightarrow x = -3$ TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 18. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$. C. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. D. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Câu 18. Nhận thấy các đáp án B, C, D hàm số có TXĐ: $D = \mathbb{R}$ nên không có TCD.

Dùng phương pháp loại trừ thì A đúng. **Chọn A.**

(Thật vậy; hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD)

Câu 19. Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \\ \frac{2x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \longrightarrow y = 2$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x+2}{|x|+1}$.

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$, $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Câu 20. TXĐ: $D = \mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{|x|+1} = -3 \longrightarrow y = -3$ là TCN; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{|x|+1} = 3 \longrightarrow y = 3$ là TCN.

Chọn C.

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 21. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.

Xét phương trình $x^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 2$ là TCD;

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -2 \text{ là TCD.}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận. **Chọn D.**

Câu 22. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2}$. B. $y = \frac{|x| - 2}{x + 1}$. C. $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 1}$. D. $y = \frac{\sqrt{x + 2}}{|x| - 2}$.

Câu 22. A. Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$;

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{-x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{-1 + \frac{2}{x}} = 1$. Vậy A. sai.

B. Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$;

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1$. Vậy B đúng.

Chọn B. (C và D có thể loại trừ vì TXĐ không chứa $-\infty$ và $+\infty$)

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 23. TXĐ: $D = \mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1 \longrightarrow y = 1 \text{ là TCN};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1 \longrightarrow y = -1 \text{ là TCN.}$$

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng hai tiệm cận ngang. **Chọn C.**

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 24. Ta có $4x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ TXĐ của hàm số $D = \mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \frac{1}{2}$ là TCN;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = -\frac{1}{2} \longrightarrow y = -\frac{1}{2}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 25. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 25. TXĐ: $D = (-1;1) \cup (1;+\infty)$. Ta có:

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 1 \text{ là TCD};$
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}} = -\infty \longrightarrow x = -1 \text{ là TCD};$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0 \longrightarrow y = 0 \text{ Là TCN.}$

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 26. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2+3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 26. TXĐ $D = [7;+\infty)$.

Vì $x^2+3x-4 \neq 0, \forall x \in D$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. **Chọn C.**

Câu 27. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3x-\sqrt{x-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 27. TXĐ: $D = [1;+\infty)$.

Do đó ta chỉ xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{3x-\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{3-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{3} \longrightarrow y = \frac{2}{3}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một TCN. **Chọn A.**

Câu 28. Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $n = d = 1$. B. $n = 0; d = 1$. C. $n = 1; d = 2$. D. $n = 0; d = 2$.

Câu 28. TXĐ: $D = (0;1) \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét phương trình $(x-1)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow x = 0 \text{ là TCD};$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy $n = 0$; $d = 2$. **Chọn D.**

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 29. TXĐ: $D = (-3; 3) \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số

không có tiệm cận ngang.

Ta có:

• $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}} = 0 \longrightarrow x = -3$ không là TCD;

• $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}} = +\infty \longrightarrow x = 3$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 30. TXĐ: $D = (-4; 4) \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số

không có tiệm cận ngang.

Ta có:

• $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}} \right) = -\infty \longrightarrow x = -4$ là TCD;

• $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}} \right) = -\infty \longrightarrow x = 4$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

Câu 31. TXĐ: $D = [-1; 0) \cup (0; 1] \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị

hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 0$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 32. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 32. TXĐ: $D = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \setminus \{1\} \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị

hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 33. TXĐ: $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\} \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \end{cases} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 34. TXĐ: $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(-x-1)}{\sqrt{(-x-1)(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{1-x}} = 0 \longrightarrow x = -1$ không là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}$. Gọi d, n lần lượt là số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $n+d=1$. B. $n+d=2$. C. $n+d=3$. D. $n+d=4$.

Câu 35. Để căn thức có nghĩa khi $2x^2-1 \geq 0 \iff x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Xét $\sqrt{2x^2-1}-1=0 \iff \sqrt{2x^2-1}=1 \iff 2x^2-1=1 \iff x=\pm 1 \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Do đó tập xác định của hàm số: $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \setminus \{-1; 1\}$.

Ta có

- $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)} = \infty \longrightarrow x = -1$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = 1$ không là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN.

Vậy $d=1, n=2 \longrightarrow n+d=3$. **Chọn C.**

Câu 36. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 36. Ta có $y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x^2 - 1} = \frac{|x+1|}{x^2 - 1} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{khi } x > -1, x \neq 1 \\ -\frac{1}{x-1} & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

- Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x^2 - 1} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- B. Đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $x = 1$.

Câu 37. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^-} y = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = \sqrt{2}$ là TCĐ;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -\sqrt{2}$ là TCĐ.

Vậy hàm số có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang. **Chọn B.**

Câu 38. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 3.
- C. 5.
- D. 6.

Câu 38. TXĐ: $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty \longrightarrow x = -\sqrt{2}$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty \longrightarrow x = -1$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} y = +\infty \longrightarrow x = \sqrt{2}$ là TCĐ.

Vậy hàm số đã cho có tất cả năm đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 39. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}} = -\frac{3}{4} \longrightarrow x = 1$ không là TCĐ.

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1 \text{ là TCD.}$$

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 40. Ta có:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right) = +\infty \end{cases}.$$

Vậy đồ thị có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$. **Chọn C.**

Câu 41. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 41. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{2} \right\}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^-} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^-} \frac{mx - 1}{2x + m} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^+} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^+} \frac{mx - 1}{2x + m} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = -\frac{m}{2} \text{ là TCD.}$$

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$. **Chọn A.**

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2m^2x - 5}{x + 3}$ nhận đường thẳng $y = 8$ làm tiệm cận ngang.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 0$.

Câu 42. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2m^2x - 5}{x + 3} = 2m^2 \longrightarrow y = 2m^2$ là TCN.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow 2m^2 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$. **Chọn C.**

Câu 43. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{(m - 2n - 3)x + 5}{x - m - n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S = m^2 + n^2 - 2$.

- A. $S = 2$. B. $S = 0$. C. $S = -1$. D. $S = -1$.

