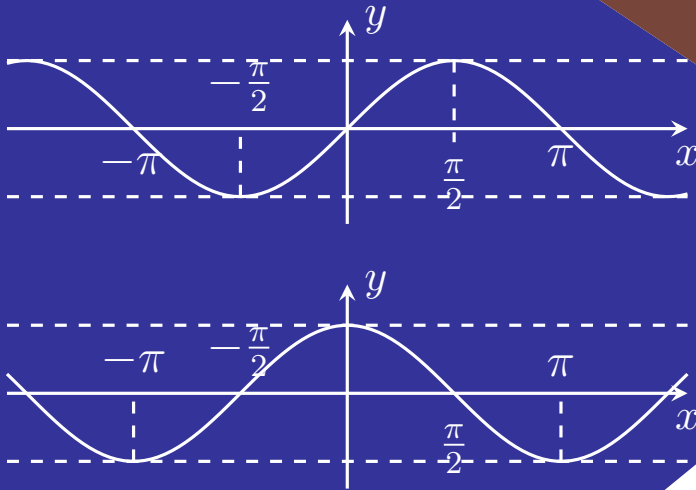
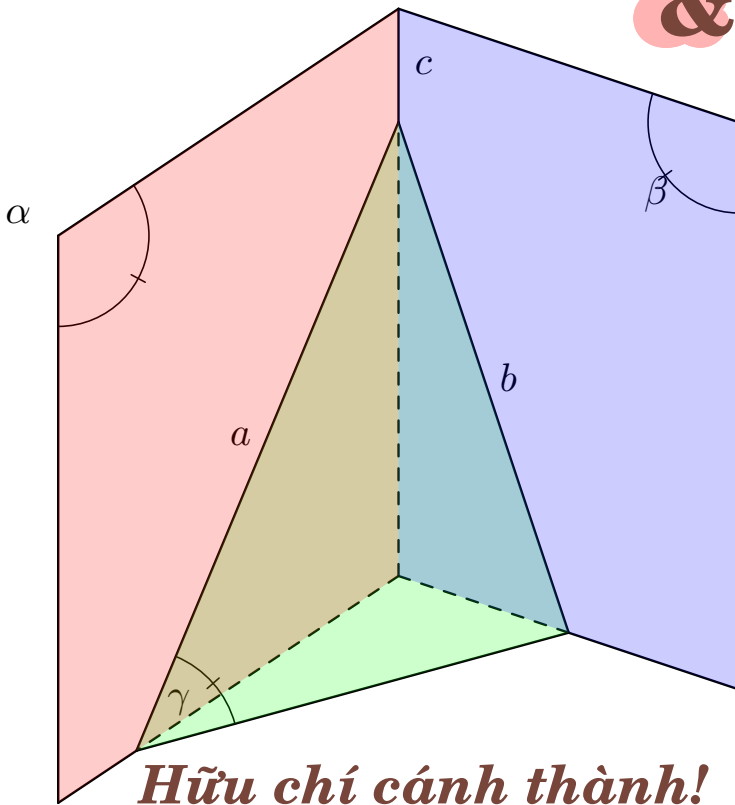




TOÁN

11

LÝ THUYẾT & TRẮC NGHIỆM



MỤC LỤC

PHẦN I ĐẠI SỐ- GIẢI TÍCH	3
CHƯƠNG 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	5
1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	5
2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	20
3 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP	32
CHƯƠNG 2 TỔ HỢP. XÁC SUẤT NHỊ THỨC NEWTON	49
1 CÁC QUY TẮC ĐẾM	49
2 HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP	60
3 NHỊ THỨC NEWTON	76
4 BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ	91
CHƯƠNG 3 DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG- CẤP SỐ NHÂN	115
1 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC	115
2 DÃY SỐ	119
3 CẤP SỐ CỘNG	127
4 CẤP SỐ NHÂN	142
CHƯƠNG 4 GIỚI HẠN	155
1 GIỚI HẠN DÃY SỐ	155
2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	170
3 HÀM SỐ LIÊN TỤC	186
CHƯƠNG 5 ĐẠO HÀM	201
1 ĐỊNH NGHĨA VÀ QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	201

2	ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	218
3	ĐẠO HÀM CẤP HAI	223

PHẦN II HÌNH HỌC

229

CHƯƠNG 1 PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG 231

1	PHÉP TỊNH TIẾN	231
2	PHÉP QUAY	240
3	PHÉP VỊ TỰ	248

CHƯƠNG 2 QUAN HỆ SONG SONG 257

1	ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	257
2	HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU	276
3	ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG	287
4	HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	297

CHƯƠNG 3 QUAN HỆ VUÔNG GÓC 305

1	VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN	305
2	HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	319
3	ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG	333
4	HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC	352
5	KHOẢNG CÁCH	369

PHẦN



ĐẠI SỐ- GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1

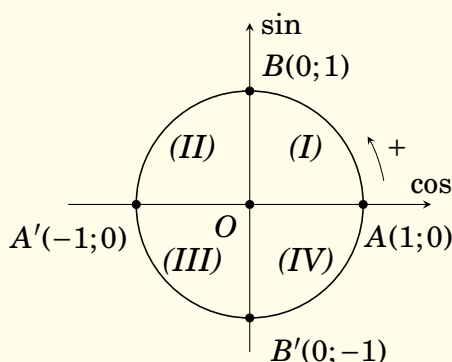
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



Giá trị lượng giác	Góc phân tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

1.1. Các hằng đẳng thức:

- ① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ với mọi α .
- ② $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với mọi $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$.
- ③ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với mọi $\alpha \neq k2\pi$.
- ④ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với mọi $\alpha \neq k\pi$.

1.2. Hai cung đối nhau: α và $-\alpha$

- ① $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- ② $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- ③ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- ④ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

1.3. Hai cung phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

- ① $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- ② $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- ③ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- ④ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

1.4. Hai cung bù nhau: α và $\pi - \alpha$

- ① $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- ② $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- ③ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- ④ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

1.5. Hai cung hơn kém nhau π : α và $\pi + \alpha$

- ① $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
- ② $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
- ③ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
- ④ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

1.6. Công thức cộng

- ① $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$
- ② $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$
- ③ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$

1.7. Công thức nhân

- ① $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- ② $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- ③ $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$
- ④ $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

1.8. Công thức hạ bậc

- ① $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
- ② $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- ③ $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

1.9. Công thức biến đổi tích thành tổng

- ① $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
- ② $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- ③ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$

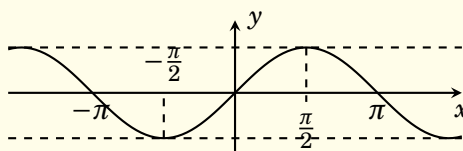
1.10. Công thức biến đổi tổng thành tích

- ① $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
- ② $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
- ③ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
- ④ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$

2. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

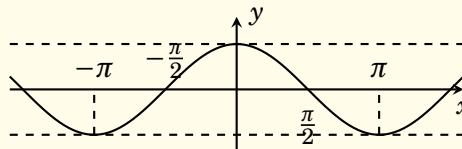
2.1. Hàm số $y = \sin x$

- ① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- ② Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
- ③ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.
- ④ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- ⑤ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- ⑥ Đồ thị hàm số $y = \sin x$:



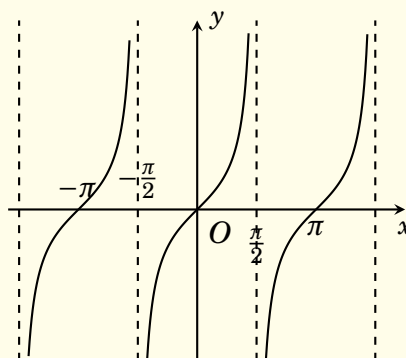
2.2. Hàm số $y = \cos x$

- ① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- ② Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
- ③ Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$.
- ④ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- ⑤ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- ⑥ Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



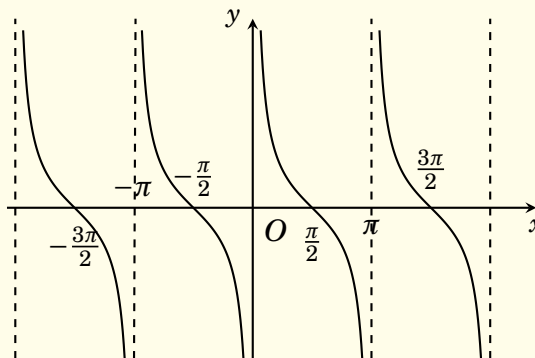
2.3. Hàm số $y = \tan x$.

- ① Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- ② Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- ③ Là hàm số lẻ.
- ④ Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
- ⑤ Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.
- ⑥ Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.
- ⑦ Đồ thị



2.4. Hàm số $y = \cot x$.

- ① Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- ② Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- ③ Là hàm số lẻ.
- ④ Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
- ⑤ Hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$.
- ⑥ Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.
- ⑦ Đồ thị:



3 CÁC DẠNG TOÁN.

📁 Dạng 1. Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số

Phương pháp:

- ① Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$ và $f(x)$ tồn tại.
- ② Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$ và $f(x)$ tồn tại.
- ③ Hàm số $y = \tan u(x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ④ Hàm số $y = \cot u(x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số

① $y = \sin \frac{x+1}{\sqrt{3x+5}}$.

② $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

③ $y = \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Lời giải:

📁 Dạng 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

- ① **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác.
Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D \Rightarrow D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.
- ② **Bước 2.** Tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau
 - Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

① Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

② Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể

$$\cos(-a) = \cos a, \sin(-a) = -\sin a, \tan(-a) = -\tan a, \cot(-a) = -\cot a.$$

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

① $y = 3x \sin 2x$.

② $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 3x}$.

③ $y = \sin x + \cos x$.

Lời giải:

Dạng 3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

$$\textcircled{1} \quad M = \max_D f(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad m = \min_D f(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad -1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1.$$

$$\textcircled{2} \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1.$$

$$\textcircled{3} \quad 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1, 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1.$$

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

$$\textcircled{1} \quad y = 3 \sin 2x + 7.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \sqrt{3 + 2 \cos x} - 5.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \sin^2 x - 2 \sin x + 5.$$

Lời giải:

B TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số:

$$\textcircled{1} \quad y = \cos \sqrt{x}$$

$$\textcircled{2} \quad y = \cos \frac{x}{x+1}$$

$$\textcircled{3} \quad y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\textcircled{4} \quad y = \sqrt{\frac{2+\cos x}{1+\sin x}}$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{1+2\cos x}{\sin x}$$

$$\textcircled{6} \quad y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$$

$$\textcircled{7} \quad y = \cot \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\textcircled{8} \quad y = \tan \left(2x + \frac{\pi}{5} \right)$$

$$\textcircled{9} \quad y = \sqrt{\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}}$$

$$\textcircled{10} \quad y = \cos \frac{2-x}{x-1}$$

$$\textcircled{11} \quad y = \sin \frac{2-x}{x^2-1}$$

$$\textcircled{12} \quad y = \tan \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\textcircled{13} \quad y = \frac{5+x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

$$\textcircled{14} \quad y = \tan x + \cot x$$

$$\textcircled{15} \quad y = \frac{\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$$

🔥 **Câu 2.** Xét tính chẵn lẻ của hàm số.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y &= x \cos 3x \\ \textcircled{2} \quad y &= \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \\ \textcircled{3} \quad y &= x^3 \sin 2x \\ \textcircled{4} \quad y &= \frac{x^3 - \sin x}{\cos 2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad y &= \frac{\cos 2x}{x} \\ \textcircled{6} \quad y &= x - \sin x \\ \textcircled{7} \quad y &= \sqrt{1 - \cos x} \\ \textcircled{8} \quad y &= 1 + \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad y &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) \\ \textcircled{10} \quad y &= \tan x + \cot x \\ \textcircled{11} \quad y &= \tan^7 2x \cdot \sin 5x \\ \textcircled{12} \quad y &= \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

🔥 **Câu 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y &= 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \\ \textcircled{2} \quad y &= \sqrt{1 + \sin x} - 3 \\ \textcircled{3} \quad y &= 2 \sin x + 1 \\ \textcircled{4} \quad y &= 3 \cos x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad y &= 4 \cos^2 x - 4 \cos x + 2 \\ \textcircled{6} \quad y &= \sin x + \cos x + 2 \\ \textcircled{7} \quad y &= 4 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x + \cos x \\ \textcircled{8} \quad y &= \sqrt{2 \sin x + 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad y &= \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \\ \textcircled{10} \quad y &= -\sin^2 x - \cos x + 2 \\ \textcircled{11} \quad y &= \cos^2 x + 2 \sin x + 2 \\ \textcircled{12} \quad y &= \sqrt{2 - \cos 2x + \sin^2 x} \end{aligned}$$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{7} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

🔥 **Câu 2.** Tìm tập xác định của hàm số sau $y = \tan(2x + \frac{\pi}{3})$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

🔥 **Câu 3.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 3x - 1}$

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$ **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$ **C.** $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

🔥 **Câu 4.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{1 + \sin 4x}}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

🔥 **Câu 5.** Cho hàm số: $y = \cos \sqrt{x-1} + 2x$. Tập xác định của hàm số là:

A. $[1; +\infty).$

B. $(1; +\infty).$

C. $(-\infty; 1).$

D. $\mathbb{R}.$

🔥 **Câu 6.** Tìm tập xác định của hàm số sau $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

🔥 **Câu 7.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x}$ là

A. $D = (-\infty; -1)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = (-1; +\infty)$.

🔥 **Câu 8.** Tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ không phải là tập xác định của hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

B. $y = \frac{1 - \cos x}{2 \sin x}$.

C. $y = \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}$.

D. $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$.

🔥 **Câu 9.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{4 \sin x - 5}{2 \cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

🔥 **Câu 10.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{3 \tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

🔥 **Câu 11.** Cho số nguyên k . Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng

A. $(k2\pi; \pi + k2\pi).$

B. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right).$

C. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi \right).$

D. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi \right).$

🔥 **Câu 12.** Hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right).$

B. $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right).$

C. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$

D. $\left(0; \frac{\pi}{4} \right).$

🔥 **Câu 13.** Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; \pi).$

B. $\left(0; \frac{\pi}{2} \right).$

C. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$

D. $(0; 2\pi).$

🔥 **Câu 14.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right).$

B. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right).$

C. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right).$

D. Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right).$

🔥 **Câu 15.** Hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = \cot x$.

🔥 **Câu 16.** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = -2\cos x$.

B. $y = -2\sin x$.

C. $y = 2\sin(-x)$.

D. $y = \sin x - \cos x$.

🔥 **Câu 17.** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = -2\cos x$.

B. $y = -2\sin x$.

C. $y = -2\sin^2 x + 2$.

D. $y = -2\cos x + 2$.

🔥 **Câu 18.** Hàm số $y = \sin x \cdot \cos^2 x + \tan x$ là

A. Hàm số chẵn.

C. Vừa chẵn vừa lẻ.

B. Hàm số lẻ.

D. Không chẵn không lẻ.

🔥 **Câu 19.** Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

B. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

🔥 **Câu 20.** Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = 1 - \sin x$.

B. $y = |\sin x|$.

C. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

D. $y = \sin x + \cos x$.

🔥 **Câu 21.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

A. $y = x + 1$.

B. $y = x^2$.

C. $y = \frac{x-1}{x+2}$.

D. $y = \sin x$.

🔥 **Câu 22.** Trong các hàm số sau hàm số nào tuần hoàn với chu kỳ π ?

A. $y = \sin 2x$.

B. $y = \tan 2x$.

C. $y = \cos x$.

D. $y = \cot \frac{x}{2}$.

🔥 **Câu 23.** Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ:

A. $T = k\pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = k2\pi$.

D. $T = \pi$.

🔥 **Câu 24.** Trong các hàm số sau, hàm số nào tuần hoàn với chu kỳ 2π ?

A. $y = \cos 2x$.

B. $y = \sin x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = \cot x$.

🔥 **Câu 25.** Chu kì tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$ là:

- A. 3π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. 2π . D. π .

🔥 **Câu 26.** Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $T = \frac{2\pi}{5}$. B. $T = \frac{5\pi}{2}$. C. $T = \frac{\pi}{2}$. D. $T = \frac{\pi}{8}$.

🔥 **Câu 27.** Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$.

- A. $T = 4\pi$. B. $T = \pi$. C. $T = 2\pi$. D. $T = \frac{\pi}{2}$.

🔥 **Câu 28.** Chọn phát biểu đúng.

- A. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \cot x$ đều là hàm số chẵn.
 B. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \cot x$ đều là hàm số lẻ.
 C. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cot x$, $y = \tan x$ đều là hàm số chẵn.
 D. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cot x$, $y = \tan x$ đều là hàm số lẻ.

🔥 **Câu 29.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2\sin x + 3}$

A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1.$

B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2.$

C. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}.$

D. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3.$

🔥 **Câu 30.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 - \sqrt{2\cos^2 x + 1}$

A. $\max y = 1, \min y = 1 - \sqrt{3}.$

B. $\max y = 3, \min y = 1 - \sqrt{3}.$

C. $\max y = 2, \min y = 1 - \sqrt{3}.$

D. $\max y = 0, \min y = 1 - \sqrt{3}.$

🔥 **Câu 31.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

A. $\min y = -2, \max y = 4.$

B. $\min y = 2, \max y = 4.$

C. $\min y = -2, \max y = 3.$

D. $\min y = -1, \max y = 4.$

🔥 **Câu 32.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2\cos^2 3x$

A. $\min y = 1, \max y = 2.$

B. $\min y = 1, \max y = 3.$

C. $\min y = 2, \max y = 3.$

D. $\min y = -1, \max y = 3.$

🔥 **Câu 33.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + \sqrt{2 + \sin 2x}$

A. $\min y = 2, \max y = 1 + \sqrt{3}.$

B. $\min y = 2, \max y = 2 + \sqrt{3}.$

C. $\min y = 1, \max y = 1 + \sqrt{3}.$

D. $\min y = 1, \max y = 2.$

🔥 **Câu 34.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$

A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4.$

B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3.$

C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2.$

D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4.$

🔥 **Câu 35.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2\sin 3x + 1$

A. $\min y = -2, \max y = 3.$

B. $\min y = -1, \max y = 2.$

C. $\min y = -1, \max y = 3.$

D. $\min y = -3, \max y = 3.$

🔥 **Câu 36.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 4\cos^2 2x$

A. $\min y = -1, \max y = 4.$

B. $\min y = -1, \max y = 7.$

C. $\min y = -1, \max y = 3.$

D. $\min y = -2, \max y = 7.$

🔥 **Câu 37.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + 2\sqrt{4 + \cos 3x}$

A. $\min y = 1 + 2\sqrt{3}, \max y = 1 + 2\sqrt{5}.$

C. $\min y = 1 - 2\sqrt{3}, \max y = 1 + 2\sqrt{5}.$

B. $\min y = 2\sqrt{3}, \max y = 2\sqrt{5}.$

D. $\min y = -1 + 2\sqrt{3}, \max y = -1 + 2\sqrt{5}.$

🔥 **Câu 38.** Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{1 + \sqrt{2 + \sin^2 x}}$

A. $\min y = \frac{-3}{1 + \sqrt{3}}, \max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}.$

C. $\min y = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}, \max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}.$

B. $\min y = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}, \max y = \frac{4}{1 + \sqrt{2}}.$

D. $\min y = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}, \max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}.$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG TRÌNH: $\sin x = m$

- Nếu: $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu: $|m| \leq 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$. Khi đó:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$.

Các trường hợp đặc biệt:

$$\begin{aligned} \sin x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ \sin x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi. \end{aligned}$$

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình

① $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

② $2\sin 2x = \sqrt{2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

2 PHƯƠNG TRÌNH: $\cos x = m$

- Nếu: $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu: $|m| \leq 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$. Khi đó:

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \cos \alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arccos m$.

Các trường hợp đặc biệt:

$$\begin{aligned}\cos x = 1 &\Leftrightarrow x = k2\pi. \\ \cos x = -1 &\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.\end{aligned}$$

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình

① $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

② $2\cos 2x = -\sqrt{2}.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

3**PHƯƠNG TRÌNH:** $\tan x = m$

$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$. Khi đó:

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan \alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arctan m$.