Câu 43. Ta có:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m - 2n - 3)x + 5}{x - m - n} = m - 2n - 3 \longrightarrow y = m - 2n - 3 \text{ là TCN;} \\ \bullet \left| \lim_{x \rightarrow (n+m)^+} y \right| = +\infty \longrightarrow x = m + n \text{ là TCD.}$$

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} m+n=0 \\ m-2n-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases} \longrightarrow S = m^2 + n^2 - 2 = 0$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $m = 0$. B. $m = 1, m = 2$. C. $m = 0, m = 1$. D. $m = 1$.

Câu 44. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y = \frac{(x-m)(2x+2m-3)+2m(m-1)}{x-m} = 2x+2m-3 + \frac{2m(m-1)}{x-m}$.

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì các giới hạn $\lim_{x \rightarrow m^\pm} y$ tồn tại hữu hạn

$\Leftrightarrow 2m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=0 \end{cases}$. **Chọn C.**

Cách 2. (Chỉ áp dụng cho mẫu thức là bậc nhất)

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $2x^2 - 3x + m = 0$ có một nghiệm là $x = m$

$\longrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow 2m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$ có ba đường tiệm cận.

- A. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right)$.
C. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; +\infty)$. D. $m \in (2; +\infty)$.

Câu 45. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Do đó ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-1)^2 - 2m \cdot (-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 2m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2ax + a}$ có đúng một tiệm cận đứng.

- A. $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. B. $a = 0, a = 3$. C. $a = 1, a = 2$. D. $a = \pm 2$.

Câu 46. Ycbt $\Leftrightarrow 3x^2 - 2ax + a = 0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$.

Chọn B.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2 - 4x + m}$ có đúng một tiệm cận ngang và đúng một tiệm cận đứng.

- A. $m < 4$. B. $m > 4$. C. $m = 4, m = -12$. D. $m \neq 4$.

Câu 47. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2 - 4x + m} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt

$$\text{trong đó có một nghiệm bằng } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m = 0 \\ \Delta' = 4 - m > 0 \\ (-2)^2 - 4(-2) + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -12 \end{cases} \cdot \text{Chọn C.}$$

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2 - 4x + m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

- A. $m = -12$. B. $m > 4$. C. $m = -12, m > 4$. D. $m \neq 4$.

Câu 48. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2 - 4x + m} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Do đó để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 4$. **Chọn B.**

Nhận xét. Bạn đọc dễ nhầm lẫn mà xét thêm trường hợp mẫu thức $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm $x = -2 \longrightarrow m = -12$. Điều này là sai, vì với $m = -12$ thì hàm số trở thành $y = \frac{1}{x-6}$. Đồ thị này vẫn còn TCD là $x = 6$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. 2018. B. 2019. C. 2020. D. 2021.

Câu 49. Ycbt $\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-2)^2 - 4(-2) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[m \in [-2017; 2017]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2017; \dots; 0; 1; 2; 3\} \setminus \{-12\}.$$

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 50. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có hai tiệm cận ngang.

- A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
B. $m < 0$. C. $m = 0$. D. $m > 0$.

Câu 50. Khi $m > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ là TCN;} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{m}} \text{ là TCN.} \end{aligned}$$

Với $m = 0$ suy $y = \frac{x+1}{1} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $m < 0$ thì hàm số có TXĐ là một đoạn nên đồ thị hàm số không có TCN.

Vậy với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang. **Chọn D.**

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x + \sqrt{mx^2 + 4}}$ có đúng một tiệm cận ngang.

A. $m = 0, m = 1$.**B. $m \geq 0$.****C. $m = 1$.****D. $m = 0$.****Câu 51.** Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \frac{1}{1+\sqrt{m}}$ với $m \geq 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \frac{1}{1-\sqrt{m}}$ với $m \geq 0, m \neq 1$.

$$\text{Nếu } m=1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2+4}-x)}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1\right)}{4} = -\infty,$$

suy ra hàm số chỉ có đúng một TCN là $y = \frac{1}{2}$ (do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}$ khi $m=1$). Do đó giá trị

$m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nếu $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$, để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{m}} = \frac{1}{1-\sqrt{m}} \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m=0, m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}}$ với m là tham số thực và $m > \frac{1}{2}$. Hỏi

đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.**B. 2.****C. 3.****D. 4.**

Câu 52. Khi $m > \frac{1}{2}$ thì phương trình $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ vô nghiệm nên đồ thị

hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}} = 1 \longrightarrow y=1$ là TCN;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}} = -1 \longrightarrow y=-1 \text{ là TCN.}$$

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có đường tiệm cận ngang.

A. $m = 0$.**B. $m < 0$.****C. $m > 0$.****D. $m \geq 0$.**

Câu 53. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi các giới

hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ tồn tại hữu hạn. Ta có:

- Với $m=0 \longrightarrow y = \frac{x^2+2}{\sqrt{3}}$. Khi đó $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \end{cases}$ suy ra đồ thị không có TCN.

- Với $m < 0$, khi đó hàm số có TXĐ: $D = \left(-\sqrt[4]{-\frac{3}{m}}; \sqrt[4]{-\frac{3}{m}}\right)$ nên ta không xét trường hợp $x \rightarrow +\infty$ hay $x \rightarrow -\infty$ được. Do đó hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $m > 0$, khi đó hàm số có TXĐ $D = \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$

$\longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN. **Chọn C.**

$$\text{Hàm số } y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0, c \neq 0).$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, suy ra $M\left(x_0; y_0 = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có **TCD** $\Delta_1: x + \frac{d}{c} = 0$; **TCN** $\Delta_2: y - \frac{a}{c} = 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} d_1 = d[M, \Delta_1] = \left|x_0 + \frac{d}{c}\right| = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| \\ d_2 = d[M, \Delta_2] = \left|y_0 - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|. \end{cases}$$

$d_1 = kd_2$	$\left \frac{cx_0+d}{c}\right = k \left \frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right \longrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{kp}$
d_1, d_2	$d_1, d_2 = \left \frac{ad-bc}{c^2}\right = p = \text{const}$
$d_1 + d_2 \longrightarrow \min$	$d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{\frac{ ad-bc }{c^2}} = 2\sqrt{p}$ Dấu "=" xảy ra khi $\left \frac{cx_0+d}{c}\right = \left \frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right$ $\longleftrightarrow (cx_0+d)^2 = ad-bc \longleftrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{p}$
Điểm $M(x_0; y_0)$ có hoành độ thỏa $x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{p}$	• Có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận ngắn nhất $2\sqrt{p}$. • Khoảng cách đến tâm đối xứng nhỏ nhất $\sqrt{2p}$.