Các trường hợp đặc biệt:

$$\begin{aligned}\tan x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi.\end{aligned}$$

 **Ví dụ 3.** Giải phương trình

① $\tan x = \sqrt{3}.$

② $3\tan 2x + \sqrt{3} = 0.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

4 PHƯƠNG TRÌNH: $\cot x = m$

$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\cot \alpha = m$. Khi đó:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \cot \alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \operatorname{arccot} m$.

Các trường hợp đặc biệt:

$$\begin{aligned} \cot x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cot x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cot x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}k\pi. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình

① $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

② $3 \cot 3x = \sqrt{3}$.

Lời giải:

B TỰ LUẬN

Câu 1. Giải phương trình:

① $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

② $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$

③ $\sin(x-2) = \frac{2}{3}$

④ $\sin(x+20^\circ) = \sin 60^\circ$

⑤ $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

⑥ $2 \cos 2x + 1 = 0$

⑦ $\cos(2x+15^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑧ $\tan 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

⑨ $\tan(4x+2) = 3$

⑩ $\tan(2x+10^\circ) = \tan 60^\circ$

⑪ $\cot 4x = \sqrt{3}$

⑫ $\cot(x+2) = 1$

⑬ $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right)$

⑭ $\cos(2x+1) = \cos(2x-1)$

⑮ $\tan \frac{2x+1}{6} + \tan \frac{1}{3} = 0$

⑯ $\sin 3x = \cos 2x$

⑰ $\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

⑱ $\cot(x+30^\circ) = \cot \frac{x}{2}$

⑲ $\sin 2x = \cos 3x$

⑳ $\sin x - \cos 2x = 0$

🔥 **Câu 2.** Giải các phương trình sau:

① $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$

② $4\cos^2 2x - 3 = 0$

③ $\cos^2 3x + \sin^2 2x = 1.$

④ $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$

⑤ $\sqrt{3} \cos x + \sin 2x = 0$

⑥ $\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$

⑦ $\frac{\tan x - \sqrt{3}}{2\cos x + 1} = 0$

🔥 **Câu 3.** Tìm các nghiệm của phương trình sau trong khoảng đã cho:

① $2\sin 2x + 1 = 0$ với $0 < x < \pi$

② $2\cos 3x - \sqrt{2} = 0$ với $0 < x < 2\pi$

③ $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ với $-2\pi < x < 2\pi$

④ $\cot(x - 5) = \sqrt{3}$ với $-\pi < x < \pi.$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Phương trình $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$ có nghiệm là

A. $x = k\pi.$

B. $x = (2k + 1)\pi.$

C. $x = k2\pi.$

D. $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$

🔥 **Câu 2.** Tìm nghiệm của phương trình $1 + 2\cos 2x = 0.$

A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi.$

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{3} \pm k\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

❖ **Câu 3.** Phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm khi

- A. $m > 1$. B. $m > 1$ hoặc $m < -1$.
C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m < -1$.

❖ **Câu 4.** Phương trình $\sin 2x = \frac{-1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thỏa $0 < x < \pi$

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

❖ **Câu 5.** Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có nghiệm thỏa $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

❖ **Câu 6.** Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 2\sin x = 0$ có nghiệm là

- A. $x = k2\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

❖ **Câu 7.** Phương trình $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$ có nghiệm là

A. $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.

B. $x = -\frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.

🔥 **Câu 8.** Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 3\pi$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

🔥 **Câu 9.** Phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

B. $x = \pm \frac{5\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}$.

D. $x = k\pi$.

🔥 **Câu 10.** Phương trình $2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

A. $\pm \frac{5\pi}{3} + k2\pi$.

B. $\pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

C. $\pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi$.

D. $\pm \frac{5\pi}{6} + k4\pi$.

🔥 **Câu 11.** Phương trình $3\cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

D. Vô nghiệm.

🔥 Câu 12. Phương trình $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

🔥 Câu 13. Phương trình $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

🔥 Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

- A. $-2 \leq m \leq 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 1$. D. $0 \leq m \leq 1$.

🔥 Câu 15. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

🔥 Câu 16. Tập nghiệm của phương trình $2\cos x = -\sqrt{2}$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{5\pi}{4} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

🔥 **Câu 17.** Tập nghiệm của phương trình $2\sin 2x + 1 = 0$ là

A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi; \frac{7\pi}{12} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{12} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

🔥 **Câu 18.** Số nghiệm của phương trình $\cos 3x = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

🔥 **Câu 19.** Phương trình $\cos x = \cos \alpha$ có nghiệm là

A. $x = \pm \alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = -\alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \pm \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 **Câu 20.** Tìm tất cả họ nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

A. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 Câu 21. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A. $\sin x = -2.$

B. $\cos x = 2.$

C. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

D. $\sin 2x = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

🔥 Câu 22. Phương trình nào dưới đây vô nghiệm?

A. $\cos x = \frac{\pi}{3}.$

B. $\cos^2 x = \frac{3}{4}.$

C. $\sqrt{3}\tan x = 30.$

D. $\sin x = \frac{\pi}{3}.$

🔥 Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x = m$ có nghiệm.

A. $m \in (-1; 1).$

B. $m \in [-1; 1].$

C. $m \in (-2; 2).$

D. $m \in [-2; 2].$

🔥 Câu 24. Nghiệm đặc biệt nào sau đây là sai?

A. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

B. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

C. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi.$

D. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

🔥 **Câu 25.** Phương trình $\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

🔥 **Câu 26.** Nghiệm của phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1$ là

- A. $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

🔥 **Câu 27.** Phương trình $\sin x = 1$ có một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

- A. $x = \frac{\pi}{4}$. B. $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = \frac{\pi}{2}$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

🔥 **Câu 28.** Số nghiệm thực của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là

- A. 12. B. 11. C. 20. D. 21.

🔥 **Câu 29.** Phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ có hai họ nghiệm có dạng $x = \alpha + k\pi$ và $x = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0 < \beta < \frac{3\pi}{4}\right)$. Khi đó, tính $\beta^2 - \alpha^2$?

A. $\frac{\pi^2}{3}$.

B. $-\frac{\pi^2}{3}$.

C. $\frac{25\pi^2}{72}$.

D. $-\frac{25\pi^2}{72}$.

🔥 Câu 30. Giải phương trình $\tan 3x \cdot \cot 2x = 1$.

A. $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. Vô nghiệm.

🔥 Câu 31. Số nghiệm của phương trình $\cos x - 1 = 0$ trên nửa khoảng $[0; 6\pi)$ là

A. x1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

🔥 Câu 32. Tổng nghiệm lớn nhất và nhỏ nhất của phương trình $\cos 2x + \sin x = 0$ trên nửa khoảng $[0; 2\pi)$

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{7\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{7\pi}{6}$.

🔥 Câu 33. Trong $[0; 2\pi)$, phương trình $\sin x = 1 - \cos^2 x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 34. Tập nghiệm của phương trình $\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right)$ là

- A. $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z}\right\}$. C. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 35. Tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là

- A. $-\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $-\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (1)$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$.

Cách giải: Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ và đặt

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2).$

! Chú ý: (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$.

Vi dụ 1. Giải phương trình

① $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1.$

② $\cos 2x + \sin 2x = -1.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương trình bậc hai đối với phương trình lượng giác là phương trình có một trong 4 dạng sau:

— $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$. Cách giải: $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$.

— $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$. Cách giải: $t = \cos x, -1 \leq t \leq 1$.

— $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$. Cách giải: $t = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

— $a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$. Cách giải: $t = \cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vi dụ 2. Giải phương trình

① $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0.$

② $2 \cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Cách giải:

- Xét xem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm của phương trình không.
- Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\cos x \neq 0$), chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ (hoặc $\sin^2 x$) ta được phương trình bậc 2 theo $\tan x$ (hoặc $\cot x$).

Chú ý:



- Áp dụng công thức hạ bậc và công thức nhân đôi ta có thể đưa phương trình về dạng bậc nhất theo $\sin 2x$ và $\cos 2x$.
- Phương trình $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ cũng được xem là phương trình đẳng cấp bậc hai vì $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.
- Làm tương tự cho phương trình đẳng cấp bậc n .

Ví dụ 3. Giải phương trình

① $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$

② $3 \sin^2 2x - 3 \sin 2x \cos 2x + 2 \cos^2 2x = 1.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Giải phương trình:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| ① $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1.$ | ⑧ $3\sin x + 4\cos x = 5.$ |
| ② $\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 2.$ | ⑨ $\sin 2x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos 2x.$ |
| ③ $3\cos x + 4\sin x = -5.$ | ⑩ $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x.$ |
| ④ $\sin x - 7\cos x = 7.$ | ⑪ $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$ |
| ⑤ $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}.$ | ⑫ $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x.$ |
| ⑥ $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1.$ | ⑬ $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$ |
| ⑦ $2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = 5.$ | |

🔥 Câu 2. Giải phương trình:

- | | |
|---|---------------------------------|
| ① $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$ | ⑨ $\cos 2x + \cos x + 1 = 0.$ |
| ② $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0.$ | ⑩ $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0.$ |
| ③ $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0.$ | ⑪ $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0.$ |
| ④ $-\sin^2 x - 4\sin x + 5 = 0.$ | ⑫ $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0.$ |
| ⑤ $\tan^2 x + 3\tan x = 0.$ | ⑬ $1 + \cos 2x = 2\cos x.$ |
| ⑥ $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$ | ⑭ $9\sin x + \cos 2x = 8.$ |
| ⑦ $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0.$ | ⑮ $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0.$ |
| ⑧ $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0.$ | |

🔥 Câu 3. Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| ① $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$ | ⑦ $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0.$ |
| ② $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$ | ⑧ $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x.$ |
| ③ $\sin 2x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x.$ | ⑨ $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x.$ |
| ④ $2\sin^2 2x - 2\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 2.$ | ⑩ $\sqrt{3}\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3}.$ |
| ⑤ $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 2\cos^2 x = \frac{1}{2}.$ | ⑪ $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1.$ |
| ⑥ $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$ | ⑫ $4\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 9\cos^2 x = 0.$ |

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ là

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 2. Phương trình $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$ **B.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$ **C.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$ **D.** $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

Câu 3. Phương trình $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 4. Số nghiệm phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$ với $x \in [0; \pi]$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

🔥 **Câu 5.** Nghiệm phương trình $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin x$ là

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 **Câu 6.** Nghiệm phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ là:

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 **Câu 7.** Nghiệm phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ có hai họ nghiệm có dạng $x = \alpha + k2\pi; x = \beta + k2\pi, \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\alpha \cdot \beta$ là

A. $-\frac{\pi^2}{12}.$

B. $-\frac{5\pi^2}{144}.$

C. $\frac{5\pi^2}{144}.$

D. $\frac{\pi^2}{12}.$

🔥 **Câu 8.** Nghiệm phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) - \sqrt{3} \cos(\pi - 2x) = 1$ là

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 Câu 9. Nghiệm phương trình $\cos 2x + \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x)$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 Câu 10. Phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$ B. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$ C. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$ D. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{2}.$

🔥 Câu 11. Tìm điều kiện cần và đủ của a, b, c để phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm?

A. $a^2 + b^2 \geq c^2.$ B. $a^2 + b^2 = c^2.$ C. $a^2 + b^2 \leq c^2.$ D. $a^2 + b^2 > c^2.$

🔥 **Câu 12.** Nghiệm của phương trình $\cos x + \sin x = 1$ là

A. $x = k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

🔥 **Câu 13.** Tìm m để phương trình $5\cos x - m\sin x = m + 1$ có nghiệm.

A. $m \leq -13.$

B. $m \leq 12.$

C. $m \leq 24.$

D. $m \geq 24.$

🔥 **Câu 14.** Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm?

A. $3\sin x - 2\cos x = 5.$

B. $\sin x - \cos x = 2.$

C. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 3.$

D. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2.$

🔥 **Câu 15.** Tìm m để phương trình $2\sin^2 x + m.\sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

A. $m \leq 0; m \geq \frac{4}{3}.$

B. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}.$

C. $m < 0; m > \frac{4}{3}.$

D. $0 < m < \frac{4}{3}.$

🔥 **Câu 16.** Điều kiện để phương trình $4\sin x + m\cos x = 5$ có nghiệm là

A. $-3 < m < 3.$

B. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 3 \end{cases}.$

C. $-3 < m.$

D. $m > 3.$

🔥 Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\cos x - m\sin x - 2 = 3m$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq \frac{-3}{2} \end{cases}$

B. $\frac{-3}{2} < m < 0$.

C. $\begin{cases} m > 0 \\ m < \frac{-3}{2} \end{cases}$

D. $\frac{-3}{2} \leq m \leq 0$.

🔥 Câu 18. Tìm m để phương trình $m\sin x + 5\cos x = m + 1$ có nghiệm

A. $m \leq 6$.

B. $m \leq 12$.

C. $m \leq 24$.

D. $m \leq 3$.

🔥 Câu 19. Phương trình $\tan^2 x - 5\tan x + 4 = 0$ tương đương với

A. $\begin{cases} \cot x = 1 \\ \tan x = 4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = -4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \tan x = 1 \\ \cot x = 4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} \tan x = -1 \\ \cot x = -4 \end{cases}$

🔥 Câu 20. Nghiệm của phương trình lượng giác: $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa mãn điều kiện $0 < x < \pi$ là

A. $x = \frac{\pi}{2}$.

B. $x = 0$.

C. $x = \pi$.

D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

🔥 **Câu 21.** Phương trình $\sin^2 x + 3 \sin x - 4 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

🔥 **Câu 22.** Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

🔥 **Câu 23.** Nghiệm của phương trình $\frac{1}{\cos^2 x} = 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 3$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan 2 + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

🔥 **Câu 24.** Tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x + 2 \sin x - 1 = 0$ là

- A. $S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \{ k2\pi; \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$. D. $S = \left\{ k\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

🔥 **Câu 25.** Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 5 \sin x = 4$ thuộc $[0; 2\pi]$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

🔥 **Câu 26.** Cho phương trình $\cos 2x - \cos x + 2 = 0$. Đặt $t = \cos x$, phương trình đã cho trở thành
A. $2t^2 - t + 2 = 0$. **B.** $-2t^2 - t + 2 = 0$. **C.** $2t^2 - t + 1 = 0$. **D.** $-2t^2 - t + 3 = 0$.

🔥 **Câu 27.** Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$ là

- A.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pi + k2\pi$. **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$.
C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

🔥 **Câu 28.** Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$ là

- A.** $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **D.** $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

🔥 **Câu 29.** Nghiệm của phương trình $\tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0$ là

- A.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

🔥 Câu 30. Phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

🔥 Câu 31. Phương trình $\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x - \sqrt{3} = 0$ có hai họ nghiệm có dạng $x = \alpha + k\pi$, $x = \beta + k\pi$ ($0 \leq \alpha, \beta < \pi$). Khi đó $\alpha\beta$ bằng

- A. $\frac{\pi^2}{12}$. B. $\frac{5\pi^2}{18}$. C. $-\frac{\pi^2}{12}$. D. $-\frac{\pi^2}{18}$.

🔥 Câu 32. Cho phương trình $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ (*). Bằng cách đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$) thì phương trình (*) trở thành phương trình nào sau đây?

- A. $2t^2 + t = 0$. B. $2t^2 - t = 0$. C. $-2t^2 - t = 0$. D. $2t^2 + t - 2 = 0$.

🔥 Câu 33. Cho phương trình $4\cos 2x - \cos x + 2 = 0$. Bằng cách đặt ẩn phụ $t = \cos x$ ta đưa được phương trình ẩn t có dạng:

- A. $8t^2 - t - 2 = 0$. B. $-4t^2 - t + 6 = 0$. C. $-8t^2 - t + 6 = 0$. D. $4t^2 - t - 2 = 0$.

Câu 34. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = -2$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 35. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $T = \frac{7\pi}{8}.$

B. $T = \frac{21\pi}{8}.$

C. $T = \frac{11\pi}{4}.$

D. $T = \frac{3\pi}{4}.$

Câu 36. Phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm $x \in (-2\pi; 2\pi)$?

A. 2.

B. 8.

C. 6.

D. 4.

Câu 37. Cho phương trình $2\sin^2 x - \sin 2x - 5\cos^2 x - 1 = 0$. Khi đặt $t = \tan x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2 - t - 6 = 0.$

B. $t^2 - t - 3 = 0.$

C. $t^2 - 2t - 6 = 0.$

D. $t^2 - t - 6 = 0.$

Câu 38. Tập nghiệm S của phương trình $\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x = -1$ là

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; \arctan \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

🔥 Câu 39. Nghiệm phương trình $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ là

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-3) + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan 3 + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 3 + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 Câu 40. Nghiệm phương trình $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + k2\pi \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + k\pi \end{cases}.$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + k\pi \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + k2\pi \end{cases}.$

🔥 Câu 41. Nghiệm phương trình $4\sin^2 x - 5\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}.$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{cases}.$

D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

🔥 **Câu 42.** Nghiệm phương trình $-4\sin^2 x + 6\sqrt{3}\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0$ là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k2\pi \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k2\pi \end{cases}$$

🔥 **Câu 43.** Phương trình $2\sin^2 x + 3\cos^2 x = 5\sin x \cos x$ có 2 họ nghiệm có dạng $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; a, b nguyên dương, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $a + b$ bằng?

A. 11.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

🔥 **Câu 44.** Nghiệm phương trình $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$ là

A.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + k\pi \end{cases}$$

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

B.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + k2\pi \end{cases}$$

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi.$

🔥 **Câu 45.** Phương trình $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

🔥 **Câu 46.** Nghiệm phương trình $(\sqrt{3}+1)\sin^2 x - 2\sin x \cos x - (\sqrt{3}-1)\cos^2 x = 1$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 **Câu 47.** Phương trình $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 1$ có hai họ nghiệm có dạng $x = \alpha + k\pi$, $x = \beta + k\pi$. Khi đó $\alpha + \beta$ là

A. $\frac{\pi}{6}.$

B. $\frac{\pi}{3}.$

C. $\frac{\pi}{12}.$

D. $-\frac{\pi}{2}.$

🔥 **Câu 48.** Nghiệm phương trình $4\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x = 0$ là

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

🔥 **Câu 49.** Nghiệm phương trình $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cdot \cos x$ là

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

 **Câu 50.** Số nghiệm phương trình $2\cos^3 x = \sin x$ với $x \in [0; 2\pi]$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

CHƯƠNG 2

TỔ HỢP. XÁC SUẤT
NHỊ THỨC NEWTON

BÀI 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 QUY TẮC CỘNG

Định nghĩa 1. Một công việc X được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \dots, A_k$, trong đó

- 1) Phương án A_1 có n_1 cách thực hiện;
- 2) Phương án A_2 có n_2 cách thực hiện;
- 3) ...
- 4) Phương án A_k có n_k cách thực hiện.

Khi đó số cách hoàn thành công việc X là $n(X) = n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i$ cách.

Ví dụ 1. Trong hộp có 15 quả cầu trắng, 10 quả cầu xanh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 1 quả cầu?

Lời giải:

.....

.....

2 QUY TẮC NHÂN

Định nghĩa 2. Giả sử một nhiệm vụ X nào đó được hoàn thành lần lượt qua k giai đoạn $A_1, A_2, \dots, A_k$:

- 1) Giai đoạn A_1 có n_1 cách làm;
- 2) Giai đoạn A_2 có n_2 cách làm;
- 3) ...
- 4) Giai đoạn A_k có n_k cách làm.

Khi đó công việc X có số cách thực hiện là $n(X) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k = \prod_{i=1}^k n_i$ cách.

Ví dụ 2. Trong hộp có 15 quả cầu trắng, 10 quả cầu xanh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 1 quả cầu trắng và 1 quả cầu xanh?

Lời giải:

.....

.....

Dấu hiệu chia hết:

Gọi $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ là số tự nhiên có $n + 1$ chữ số ($a_n \neq 0$). Khi đó:

— $N : 2 \Leftrightarrow a_0 : 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

— $N : 5 \Leftrightarrow a_0 : 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 5\}$.

— $N : 4$ (hay 25) $\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4$ (hay 25).

— $N : 8$ (hay 125) $\Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 8$ (hay 125).

— $N : 3$ (hay 9) $\Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n : 3$ (hay 9).

B TỰ LUẬN

Câu 1. Có 2 cuốn sách Toán A và B khác nhau, hai cuốn sách Vật lý C và D khác nhau. Cần chọn đúng 2 cuốn sách, hỏi có bao nhiêu cách.

Câu 2. Từ tập hợp $X = \{a, b, c\}$ chọn ra 1 tập hợp con của A . Hỏi có mấy cách.

Câu 3. Từ thành phố A đến thành phố B có 6 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 7 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C , biết phải đi qua thành phố B .

Câu 4. Một hộp có 12 viên bi trắng, 10 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

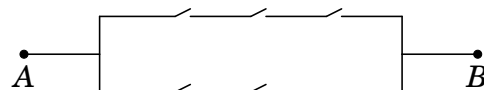
Câu 5. Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Hỏi một người đi chợ:

- Có mấy cách vào và ra chợ?
- Có mấy cách vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau?

Câu 6. Có 8 quyển sách Toán, 7 quyển sách Lí, 5 quyển sách Hóa. Một học sinh chọn 1 quyển trong bất kỳ 3 loại trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Câu 7.

Cho sơ đồ mạch điện như hình vẽ bên cạnh. Hỏi có bao nhiêu cách đóng - mở 5 công tắc để có được dòng điện đi từ A đến B.



Câu 8. Đề thi học kỳ môn Hóa gồm hai phần: trắc nghiệm và tự luận. Trong ngân hàng đề thi có 15 đề trắc nghiệm và 8 đề tự luận. Hỏi có bao nhiêu cách ra đề?

Câu 9. Một ca sĩ có 30 cái áo và 20 cái quần, trong đó có 18 cái áo màu xanh và 12 cái áo màu đỏ; 12 quần xanh và 8 quần đỏ. Có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo khác màu để người ca sĩ này đi trình diễn?

🔥 **Câu 10.** Trong lớp 11A có 39 học sinh trong đó có học sinh tên Chiến, lớp 11B có 32 học sinh trong đó có học sinh tên Tranh. Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp mà không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc?

🔥 **Câu 11.** Trong lớp 11A có 50 học sinh, trong đó có 2 học sinh tên Ưu và Tiên. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh đi thi mà trong đó có mặt ít nhất 1 trong 2 học sinh tên Ưu và tên Tiên?

🔥 **Câu 12.** Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông hồng, 7 bông cúc, 5 bông đào. Chọn ngẫu nhiên 4 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó hoa được chọn có đủ cả ba loại?

🔥 **Câu 13.** Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được mấy số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt.

🔥 **Câu 14.** Từ các phần tử của $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số khác nhau.

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nga đến cửa hàng văn phòng phẩm để mua quà tặng bạn. Trong cửa hàng có ba mặt hàng Bút, vở và thước, trong đó có 5 loại bút, 7 loại vở và 8 loại thước. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một món quà gồm một vở và một thước?

- A. 56. B. 280. C. 20. D. 35.

Câu 2. Từ thành phố A tới thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B tới thành phố C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A tới C qua B?

- A. 12. B. 6. C. 24. D. 7.

Câu 3. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



- A. 18. B. 9. C. 24. D. 10.

Câu 4. Một người có 7 cái áo và 11 cái cà vạt. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn ra một chiếc áo và cà vạt?

- A. 7. B. 18. C. 77. D. 11.

🔥 **Câu 5.** Trong một hộp bút có 2 bút đỏ, 3 bút đen và 2 bút chì. Hỏi có bao nhiêu cách để lấy một cái bút?

A. 6.

B. 2.

C. 12.

D. 7.

🔥 **Câu 6.** Cho 6 chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số lập từ 6 chữ số đó.

A. 36.

B. 18.

C. 256.

D. 108.

🔥 **Câu 7.** Cho 6 chữ số 2, 3, 4, 6, 7, 9. Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm 3 chữ số được lấy từ trên?

A. 20.

B. 36.

C. 108.

D. 40.

🔥 **Câu 8.** Có bao nhiêu chữ số chẵn có 4 chữ số

A. 5400.

B. 4500.

C. 4800.

D. 50000.

🔥 **Câu 9.** Một tổ có 7 nam và 5 nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra một học sinh làm trực nhật. Hỏi giáo viên đó có bao nhiêu cách chọn?

A. 7.

B. 12.

C. 5.

D. 35.

🔥 **Câu 10.** Trên giá sách có 8 quyển sách tiếng Anh khác nhau, 10 quyển sách tiếng Việt khác nhau và 6 quyển sách tiếng Pháp khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ba quyển sách tiếng khác nhau?

- A. 24. B. 408. C. 840. D. 480.

🔥 **Câu 11.** Từ các chữ số 1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau?

- A. 60. B. 120. C. 3125. D. 24.

🔥 **Câu 12.** Từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ, mỗi số có ba chữ số khác nhau?

- A. 16. B. 36. C. 32. D. 26.

🔥 **Câu 13.** Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách cử ra hai bạn trong đó có 1 bạn nam và 1 bạn nữ?

- A. 375. B. 25. C. 15. D. 40.

🔥 **Câu 14.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên là số lẻ.

A. 2520.

B. 1400.

C. 5040.

D. 4536.

🔥 **Câu 15.** Từ A đến B có 3 con đường, từ B đến C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường từ A đến C (qua B) và trở về từ C đến A (qua B) và không đi lại các con đường đã đi rồi?

A. 132.

B. 72.

C. 23.

D. 18.

🔥 **Câu 16.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 10 là

A. 3260.

B. 3168.

C. 5436.

D. 3024.

🔥 **Câu 17.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng của ba số này bằng 8.

A. 12.

B. 8.

C. 6.

D. 9.

Câu 18. Bạn Hòa có hai áo màu khác nhau và ba quần kiểu khác nhau. Hỏi Hòa có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo?

A. 6.

B. 10.

C. 5.

D. 20.

Câu 19. Từ thành phố A đến thành phố B có 2 con đường, từ B đến C có 5 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C, qua B?

A. 7.

B. 1.

C. 45.

D. 10.

Câu 20. Từ các chữ số 1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số?

A. 10.

B. 25.

C. 120.

D. 20.

Câu 21. Có bao nhiêu số điện thoại gồm 6, trong đó các chữ số đều là chữ số lẻ?

A. 1000000.

B. 15625.

C. 46656.

D. 120.

Câu 22. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100?

A. 20.

B. 42.

C. 36.

D. 120.

🔥 **Câu 23.** Từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau mà số đó chia hết cho 10.

- A. 4. B. 16. C. 20. D. 36.

🔥 **Câu 24.** Cho 6 chữ số 2,3,4,5,6,7. Hỏi có bao nhiêu số gồm 3 chữ số được lập thành từ 6 chữ số đó

- A. 36. B. 18. C. 256. D. 216.

🔥 **Câu 25.** Trên giá sách có 10 quyển sách Toán khác nhau, 8 quyển tiếng Anh khác nhau và 6 quyển Lí khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển khác loại?

- A. 80. B. 60. C. 480. D. 188.

🔥 **Câu 26.** Trong một hộp bút có 5 bút xanh và 4 bút chì. Hỏi có bao nhiêu cách để lấy một cái bút?

- A. 4. B. 20. C. 9. D. 5.

🔥 Câu 27. Cần mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau, các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn

A. 64.

B. 16.

C. 32.

D. 20.

🔥 Câu 28. Trong cửa hàng có ba mặt hàng: bút, vở và thước, trong đó có 10 loại bút, 8 loại vở và 7 loại thước. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một món quà gồm một vở và một thước?

A. 280.

B. 35.

C. 56.

D. 20.

🔥 Câu 29. Đi từ A đến B có 3 con đường, đi từ B đến C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C mà phải qua B .

A. 14.

B. 13.

C. 12.

D. 11.

🔥 Câu 30. Tổ Văn của một trường phổ thông có 4 giáo viên nam và 5 giáo viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một giáo viên trong tổ đi thi giáo viên dạy giỏi cấp trường?

A. 20.

B. 9.

C. 4.

D. 5.

BÀI 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIAI THỪA

Định nghĩa 1. Cho số tự nhiên $n \geq 1$, ta định nghĩa n giai thừa, ký hiệu bởi $n!$, là

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$

Tính chất 1. Giai thừa có các tính chất sau đây:

- ① $n! = n \cdot (n - 1)! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$.
- ② Quy ước $0! = 1$.

2 HOÁN VỊ

Định nghĩa 2. Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

- ① Ta nói mỗi cách sắp xếp thứ tự của n phần tử tập hợp A là *một hoán vị* của n phần tử này.
- ② Số các hoán vị của n phần tử tập hợp A được ký hiệu bởi P_n .

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$

Nhận xét. Các hoán vị khác nhau chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp các phần tử.

Ví dụ 3. Giả sử muốn xếp 3 bạn A, B, C ngồi vào một bàn dài có 3 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho mỗi bạn ngồi một ghế?

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 4. Có 5 quyển sách toán, 4 quyển sách lý và 3 quyển sách hóa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách đó lên một kệ dài trong mỗi trường hợp sau:

- ① Các quyển sách được xếp tùy ý.
- ② Các quyển sách cùng môn được xếp cùng nhau.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

3 CHỈNH HỢP

Định nghĩa 3. Cho tập hợp S gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp S và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

! Khi giải bài toán chọn trên một tập X có n phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:

- Chỉ chọn k phần tử trong n phần tử của X ($1 \leq k < n$).
- Có sắp thứ tự các phần tử đã chọn.

Ví dụ 5. Lớp 11A có 20 học sinh nam, 25 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 bạn bầu vào ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 thủ quỹ?

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 6. Giả sử muốn chọn 3 trong 5 A, B, C, D, E bạn và sắp 3 bạn này vào một cái bàn dài. Hỏi có bao nhiêu cách?

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

4 TỔ HỢP

Định nghĩa 4. Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (hay một tổ hợp chập k của A). Ký hiệu C_n^k .

Số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Với quy ước $C_n^0 = 1$ thì với mọi số nguyên k thỏa $0 \leq k \leq n$ ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Tính chất 2. ① $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

② **Công thức Pascal:** $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ với $1 \leq k \leq n$.

Ví dụ 8. Lớp 11A có 20 học sinh nam, 25 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 bạn tham gia lao động?

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 9. Trong không gian, cho tập hợp gồm điểm, trong đó không có điểm nào thẳng hàng. Hỏi

① Có bao nhiêu đường thẳng tạo thành?

② Có bao nhiêu tam giác được tạo thành?

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Phân loại Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp

Ta phân loại như sau:

Hoán vị	Chỉnh hợp	Tổ hợp
Mỗi sắp xếp có thứ tự n phần tử của tập A là một hoán vị.	Mỗi sắp xếp có thứ tự k phần tử lấy trong n phần tử của tập A là một chỉnh hợp chập k của n phần tử	Mỗi tập con có k phần tử lấy trong n phần tử của tập A (khi liệt kê phần tử của A không cần thứ tự) là một tổ hợp chập k của n phần tử.
Số các hoán vị: $P_n = n!$	Số các chỉnh hợp: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Số các tổ hợp: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

B TỰ LUẬN

Câu 1. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $D = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!3!};$

b) $D = \frac{7!}{(m^2+m)} \cdot \frac{(m+2)!}{4!(m-1)!};$

c) $D = \frac{6!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{4!(m-1)!};$

d) $D = \frac{(n+1)C_n^2}{n(n^2-1)}.$

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a) $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}$

b) $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1};$

c) $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n;$

d) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x;$

e) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101;$

f) $2C_{x-1}^2 - C_x^1 = 79;$

g) $\frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_3} = 210;$

h) $\frac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \frac{225}{11};$

i) $x^2 - C_4^x \cdot x + C_3^2 \cdot C_3^1 = 0;$

j) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_x^{x-1} = 7(x-1);$

k) $6C_x^2 + 6C_x^3 = 7x^2 - 7x;$

l) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x;$

m) $2(A_n^3 + 3A_n^2) = P_{n+1};$

n) $2P_n + 6A_n^2 - P_n \cdot A_n^2 = 12.$

🔥 **Câu 3.** Một trường trung học phổ thông có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 20 học sinh trên thành một hàng ngang để đón đoàn đại biểu, nếu:

- Các học sinh được xếp bất kì?
- Các học sinh trong cùng một khối phải đứng kề nhau?

🔥 **Câu 4.** Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

- 6 học sinh này ngồi bất kì?
- A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế?
- A và F luôn ngồi cạnh nhau?
- A, B, C luôn ngồi cạnh nhau?
- A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau?

🔥 **Câu 5.** Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước gồm: Mỹ 5 người, Nga 5 người, Anh 4 người, Pháp 6 người, Đức 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách xếp cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch ngồi gần nhau?

🔥 **Câu 6.** Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:

- Bắt đầu bằng chữ số 5?
- Không bắt đầu bằng chữ số 1?
- Bắt đầu bằng 23?
- Không bắt đầu bằng 234?

Câu 7. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 7\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được lập từ X ?

Câu 8. Cho tập hợp $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số số này bằng 18.

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có 6 quyển sách toán, 5 quyển sách hóa và 3 quyển sách lí. Hỏi có bao nhiêu cách để lấy ra 2 quyển sách mỗi loại?

- A. 28. B. 366. C. 450. D. 90.

Câu 2. Lớp 11A1 có 41 học sinh trong đó có 21 bạn nam và 20 bạn nữ. Thứ 2 đầu tuần lớp phải xếp hàng chào cờ thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để 21 bạn nam xen kẽ với 20 bạn nữ?

- A. P_{41} . B. $P_{21} - P_{20}$. C. $2.P_{21}.P_{20}$. D. $P_{21} + P_{20}$.

Câu 3. Có 6 quyển sách toán, 5 quyển sách hóa và 3 quyển sách lí. Hỏi có bao nhiêu cách để xếp lên giá sách sao cho các quyển sách cùng loại được xếp cạnh nhau?

A. 518400.

B. 30110400.

C. 86400.

D. 46800.

🔥 **Câu 4.** Xếp 7 người vào một băng ghế có 9 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

A. 36.

B. 5040.

C. 181440.

D. 2250.

🔥 **Câu 5.** Có 12 quyển sách khác nhau. Chọn ra 5 cuốn, hỏi có bao nhiêu cách?

A. 95040.

B. 792.

C. 120.

D. 5040.

🔥 **Câu 6.** Từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5, 6, 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau

A. 840.

B. 2520.

C. 120.

D. 625.

🔥 **Câu 7.** Biết $C_n^3 = 35$. Vậy thì A_n^3 bằng bao nhiêu?

A. 35.

B. 45.

C. 210.

D. 70.

🔥 **Câu 8.** Cho tập $B = \{0,1;2;3;4,5,6,7,8,9\}$. Từ tập B có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau và không bắt đầu bởi số 16?

A. 27212.

B. 27200.

C. 26880.

D. 27202.

🔥 **Câu 9.** Từ tập $X = \{1;2;3;4;5;6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số chia hết cho 5?

A. 120.

B. 20.

C. 216.

D. 64.

🔥 **Câu 10.** Trong một mặt phẳng có 5 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi tổng số đoạn thẳng và tam giác có thể lập được từ các điểm trên là

A. 20.

B. 10.

C. 40.

D. 80.

🔥 **Câu 11.** Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh A,B,C,D,E sao cho A,B ngồi cạnh nhau?

A. 48.

B. 120.

C. 12.

D. 24.

🔥 **Câu 12.** Năm người được xếp vào ngồi quanh một bàn tròn có 5 chiếc ghế. Số cách xếp là

A. 50.

B. 100.

C. 120.

D. 24.

🔥 **Câu 13.** Số đường chéo của một đa giác lồi 20 cạnh là

A. 170.

B. 190.

C. 360.

D. 380.

🔥 **Câu 14.** Có bao nhiêu số gồm ba chữ số khác nhau lập thành từ các chữ số 0, 2, 4, 6, 8?

A. 48.

B. 60.

C. 100.

D. 125.

🔥 **Câu 15.** Một lớp học có 8 học sinh được bầu chọn vào 3 chức vụ khác nhau gồm lớp trưởng, lớp phó và thư ký (không được kiêm nhiệm). Số cách khác nhau sẽ là

A. 336.

B. 56.

C. 31.

D. 40230.

🔥 **Câu 16.** Cho 6 chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số lập từ 6 chữ số đó:

A. 36.

B. 18.

C. 256.

D. 108.

🔥 **Câu 17.** Công thức tính C_n^k là

A. $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

B. $\frac{n!}{(n-k)!}$.

C. $n!$.

D. $\frac{n!}{k!}$.

🔥 **Câu 18.** Nếu $2A_n^2 = A_n^3$ thì n bằng

A. 6.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

🔥 **Câu 19.** Số n thỏa $C_n^0 - 2C_n^1 + A_n^2 = 109$ là

A. 8.

B. 10.

C. 12.

D. 14.

🔥 **Câu 20.** Cho $A_y^3 + C_y^{y-2} = 14y$. Giá trị của $M = A_{y+1}^4 + 3C_y^3$ là

A. 541.

B. 390.

C. 451.

D. 540.

🔥 **Câu 21.** Từ các số 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

A. A_6^4 .

B. 6^4 .

C. C_6^4 .

D. $4!$.

🔥 **Câu 22.** Có 7 bông hồng và 5 bông huệ. Chọn ra 3 bông hồng và 2 bông huệ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

A. 360.

B. 270.

C. 350.

D. 320.

🔥 **Câu 23.** Phương trình $A_{2n}^2 - 24 = A_n^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

🔥 **Câu 24.** Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và luôn có mặt chữ số 0?

A. $6A_6^4 - A_6^5$.B. A_7^5 .C. $A_6^5 - A_6^4$.D. $A_7^5 - A_6^5$.

🔥 **Câu 25.** Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $A_n^2 C_n^{n-1} = 48$?

A. $n = 4$.B. $n = 3$.C. $n = 20$.D. $n = 6$.

🔥 **Câu 26.** Có 6 chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Có bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số được lập từ những chữ số trên.

A. 600.

B. 162.

C. 108.

D. 401.

🔥 Câu 27. Từ các chữ số 1, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau.
A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

🔥 Câu 28. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn vào 5 ghế xếp thành một hàng dọc.
A. 136. **B.** 126. **C.** 168. **D.** 120.

🔥 Câu 29. Cho $C_n^5 = 15504$. Vậy A_n^5 bằng:
A. 1860480. **B.** 77520. **C.** 108528. **D.** 62016.

🔥 Câu 30. Có 7 con trâu và 4 con bò. Cần chọn 6 con, trong đó có ít nhất 2 con bò. Có bao nhiêu cách chọn.
A. 137. **B.** 317. **C.** 371. **D.** 173.

🔥 **Câu 31.** Thầy giáo phân công 6 học sinh thành từng nhóm một người, hai người, ba người về ba địa điểm. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

A. 120.

B. 60.

C. 20.

D. 30.

🔥 **Câu 32.** Một nhóm học sinh có 15 em trong đó có 10 nam và 5 nữ. Cần chọn 6 em đi dự đại hội đoàn trường. Số cách chọn là:

A. 5001.

B. 5005.

C. 5000.

D. 4785.

🔥 **Câu 33.** Một liên đoàn bóng rổ có 10 đội, mỗi đội đấu với mỗi đội khác hai lần, một lần ở sân nhà và một lần ở sân khách. Số trận đấu được sắp xếp là:

A. 45.

B. 90.

C. 100.

D. 180.

🔥 **Câu 34.** Số tam giác xác định bởi các đỉnh của một đa giác đều 10 cạnh là:

A. 35.

B. 120.

C. 240.

D. 720.

🔥 **Câu 35.** Một cửa hàng có 9 quyển sách Toán, 12 quyển sách Lý và 3 quyển sách Hoá. Hỏi người bán hàng có bao nhiêu cách sắp sách lên kệ sao cho các quyển sách cùng loại được xếp cạnh nhau? Biết những quyển sách này đều là Sách giáo khoa lớp 11.