Câu 54. Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng ba lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị.

- A. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(2; 5)$. B. $M(4; 3)$ hoặc $M(-2; 1)$.
- C. $M(4; 3)$ hoặc $M(2; 5)$. D. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(-2; 1)$.

Câu 54. Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right)$ với $a \neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

Đường tiệm cận đứng $d: x = 1$; đường tiệm cận ngang $d': y = 2$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow d[M, d] = 3d[M, d'] \Leftrightarrow |a-1| = 3\left|\frac{2a+1}{a-1} - 2\right|$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(4; 3) \\ M(-2; 1) \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Áp dụng công thức giải nhanh. } \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| = k \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \longrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{kp}$$

với $c = 1, d = -1, k = 3, p = \left|\frac{ad-bc}{c^2}\right| = 3$. Suy ra $x_0 = 1 \pm 3$.

Câu 55. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ (C) với m là tham số thực. Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất đó bằng 2.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = -2, m = 0$. D. $m = 1$.

Câu 55. Áp dụng công thức giải nhanh.

Điểm $M\left(x_0; y_0 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Đồ thị hàm số có TĐĐ $\Delta_1 : x + \frac{d}{c} = 0$; TCN $\Delta_2 : y - \frac{a}{c} = 0$.

Ta có $\begin{cases} d_1 = d[M, \Delta_1] = \left|x_0 + \frac{d}{c}\right| = \left|\frac{cx_0 + d}{c}\right| \\ d_2 = d[M, \Delta_2] = \left|y_0 - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{ad - bc}{c(cx_0 + d)}\right| \end{cases}$. Khi đó $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{\frac{|ad - bc|}{c^2}}$.

Áp dụng: Ycbt $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{|ad - bc|}{c^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|ad - bc|}{c^2} = 1 \Leftrightarrow |1 + m| = 1 \longleftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$. **Chọn C.**

O Bài 06

TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Xét hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(D): y = g(x)$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (D) là: $f(x) = g(x)$. (1)

Số điểm chung giữa (C) và (D) đúng bằng số nghiệm của phương trình (1).

(C) và (D) được gọi là tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $-2x + 2 = x^3 + x + 2$
 $\Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \longrightarrow y = 2$. **Chọn C.**

Câu 2. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 1)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. (C) không cắt trục hoành. B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.
C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$$(x - 2)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm. **Chọn B.**

Câu 3. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A và B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = 3$. B. $AB = 2\sqrt{2}$. C. $AB = 2$. D. $AB = 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 3x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = -1 \\ x = 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}.$$

Suy ra $A(1; -1), B(2; -1) \longrightarrow AB = 1$. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

- Nếu nhằm được một nghiệm x_0 thì phương trình tương đương $\begin{cases} x = x_0 \\ ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$.
- Cô lập tham số m và lập bảng biến thiên hoặc dùng đồ thị.
- Nếu không nhằm được nghiệm và không cô lập được m thì bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị, cụ thể:
 - Đồ thị cắt trục hoành đúng ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$.
 - Đồ thị có hai điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} = 0$.
 - Đồ thị có một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$ hoặc hàm số không có cực trị.

Chú ý: Nếu $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nhẩm được hai nghiệm thì tính y_{CD}, y_{CT} dễ dàng. Trường hợp không nhẩm được nghiệm thì dùng mối liên hệ hai nghiệm đó là hệ thức Viet.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in (4; +\infty)$.

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

C. $m \in (0; 4)$.

D. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x-1)(x^2 + mx + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + mx + m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + m \cdot 1 + m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 4m > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \neq 0 \\ m(m-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in (-4; 0)$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -4)$.

D. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải. Xét hàm bậc ba $y = x^3 - 3x^2$, có

$$y' = 3x^2 - 6x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y_{CD} = 0 \\ x = 2 \longrightarrow y_{CT} = -4 \end{cases}.$$

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có ycbt $\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CD} \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

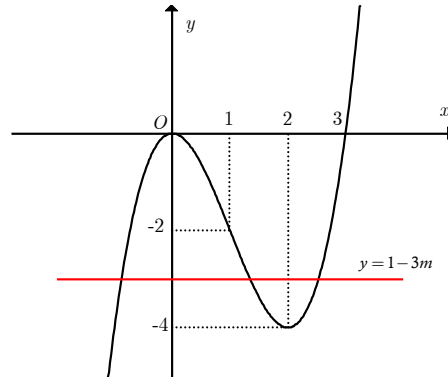
Chọn A.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

A. $\frac{1}{3} < m < \frac{5}{3}$. B. $1 < m < \frac{5}{3}$. C. $2 < m < \frac{7}{3}$. D. $-2 < m < \frac{4}{3}$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 1 - 3m$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, ta được



Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow -4 < 1 - 3m < -2 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{5}{3}$. **Chọn B.**

Chú ý: Sai lầm hay gặp là cho $-4 < 1 - 3m < 0$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt:

A. $m = -\frac{1}{2}, m = -1$.

B. $m = -\frac{1}{2}, m = -\frac{5}{2}$.

C. $m = \frac{1}{2}, m = \frac{5}{2}$.

D. $m = 1, m = -\frac{5}{2}$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, có

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y_{CD} = 0 \\ x = 1 \longrightarrow y_{CT} = -1 \end{cases}.$$

Dựa vào dạng đặc trưng của đồ thị hàm bậc ba, phương trình đã cho có đúng hai

nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} 2m+1 = y_{CD} \\ 2m+1 = y_{CT} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = 0 \\ 2m+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = -1 \end{cases}$. **Chọn A.**

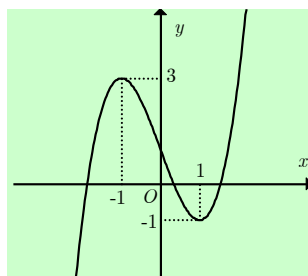
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm.