A. $9!.12!.3!$.

B. 6.

C. $9!.12!.33!$.D. $36.9!.12!$.

🔥 **Câu 36.** Có 5 quyển sách Toán khác nhau và 3 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Số cách xếp các cuốn sách này trên một kệ dài sao cho không có 2 quyển Tiếng Anh nào cạnh nhau là

- A. 10080. B. 7200. C. 14400. D. 2400.

🔥 **Câu 37.** Cho tập A gồm 10 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của tập A là

- A. 510. B. A_{10}^5 . C. C_{10}^5 . D. P_n .

🔥 **Câu 38.** Cho 2 đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất lấy 6 điểm phân biệt, trên đường thẳng thứ hai lấy 10 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác có các đỉnh thuộc tập 16 điểm đã lấy trên hai đường thẳng trên?

- A. 150 tam giác. B. 270 tam giác. C. 420 tam giác. D. 560 tam giác.

🔥 **Câu 39.** Một tổ học sinh có 4 nam và 2 nữ được xếp thành một hàng dọc. Số cách xếp sao cho 2 bạn nữ luôn đứng đầu hàng là

- A. 24. B. 16. C. 720. D. 48.

🔥 **Câu 40.** Số cách xếp $n(n \geq 1)$ học sinh thành một hàng ngang là

- A. $n!$. B. $2n$. C. n^n . D. n .

🔥 **Câu 41.** Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn, trong đó có Chiến và Thắng, vào 10 ghế kê thành hàng ngang sao cho Chiến và Thắng không ngồi cạnh nhau?

- A. $8 \cdot 9!$ cách. B. $2 \cdot 9!$ cách. C. $9!$ cách. D. $10!$.

🔥 **Câu 42.** Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của việc lấy ra k phần tử khác nhau của tập A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là

- A. Một chỉnh hợp chập k của n phần tử. B. Một tổ hợp chập k của n phần tử.
C. Một chỉnh hợp chập n của k phần tử. D. Một hoán vị của k phần tử.

🔥 **Câu 43.** Từ 6 bông hoa khác nhau. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 bông để cắm vào 3 lọ khác nhau sao cho mỗi lọ có một bông hoa.

- A. 729 cách. B. 120 cách. C. 20 cách. D. 256 cách.

🔥 **Câu 44.** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4

nam và 1 nữ?

A. 207900.

B. 207901.

C. 208900.

D. 207800.

🔥 Câu 45. Cho các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7. Khi đó có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số được thành lập từ các chữ số đã cho?

A. 120.

B. 216.

C. 18.

D. 720.

BÀI 3.

NHỊ THỨC NEWTON

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1

NHỊ THỨC NEWTON

Cho a, b là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Nhận xét.

- ① Trong khai triển $(a \pm b)^n$ có $n + 1$ số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau. Tức là $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- ② Số hạng tổng quát là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ và số hạng thứ N thì $k = N - 1$.
- ③ Trong khai triển $(a - b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là $+$, rồi $-$, rồi $+$, ...
- ④ Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ của a và b bằng n .
- ⑤ Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn như
 - $(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n \stackrel{a=1, b=1}{\implies} C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$
 - $(a - b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^n C_n^n b^n \stackrel{a=1, b=1}{\implies} C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$

 **Ví dụ 1.** Khai triển các nhị thức sau:

- ① $(x + 1)^4$
- ② $(x + 2y)^5$
- ③ $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2

TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của các khai triển $(a + b)^0, (a + b)^1, (a + b)^2, \dots, (a + b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác Pascal.

$n = 0:$	1
$n = 1:$	1 1
$n = 2:$	1 2 1
$n = 3:$	1 3 3 1
$n = 4:$	1 4 6 4 1
$n = 5:$	1 5 10 10 5 1
$n = 6:$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7:$	1 7 21 35 35 21 7 1

HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k.$$

 **Ví dụ 2.** Viết đầy đủ dạng khai triển của các nhị thức sau:

① $(a + b)^6$

② $(a + b)^7$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

3 DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải

Bước 1. Viết công thức số hạng tổng quát.

Bước 2. Dùng các tính chất của lũy thừa để rút gọn số hạng tổng quát.

Bước 3. Dựa vào điều kiện cho trước để tìm số hạng thỏa mãn bài toán.

Chú ý

— Với $n \in \mathbb{N}^*$ và $x \neq 0$ thì $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

— Với $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ và $x > 0$ thì $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

— Với các điều kiện xác định thì

• $a^m a^n = a^{m+n}$

• $(ab)^n = a^n b^n$

• $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

• $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

• $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

— Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $x \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n x a_k$.

 **Ví dụ 1.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển:

① $(2x - 3y)^{17}$ chứa $x^8 y^9$.

② $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$ chứa $x^3 1$.

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển: $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Lời giải:

Dạng 2. Chứng minh hoặc tính tổng

Từ công thức nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Ta chọn a, b phù hợp với giả thiết.

Ta cũng có các hệ quả sau:

- Với $a = b = 1$ ta có $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.
- Với $a = 1, b = -1$ ta có $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Ví dụ 1. Tính tổng

- $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + \dots + 2^5 C_5^5$.
- $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}$.

Lời giải:

B TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

- | | |
|---|---|
| ① $(2x - 3y)^{17}$ chứa x^8y^9 . | ⑥ $(x^3 - xy)^{15}$ chứa $x^{25}y^{10}$. |
| ② $(3x - x^2)^{12}$ chứa x^{15} . | ⑦ $(x + y)^{25}$ chứa $x^{12}y^{13}$. |
| ③ $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}, \forall x \neq 0$ chứa x^{11} . | ⑧ $(x - 3)^9$ chứa x^4 . |
| ④ $\left(\sqrt[3]{x^{-2}} + x\right)^7$ chứa x^2 . | ⑨ $(1 - 3x)^{11}$ chứa x^6 . |
| ⑤ $(2x + y)^{13}$ chứa x^6y^7 . | ⑩ $(x^2 - 2x)^{10}$ chứa x^{16} . |
| | ⑪ $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}, \forall x \neq 0$ chứa x^{31} . |

🔥 **Câu 2.** Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển của nhị thức

- | | |
|---|---|
| ① $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9$ với $x \neq 0$. | ⑧ $\left(\frac{1}{x^3} + x^2\right)^{10}$, với $x \neq 0$ |
| ② $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$ với $xy \neq 0$. | ⑨ $\left(x + \frac{2}{x^3}\right)^{12}$, với $x \neq 0$ |
| ③ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ với $x > 0$. | ⑩ $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$, với $x \neq 0$ |
| ④ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$, với $x \neq 0$ | ⑪ $\left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, với $x > 0$ |
| ⑤ $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5$, với $x \neq 0$ | ⑫ $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, với $x > 0$ |
| ⑥ $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$, với $x \neq 0$ | ⑬ $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$, với $x > 0$ |
| ⑦ $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right)^{12}$, với $x \neq 0$ | ⑭ $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$, với $x > 0$ |

🔥 **Câu 3.**

- Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n, x \neq 0$ biết $C_n^4 = 13C_n^2$.
- Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n, x \neq 0$, biết $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$.
- Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^2 + 2)^n$, biết $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$.
- Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1 + x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12} .
- Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024.

🔥 Câu 4.

- ① Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$, $\forall x \neq 0$, biết $C_{n-4}^{n-6} + n \cdot A_n^2 = 454$.
- ② Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{2}{n-5} \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $x > 0$, biết $C_n^3 = 5C_n^1$.
- ③ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{3}{x^3}\right)^n$, với $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq 0$, biết $A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2 = 18P_3$.
- ④ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^n$, $\forall x \neq 0$, biết $3C_n^2 + 2A_n^2 = 3n^2 + 15$.

🔥 Câu 5. Chứng minh

- ① $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$.
- ② $C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

🔥 Câu 6. Tính các tổng sau

- ① $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \dots + C_5^5$.
- ② $S = 2C_{2010}^1 + 2^3 C_{2010}^3 + 2^5 C_{2010}^5 + \dots + 2^{2009} C_{2010}^{2009}$.

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị của tổng $A = C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^7$ bằng

- A. 255. B. 63. C. 127. D. 31.

Câu 2. Hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-x)^9$ là

- A. C_9^7 . B. $-C_9^7$. C. $9C_9^7$. D. $-9C_9^7$.

Câu 3. Hệ số chứa x^6 trong khai triển $(2-3x)^{10}$ là

- A. $C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 3^6$. B. $-C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 3^6$. C. C_{10}^6 . D. $C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot (-3x)^6$.

Câu 4. Hệ số chứa x^5 trong khai triển $(2x+3)^8$ là

- A. $C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. B. $C_8^5 \cdot (2x)^5 \cdot 3^3$. C. $C_8^3 \cdot 2^5 \cdot 3^3$. D. $-C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$.

Câu 5. Hệ số chứa x^4 trong khai triển $(x^2+2)^{10}$ là

- A. $C_{10}^8 \cdot (x^2)^2 \cdot 2^8$. B. $C_{10}^6 \cdot x^4 \cdot 2^6$. C. $C_{10}^8 \cdot x^2 \cdot 2^8$. D. $C_{10}^8 \cdot 2^8$.

🔥 **Câu 6.** Hệ số chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$ là

- A. $C_{13}^3 \cdot x^{10} \cdot \frac{1}{x^3}$. B. $-C_{13}^3 \cdot x^{10} \cdot \frac{1}{x^3}$. C. C_{13}^3 . D. $-C_{13}^3$.

🔥 **Câu 7.** Số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$ là

- A. $C_9^3 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{(2x)^3}$. B. $C_9^3 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{2x^3}$. C. $C_9^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x^3}$. D. $C_9^2 \cdot x^7 \cdot \frac{1}{(2x)^2}$.

🔥 **Câu 8.** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ là

- A. $C_6^2 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4}$. B. $C_6^2 \cdot x^4 \cdot \frac{16}{x^4}$. C. C_6^2 . D. $C_6^4 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4}$.

🔥 **Câu 9.** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ là

- A. 252. B. -252. C. 525. D. -525.

🔥 **Câu 10.** Hệ số của $x^3.y^3$ trong khai triển biểu thức $(2x-y)^6$ là

- A. $2^3C_6^3$. B. $-2^2C_6^3$. C. $-2^3C_6^3$. D. $2^2C_6^3$.

🔥 **Câu 11.** Hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức $(x+2)^9$ là

- A. $4.C_9^7$. B. $-4.C_9^2$. C. C_9^7 . D. $-C_9^2$.

🔥 **Câu 12.** Biết hệ số của x^2 trong khai triển biểu thức $(1+4x)^n$ là 3040. Số nguyên n bằng bao nhiêu?

- A. 28. B. 24. C. 26. D. 20.

🔥 **Câu 13.** Biết $2A_n^2 + A_n^3 = 100$. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(1+2x)^{2n}$ là

- A. $-2^5C_{10}^5$. B. $-2C_{10}^5$. C. $2C_{10}^5$. D. $2^5C_{10}^5$.

🔥 **Câu 14.** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$ là

- A. -70. B. -28. C. 28. D. 70.

🔥 **Câu 15.** Hệ số của x^5 trong khai triển $(1-x)^{12}$ là?

- A. 792. B. 792. C. 924. D. 495.

🔥 **Câu 16.** Trong khai triển $(a+b)^n$, số hạng tổng quát của khai triển là

- A. $C_n^k a^{n-k} b^{n-k}$. B. $C_n^k a^{n-k} b^k$. C. $C_n^{k+1} a^{k+1} b^{n-k+1}$. D. $C_n^{k+1} a^{n-k+1} b^{k+1}$.

🔥 **Câu 17.** Hệ số x^2 trong khai triển $(1-2x)^{10}$ là

- A. 45. B. 120. C. 180. D. -180.

🔥 **Câu 18.** Hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$ là

- A. 1000. B. 9880. C. 9870. D. 9680.

🔥 **Câu 19.** Số hạng thứ tư của khai triển $(x-a)^5$ là

- A. -10. B. $-10x^4a$. C. $-10x^3a^2$. D. $-10x^2a^3$.

🔥 **Câu 20.** Số hạng đứng giữa của khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ là

A. $70x$.B. $-70x$.C. 70 .D. -70 .

🔥 **Câu 21.** Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{10}$

A. 252 .B. $252x^{10}$.C. 225 .D. 522 .

🔥 **Câu 22.** Tổng các hệ số trong khai triển $(y - 3)^5$ bằng

A. -16 .B. 32 .C. -32 .D. 16 .

🔥 **Câu 23.** Giải phương trình $3.C_x^3 + A_{x+1}^2 = 1040$.

A. $x = 12$.B. $x = 11$.C. $x = 13$.D. $x = 14$.

- 🔥 **Câu 24.** Tìm số hạng chứa x^{16} trong khai triển nhị thức sau $f(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{6x^3}\right)^{18}$
- A. $C_{18}^4 \cdot 3^4 \cdot 6^{-4} \cdot x^{16}$. B. $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^{-4}$. C. $C_{18}^4 \cdot 3^{14} \cdot 6^4$. D. $C_{18}^4 \cdot 3^{10} \cdot 2^{-4} \cdot x^{16}$.

- 🔥 **Câu 25.** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ là
- A. C_{10}^4 . B. C_{10}^5 . C. $-C_{10}^5$. D. $-C_{10}^4$.

- 🔥 **Câu 26.** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$ là:
- A. 28. B. 10. C. 70. D. 56.

- 🔥 **Câu 27.** Cho khai triển $\left(x + \frac{1}{3}\right)^n$. Tìm n , biết hệ số của số hạng thứ 3 bằng 5.
- A. $n = 8$. B. $n = 12$. C. $n = 10$. D. $n = 6$.

- 🔥 **Câu 28.** Hệ số của x^5 trong khai triển $(1 - x)^{11}$ là
- A. 462. B. -462. C. 264. D. -264.

🔥 **Câu 29.** Tìm hệ số của x^3 trong khai triển: $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^9$ là

- A. 3671. B. 6330. C. 4600. D. 4608.

🔥 **Câu 30.** Hệ số lớn nhất của khai triển: $(3x - 5)^{20}$ là

- A. $C_{20}^{12}3^8(-5)^{11}$. B. $C_{20}^{12}3^{10}(-5)^{12}$. C. $C_{20}^{11}3^9(-5)^{11}$. D. $C_{20}^{12}3^8(-5)^{12}$.

🔥 **Câu 31.** Tính tổng các hệ số của khai triển: $(5 - 4x)^{20}$

- A. 1. B. 46. C. 63. D. 36.

🔥 **Câu 32.** Tìm hệ số độc lập với x trong khai triển: $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{15}$

- A. $C_{15}^{10}3^{10}$. B. $C_{15}^93^9$. C. $C_{15}^{12}3^{10}$. D. $C_{15}^{11}3^{11}$.

🔥 **Câu 33.** Tổng $S = C_5^02^5 + C_5^12^4 + C_5^22^3 + C_5^32^2 + C_5^42^1 + C_5^5$

A. 243.

B. 461.

C. 631.

D. 362.

🔥 **Câu 34.** Hệ số của x^4 trong khai triển $(2x - 3)^6$ là

A. 2160.

B. 9240.

C. 480.

D. 2160.

🔥 **Câu 35.** Cho biểu thức $A = (3 - x)^6$. Khai triển của biểu thức A là

A. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^2 x^4 \cdot 3^2 - C_6^3 x^3 \cdot 3^3 + C_6^4 x^2 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.

B. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^3 x^3 \cdot 3^3 - C_6^4 x^2 \cdot 3^4 + C_6^4 x^2 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.

C. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^3 x^3 \cdot 3^3 - C_6^4 x^2 \cdot 3^4 + C_6^4 x^4 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.

D. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 3 + C_6^2 x^4 \cdot 3^2 - C_6^3 x^3 \cdot 3^3 + C_6^4 x^2 \cdot 3^4 - C_6^5 x \cdot 3^5 + C_6^6 3^6$.

🔥 **Câu 36.** Cho biểu thức $A = (4 - x)^6$. Khai triển của biểu thức A là

A. $A = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 \cdot 4 + C_6^2 x^4 \cdot 4^2 - C_6^3 x^3 \cdot 4^3 + C_6^4 x^2 \cdot 4^4 - C_6^5 x \cdot 4^5 + C_6^6 4^6$.

B. $A = C_6^6 x^6 - C_6^5 x^5 \cdot 4 + C_6^4 x^4 \cdot 4^2 - C_6^3 x^3 \cdot 4^3 + C_6^2 x^2 \cdot 4^4 - C_6^1 x \cdot 4^5 + C_6^0 4^6$.

C. $A = -C_6^0 4^6 + C_6^1 x \cdot 4^5 - C_6^2 x^2 \cdot 4^4 + C_6^3 x^3 \cdot 4^3 - C_6^4 x^4 \cdot 4^2 + C_6^5 x^5 \cdot 4 - C_6^6 x^6$.

D. $A = C_6^0 4^6 + C_6^1 x \cdot 4^5 + C_6^2 x^2 \cdot 4^4 + C_6^3 x^3 \cdot 4^3 + C_6^4 x^4 \cdot 4^2 + C_6^5 x^5 \cdot 4 + C_6^6 x^6$.

🔥 **Câu 37.** Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)^{12}$. Số hạng tổng quát trong khai triển biểu thức trên là.

A. $C_{12}^k \cdot 2^k x^{6-\frac{5}{6}k} \cdot (-1)^k$. **B.** $C_{12}^k \cdot 2^k x^{6-\frac{5}{6}k}$. **C.** $C_{12}^k \cdot 2^k x^{6+\frac{5}{6}k} \cdot (-1)^k$. **D.** $-C_{12}^k \cdot 2^k x^{6-\frac{5}{6}k}$.

🔥 Câu 38. Cho biểu thức $P = (x+2)^{15}$, số hạng chứa x^{10} là
A. $x^{10}C_{15}^{10}$. **B.** $32x^{10}C_{15}^5$. **C.** $-x^{10}C_{15}^{10}$. **D.** $x^{10}C_{15}^5$.

🔥 Câu 39. Cho biểu thức $P = (x+2)^{18}$. Hệ số của số hạng thứ 19 là
A. 2^{19} . **B.** 2^{16} . **C.** 2^{17} . **D.** 2^{18} .

🔥 Câu 40. Khai triển $(2x+1)^n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n; (n \in \mathbb{N}^*)$. Biết tổng các hệ số là 2187. Khi đó $a_0 + 2a_1 + a_2$ là
A. $1696x^2$. **B.** -1696 . **C.** 1696 . **D.** 1248 .

🔥 Câu 41. Tìm hệ số chứa x^9 trong khai triển $(1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} + (1+x)^{14}$.
A. 8008. **B.** 8000. **C.** 3003. **D.** 3000.

🔥 Câu 42. Tính tổng của biểu thức

$$S = 2^{10} + C_{10}^1 \cdot 2^9 \cdot 5 + C_{10}^2 \cdot 2^8 \cdot 5^2 + C_{10}^3 \cdot 2^7 \cdot 5^3 + \dots + C_{10}^9 \cdot 2 \cdot 5^9 + 5^{10}$$

A. 7^{10} .B. -3^{10} .C. 3^{10} .D. -7^{10} .

🔥 Câu 43. Tính tổng của biểu thức

$$S = 2^{10} - C_{10}^1 \cdot 2^9 \cdot 5 + C_{10}^2 \cdot 2^8 \cdot 5^2 - C_{10}^3 \cdot 2^7 \cdot 5^3 + \dots + C_{10}^8 \cdot 2^2 \cdot 5^8 - C_{10}^9 \cdot 2 \cdot 5^9 + 5^{10}$$

A. 23^{10} .B. -3^{10} .C. 3^{10} .D. -23^{10} .

🔥 Câu 44. Tổng $S = C_{2016}^0 + C_{2016}^1 + \dots + C_{2016}^{2016}$ có kết quả bằng

A. 2^{2014} .B. 2^{2015} .C. 2^{2017} .D. 2^{2016} .

🔥 Câu 45. Tổng của biểu thức $S = C_{10}^0 \cdot 2^{10} + C_{10}^1 \cdot 2^9 + C_{10}^2 \cdot 2^8 + \dots + C_{10}^7 \cdot 2^3 + C_{10}^8 \cdot 2^2 + C_{10}^9 \cdot 2$ là

A. $3^{10} - 1$.B. $2^{10} - 1$.C. $3^{10} + 1$.D. 3^{10} .

BÀI 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHÉP THỬ

Định nghĩa 1. Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của phép thử đó mặc dù biết tập tất cả các kết quả của phép thử đó.

 **Ví dụ 1.** Phép thử “Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất”. Tìm không gian mẫu của phép thử.

Lời giải:

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \dots\dots\dots$

 **Ví dụ 2.** Xét phép thử “Gieo hai đồng xu phân biệt”. Nếu ký hiệu S là mặt sấp, N là mặt ngửa. Tìm không gian mẫu của phép thử.

Lời giải:

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \dots\dots\dots$

 **Ví dụ 3.** Xét phép thử T “Gieo 3 đồng xu phân biệt”. Tính số phần tử của không gian mẫu.

Lời giải:

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \dots\dots\dots$

2 BIẾN CỐ

Định nghĩa 2. Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

 **Ví dụ 4.** Xét phép thử T “Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất”. Gọi A là biến cố “Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn”. Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố A .

Lời giải:

Biến cố $A = \dots\dots\dots$

- Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T .
- Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra gọi là một kết quả thuận lợi của A .
- Biến cố A có ngoài cách cho bằng mô tả, có thể cho A dưới dạng liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của A .

3 XÁC SUẤT

Định nghĩa 3. Xét phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn kết quả đồng khả năng. Biến cố A liên quan đến phép thử, $A \subset \Omega$. Xác suất của biến cố A là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$



- Với mọi biến cố A của phép thử có không gian mẫu là Ω . Ta luôn có $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, trong đó $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A .
- Với A, B là hai biến cố ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Ví dụ 5. Xét phép thử T : “Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất”. Tập các kết quả là tập hợp gồm tất cả các cặp số cho bởi bảng sau

Số chấm	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{(i; j) | i, j = \overline{1; 6}\}$.

- Số phần tử của không gian mẫu là 36.
- Biến cố A : “Tổng số chấm xuất hiện trên mặt bằng 7”.

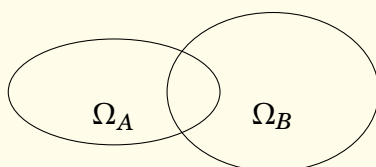
Ta có $A = \{(1; 6); (2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2); (6; 1)\} \Rightarrow n(A) = 6$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$.

4 CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Định nghĩa 4. hợp của hai biến cố

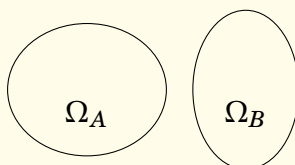
Cho hai biến cố A và B . Biến cố “ A hoặc B xảy ra, kí hiệu là $A \cup B$ được gọi là **hợp của hai biến cố** A và B . Khi đó $\Omega_A \cup \Omega_B \subset \Omega$.



Ví dụ 6. Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi toán" và B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý". Khi đó $A \cup B$ là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán hoặc giỏi Lý".

Định nghĩa 5. Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B . Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Khi đó $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$.

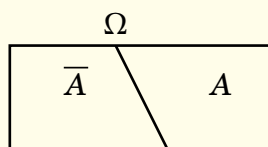


Ví dụ 7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp 11C₁" và B là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp 11C₂". Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

Định nghĩa 6. Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "không A ", kí hiệu là $\bar{A}$, được gọi là **biến cố đối** của A . Ta nói A và $\bar{A}$ là hai biến cố đối của nhau.

Khi đó $\Omega_{\bar{A}} = \Omega \setminus \Omega_A \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.



Câu hỏi 1: Hai biến cố đối nhau có phải là hai biến cố xung khắc?

Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. **Câu hỏi 2:** Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối?

Hai biến cố xung khắc không phải là hai biến cố đối.

Ví dụ 8. Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn với xác suất $\frac{2}{7}$. Khi đó xác suất bắn trượt là bao nhiêu?

Gọi A là biến cố: "Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn" thì $P(A) = \frac{2}{7}$. Khi đó xác suất bắn trượt là $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Ví dụ 9. Từ một hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra 4 quả. Tính xác suất sao cho:

- Bốn quả lấy ra cùng màu.
- Bốn quả lấy ra có đủ hai màu.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

- Gọi A là biến cố: "Bốn quả lấy ra cùng màu". Có hai trường hợp:
 - Bốn quả lấy ra cùng màu trắng, có $C_6^4 = 15$ cách chọn.
 - Bốn quả lấy ra cùng màu xanh, có $C_4^4 = 1$ cách chọn.

Theo quy tắc cộng thì $n(A) = 15 + 1 = 16$ cách chọn.

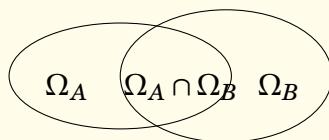
Vậy xác suất của A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$.

b) Gọi B là biến cố: "Bốn quả lấy ra có đủ hai màu" thì $B = \overline{A}$.

Suy ra $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{105} = \frac{97}{105}$.

Định nghĩa 7. Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B . Biến cố "A và B cùng xảy ra", kí hiệu là $A \cap B$ (hay AB) gọi là giao của hai biến cố A và B .



Ví dụ 10. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán" và gọi B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý". Khi đó: $A \cap B$ là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán và giỏi Lý"

Định nghĩa 8. Biến cố độc lập

- Hai biến cố được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng xác suất xảy ra của biến cố kia.
- Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và B , $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng là độc lập

Ví dụ 11. Gieo một đồng xu liên tiếp 2 lần. Gọi A là biến cố: "Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt sấp" và gọi B là biến cố: "Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt ngửa". Khi đó A và B là 2 biến cố độc lập.

Định nghĩa 9. Quy tắc nhân xác suất hai biến cố độc lập

- Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì ta luôn có: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
- Cho n biến cố $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ độc lập với nhau từng đôi một. Khi đó:

$$P(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n) \text{ hay } P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Ví dụ 12. Một cầu thủ sút bóng vào cầu môn hai lần. Biết rằng xác suất sút vào cầu môn là $\frac{3}{8}$. Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn. Gọi A là biến cố: "Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ nhất" thì $P(A) = \frac{3}{8}$.

Gọi B là biến cố: "Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ hai" thì $P(B) = \frac{3}{8}$.

Suy ra AB là biến cố: "Cầu thủ sút hai lần bóng đều vào được cầu môn".

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của AB là $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$.

Ví dụ 13. Có hai xạ thủ bắn bia. Xác suất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là 0,8. Xác suất xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là 0,7. Tính xác suất để:

- Cả hai xạ thủ đều bắn trúng.

② Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia.

③ Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia.

Gọi A là biến cố: “Xạ thủ thứ nhất bắn trúng” và B là biến cố: “Xạ thủ thứ hai bắn trúng” thì $P(A) = 0,8$ và $P(B) = 0,7$. Ta có A và B là hai biến cố độc lập.

① Biến cố: “Cả hai xạ thủ đều bắn trúng” là AB nên $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$.

② Biến cố: “Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia” là $\overline{AB}$.

Do A và B là độc lập nên $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập. Suy ra $P(\overline{AB}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.

③ Biến cố: “Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia” là $A \cup B$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,8 + 0,7 - 0,56 = 0,94$.

B TỰ LUẬN

🔥 **Câu 1.** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố

① A : “Mặt có số chấm lẻ xuất hiện”.

② B : “Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 3”.

③ C : “Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2”.

🔥 **Câu 2.** Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp. Tính xác suất để

① lấy được quả màu trắng.

② lấy được quả cầu xanh.

🔥 **Câu 3.** Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ X . Ban quản lý chợ lấy ra 15 mẫu thịt lợn trong đó có 4 mẫu ở quầy A , 5 mẫu ở quầy B và 6 mẫu ở quầy C . Mỗi mẫu thịt này có khối lượng như nhau và để trong một hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chứa chất tạo nạc (Clenbuterol) hay không. Tính xác suất để cả 3 hộp lấy ra có đủ cả ba loại thịt ở các quầy A, B, C .

🔥 **Câu 4.** Trong một chiếc hộp có chứa 10 quả cầu có kích thước như nhau, được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên ra 3 quả cầu trong hộp đó. Tính xác suất để số ghi trên 3 quả cầu lấy được là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

🔥 **Câu 5.** Trong một chiếc hộp 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên lấy ra không đủ cả ba màu.

🔥 **Câu 6.** Một bình đựng 6 viên bi không giống nhau, trong đó có 2 xanh, 2 vàng và 2 đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được

- ① 2 viên bi xanh.
- ② 2 viên bi khác màu.

🔥 **Câu 7.** Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ, 2 quả cầu đen, các quả cầu khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen.

🔥 **Câu 8.** Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp

- ① Lấy được 3 viên bi màu đỏ.
- ② Lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ.

🔥 Câu 9. Một hộp chứa các quả cầu kích thước khác nhau gồm 3 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh và 9 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu được chọn là khác màu.

🔥 Câu 10. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ.

🔥 Câu 11. Một hộp đựng 20 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 9 viên bi. Tính xác suất trong các trường hợp

- ① 9 viên bi lấy được có đúng 2 màu.
- ② 9 viên bi lấy được có đủ 3 màu.

🔥 Câu 12. Từ một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ, 2 viên bi vàng, lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất các biến cố

- ① A: “hai viên bi được lấy cùng màu xanh”.
- ② B: “hai viên bi được lấy cùng màu đỏ”.
- ③ C: “hai viên bi được lấy cùng màu”.
- ④ D: “hai viên bi được lấy khác màu”.

🔥 **Câu 13.** Từ một hộp 13 bóng đèn, trong đó có 6 bóng hỏng, lấy ngẫu nhiên 5 bóng ra khỏi hộp. Tính xác suất sao cho

- ① Có nhiều nhất hai bóng hỏng.
- ② Có ít nhất một bóng không hỏng.

🔥 **Câu 14.** Trong một hộp có 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp trên. Tính xác suất để 4 viên bi được lấy có cả bi xanh và bi đỏ.

🔥 **Câu 15.** Trong chiếc hộp có 6 bi đỏ, 5 bi vàng và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả 3 màu.

🔥 **Câu 16.** Một hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ cả 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất.

🔥 **Câu 17.** Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh bằng số bi đỏ.

🔥 **Câu 18.** Trên giá sách có 5 quyển sách toán học, 4 quyển Vật lý và 3 quyển Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 4 quyển. Tính xác suất sao cho:

- a) ít nhất 1 quyển Toán học.
- b) có đúng 2 quyển Vật lý.

🔥 **Câu 19.** Trên một kệ sách có 12 quyển sách khác nhau, gồm 4 quyển tiểu thuyết, 6 quyển truyện tranh và 2 quyển truyện cổ tích. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển từ kệ sách. Tính xác suất sao cho sao cho 3 quyển được lấy:

- a) đôi một khác loại.
- b) đúng 2 quyển cùng một loại.

🔥 **Câu 20.** Một ngân hàng đề thi gồm có 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm có 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học thuộc.

🔥 **Câu 21.** Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 15 câu hỏi trong một ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi. Bạn Thủy đã học thuộc 8 câu trong ngân hàng đề thi. Tính xác suất để bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc.

🔥 **Câu 22.** Đề cương ôn tập cuối năm môn Lịch sử 12 có 40 câu hỏi khác nhau. Đề thi kiểm tra học kỳ 2 gồm 3 câu hỏi trong 40 câu hỏi đó. Một học sinh chỉ học 20 câu trong đề cương ôn tập. Giả sử các câu hỏi trong đề cương đều có khả năng được chọn làm câu hỏi thi như nhau. Tính xác suất để ít nhất có 2 câu hỏi trong đề thi kiểm tra học kỳ 2 nằm trong số 20 câu hỏi mà em học sinh đã được học.

🔥 **Câu 23.** Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu, được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là “Tốt” nếu trong đề thi có cả 3 câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi “Tốt”.

🔥 **Câu 24.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, Khoa làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Khoa trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại Khoa chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của Khoa không dưới 9,5 điểm.

🔥 Câu 25. Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để:

- ① Cả 3 em đều là học sinh giỏi.
- ② Có ít nhất 1 học sinh giỏi.
- ③ Không có học sinh trung bình.

🔥 Câu 26. Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người đi công tác. Tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn.

🔥 Câu 27. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

🔥 Câu 28. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam.

🔥 Câu 29. Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Tính xác suất sao cho 5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam.

--	--

🔥 **Câu 30.** Một chi đoàn có 15 đoàn viên, trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn có ít nhất một nữ.

🔥 **Câu 31.** Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 5 học sinh để lập một tổ ca chào mừng ngày 22 tháng 12. Tính xác suất sao cho trong tổ ca có ít nhất một học sinh nữ.

🔥 **Câu 32.** Một đội văn nghệ của trường THPT Năng Khiếu gồm 5 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh trong đội văn nghệ để lập một tổ ca. Tính xác suất để tổ ca có ít nhất 3 học sinh nữ.

🔥 **Câu 33.** Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam.

🔥 Câu 34. Trong kì thi thử TN THPT QG lần I năm 2017 tại trường THPT X có 13 học sinh đạt điểm 9,0 môn Toán, trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để trong 3 học sinh chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12.

🔥 Câu 35. Tổ một có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 5 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được hai học sinh có cả nam và nữ ?

TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Phép thử nào dưới đây không phải là phép thử ngẫu nhiên?

- A. Gieo một đồng tiền hai mặt giống nhau. B. Bắn một viên đạn vào bia.
C. Hỏi ngày sinh của một người lạ. D. Gieo một con xúc sắc 2 lần.

🔥 Câu 2. Cho A và B là hai biến cố của cùng một phép thử có không gian mẫu Ω . Phát biểu nào dưới đây là sai?

- A. Nếu $A = \overline{B}$ thì $B = \overline{A}$.
B. Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A, B xung khắc.
C. Nếu A, B đối nhau thì $A \cup B = \Omega$.
D. Nếu A là biến cố không thì $\overline{A}$ là chắc chắn.

🔥 **Câu 3.** Phép thử nào dưới đây không phải là phép thử ngẫu nhiên?

- A. Gieo một đồng tiền hai mặt giống nhau. B. Bắn một viên đạn vào bi.
C. Hỏi ngày sinh của một người lạ. D. Gieo một con xúc sắc 2 lần.

🔥 **Câu 4.** Gieo một con súc sắc hai lần. Gọi B là biến cố "tổng số chấm hai lần gieo là số lẻ". Số phần tử của biến cố B là

- A. 9. B. 24. C. 12. D. 18.

🔥 **Câu 5.** Cho phép thử có không gian mẫu $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Các cặp biến cố không đối nhau là:

- A. $E = \{1,4,6\}$ và $F = \{2;3\}$. B. $C = \{1,4,5\}$ và $D = \{2;3;6\}$.
C. $A = \{1\}$ và $B = \{2;3;4;5;6\}$. D. Ω và $\emptyset$.

🔥 **Câu 6.** Gieo 1 con xúc sắc cân đối, đồng chất 1 lần. Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn?

- A. "Con xúc sắc xuất hiện mặt lẻ chấm".
B. "Con xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm không lớn hơn 6".
C. "Con xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 7".
D. "Con xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3".

Câu 7. Một hộp đựng 10 thẻ, đánh số từ 1 đến 10. Chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Gọi A là biến cố có tổng số của 3 thẻ không vượt quá 9. Tính số phần tử của A .

- A. 10. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 8. Xét phép thử gieo đồng tiền (gồm hai mặt sấp S và mặt ngửa N) hai lần, và biến cố “Kết quả hai lần gieo là khác nhau”. Biến cố nào dưới đây là xung khắc với biến cố S, N ?

- A. N : “Lần thứ nhất xuất hiện mặt S ”. B. M : “Kết quả hai lần gieo là mặt N ”.
C. Q : “Chỉ lần thứ nhất xuất hiện mặt S ”. D. P : “Lần thứ nhất xuất hiện mặt N ”.

Câu 9. Cho hai người độc lập nhau ném bong vào rổ (biết rằng mỗi người ném bong vào rổ của mình). Gọi A là biến cố “cả hai đều ném không trúng bong vào rổ”, gọi B là biến cố “có ít nhất một người ném trúng bong vào rổ”. Khi đó, A và B là hai biến cố.

- A. Đối nhau. B. Xung khắc và không phải là đối nhau.
C. Không thể. D. Chắc chắn.

Câu 10. Cho phép thử có không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Các cặp biến cố không đối nhau là

- A. $E = \{1, 4, 6\}$ và $F = \{2, 3\}$. B. $C = \{1, 4, 5\}$ và $D = \{2, 3, 6\}$.
C. $A = \{1\}$ và $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. D. Ω và $\emptyset$.

🔥 **Câu 11.** Gieo một con súc sắc hai lần. Tập $\{(1;3), (2;4), (3;5), (4;6)\}$ là biến cố nào dưới đây?

- A. P: “Tích số chấm hai lần gieo là chẵn.”.
 B. N: “Tổng số chấm hai lần gieo là chẵn.”.
 C. M: “Lần thứ hai hơn lần thứ nhất hai chấm.”.
 D. Q: “Số chấm hai lần gieo hơn kém 2.”.

🔥 **Câu 12.** Một hộp có 12 bi khác nhau (cân đối và đồng chất) gồm 7 bi xanh và 5 bi vàng. Xác suất để chọn ngẫu nhiên từ hộp đó 5 bi mà có ít nhất 2 bi vàng là

- A. $\frac{617}{792}$. B. $\frac{149}{198}$. C. $\frac{671}{792}$. D. $\frac{491}{198}$.

🔥 **Câu 13.** Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

- A. $\frac{28}{55}$. B. $\frac{14}{55}$. C. $\frac{41}{55}$. D. $\frac{42}{55}$.

🔥 **Câu 14.** Gieo lần lượt hai con súc sắc. Tính xác suất để tổng số chấm trên hai mặt bằng hoặc lớn hơn 8?

- A. $\frac{11}{36}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{5}{12}$.

🔥 Câu 15. Một bình chứa 16 viên bi, với 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất lấy được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen, 1 viên bi đỏ.

A. $\frac{1}{10}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{9}{40}$.

D. $\frac{1}{35}$.

🔥 Câu 16. Gieo một đồng tiền (hai mặt S, N) bốn lần. Xác suất để có đúng ba lần mặt S là

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{2}$.

🔥 Câu 17. Xét một phép thử có không gian mẫu Ω và A là một biến cố của phép thử đó với xác suất xảy ra là 0,25. Xác suất biến cố A không xảy ra là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.

🔥 Câu 18. Một hộp có 5 bi đen, 4 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 2 bi. Xác suất 2 bi được chọn có đủ hai màu là

A. $\frac{5}{324}$.

B. $\frac{5}{9}$.

C. $\frac{2}{9}$.

D. $\frac{1}{18}$.

🔥 Câu 19. Bạn Nam muốn gọi điện thoại cho thầy chủ nhiệm nhưng quên mất hai chữ số cuối, bạn chỉ nhớ rằng hai chữ số đó khác nhau. Vì có chuyện gấp nên bạn bấm ngẫu nhiên hai chữ số bất kì trong các số từ 0 đến 9. Xác suất để bạn gọi đúng số của thầy trong lần gọi đầu tiên là

A. $\frac{1}{98}$.

B. $\frac{1}{90}$.

C. $\frac{1}{45}$.

D. $\frac{1}{49}$.

🔥 **Câu 20.** Ba xạ thủ cùng bắn vào một bia. Xác suất trúng đích lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Xác suất để ít nhất một người bắn trúng bia là

A. 0,976.

B. 0,7.

C. 0,336.

D. 0,756.

🔥 **Câu 21.** Quy tắc cộng xác suất của hợp 2 biến cố khi

A. 2 biến cố xung khắc và độc lập.

B. 2 biến cố độc lập.

C. 2 biến cố xung khắc.

D. 2 biến cố đối.

🔥 **Câu 22.** Từ một hộp chứa 15 quả cầu, trong đó có 7 quả cầu màu trắng, 3 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, ta lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để có 3 quả cầu khác màu.