A. $m = 2015, m = 2019$.

B. $2015 < m < 2019$.

C. $m < 2015, m > 2019$.

D. $m \leq 2015, m \geq 2019$.



Lời giải. Phương trình $f(x) + m - 2018 = 0 \iff f(x) = 2018 - m$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2018 - m$ (có phương song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2018 - m > 3 \\ 2018 - m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2015 \\ m > 2019 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m \neq 0$.

B. $m > 3$.

C. $m \neq 3$.

D. $m > 0$.

Lời giải. Đối với dạng bài này ta không cô lập được m nên bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 2mx = x(3x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{cases}.$$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{2m}{3} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó ycbt $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow y(0) \cdot y\left(\frac{2m}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{-4m^3}{27} + 4\right) < 0 \Leftrightarrow m > 3$. **Chọn B.**

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có đúng hai điểm chung với trục hoành.

A. $m = \frac{1}{6}$.

B. $m = \sqrt[3]{2}$.

C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

D. $m = \sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị và tích hai cực trị bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ y(0) \cdot y(2m) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2.(-4m^3 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có một nghiệm duy nhất.

- A. $0 < m < 1$. B. $m < 1$. C. $m \leq 0$. D. $m > 1$.

Lời giải. Phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ và trục hoành.

Xét hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$, có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với:

• **TH1.** Hàm số có hai cực trị y_{CD}, y_{CT} thỏa mãn $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$

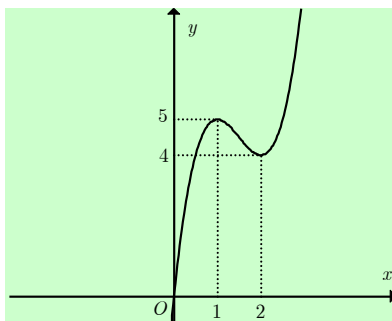
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ y(-\sqrt{m}) \cdot y(\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2 + 2m\sqrt{m})(2 - 2m\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

• **TH2.** Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow m \leq 0$.

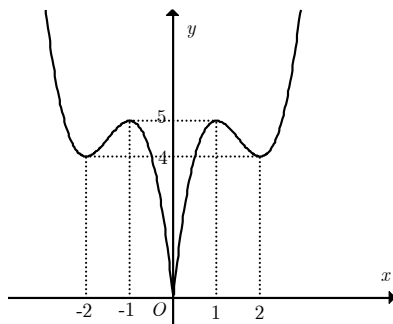
Kết hợp hai trường hợp ta được $m < 1$. **Chọn B.**

Câu 12. Hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0$ có sáu nghiệm phân biệt.

- A. $m < -5$.
B. $-5 < m < -4$.
C. $4 < m < 5$.
D. $m > -4$.



Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ như hình dưới đây:



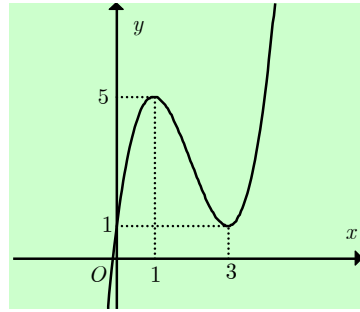
Phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0 \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = -m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ và đường thẳng $y = -m$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$, ta có ycbt $\Leftrightarrow 4 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.

Chọn B.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < 1$. B. $m > 5$.
C. $m = 1, m = 5$. D. $0 < m < 1, m > 5$.

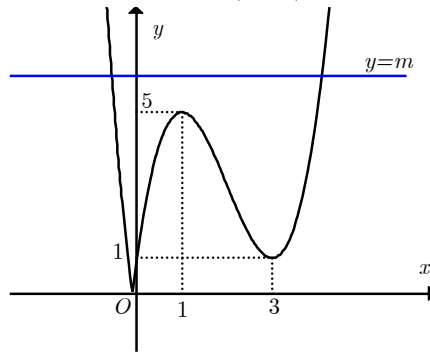


Lời giải. Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \end{cases}$. Từ đó suy ra cách vẽ đồ thị hàm số

(C) từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

- Giữ nguyên đồ thị $y = f(x)$ phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành (bỏ phần dưới).

Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ.

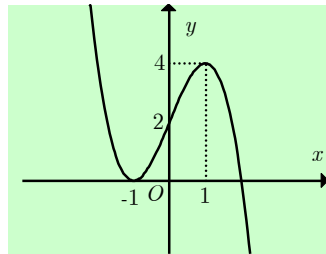


Phương trình $|f(x)| = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$ (cùng phương với trục hoành).

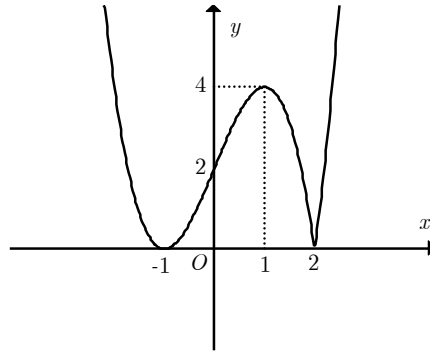
Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m > 5 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2|f(x)| - m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < 8$. B. $0 < m < 4$.
C. $m < 0, m > 8$. D. $-2 < m < 8$.



Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình dưới đây:

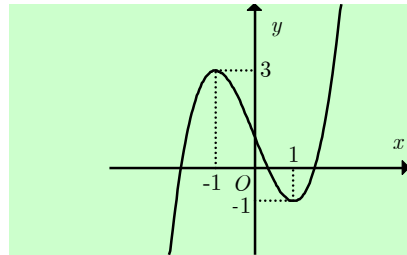


Phương trình $2|f(x)| - m = 0 \iff |f(x)| = \frac{m}{2}$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = \frac{m}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, ta có ycbt $\iff 0 < \frac{m}{2} < 4 \iff 0 < m < 8$. **Chọn A.**

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

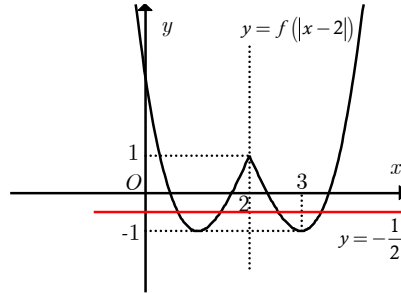
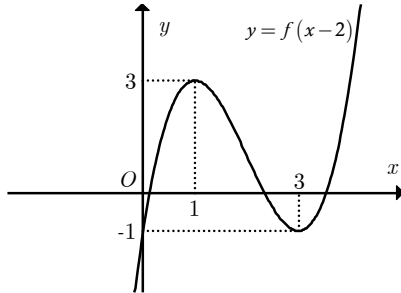
- A. 2. B. 0.
C. 6. D. 4.