A. $\frac{46}{455}$.

B. $\frac{1}{65}$.

C. $\frac{1}{91}$.

D. $\frac{3}{13}$.

🔥 **Câu 23.** Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất để lần gieo thứ 2 xuất hiện mặt sấp.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

🔥 **Câu 24.** Từ một hộp chứa 15 quả cầu, trong đó có 7 quả cầu màu trắng, 3 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, ta lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Số phần tử của không gian mẫu

A. 554. B. 545. C. 2700. D. 455.

🔥 **Câu 25.** Trên kệ sách có 10 sách Toán và 5 sách Văn. Lấy lần lượt 3 cuốn mà không để lại trên kệ. Xác suất để được hai cuốn sách Toán

A. $\frac{18}{91}$. B. $\frac{45}{91}$. C. $\frac{7}{45}$. D. $\frac{8}{15}$.

🔥 **Câu 26.** Gieo 1 con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất để tổng số chấm của 2 lần gieo bằng 9.

A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{9}$.

🔥 **Câu 27.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý và 2 quyển sách hóa. Chọn ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho ba quyển được chọn thuộc 3 môn khác nhau.

A. $\frac{4}{7}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{2}{7}$.

🔥 **Câu 28.** Một túi chứa 6 bi xanh, 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi. Tính xác suất để không có bi màu đỏ nào.

A. $\frac{1}{15}$.

B. $\frac{7}{15}$.

C. $\frac{8}{15}$.

D. $\frac{1}{3}$.

🔥 **Câu 29.** Một hộp đựng 20 viên bi gồm 12 viên màu xanh và 8 viên màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để có ít nhất 1 viên màu vàng.

A. $\frac{251}{285}$.

B. $\frac{243}{285}$.

C. $\frac{230}{285}$.

D. $\frac{271}{285}$.

🔥 **Câu 30.** Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

A. $\frac{28}{55}$.

B. $\frac{14}{55}$.

C. $\frac{41}{55}$.

D. $\frac{42}{55}$.

🔥 **Câu 31.** Gieo lần lượt hai con súc sắc. Tính xác suất để tổng số chấm trên hai mặt bằng hoặc lớn hơn 8?

A. $\frac{11}{36}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{5}{18}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Câu 32. Gieo một đồng tiền liên tiếp 3 lần. Tính xác suất của biến cố A “ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp”

A. $P(A) = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{7}{15}$.

C. $P(A) = \frac{7}{8}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 33. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn có ít nhất một nữ.

A. $\frac{1}{15}$.

B. $\frac{8}{15}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 34. Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

A. $\frac{28}{55}$.

B. $\frac{14}{55}$.

C. $\frac{41}{55}$.

D. $\frac{42}{55}$.

Câu 35. Trên giá sách có 10 quyển sách Toán khác nhau, 8 quyển tiếng Anh khác nhau và 6 quyển Lí khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển khác loại?

A. 188.

B. 80.

C. 60.

D. 480.

Câu 36. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn không có nữ nào cả.

A. $\frac{1}{15}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{8}{15}$.

D. $\frac{7}{15}$.

🔥 **Câu 37.** Một bình chứa 16 viên bi, với 7 viên bi trắng khác nhau, 6 viên bi đen khác nhau, 3 viên bi đỏ khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất lấy được cả 3 viên bi đỏ.

- A. $\frac{3}{16}$. B. $\frac{1}{560}$. C. $\frac{1}{120}$. D. $\frac{1}{20}$.

🔥 **Câu 38.** Xét một phép thử có không gian mẫu Ω và A là một biến cố của phép thử đó. Phát biểu nào dưới đây là sai?

- A. Xác suất của biến cố A là số $PA = \frac{nA}{n(\Omega)}$. B. $0 \leq PA \leq 1$.
C. $PA = 0$ khi và chỉ khi A là chắc chắn. D. $PA = 1 - P(\overline{A})$.

🔥 **Câu 39.** Ba người cùng bắn vào 1 bia. Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Xác suất để có đúng 2 người bắn trúng đích bằng.

- A. 0.92. B. 0.96. C. 0.46. D. 0.24.

🔥 **Câu 40.** Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng trong một trận là 0,4 (không có hòa). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95.

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

CHƯƠNG 3

DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG- CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Bài toán. Chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

Phương pháp.

- Bước 1. Với $n = 1$, ta chứng minh $P(1)$ đúng.
- Bước 2. Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k \geq 1$.
Ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.
Kết luận, mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

Để chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với $n \geq p$, p là số nguyên dương. Ta cũng làm các bước tương tự như trên.

- ! — Bước 1. Với $n = p$, ta chứng minh $P(p)$ đúng.
- Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k \geq p$.
Ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.
Kết luận, mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

2 DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n

Thực hiện theo các bước đã nêu ở phần tóm tắt lý thuyết.

 **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta luôn có $2^n > 2n + 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

- ① $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$
- ② $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$
- ③ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
- ④ $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$
- ⑤ $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$
- ⑥ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$

.....

.....

.....

.....

 **Câu 2.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

- ① $u_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.
- ② $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.
- ③ $u_n = 4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.
- ④ $u_n = 7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 3. Chứng minh rằng

① $2^{n+2} > 2n + 5$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

② $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

🔥 Câu 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

① $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$.

② $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$.

③ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$.

④ $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

⑤ $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n + 1)(2n + 1)}{3}$.

⑥ $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n + 1}{2n}$, với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

⑦ $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n + 3}{4 \cdot 3^n}$.

🔥 Câu 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

① $u_n = n^3 - n$ chia hết cho 3.

② $u_n = 13^n - 1$ chia hết cho 6.

③ $u_n = 4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9.

④ $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

⑤ $u_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

⑥ $u_n = 2^{4n} - 1$ chia hết cho 15.

🔥 Câu 6. Chứng minh rằng

① $2^{n+1} > 2n + 3$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

② $3^{n-1} > n(n+2)$ với mọi $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.

③ $(n!)^2 \geq n^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

④ $2^n > n^2$ với mọi $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$.

BÀI 2. Dãy số

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số).

Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số. Chẳng hạn,

— $u_1 = u(1)$ là số hạng thứ nhất (hay còn gọi là số hạng đầu).

— $u_2 = u(2)$ là số hạng thứ hai.

— $u_n = u(n)$ là số hạng thứ n (hay còn gọi là số hạng tổng quát).

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ hoặc viết tắt là (u_n) .

2 CÁCH CHO MỘT Dãy SỐ

— **Cách 1.** Dãy số cho bởi công thức số hạng tổng quát.

— **Cách 2.** Dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

– Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).

– Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó).

3 Dãy số tăng, dãy số giảm

— Dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_n < u_{n+1}$.

— Dãy số (u_n) là dãy số giảm khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_n > u_{n+1}$.

4 Dãy số bị chặn

— Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

— Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

— Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5 Dạng toán và bài tập

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số cho trước

Phương pháp giải: Từ công thức số hạng tổng quát ta thay giá trị n phù hợp để tìm số hạng cần tìm hoặc dùng hệ thức truy hồi để tìm số hạng đó.

 **Ví dụ 1.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$. Hãy viết dạng khai triển của dãy số. Tính

u_{50} và u_{99} .

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2). \end{cases}$$

Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên. Tính u_8 .

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau đây

- ① Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$
- ② Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 2. Xét tính tăng, giảm của dãy số

- **Phương pháp 1.** Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.
 - Nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng.
 - Nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.
- **Phương pháp 2.** Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ thì có thể so sánh tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với số 1.
 - Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
 - Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.
- **Phương pháp 3.** Nếu dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$)

Ví dụ 1. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải:

.....

Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số

Phương pháp giải: Sử dụng khái niệm dãy số bị chặn.

Ví dụ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$.

Lời giải:

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

① $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 7, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑨ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \forall n \geq 1. \end{cases}$

.....

Câu 2. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = n^2 + 4n - 3.$

② $u_n = 2n^3 - 5n + 1.$

③ $u_n = 3^n - n.$

④ $u_n = \frac{1}{n} - 2.$

⑤ $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}.$

⑥ $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 1}.$

⑦ $u_n = -n^2 - 2n + 1.$

⑧ $u_n = \frac{n-1}{n+1}.$

⑨ $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}.$

⑩ $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}.$

⑪ $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}.$

⑫ $\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}.$

🔥 **Câu 3.** Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}.$

② $u_n = \frac{2n+3}{3n+2}.$

③ $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}.$

④ $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$

⑤ $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}.$

⑥ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$

⑦ $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}.$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an^2}{n+1}$ (a : hằng số). u_{n+1} là số hạng nào sau đây?

A. $u_{n+1} = \frac{a \cdot (n+1)^2}{n+2}.$ B. $u_{n+1} = \frac{a \cdot (n+1)^2}{n+1}.$ C. $u_{n+1} = \frac{a \cdot n^2 + 1}{n+1}.$ D. $u_{n+1} = \frac{an^2}{n+2}.$

Câu 2. Cho dãy số có các số hạng đầu là: 5; 10; 15; 20; 25; ... Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = 5(n - 1)$.

B. $u_n = 5n$.

C. $u_n = 5 + n$.

D. $u_n = 5.n + 1$.

Câu 3. Cho dãy số có các số hạng đầu là: 8, 15, 22, 29, 36, Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = 7n + 7$.

B. $u_n = 7n$.

C. $u_n = 7n + 1$.

D. $u_n = 7n - 1$.

Câu 4. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $u_n = \frac{n-1}{n}$.

D. $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

Câu 5. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n = 1$.

B. $u_n = -1$.

C. $u_n = (-1)^n$.

D. $u_n = (-1)^{n+1}$.

Câu 6. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n = -2n$.

B. $u_n = (-2) + n$.

C. $u_n = (-2)(n+1)$.

D. $u_n = (-2) + 2(n-1)$.

🔥 **Câu 7.** Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n = \frac{1}{3} \frac{1}{3^{n+1}}$.

B. $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$.

C. $u_n = \frac{1}{3^n}$.

D. $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

🔥 **Câu 8.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n+1}$. Viết năm số hạng đầu của dãy;

A. $\frac{11}{2}; \frac{17}{3}; \frac{25}{4}; 7; \frac{47}{6}$.

B. $\frac{13}{2}; \frac{17}{3}; \frac{25}{4}; 7; \frac{47}{6}$.

C. $\frac{11}{2}; \frac{14}{3}; \frac{25}{4}; 7; \frac{47}{6}$.

D. $\frac{11}{2}; \frac{17}{3}; \frac{25}{4}; 8; \frac{47}{6}$.

🔥 **Câu 9.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

A. Bị chặn.

B. Không bị chặn.

C. Bị chặn trên.

D. Bị chặn dưới.

🔥 **Câu 10.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = (-1)^n$

A. Bị chặn.

B. Không bị chặn.

C. Bị chặn trên.

D. Bị chặn dưới.

🔥 **Câu 11.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 3n - 1$

- A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

🔥 **Câu 12.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 4 - 3n - n^2$

- A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

🔥 **Câu 13.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$

- A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

🔥 **Câu 14.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

- A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

🔥 **Câu 15.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+2)}$

- A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

 **Câu 16.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \forall n \geq 1$$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

! Để chứng minh một dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét hiệu $u_{n+1} - u_n = d$ (không đổi) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Tính chất 1. Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

Hệ quả 1. Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$a + c = 2b$$

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. 1; -3; -7; -11; -15; ...

B. 1; -3; -6; -9; -12; ...

C. 1; -2; -4; -6; -8; ...

D. 1; -3; -5; -7; -9; ...

2 SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ CỘNG

Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

Lời giải:

.....

3 TỔNG CỦA n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ CỘNG

Giả sử (u_n) là 1 cấp số cộng có công sai d . Gọi $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{1}{2}[2u_1 + (n-1)d]$$

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải:

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng

① $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 52. \end{cases}$

Câu 2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

① $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72}. \end{cases}$

🔥 Câu 3. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

$$\textcircled{1} \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2}.$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5. \end{cases}$$

🔥 Câu 4. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, u_3, \dots$ có công sai d .

$$\textcircled{1} \text{ Biết } u_2 + u_{22} = 40. \text{ Tính } S_{23}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Biết } u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147. \text{ Tính } A = u_6 + u_{11} \text{ và } B = u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}.$$

$$\textcircled{3} \text{ Biết } u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224. \text{ Tính } S_{19}.$$

$$\textcircled{4} \text{ Biết } u_{23} + u_{57} = 29. \text{ Tính } C = u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1.$$

🔥 Câu 5. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

$$\textcircled{1} \text{ Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105.}$$

$$\textcircled{2} \text{ Tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.}$$

$$\textcircled{3} \text{ Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 155.}$$

🔥 Câu 6. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- ① Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70.
- ② Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.
- ③ Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.
- ④ Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384.
- ⑤ Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.
- ⑥ Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

🔥 **Câu 7.** Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.

🔥 **Câu 8.** Giữa các số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số nữa để được một cấp số cộng.

🔥 **Câu 9.** Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: “Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...”. Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?

🔥 **Câu 10.** Một công viên hình tam giác được trồng cây xanh theo hàng có quy luật của một cấp số cộng như sau: hàng thứ nhất có 9 cây, hàng thứ 10 có 54 cây, hàng cuối cùng có 2014 cây. Hỏi công viên đó có tất cả bao nhiêu cây được trồng?

🔥 Câu 11. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

🔥 Câu 12. Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3, Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng?

🔥 Câu 13. Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với:

① $a = 10 - 3x, b = 2x^2 + 3, c = 7 - 4x.$

② $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab.$

🔥 Câu 14. Giải các phương trình sau:

① $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970.$

② $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245.$

③ $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155.$

④ $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010.$

TRẮC NGHIỆM

- 🔥 Câu 1.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Số hạng tổng quát u_n là
A. $u_n = 3n - 5$. **B.** $u_n = 3n - 2$. **C.** $u_n = -2n + 3$. **D.** $u_n = -3n + 2$.

- 🔥 Câu 2.** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Dãy số $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots$ là một cấp số cộng: $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$.

B. Dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots$ là một cấp số cộng: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2}; n = 3 \end{cases}$.

C. Dãy số: $2; 2; 2; 2; \dots$ là cấp số cộng $\begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 0 \end{cases}$.

D. Dãy số: $0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001; \dots$ không phải là một cấp số cộng.

- 🔥 Câu 3.** Cho một cấp số cộng có $u_1 = -\frac{1}{2}; d = \frac{1}{2}$. Hãy chọn kết quả đúng

A. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1; \dots$

B. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \dots$

C. Dạng khai triển: $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; \dots$

D. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots$

- 🔥 Câu 4.** Cho một cấp số cộng có $u_1 = -3; u_6 = 27$. Tìm d ?

A. $d = 5$.

B. $d = 7$.

C. $d = 6$.

D. $d = 8$.

🔥 Câu 5. Cho một cấp số cộng có $u_1 = \frac{1}{3}; u_8 = 26$. Tìm d ?

A. $d = \frac{11}{3}$.

B. $d = \frac{3}{11}$.

C. $d = \frac{10}{3}$.

D. $d = \frac{3}{10}$.

🔥 Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0,1; d = 0,1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là

A. 1,6.

B. 6.

C. 0,5.

D. 0,6.

🔥 Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0,1; d = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là: 0,6.

B. Cấp số cộng này không có hai số 0,5 và 0,6.

C. Số hạng thứ 6 của cấp số cộng này là: 0,5.

D. Số hạng thứ 4 của cấp số cộng này là: 3,9.

🔥 Câu 8. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

A. 1,5,6,8.

B. 2,4,6,8.

C. 1,4,6,9.

D. 1,4,7,8.

🔥 **Câu 9.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính số hạng thứ 100 của cấp số

A. $u_{100} = -243$. **B.** $u_{100} = -295$. **C.** $u_{100} = -231$. **D.** $u_{100} = -294$.

🔥 **Câu 10.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính tổng 15 số hạng đầu của cấp số ;

A. $S_{15} = -244$. **B.** $S_{15} = -274$. **C.** $S_{15} = -253$. **D.** $S_{15} = -285$.

🔥 **Câu 11.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$.

A. $S = -1286$. **B.** $S = -1276$. **C.** $S = -1242$. **D.** $S = -1222$.

🔥 **Câu 12.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Xác định công sai?

A. $d = 3$. **B.** $d = 5$. **C.** $d = 6$. **D.** $d = 4$.

🔥 **Câu 13.** Cho dãy số (u_n) với: $u_n = 2n + 5$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Là cấp số cộng có $d = -2$.

B. Là cấp số cộng có $d = 2$.

C. Số hạng thứ $n + 1$ là $u_{n+1} = 2n + 7$.

D. Tổng của 4 số hạng đầu tiên là $S_4 = 40$.

🔥 **Câu 14.** Cho dãy số (u_n) có: $u_1 = -3; d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n + 1)$.

B. $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.

C. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n - 1)$.

D. $u_n = n \left(-3 + \frac{1}{4}(n - 1) \right)$.

🔥 **Câu 15.** Cho dãy số (u_n) có: $u_1 = \frac{1}{4}; d = \frac{-1}{4}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_5 = \frac{5}{4}$.

B. $S_5 = \frac{4}{5}$.

C. $S_5 = -\frac{5}{4}$.

D. $S_5 = -\frac{4}{5}$.

🔥 **Câu 16.** Cho dãy số (u_n) có $d = -2; S_8 = 72$. Tính u_1 ?

A. $u_1 = 16$.

B. $u_1 = -16$.

C. $u_1 = \frac{1}{16}$.

D. $u_1 = -\frac{1}{16}$.

🔥 **Câu 17.** Cho dãy số (u_n) có $d = 0,1; S_5 = -0,5$. Tính u_1 ?

A. $u_1 = 0,3$.

B. $u_1 = \frac{10}{3}$.

C. $u_1 = \frac{10}{3}$.

D. $u_1 = -0,3$.

🔥 **Câu 18.** Cho dãy số (u_n) có $u_1 = -1; d = 2; S_n = 483$. Tính số các số hạng của cấp số cộng?

A. $n = 20$.

B. $n = 21$.

C. $n = 22$.

D. $n = 23$.

🔥 **Câu 19.** Dãy số $(u_n) : u_n = 2n + 3$ là cấp số cộng. Hãy xác định số công sai?

A. $d = -2$.

B. $d = 3$.

C. $d = 5$.

D. $d = 2$.

🔥 **Câu 20.** Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0,3; u_8 = 8$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Số hạng thứ 2 của cấp số cộng này là: 1,4.

B. Số hạng thứ 3 của cấp số cộng này là: 2,5.

C. Số hạng thứ 4 của cấp số cộng này là: 3,6.

D. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là: 7,7.

🔥 **Câu 21.** Viết ba số xen giữa các số 2 và 22 để được cấp số cộng có 5 số hạng.

A. 7;12;17.

B. 6;10;14.

C. 8;13;18.

D. 6;12;18.

Câu 22. Viết 4 số hạng xen giữa các số $\frac{1}{3}$ và $\frac{16}{3}$ để được cấp số cộng có 6 số hạng.

A. $\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{6}{3}; \frac{7}{3}$.

B. $\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}; \frac{13}{3}$.

C. $\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{11}{3}; \frac{14}{3}$.

D. $\frac{3}{4}; \frac{7}{4}; \frac{11}{4}; \frac{15}{4}$.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) với: $u_n = 7 - 2n$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. 3 số hạng đầu của dãy: $u_1 = 5; u_2 = 3; u_3 = 1$.

B. Số hạng thứ $n+1$: $u_{n+1} = 8 - 2n$.

C. Là cấp số cộng có $d = -2$.

D. Số hạng thứ 4: $u_4 = -1$.

Câu 24. Công thức nào sau đây là đúng với cấp số cộng có số hạng đầu u_1 , công sai d , $n \geq 2$?

A. $u_n = u_1 + d$.

B. $u_n = u_1 + (n + 1)d$.

C. $u_n = u_1 - (n - 1)d$.

D. $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12; u_{14} = 18$. Tìm u_1, d của cấp số cộng?

A. $u_1 = 20, d = -3$.

B. $u_1 = -22, d = 3$.

C. $u_1 = -21, d = -3$.

D. $u_1 = -21, d = -3$.

Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12; u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là:

A. $S = 24$.

B. $S = -24$.

C. $S = 26$.

D. $S = -25$.

🔥 Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15; u_{20} = 60$. Tìm u_1, d của cấp số cộng?

A. $u_1 = -35, d = -5$.

B. $u_1 = -35, d = 5$.

C. $u_1 = 35, d = -5$.

D. $u_1 = 35, d = 5$.

🔥 Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15; u_{20} = 60$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là:

A. $S_{20} = 200$.

B. $S_{20} = -200$.

C. $S_{20} = 250$.

D. $S_{20} = -25$.

🔥 Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_3 = 20, u_5 + u_7 = -29$. Tìm u_1, d ?

A. .

B. $u_1 = 20; d = 7$.

C. $u_1 = 20,5; d = 7$.

D. $u_1 = 20,5; d = -7$.

$u_1 = -20,5; d = -7$

🔥 Câu 30. Cho cấp số cộng: $-2; -5; -8; -11; -14; \dots$. Tìm d và tổng của 20 số hạng đầu tiên?

A. $d = 3; S_{20} = 510$.

B. $d = -3; S_{20} = -610$.

C. $d = -3; S_{20} = 610$.

D. $d = 3; S_{20} = -610$.

🔥 **Câu 31.** Cho tứ giác $ABCD$ biết 4 góc của tứ giác lập thành một cấp số cộng và góc $A = 30^\circ$. Tìm các góc còn lại?

- A. $75^\circ; 120^\circ; 165^\circ$. B. $72^\circ; 114^\circ; 156^\circ$. C. $70^\circ; 110^\circ; 150^\circ$. D. $80^\circ; 110^\circ; 135^\circ$.

🔥 **Câu 32.** Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng -9 và tổng các bình phương của chúng bằng 29 .

- A. $1; 2; 3$. B. $-4; -3; -2$. C. $-2; -1; 0$. D. $-3; -2; -1$.

🔥 **Câu 33.** Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành cấp số nhân. Biết tổng số hạng đầu và cuối là 37 , tổng hai số hạng giữa là 36 , tìm bốn số đó.

- A. $b = 15, c = 20, d = 25, a = 12$. B. $b = 16, c = 20, d = 25, a = 12$.
C. $b = 15, c = 25, d = 25, a = 12$. D. $b = 16, c = 20, d = 25, a = 18$.

🔥 **Câu 34.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$.. Tìm u_1, d ?

- A. $\begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 2, u_1 = -17 \end{cases}$ B. $\begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 3, u_1 = -7 \end{cases}$
C. $\begin{cases} d = 2 \\ u_1 = -3, u_1 = -17 \end{cases}$ D. $\begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 3, u_1 = -17 \end{cases}$

🔥 **Câu 35.** Cho tam giác ABC biết 3 góc của tam giác lập thành một cấp số cộng và có một góc bằng 25^0 . Tìm 2 góc còn lại?

A. $65^0; 90^0$.

B. $75^0; 80^0$.

C. $60^0; 95^0$.

D. $60^0; 90^0$.

🔥 **Câu 36.** Tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng và $C = 5A$. Xác định số đo các góc A, B, C .

A. $\begin{cases} A = 10^0 \\ B = 120^0 \\ C = 50^0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} A = 15^0 \\ B = 105^0 \\ C = 60^0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} A = 5^0 \\ B = 60^0 \\ C = 25^0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} A = 20^0 \\ B = 60^0 \\ C = 100^0 \end{cases}$.

🔥 **Câu 37.** Xác định x để 3 số: $1-x; x^2; 1+x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của x .

B. $x = \pm 2$.

C. $x = \pm 1$.

D. $x = 0$.

🔥 **Câu 38.** Xác định x để 3 số: $1+2x; 2x^2-1; -2x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

A. $x = \pm 3$.

B. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. Không có giá trị nào của x .

- 🔥 Câu 39.** Xác định a để 3 số: $1 + 3a; a^2 + 5; 1 - a$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?
- A.** Không có giá trị nào của a . **B.** $a = 0$.
C. $a = \pm 1$. **D.** $a = \pm\sqrt{2}$.

- 🔥 Câu 40.** Tìm x biết : $x^2 + 1, x - 2, 1 - 3x$ lập thành cấp số cộng.
- A.** $x = 4, x = 3$. **B.** $x = 2, x = 3$. **C.** $x = 2, x = 5$. **D.** $x = 2, x = 1$.

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \quad \forall n \geq 1$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân và $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}, n \geq 1$.

Nhận xét:

- Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).
- Khi $q = 0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q , cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A. 128; 64; 32; 16; 8; B. $\sqrt{2}; 2; 4; 4\sqrt{2}; \dots$
 C. 5; 6; 7; 8; D. $15; 5; 1; \frac{1}{5}; \dots$

2 SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ NHÂN

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$$

Nhận xét. Nếu (u_n) là cấp số nhân với các số hạng khác 0 thì

$$u_m = u_k \cdot q^{m-k}, k < m, q^{m-k} = \frac{u_m}{u_k}, k < m$$

Ví dụ 2. Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

Lời giải:

.....

3 TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

Tính chất 1. Trong cấp số nhân (u_n) , bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, k \geq 2$$

- ! ① Nếu a, b, c là ba số khác 0 thì a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$.
 ② Nếu (u_n) là cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k} \cdot u_{m+k}, k < m$.

 **Ví dụ 3.** Tìm giá trị x để dãy số $-4; x; -9$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải:

.....

4 TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ NHÂN

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$.
 Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

! **Lưu ý:** Nếu $q = 1$ thì

$$S_n = nu_1$$

 **Ví dụ 4.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

Lời giải:

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết

①
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40. \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5. \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21. \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240. \end{cases}$$

Câu 2. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

Câu 3. Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Câu 4. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số còn lại và nửa quả, Đến người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa. Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu xoài ở đầu mùa?

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ sáu của (u_n) là

A. $u_6 = -320$.

B. $u_6 = -160$.

C. $u_6 = 320$.

D. $u_6 = 160$.

🔥 Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

A. $u_1 = 2; q = -2$.

B. $u_1 = -2; q = 2$.

C. $u_1 = 1; q = 2$.

D. $u_1 = 2; q = 2$.

🔥 Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3; u_2 = -6$. Số 192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

A. Số hạng thứ 6.

B. Số hạng thứ 7.

C. Không là số hạng của cấp số đã cho.

D. Số hạng thứ 5.

🔥 Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}; u_7 = -32$. Tìm q ?

A. $q = \pm 1$.

B. $q = \pm \frac{1}{2}$.

C. $q = \pm 2$.

D. $q = \pm 4$.

🔥 Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4; q = -4$. Viết số hạng tổng quát u_n ?

A. $-4(-4)^n$.

B. $(-4)^n$.

C. $4(-4)^{n-1}$.

D. 4^n .

🔥 **Câu 6.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Tính S_6 .

- A. $S_6 = -\frac{155}{3}$. B. $S_6 = -\frac{315}{3}$. C. $S_6 = -315$. D. $S_6 = 315$.

🔥 **Câu 7.** Xác định x để 3 số $x-2; x+1; 3-x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân

- A. Không có giá trị nào của x . B. $x = \pm 1$.
C. $x = 2$. D. $x = -3$.

🔥 **Câu 8.** Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$ biết $S_n = 765$. Tìm n ?

- A. $n = 7$. B. $n = 6$. C. $n = 8$. D. $n = 9$.

🔥 **Câu 9.** Cho dãy số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Dãy số này là cấp số nhân có $u_1 = 1, q = \frac{1}{2}$.
B. Số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
C. Số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{2^n}$.
D. Dãy số này là dãy số giảm.

🔥 **Câu 10.** Cho dãy số $-1; -1; -1; -1; -1; \dots$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Dãy số này không phải là cấp số nhân. B. Là cấp số nhân có $u_1 = -1; q = 1$.
C. Số hạng tổng quát $u_n = (-1)^n$. D. Là dãy số giảm.

🔥 **Câu 11.** Cho dãy số: $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Dãy số không phải là một cấp số nhân.
B. Dãy số này là cấp số nhân có $u_1 = -1; q = -\frac{1}{3}$.
C. Số hạng tổng quát $u_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$.
D. Là dãy số không tăng, không giảm.

🔥 **Câu 12.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}; u_7 = -32$. Tìm q ?

- A. $q = \pm \frac{1}{2}$. B. $q = \pm 2$. C. $q = \pm 4$. D. $q = \pm 1$.

🔥 **Câu 13.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2; q = -5$. Viết 3 số hạng tiếp theo và số hạng tổng quát u_n ?

- A. $10; 50; -250; (-2)(-5)^{n-1}$. B. $10; -50; 250; 2 \cdot 5^{n-1}$.
C. $10; -50; 250; (-2) \cdot 5^n$. D. $10; -50; 250; (-2)(-5)^{n-1}$.

🔥 **Câu 14.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4; q = -4$. Viết 3 số hạng tiếp theo và số hạng tổng quát u_n ?

A. $-16; 64; -256; -(-4)^n$.

B. $-16; 64; -256; (-4)^n$.

C. $-16; 64; -256; 4(-4)^n$.

D. $-16; 64; -256; 4^n$.

🔥 **Câu 15.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -1; q = 0,00001$. Tìm q và u_n ?

A. $q = \frac{1}{10}; u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$.

B. $q = \frac{-1}{10}; u_n = -10^{n-1}$.

C. $q = \frac{-1}{10}; u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$.

D. $q = \frac{-1}{10}; u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

🔥 **Câu 16.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

A. Số hạng thứ 103.

B. Số hạng thứ 104.

C. Số hạng thứ 105.

D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

🔥 **Câu 17.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3; q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

A. Số hạng thứ 5.

B. Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7.

D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

🔥 **Câu 18.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3; q = \frac{-1}{2}$. Số 222 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

A. Số hạng thứ 11.

B. Số hạng thứ 12.

C. Số hạng thứ 9.

D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

🔥 **Câu 19.** Hãy chọn cấp số nhân trong các dãy số được cho sau đây:

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = -\sqrt{2} \cdot u_n \end{cases}$

C. $u_n = n^2 + 1$.

D. $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = u_{n-1} \cdot u_n \end{cases}$

🔥 **Câu 20.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây. Cấp số nhân với

A. $u_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$ là dãy số tăng.

B. $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ là dãy số tăng.

C. $u_n = 4^n$ là dãy số tăng.

D. $u_n = (-4)^n$ là dãy số tăng.

🔥 **Câu 21.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây. Cấp số nhân với

A. $u_n = \frac{1}{10^n}$ là dãy số giảm.

B. $u_n = \frac{-3}{10^n}$ là dãy số giảm.

C. $u_n = 10^n$ là dãy số giảm.

D. $u_n = (-10)^n$ là dãy số giảm.

🔥 **Câu 22.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây:

- A. Cấp số nhân: $-2; -2,3; -2,9; \dots$ có $u_6 = -2 \left(-\frac{1}{3}\right)^5$.
- B. Cấp số nhân: $2; -6; 18; \dots$ có $u_6 = 2 \cdot (-3)^6$.
- C. Cấp số nhân: $-1; -\sqrt{2}; -2; \dots$ có $u_6 = -2\sqrt{2}$.
- D. Cấp số nhân: $-1; -\sqrt{2}; -2; \dots$ có $u_6 = -4\sqrt{2}$.

🔥 **Câu 23.** Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A. $u_k = \sqrt{u_{k+1} \cdot u_{k+2}}$. B. $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$. C. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$. D. $u_k = u_1 + (k-1)q$.

🔥 **Câu 24.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{-1}{10} \cdot u_n \end{cases}$. Chọn hệ thức đúng:

- A. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = -\frac{1}{10}$. B. $u_n = (-2) \frac{1}{10^{n-1}}$.
- C. $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}, (n \geq 2)$. D. $u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}, (n \geq 2)$.

🔥 **Câu 25.** Cho dãy số $(u_n): 1; x; x^2; x^3; \dots$ (với $x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq 0$). Chọn mệnh đề đúng.

- A. (u_n) là cấp số nhân có $u_n = x^n$. B. (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = 1; q = x$.
- C. (u_n) không phải là cấp số nhân. D. (u_n) là một dãy số tăng.

🔥 **Câu 26.** Cho dãy số (u_n) : $x; -x^3; x^5; -x^7; \dots$ (với $x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq 0$). Chọn mệnh đề **sai**.

- A. (u_n) là dãy số không tăng, không giảm. B. (u_n) là cấp số nhân có $u_n = (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}$.
 C. (u_n) có tổng $S_n = \frac{x(1-x^{2n-1})}{1-x^2}$. D. (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = x, q = -x^2$.

🔥 **Câu 27.** Chọn cấp số nhân trong các dãy số sau:

- A. 1; 0,2; 0,04; 0,0008; B. 2; 22; 222; 2222;
 C. $x; 2x; 3x; 4x; \dots$ D. $1; -x^2; x^4; -x^6; \dots$

🔥 **Câu 28.** Cho cấp số nhân có $u_1 = 3, q = \frac{2}{3}$. Chọn kết quả đúng:

- A. Bốn số hạng tiếp theo của cấp số là: $2; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{16}{3}$.
 B. $u_n = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.
 C. $S_n = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 9$.
 D. (u_n) là một dãy số tăng.

🔥 **Câu 29.** Cho cấp số nhân có $u_1 = -3, q = \frac{2}{3}$. Tính u_5 ?

- A. $u_5 = \frac{-27}{16}$. B. $u_5 = \frac{-16}{27}$. C. $u_5 = \frac{16}{27}$. D. $u_5 = \frac{27}{16}$.

Sưu tầm và biên soạn

A. Không có giá trị nào của x .B. $x = -0,008$.C. $x = 0,008$.D. $x = 0,004$.

🔥 **Câu 35.** Hãy chọn cấp số nhân trong các dãy số được cho sau đây:

A. $u_n = \frac{1}{4^n} - 1$.B. $u_n = \frac{1}{4^{n-2}}$.C. $u_n = n^2 + \frac{1}{4}$.D. $u_n = n^2 - \frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 36.** Xác định x để 3 số $2x - 1; x; 2x + 1$ lập thành một cấp số nhân:

A. $x = \pm \frac{1}{3}$.B. $x = \pm \sqrt{3}$.C. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.D. Không có giá trị nào của x .

🔥 **Câu 37.** Xác định x để 3 số $x - 2; x + 1; 3 - x$ lập thành một cấp số nhân:

A. Không có giá trị nào của x .B. $x = \pm 1$.C. $x = 2$.D. $x = -3$.

🔥 **Câu 38.** Tìm x biết $1, x^2, 6 - x^2$ lập thành cấp số nhân.

A. $x = \pm 1$.B. $x = \pm \sqrt{2}$.C. $x = \pm 2$.D. $x = \pm \sqrt{3}$.

🔥 **Câu 39.** Gọi $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ thì kết quả nào sau đây là đúng.

A. $S_n = \frac{n-1}{n}$. B. $S_n = \frac{n+1}{n}$. C. $S_n = \frac{n+1}{n+2}$. D. $S_n = \frac{n+2}{n+3}$.

🔥 **Câu 40.** Gọi $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ thì kết quả nào sau đây là đúng.

A. $S_n = \frac{n-1}{2n-1}$. B. $S_n = \frac{n}{2n+1}$. C. $S_n = \frac{n+1}{2n+3}$. D. $S_n = \frac{n+2}{2n+5}$.

CHƯƠNG 4

GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA:

Định nghĩa 1. Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2. Dãy số (u_n) có giới hạn là a khi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$. Ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

! Ta có thể viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ (không cần viết chỉ số $n \rightarrow +\infty$)

2 MỘT SỐ GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT

$$\textcircled{1} \lim \frac{1}{n} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$\textcircled{3} \lim \frac{1}{n^k} = 0 \text{ với } k \in \mathbb{N}^*$$

$$\textcircled{4} \lim C = C \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{5} \lim q^n = 0 \text{ với } |q| < 1.$$

3 MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lý 1. Cho $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì ta có:

$$\textcircled{1} \lim(u_n \pm v_n) = a \pm b.$$

$$\textcircled{2} \lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b.$$

$$\textcircled{3} \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

$$\textcircled{4} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \text{ với } u_n \geq 0.$$

$$\textcircled{5} \lim |u_n| = |a|.$$

$$\textcircled{6} \lim(k \cdot u_n) = k \cdot a, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Định lý 2. Định lý "kẹp".

▮ Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

▮ Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim w_n = \lim v_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

4 TỔNG CỦA CSN LÙI VÔ HẠN

Cho CSN (u_n) có công bội q thỏa $|q| < 1$. Khi đó tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ gọi là tổng vô hạn của CSN và

$$S = \lim S_n = \lim \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{u_1}{1 - q}$$

5 GIỚI HẠN VÔ CỰC

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow$ với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty.$$

Một số kết quả đặc biệt:

- $\lim n^k = +\infty$ với mọi $k > 0$
- $\lim q^n = +\infty$ với mọi $q > 1$.

6 MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC.

Quy tắc 1: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho như sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = l$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho như sau:

$\lim u_n$	Dấu của l	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Quy tắc 3: Nếu $\lim u_n = l$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được coi như sau:

Dấu của l	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

7 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

☑ Thường phát biểu dưới dạng $\lim \frac{u_n}{v_n}$.

☑ **Phương pháp giải:**

- ☑ Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞ " ở tử và mẫu.
- ☑ Khử bỏ n^k , đưa giới hạn về dạng xác định được.
- ☑ Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.
- ☑ Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng có tính "quyết định ∞ " có dạng a^n .



Ví dụ 1. Tính giới hạn

① $\lim \frac{2n-1}{3n+2}$.

② $\lim \frac{4n^2-2n+2019}{2020+3n-2n^2}$.

③ $\lim \frac{2020n+2}{n^2-n+1}$.

④ $\lim \frac{\sqrt{n^2+n-1}-3n}{2n+1}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Khử vô định dạng $\infty - \infty$ ☑ Thường phát biểu dưới dạng $\lim (\sqrt{u_n} - v_n)$ hoặc $\lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$.☑ **Phương pháp giải:**

✍ Nhân thêm lượng liên hợp cho cả tử và mẫu.

✍ Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1.

 **Ví dụ 1.** Tính giới hạn

① $\lim (\sqrt{n-2019} - \sqrt{n+2020})$.

② $\lim (\sqrt{4n^2+n-1} - \sqrt{4n^2+2n})$.

③ $\lim (n+3 - \sqrt{n^2-4n+1})$.

④ $\lim (n - \sqrt[3]{n^3-n^2+1})$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

📁 Dạng 3. Giới hạn vô cực

Loại 1: Giới hạn của hàm đa thức hoặc hàm chứa căn.

Phương pháp giải:

- Rút bậc lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung.
- Áp dụng các quy tắc tính giới hạn đa thức.

Loại 2: Giới hạn của hàm phân thức.

Phương pháp giải: Rút bậc cao nhất của tử và rút bậc cao nhất của mẫu.

Loại 3: Giới hạn của hàm chứa lũy thừa bậc n .

Phương pháp giải:

- Rút cơ số lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung.
- Rút cơ số lớn nhất của tử và rút cơ số lớn nhất của mẫu.