Lời giải. Trước tiên tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị để được đồ thị hàm số $y = f(x-2)$.

Tiếp theo giữ phần đồ thị phía bên phải đường thẳng $x = 2$, xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = 2$.

Cuối cùng lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ lại ở trên qua đường thẳng $x = 2$. Ta được toàn bộ phần đồ thị của hàm số $y = f(|x-2|)$. (hình vẽ bên dưới)



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x-2|)$, ta thấy đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(|x-2|)$ tại 4 điểm phân biệt $\longrightarrow$ phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt. **Chọn D.**

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

The diagram illustrates the function's behavior across the x-axis. It shows a sequence of points: $-\infty$, -1 , 0 , 1 , and $+\infty$. The function value y starts at $+\infty$ for $x = -\infty$, decreases to a local minimum of -1 at $x = -1$, increases to a local maximum of 0 at $x = 0$, decreases to another local minimum of -1 at $x = 1$, and finally increases back to $+\infty$ as x approaches $+\infty$. The arrows indicate the direction of the function's path between these key points.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

A. $-2 < m < -1$. **B.** $m > 0, m = -1$. **C.** $m = -2, m > -1$. **D.** $m = -2, m \geq -1$.

Lời giải. Phương trình $f(x) - 1 = m \iff f(x) = m + 1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m + 1$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m+1 > 0 \\ m+1 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} m > -1 \\ m = -2 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	2				$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt.

A. $1 \leq m < \frac{3}{2}$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. **D.** $1 < m < \frac{3}{2}$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt $\iff 1 < 2m - 1 < 2 \iff 1 < m < \frac{3}{2}$. **Chọn D.**

Sai lầm hay gặp là cho $1 \leq 2m - 1 \leq 2 \iff 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \longrightarrow$ Chọn C. Lí do là giá trị của hàm số không bằng 2 mà chỉ tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ và giá trị của hàm số không bằng 1 mà chỉ tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 1$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2	
		-1			
			$-\infty$		
					$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm.

- A. $m < 2$. B. $m < -1, m = 2$. C. $m \leq 2$. D. $m \leq -1, m = 2$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m < -1 \\ m = 2 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2	
		-1			
			$-\infty$		
					$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $-1 \leq m \leq 2$. B. $-1 < m < 2$. C. $-1 < m \leq 2$. D. $m \leq 2$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 2$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$		$-$
y	-3	$+\infty$	2	$+\infty$	3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

- A. $m \leq -2$. B. $m \geq 1$. C. $m \leq -2, m \geq 1$. D. $m < -2, m > 1$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m + 1 > 3 \\ 2m + 1 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$. **Chọn D.**

Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3 \leq 2m + 1 \leq 3$.

Câu 21. Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$+$
y	0	-2	$+\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm.

- A.** $-2 \leq m \leq 0$. **B.** $-2 < m < 0$, $m = 1$. **C.** $-2 < m \leq 0$. **D.** $-2 < m < 0$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm khi và chỉ khi $-2 < m \leq 0$. **Chọn C.**

Nhận xét. Học sinh rất dễ sai lầm vì cho rằng $-2 < m < 0$. Nếu bài toán yêu cầu có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$, có ba nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$, có năm nghiệm $0 < m < 1$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$	-15	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có nhiều nghiệm thực nhất.

- A.** $m \in (-\infty; -1] \cup [15; +\infty)$. **B.** $m \in (-\infty; -15) \cup (1; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -1) \cup (15; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -15] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải. Phương trình $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có nhiều nghiệm thực nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} -m > 1 \\ -m < -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 15 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		$+$	$+$	0	$-$
y		4		3	
	2		$-\infty$		-1

Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} m \leq -1 \\ 3 < m < 4 \end{cases}$.
- B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba đường tiệm cận.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; 1)$. Vì vậy khẳng định C là sai. **Chọn C.**

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-1) + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt $A(1; 1)$, B , C .

- A. $m \neq 0$. B. $m < \frac{9}{4}$. C. $0 \neq m < \frac{9}{4}$. D. $m = 0$, $m > \frac{9}{4}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + 3x - 1 = m(x-1) + 1$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x - 2 + m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai

$$\text{nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

- A. $m > -3$. B. $m = -3$. C. $m > -2$. D. $m = -2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

Giả sử $x_1 = 1$. Khi đó x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

$$\text{Theo định lí Viet, ta có } \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 x_3 = -m - 2 \end{cases}$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = 4 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3 = 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m+2) = 4 \Leftrightarrow m = -2 (\text{thỏa}). \text{ Chọn D.}$$

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4, với $M(1;3)$.

A. $m = 2, m = 3$. B. $m = 3$. C. $m = -2, m = -3$. D. $m = -2, m = 3$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -2 \neq m < -1 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 \end{cases}$.

Giải sử $B(x_1; x_1 + 4), C(x_2; x_2 + 4)$.

$$\text{Ta có } BC = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \text{ và } d[M, d] = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Theo đề: } S_{\triangle MBC} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(M, d) BC = 4 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ m = -2 \text{ (loại)} \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 27. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (1; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 3)$. C. $m \in (-\infty; -1)$. D. $m \in (-\infty; +\infty)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 + m(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (m - 2) > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2$ nên suy ra $x_1 > 1$ hoặc $x_2 > 1$. Giả sử $x_2 > 1$ thì $x_1 = 2 - x_2 < 1$, suy ra $x_1 < 1 < x_2$.

Theo giả thiết $BA = BC$ nên B là trung điểm của AC do đó $x_B = 1$ và $x_A = x_1, x_C = x_2$. Khi đó ta có $x_A + x_C = 2x_B$ nên d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $AB = BC$.

Vậy với $m < 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m = 1$. B. $m = 2, m = -1$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8 = 0$. (*)

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0 = -\frac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình (*) có một nghiệm $x = m$.

Thay $x = m$ vào phương trình (*), ta được $m^3 - 3m.m^2 + 6m.m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Thử lại: ● Với $m = -1$, ta được $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 : \text{thỏa mãn} \\ x = 2 \end{cases}$.

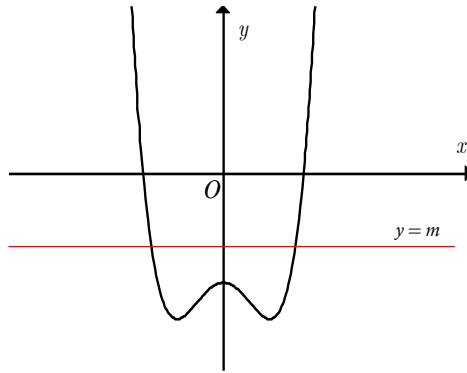
● Với $m = 2$, ta được $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: không thỏa mãn.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Biện luận số nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ ($a > 0, b < 0$). (1)

Cách 1. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ và đường thẳng $y = m$ (có phương song song với trục hoành)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng như sau:

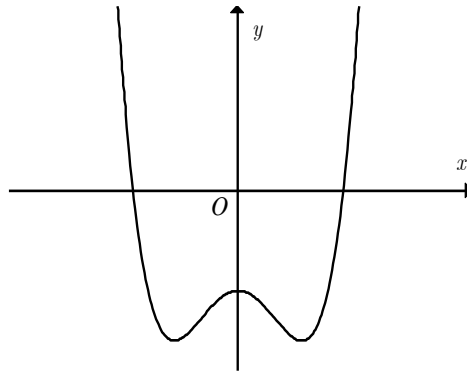


Dựa vào đồ thị ta có:

- (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m < y_{CT}$.
- (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m = y_{CT} \\ m > y_{CD} \end{cases}$.
- (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow m = y_{CD}$.
- (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CD}$.

Cách 2. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m \Leftrightarrow ax^4 + bx^2 + c - m = 0$. (2)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c - m$ có dạng như sau:



Ta có các trường hợp sau:

- (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT} > 0$.
- (2) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} y_{CT} = 0 \\ y_{CD} < 0 \end{cases}$.

- (2) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow y_{\text{CD}} = 0$.
- (2) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{\text{CT}} < 0 < y_{\text{CD}}$.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có bao nhiêu điểm chung với trục hoành?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm chung với trục hoành. **Chọn C.**

Câu 30. Với điều kiện nào của tham số k thì phương trình $4x^2(1-x^2) = 1-k$ có bốn nghiệm phân biệt?

- A. $0 < k < 2$. B. $k < 3$. C. $-1 < k < 1$. D. $0 < k < 1$.

Lời giải. Phương trình đã có lập tham số nên ta nên giải theo cách 1.

Xét hàm số $y = 4x^2(1-x^2) = -4x^4 + 4x^2$, có

$$y' = -16x^3 + 8x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y(0) = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \end{cases}.$$

$y_{\text{btt}} \Leftrightarrow y_{\text{CT}} < 1 - k < y_{\text{CD}} \iff 0 < 1 - k < 1 \iff 0 < k < 1$. **Chọn D.**

Câu 31. Cho hàm số $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

- A. $m > 1$. B. $m > -\sqrt{2}$. C. $m > \sqrt{2}$. D. $0 < m \neq 1$.

Lời giải. Bài này ta giải theo cách 2.

Xét hàm số $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$, có

$$y' = 4x^3 - 2m(m+1)x = 2x[2x^2 - m(m+1)]; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y = m^3 \\ x^2 = \frac{m(m+1)}{2} \longrightarrow y = -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 \end{cases}.$$

$y_{\text{btt}} \Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị $y_{\text{CT}}, y_{\text{CD}}$ và $y_{\text{CT}} < 0 < y_{\text{CD}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2} > 0 \\ -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 < 0 < m^3 \end{cases} \iff 0 < m \neq 1. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 32. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 2017 - m = 0$ có đúng ba nghiệm.

- A. $m = 2015$. B. $m = 2016$. C. $m = 2017$. D. $m = 2018$.

Lời giải. Ta có $x^4 - 2x^2 + 2017 - m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = m - 2017$.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2$, có

$$y' = 4x^3 - 4x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y(0) = 0 \\ x = \pm 1 \longrightarrow y(\pm 1) = -1 \end{cases}.$$

$y_{\text{btt}} \Leftrightarrow m - 2017 = y_{\text{CD}} \Leftrightarrow m - 2017 = 0 \Leftrightarrow m = 2017$. **Chọn D.**

Câu 33. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho không có điểm chung với trục hoành?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Hàm số $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$ có hệ số của x^4 âm.

Ta có $y' = -4x^3 + 4(2+m)x = -4x[x^2 - (2+m)] \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2+m \end{cases}$.

Dựa vào dấu hiệu của hàm trùng phương, ta có các trường hợp sau thỏa mãn yêu cầu bài toán:

• Hàm số có một cực trị và cực trị đó âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ -4-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -2$.

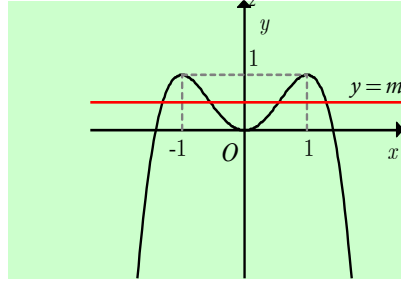
• Hàm số có hai cực trị và giá trị cực đại âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ y(\pm\sqrt{2+m}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ m^2 + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m < 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-3; -2; -1\}$. **Chọn C.**

Câu 34. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $0 < m < 1$.
C. $m < 1$. D. $m > 0$.



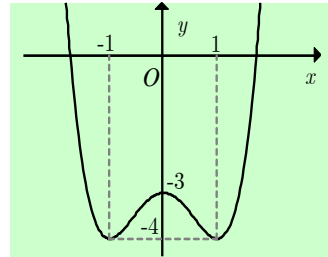
Lời giải. Phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ và đường thẳng $y = m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

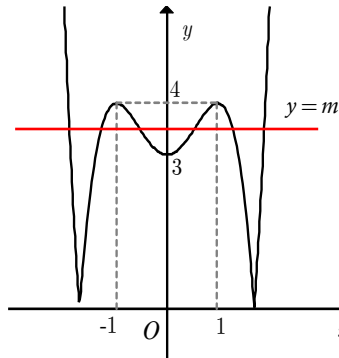
Chọn B.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có sáu nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < 4$. B. $0 < m < 3$.
C. $3 < m < 4$. D. $-4 < m < -3$.



Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình sau:



Dựa vào đồ thị, để phương trình $|f(x)| = m$ có sáu nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3 < m < 4$.

Chọn C.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^4 - (2m+4)x^2 + m^2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{3}{4}, m = 3$. D. $m = 3$.

Lời giải. Sử dụng công thức giải nhanh sau:

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại bốn điểm lập thành một cấp số cộng

$$\text{thì điều kiện là } \begin{cases} ac > 0 \\ ab < 0 \\ b^2 = \frac{100}{9}ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.m^2 > 0 \\ 1.[-(2m+4)] < 0 \\ (2m+4)^2 = \frac{100}{9}m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -2 \\ 9.(2m+4)^2 = 100m^2 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\text{Ta có } (3) \Leftrightarrow 64m^2 - 144m - 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{4} \\ m = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (1) \& (2)). Chọn C.}$$

Câu 37. Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2018}{2x+1}$ với trục tung.

- A. $M(0;0)$. B. $M(0;-2018)$. C. $M(2018;0)$. D. $M(2018;-2018)$.

Lời giải. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = \frac{x-2018}{2x+1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;-2018)$. **Chọn B.**

Câu 38. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x}$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + x + 1$ cắt nhau tại hai điểm. Kí hiệu $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là tọa độ của hai điểm đó. Tìm $y_1 + y_2$.

- A. $y_1 + y_2 = 4$. B. $y_1 + y_2 = 6$. C. $y_1 + y_2 = 0$. D. $y_1 + y_2 = 2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x} = x^2 + x + 1 \quad (x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \longrightarrow y(1) = 3 \\ x = -1 \longrightarrow y(-1) = 1 \end{cases}$$

Khi đó $y_1 + y_2 = y(1) + y(-1) = 4$. **Chọn A.**

Câu 39. Đường thẳng $y = 2x + 2016$ và đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = 2x + 2016 \quad (x \neq 1)$

$$2x + 1 = (2x + 2016)(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 2012x - 2017 = 0.$$

Ta có $ac = 2.(-2017) = -4034 < 0 \rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

Câu 40. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $d: y = x + 1$ và đồ thị $(C): y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm x_I của đoạn thẳng MN .

- A. $x_I = \frac{5}{2}$. B. $x_I = 2$. C. $x_I = 1$. D. $x_I = -\frac{5}{2}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+4}{x-1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 = (x + 1)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0.$$

Theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2$.

Suy ra $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$. **Chọn C.**

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2mx + m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{2x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m > 1$. D. $m < 0$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-2}{2x+1} = 2mx + m + 1 \quad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = (2mx + m + 1)(2x + 1) \Leftrightarrow 4mx^2 + 4mx + m + 3 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

- A. $0 < m < 1$. B. $m < -2, m > 5$. C. $1 < m < \frac{3}{2}$. D. $0 < m < \frac{1}{3}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-3}{x+1} = x - 2m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow x - 3 = (x - 2m)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0. \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m - 3 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = -2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 43. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc m . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

- A. $m \neq 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $0 < m \neq 1$.

Lời giải. Đường thẳng d có dạng $y = m(x-1) = mx - m$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+2}{x-1} = mx - m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow x + 2 = (mx - m)(x - 1) \Leftrightarrow \underbrace{mx^2 - (2m+1)x + m - 2}_{g(x)} = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị $\Leftrightarrow$ phương trình (*)

$$\text{có hai nghiệm phân biệt } x_1 < x_2 \text{ thỏa mãn } x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ mg(1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m[m - (2m+1) + m - 2] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

- A. $m = -2, m = 1$. B. $m = -7, m = 1$. C. $m = -7, m = 5$. D. $m = -1, m = 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-2x+1}{x+1} = -x + m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = (-x + m)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - (m + 1)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m + 1)^2 - 4(1 - m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$. Giả sử $A(x_1; -x_1 + m)$ và $B(x_2; -x_2 + m)$.

$$\text{Yêu cầu bài toán } AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 - 4(1 - m) = 4 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn). Chọn B.}$$

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x - 1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x}{x - 1} = x - m + 2 \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x = (x - m + 2)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0. \quad (*)$$

Ta có $\Delta = (m + 1)^2 - 4(m - 2) = m^2 - 2m + 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 - m + 2)$ và $B(x_2; x_2 - m + 2)$ là tọa độ giao điểm của d và (C) .

$$\text{Ta có } AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 2(m + 1)^2 - 8(m - 2) = 2(m - 1)^2 + 16 \geq 16.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$. **Chọn D.**

Công thức giải nhanh: AB ngắn nhất $\longrightarrow \Delta$ nhỏ nhất.

$$\text{Mà } \Delta = m^2 - 2m + 9 = (m - 1)^2 + 8 \geq 8. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 46. Tìm giá trị thực của tham số k sao cho đường thẳng $d: y = x + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

A. $k = -1$. B. $k = -3$. C. $k = -4$. D. $k = -2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x + 1}{x + 1} = x + 2k + 1 \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x + 2k + 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2k = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = k^2 - 2k > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k < 0 \end{cases}.$$

Gọi $x_1 \neq x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Giả sử $A(x_1; x_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; x_2 + 2k + 1)$.

$$\text{Yêu cầu bài toán: } d[A, Ox] = d[B, Ox] \Leftrightarrow |x_1 + 2k + 1| = |x_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2k + 1 = -(x_2 + 2k + 1) \text{ (do } x_1 \neq x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4k - 2 \Leftrightarrow -2k = -4k - 2 \Leftrightarrow k = -1 \text{ (thỏa mãn). Chọn A.}$$

Câu 47. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -2$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x-1} = x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = (x + m)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m - 3)^2 - 4(1 - m) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$.

$$\text{Yebt} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - m) + m(3 - m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2. \text{ Chọn A.}$$

Câu 48. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -2$. B. $m = -\frac{1}{5}$. C. $m = -\frac{11}{5}$. D. $m = 0$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = -3x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (-3x + m)(x - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - (1 + m)x + m + 1 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 10m - 11 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{1+m}{3}$ và $x_1 x_2 = \frac{m+1}{3}$.

Giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$ và $B(x_2; -3x_2 + m)$. Suy ra $G\left(\frac{x_1 + x_2}{3}; \frac{-3(x_1 + x_2) + 2m}{3}\right)$.

$$\text{Vì } G \in \Delta \text{ nên } \frac{x_1 + x_2}{3} - 2 \cdot \frac{-3(x_1 + x_2) + 2m}{3} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+m}{9} - 2 \cdot \frac{-(m+1) + 2m}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5} (\text{thỏa mãn}). \text{ Chọn C.}$$

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $4S_{\Delta IAB} = 15$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị.

- A. $m = \pm 5$. B. $m = 5$. C. $m = -5$. D. $m = 0$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-4}{x-1} = 2x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 = (2x + m)(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m - 4)x - m + 4 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{4-m}{2}$ và $x_1 x_2 = \frac{4-m}{2}$.

Giả sử $A(x_1; 2x_1 + m)$ và $B(x_2; 2x_2 + m)$.

Theo giả thiết: $4S_{LAB} = 15 \Leftrightarrow 2AB.d[I, AB] = 15 \Leftrightarrow 2AB \cdot \frac{|m|}{\sqrt{5}} = 15 \Leftrightarrow 4AB^2 m^2 = 1125$

$$\Leftrightarrow 20(x_1 - x_2)^2 m^2 = 1125 \Leftrightarrow 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] m^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 16)m^2 = 225 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow m = \pm 5 (\text{thỏa mãn}). \text{ Chọn A.}$$

Câu 50. Tìm trên đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ (C) hai điểm A, B mà chúng đối xứng nhau qua điểm $I(-1; 3)$.

A. $A(-1; 0)$ và $B(-1; 6)$.

B. $A(0; 2)$ và $B(-2; 4)$.

C. $A(1; 4)$ và $B(-3; 2)$.

D. Không tồn tại.

Lời giải. Gọi $A(x_0; -x_0^3 + 3x_0 + 2)$ là điểm thuộc (C) .

Do B đối xứng với A qua I nên suy ra $B(-2 - x_0; 4 + x_0^3 - 3x_0)$.

$$\text{Lại có } B \text{ cũng thuộc } (C) \text{ nên } 4 + x_0^3 - 3x_0 = -(-2 - x_0)^3 + 3(-2 - x_0) + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Suy ra $A(0; 2)$ và $B(-2; 4)$ hoặc ngược lại. **Chọn B.**

Cách trắc nghiệm. Nhận thấy ba đáp án A, B, C đều có trung điểm là $I(-1; 3)$.

Bây giờ ta thử đến $A \in (C)$ và $B \in (C)$.

Thử đáp án A, ta thấy $A \in (C)$ nhưng $B \notin (C)$. Vậy loại A.

Thử đáp án B, ta thấy $A \in (C)$ và $B \in (C)$. Vậy chọn B.

Câu 51. Tìm trên đồ thị hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$ hai điểm phân biệt A, B mà chúng đối xứng nhau qua trục tung.

A. $A\left(3; -\frac{16}{3}\right)$ và $B\left(-3; -\frac{16}{3}\right)$.

B. $A\left(3; \frac{16}{3}\right)$ và $B\left(-3; \frac{16}{3}\right)$.

C. $A\left(\frac{16}{3}; 3\right)$ và $B\left(-\frac{16}{3}; 3\right)$.

D. Không tồn tại.

Lời giải. Hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thuộc đồ thị và đối xứng nhau qua trục tung

$$\text{nên } \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ -\frac{x_1^3}{3} + x_1^2 + 3x_1 - \frac{11}{3} = -\frac{x_2^3}{3} + x_2^2 + 3x_2 - \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } A\left(3; \frac{16}{3}\right) \text{ và } B\left(-3; \frac{16}{3}\right) \text{ hoặc ngược lại. Chọn B.}$$

Câu 52. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 1$ với m là tham số thực, có đồ thị là (C) . Tìm tọa độ các điểm cố định thuộc đồ thị (C) .

A. $(-1; 0)$ và $(1; 0)$.

B. $(1; 0)$ và $(0; 1)$.

C. $(-2; 1)$ và $(-2; 3)$.

D. $(2; 1)$ và $(0; 1)$.

Lời giải. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$.

$$\text{Ta có } y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m - 1 \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)m + x_0^4 - y_0 - 1 = 0. \quad (1)$$

Để M là điểm cố định của (C) khi và chỉ khi (1) luôn đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^4 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 53. Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) mà tọa độ là số nguyên?

- A. 2. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \longrightarrow y_0 = \frac{2x_0-2}{x_0+1} = 2 - \frac{4}{x_0+1}$.

Để $y_0 \in \mathbb{Z}$ thì $x_0 + 1$ là ước của 4 hay $x_0 + 1 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$.

Suy ra $x_0 \in \{-5; -3; -2; 0; 1; 3\}$. Vậy có 6 điểm thỏa mãn bài toán. **Chọn D.**

Câu 54. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến trục Oy bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục Ox ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-1}\right)$, với $a \neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow |a| = 2 \cdot \left| \frac{a+2}{a-1} \right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot \frac{a+2}{a-1} \\ a = -2 \cdot \frac{a+2}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a - 4 = 0 \\ a^2 + a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \\ M(4; 2) \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 55. Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến trục hoành.

- A. $M(2; 1)$, $M(4; 3)$. B. $M(0; -1)$, $M(4; 3)$.
C. $M(0; -1)$, $M(3; 2)$. D. $M(2; 1)$, $M(3; 2)$.

Lời giải. Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right)$ (với $a \neq 1$) là điểm thuộc đồ thị.

Phương trình đường TCĐ của đồ thị là $d: x - 1 = 0$.

$$\text{Ycbt: } d[M, d] = d[M, Ox] \Leftrightarrow |a-1| = \left| \frac{2a+1}{a-1} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4a \\ a^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; -1) \\ M(4; 3) \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$