 **Ví dụ 1.** Tính giới hạn

① $\lim (n^4 - 2n^2 + 3).$

② $\lim (-2n^3 + 3n - 1).$

③ $\lim (2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2}).$

④ $\lim \frac{2n^4 - 3n^3 + 2}{n^3 + 2}.$

⑤ $\lim \frac{(2n - 1)(3n^2 + 2)^3}{-2n^5 + 4n^3 - 1}.$

⑥ $\lim (5^n - 2^n).$

⑦ $\lim \frac{9^n - 3 \cdot 4^n}{6 \cdot 7^n + 8^n}.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Tính các giới hạn sau:

① $\lim (-2n^3 + 3n + 5)$

② $\lim \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n}$

③ $\lim (3n^3 - 7n + 11)$

④ $\lim \sqrt{2n^4 - n^2 + n + 2}$

⑤ $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$

⑥ $\lim (-n^3 - 3n - 2)$

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{2n + 1}{n^3 + 4n^2 + 3}$$

$$\textcircled{3} \lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4n^4}$$

$$\textcircled{4} \lim \frac{n^2 + 1}{(n + 1)(2 + n)(n^2 + 1)}$$

$$\textcircled{5} \lim \frac{2n^4 + n + 1}{2n^4 + n^2 - 3}$$

$$\textcircled{6} \lim \frac{3n^3 - 2n^2 + 1}{4n^2 - n - 1}$$

$$\textcircled{7} \lim \frac{3 + 2n^2}{2n - 3n^3 + 1}$$

$$\textcircled{8} \lim \frac{2n - 3n^3 + 1}{n^3 + n^2}$$

$$\textcircled{9} \lim \frac{3n^3 - 5n + 1}{n^2 + 4}$$

$$\textcircled{10} \lim \frac{(2 - 3n)^3(n + 1)^2}{1 - 4n^5}$$

$$\textcircled{11} \lim \frac{2n - 3}{4n + 5}$$

$$\textcircled{12} \lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{4n^2 + 5n - 2}$$

$$\textcircled{13} \lim \frac{4n^2 - 3}{n^3 + 3n + 1}$$

$$\textcircled{14} \lim \frac{(n + 1)(2n - 1)}{(3n + 2)(n + 3)}$$

$$\textcircled{15} \lim \frac{n(3n - 2)(4n + 5)}{(2n - 3)^2}$$

$$\textcircled{16} \lim \frac{2(n - 1)^3(n^2 - n + 1)^2}{(n^3 - 2n + 5)(3 - 2n)^6}$$

$$\textcircled{17} \lim \frac{(2n - 1)^3(n - 3)^5}{3(n + 1)^9}$$

$$\textcircled{18} \lim \frac{(n^2 + 1)(n - 3) + n^3 - 2}{(2n^2 + 1)(3 - n)}$$

$$\textcircled{19} \lim \frac{n^3 - 2n + 1}{2n^2 - n + 3}$$

$$\textcircled{20} \lim \frac{4n^5 - n + 1}{(2n + 1)(-n + 1)(n^2 + 2)}$$

$$\textcircled{21} \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{2n^3 - n}$$

$$\textcircled{22} \lim \frac{(n^2 + 1)(n - 1)^2}{(n + 1)(3n - 2)^3}$$

$$\textcircled{23} \lim \frac{2n^3 + 3n - 2}{3n - 2}$$

$$\textcircled{24} \lim \frac{2n^3 - n - 3}{5n - 1}$$

Câu 3. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim \frac{1 + 3^n}{4 + 3^n}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$$

$$\textcircled{3} \lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$$

$$\textcircled{4} \lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$$

$$\textcircled{5} \lim \frac{1 + 2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 7^n}$$

$$\textcircled{6} \lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$$

$$\textcircled{7} \lim \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + (-1)^{n+1}}$$

$$\textcircled{8} \lim \frac{3 + 4^n}{1 + 3 \cdot 4^n}$$

$$\textcircled{9} \lim \frac{3^n + 4^n + 5^{n+1}}{3^n - 4^n + 5^n}$$

$$\textcircled{10} \lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n + 5 \cdot 3^n}$$

$$\textcircled{11} \lim \frac{3^n - 4^n + 1}{2 \cdot 4^n + 2^n}$$

$$\textcircled{12} \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$$

$$\textcircled{13} \lim 2^n - 3^n$$

$$\textcircled{14} \lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^n}{7 + 3 \cdot 5^n}$$

$$\textcircled{15} \lim \frac{4^n - 5^n}{2^n + 3 \cdot 5^n}$$

$$\textcircled{16} \lim \frac{2^n - 3^n + 4 \cdot 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$$

Câu 4. Tính các giới hạn sau:

① $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$

② $\lim \frac{\sqrt{n^2+3}-n-4}{\sqrt{n^2+2}+n}$

③ $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

④ $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$

⑤ $\lim \frac{(2n\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3})}{(n+1)(n+2)}$

⑥ $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

⑦ $\lim \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$

⑧ $\lim \frac{2n\sqrt{n}}{n^2+2n-1}$

⑨ $\lim \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^3+n}}$

⑩ $\lim \frac{n+2}{n+2}$

⑪ $\lim \frac{n^2+2\sqrt{n}+3}{2n^2+n-\sqrt{n}}$

⑫ $\lim \frac{(2n\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3})}{(n+1)(n-3)}$

⑬ $\lim \frac{2n\sqrt{n}+3}{n^2+n+1}$

⑭ $\lim \frac{n\sqrt{1+2+3+\dots+2n}}{3n^2+n-2}$

⑮ $\lim \frac{2n\sqrt{n+3}}{n^2+3\sqrt{n+2}}$

🔥 **Câu 5.** Tính các giới hạn sau:

① $\lim (\sqrt{n^2+2n}-n-1)$

② $\lim (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2})$

③ $\lim (\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1)$

④ $\lim (1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1})$

⑤ $\lim (\sqrt{n^2-n}-n)$

⑥ $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$

⑦ $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$

⑧ $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$

⑨ $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1 ?

A. $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$

B. $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^2-1}$

C. $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$

D. $\lim \frac{2n^3-3}{-2n^2-1}$

🔥 **Câu 2.** $\lim \frac{n^3 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 3.** Kết quả $L = \lim (5n - 3n^3)$ là

A. -4.

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. -6.

🔥 **Câu 4.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $\frac{1}{5}$?

A. $u_n = \frac{1 - 2n^2}{5n + 5}$.

B. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$.

C. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 5n^2}$.

D. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 5}$.

🔥 **Câu 5.** $\lim (-3n^3 + 2n^2 - 5)$ bằng

A. -3.

B. -6.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

🔥 **Câu 6.** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$.

B. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$.

C. $\lim \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$.

D. $\lim \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^3 + n^2}$.

❖ **Câu 7.** Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

- A. $u_n = 3n^2 - n$. B. $u_n = n^4 - 3n^3$. C. $u_n = -n^2 + 4n^3$. D. $u_n = 3n^3 - 2n^4$.

❖ **Câu 8.** Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n - n^4}{4n - 5}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 9.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$. B. $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$. C. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

❖ **Câu 10.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $\frac{1-2n}{5n+3n^2}$. B. $\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$. C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. D. $u_n = \frac{n^2-2}{5n+3n^2}$.

❖ **Câu 11.** Cho $u_n = \frac{1-4n}{5n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

- A. $\frac{4}{5}$. B. $-\frac{4}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $-\frac{3}{5}$.

🔥 **Câu 12.** Cho $u_n = \frac{2^n + 5^n}{5^n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. 0.

B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. 1.

🔥 **Câu 13.** Kết quả $L = \lim (3n^2 + 5n - 3)$ là

A. 3.

B. $-\infty$.

C. 5.

D. $+\infty$.

🔥 **Câu 14.** Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$ có giới hạn bằng:

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. 1.

🔥 **Câu 15.** Tính $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$. Kết quả là:

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. 0.

D. 3.

🔥 Câu 16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$ bằng:

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

🔥 Câu 17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ bằng:

A. $-\frac{1}{3}$.B. $+\infty$.C. $-\infty$.D. $\frac{2}{3}$.

🔥 Câu 18. Kết quả đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ là

A. $-\frac{25}{2}$.B. $\frac{5}{2}$.

C. 1.

D. $-\frac{5}{2}$.

🔥 Câu 19. Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ ($L \in \mathbb{R} \setminus \{-8\}$) thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{u_n} + 8}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{L} + 2}$.B. $\frac{1}{\sqrt{L} + 8}$.C. $\frac{1}{\sqrt[3]{L} + 8}$.D. $\frac{1}{\sqrt{L} + \sqrt{8}}$.

🔥 Câu 20. Dãy số nào sau đây không có giới hạn?

A. $(-0,99)^n$.B. $(-0,89)^n$.C. $(0,99)^n$.D. $(-1)^n$.

🔥 **Câu 21.** Dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt[3]{\frac{5-8n}{n+3}}$ có giới hạn bằng:

A. -1.

B. -2.

C. 2.

D. -8.

🔥 **Câu 22.** $\lim (3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. -1.

C. $-\infty$.D. $\frac{1}{3}$.

🔥 **Câu 23.** $\lim \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ bằng

A. $+\infty$.

B. 0.

C. $\frac{2}{7}$.D. $\frac{3}{4}$.

🔥 **Câu 24.** Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = \frac{1+n^2}{5n+5}$.B. $u_n = \frac{n^2-2}{5n+5n^3}$.C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$.D. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

🔥 **Câu 25.** Nếu $\lim u_n = L (L \geq -9)$ thì $\lim \sqrt{u_n + 9}$ bằng

A. $\sqrt{L} + 3.$

B. $L + 9.$

C. $\sqrt{L + 9}.$

D. $L + 3.$

🔥 **Câu 26.** $\lim \frac{3 - 4^{n+2}}{2^n + 3 \cdot 4^n}$ bằng:

A. $\frac{4}{3}.$

B. $1.$

C. $\frac{16}{3}.$

D. $-\frac{16}{3}.$

🔥 **Câu 27.** Kết quả đúng của $\lim \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}}$ là

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $\frac{1}{2}.$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

D. $-\frac{1}{2}.$

🔥 **Câu 28.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $-\frac{4}{2}.$

B. $3.$

C. $4.$

D. .

🔥 **Câu 29.** $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + n}}{6n + 2}$ bằng

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{\sqrt[3]{2}}{6}$.

D. 0.

🔥 **Câu 30.** Kết quả đúng của $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}}$ là:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

🔥 **Câu 31.** Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu của cấp số nhân đó là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. $\frac{9}{2}$.

🔥 **Câu 32.** Cho dãy số (u_n) có $u_n = (n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim u_n$

A. $+\infty$.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. 0.

🔥 **Câu 33.** $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ bằng

A. 1.

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. 0.

🔥 Câu 34. $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ bằng:

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$.

🔥 Câu 35. $\lim n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2})$ bằng:

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 1.

🔥 Câu 36. $\lim (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n})$ có kết quả là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. $+\infty$.

🔥 Câu 37. Gọi $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots$. Giá trị của S bằng

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

🔥 **Câu 38.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+4}}$ bằng:

A. 0.

B. $+\infty$.C. $-\infty$.

D. 1.

🔥 **Câu 39.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+5} - \sqrt{n+4}}{2n-1}$ bằng

A. 0.

B. 2.

C. $+\infty$.

D. 1.

🔥 **Câu 40.** Dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 - 2n + 2} - n$ có giới hạn bằng:

A. 1.

B. -2.

C. 2.

D. -1.

BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA:

Định nghĩa 1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm. Cho khoảng K chứa điểm x_0 . Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K (có thể trừ điểm x_0) có giới hạn là L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có: $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

! Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ với C là hằng số.

Định nghĩa 2. Giới hạn một bên:

✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): x_0 < x_n < b$ mà $x_n \rightarrow x_0$ thì ta có: $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): a < x_n < x_0$ mà $x_n \rightarrow x_0$ thì ta có: $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

2 CÁC GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT

✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x} = 0$ với c là hằng số.

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k lẻ, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k chẵn

3 GIỚI HẠN HỮU HẠN

✓ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M; \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M; \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} (M \neq 0)$$

✓ Nếu $f(x) \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

4 GIỚI HẠN VÔ CỰC

☑ Quy tắc 1: Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \neq 0$. Ta có:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$
$+\infty$	$\pm$	$\pm\infty$
$-\infty$	$\pm$	$\mp\infty$

☑ Quy tắc 2: Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, (L \neq 0)$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Ta có

Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$\pm$	$\pm\infty$
$-$	$\pm$	$\mp\infty$

5 CÁC DẠNG TOÁN

☐ **Dạng 1. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$**

Phương pháp giải: Tương tự như giới hạn dãy số.

 **Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x).$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x).$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 1} - 2x + 1).$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

Phương pháp giải:

Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = x_0$ thì ta có: $f(x) = (x - x_0)f_1(x)$.

— Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì ta phân tích $f(x) = (x - x_0)f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0)g_1(x)$.

Khi đó $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

Chú ý: Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

— Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.
- $(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$.
- $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$.

 **Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4x + 3}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$.

② $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4}$.

③ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{3 - \sqrt{x+4}}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}.$

② $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \sqrt[3]{1+x}}{x+2}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{\sqrt[3]{5x+3} - 2}.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Giới hạn một bên

Phương pháp giải:

☑ Phương pháp tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

☑ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

 **Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn:

① $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x-3}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}.$

② $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 3\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}.$

④ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right).$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6}$

② $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1}$

⑥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x}$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{(x-2)^2} \\ \textcircled{8} \quad & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-7}{x-1} \\ \textcircled{9} \quad & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-7}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \quad & \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x-3}{x-4} \\ \textcircled{11} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1) \\ \textcircled{12} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{13} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} \\ \textcircled{14} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{5 - 2x} \\ \textcircled{15} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2 + x + 4} \end{aligned}$$

🔥 **Câu 2.** Tính các giới hạn sau:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} \\ \textcircled{2} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} \\ \textcircled{3} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11) \\ \textcircled{4} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ \textcircled{6} \quad & \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} \\ \textcircled{7} \quad & \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| \\ \textcircled{8} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad & \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 8| \\ \textcircled{10} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x} \\ \textcircled{11} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 3}} \\ \textcircled{12} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{2x(x+1)}{x^2 - 6}} \end{aligned}$$

🔥 **Câu 3.** Tính các giới hạn sau:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} \\ \textcircled{2} \quad & \lim_{x \rightarrow 5^-} (\sqrt{5-x} + 2x) \\ \textcircled{3} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \\ \textcircled{4} \quad & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} \\ \textcircled{6} \quad & \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}} \\ \textcircled{7} \quad & \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} \\ \textcircled{9} \quad & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2} \\ \textcircled{10} \quad & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2} \end{aligned}$$

Câu 4. Tìm giới hạn bên phải, bên trái và giới hạn (nếu có) của các hàm số:

$$\textcircled{1} f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1 & \text{khi } x \leq -2 \\ \sqrt{2x^2 + 1} & \text{khi } x > -2 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow -2$$

$$\textcircled{2} f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 2$$

$$\textcircled{3} f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^2 - 3 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 1$$

$$\textcircled{4} f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \leq -2 \\ \frac{x + 2}{\sqrt{x + 6} - 2} & \text{khi } x > -2 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow -2$$

$$\textcircled{5} f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 1}{x} & \text{khi } x > 1 \\ 5x + 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 1$$

$$\textcircled{6} f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{2x^2 - 3x + 1}{4(3x^2 - 5x + 2)} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 1$$

$$\textcircled{7} f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 0$$

$$\textcircled{8} f(x) = \begin{cases} \frac{4 - x^2}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ 1 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 2$$

Câu 5. Với giá trị nào của m thì hàm số sau có giới hạn khi $x \rightarrow 1$? Tìm giới hạn đó.

$$\textcircled{1} f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x}{x + m} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{2x - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 6. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$

② $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$

③ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$

④ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{x^3+8}$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

⑨ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-x^2}{x^3+27}$

⑩ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{x^3-8}$

⑪ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^5-1}$

⑫ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

⑬ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^2 - 2(1+x) - 3}{(x+1)^3 + 2(x+1)^2 - 1}$

⑭ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

⑮ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^2}{x^3 - 12x + 16}$

⑯ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^3 - 1}$

⑰ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{3x}$

⑱ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$

⑲ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{3 - \sqrt{3x^2+9}}$

⑳ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$

㉑ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$

TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

🔥 Câu 2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+x^3}{x^2-x+1}$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$.

B. $\frac{6}{7}$.

C. $-\infty$.

D. $-\frac{10}{7}$.

🔥 Câu 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2+1}{2x^3+1}$ bằng:

A. -1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $-\frac{1}{2}$.

🔥 Câu 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ bằng:

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

🔥 Câu 5. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 6}{9 + 3x}$ bằng

A. $\frac{1}{6}$.B. $-\infty$.C. $\frac{1}{3}$.D. $+\infty$.

🔥 Câu 6. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x - 1}{x - 1}$ bằng:

A. -1.

B. $-\infty$.

C. -3.

D. $+\infty$.

🔥 Câu 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$ bằng

A. $+\infty$.B. $\frac{3}{5}$.C. $-\frac{2}{5}$.D. $-\infty$.

🔥 Câu 8. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2}$ bằng

A. $+\infty$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 1.

D. $-\infty$.

🔥 Câu 9. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2}$ bằng:

A. 2.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. -2.

🔥 Câu 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-1}{3-x^2}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. -2.

D. 2.

🔥 Câu 11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

🔥 Câu 12. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1}$. Kết quả là:

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 0.

🔥 **Câu 13.** Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 - 3x^3 + x + 1)$:

- A. 4. B. 0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

🔥 **Câu 14.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 - x^2 + 2}{x - 2}$ bằng

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. 5. D. $\frac{5}{3}$.

🔥 **Câu 15.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x + 3}{5x^4 + 3x + 1}$ bằng

- A. $+\infty$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{3}{5}$. D. 0.

🔥 **Câu 16.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x^5}{x^4 + x + 5}$ bằng

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{4}{7}$. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{2}{5}$.

🔥 Câu 17. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng:

A. -1.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 1.

D. $-\frac{5}{4}$.

🔥 Câu 18. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{x - 5}$ bằng

A. $-\frac{2}{5}$.

B. -2.

C. $\frac{2}{5}$.

D. 5.

🔥 Câu 19. $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$ bằng:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

🔥 Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3 + 3\sqrt{3}}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x)$ bằng:

A. $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

🔥 Câu 21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x^5}{x^4 + 6x + 5}$ bằng

A. $+\infty$.B. -1 .C. 3 .D. $-\infty$.

🔥 Câu 22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + x^4 - 3}{3x^2 - 7}$ là:

A. 0 .B. $+\infty$.C. -2 .D. $-\infty$.

🔥 Câu 23. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{(x+1)^3}$ là

A. 2 .B. 1 .C. $-\infty$.D. $+\infty$.

🔥 Câu 24. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3}$ bằng:

A. $-\frac{8}{3}$.B. $\frac{1}{3}$.C. -2 .D. $-\infty$.

🔥 Câu 25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.B. $-\frac{1}{3}$.C. 0 .D. $\frac{1}{3}$.

🔥 Câu 26. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ bằng:

A. $+\infty$.

B. -1 .

C. 1 .

D. $-\infty$.

🔥 Câu 27. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}}$ là

A. $+\infty$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $-\infty$.

D. -1 .

🔥 Câu 28. Cho hàm $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 3x}{(2x - 1)(x^3 - 2)}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. 2 .

C. $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$.

🔥 Câu 29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ là:

A. 0 .

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. 1 .

🔥 Câu 30. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng:

A. 1.

B. -1.

C. m .D. $-m$.

🔥 Câu 31. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ bằng:

A. $+\infty$.B. $-\infty$.

C. 3.

D. 5.

🔥 Câu 32. Cho $L = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}$. Khi đó

A. $L = \frac{4}{5}$.B. $L = -\frac{4}{5}$.C. $L = \frac{1}{2}$.D. $L = -\frac{1}{2}$.

🔥 Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{8} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.

B. 0.

C. $+\infty$.D. $-\frac{1}{8}$.

🔥 Câu 34. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ bằng:

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{3}$.

🔥 Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{3+3x}$. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ bằng

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

🔥 Câu 36. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 0. D. 1.

🔥 Câu 37. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$?

- A. $\frac{7}{8}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{4}$.

🔥 Câu 38. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{x+2}$ bằng

- A. -1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

🔥 Câu 39. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 2018}{2x^4 - 5}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 0.

D. $+\infty$.

🔥 Câu 40. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$

A. $K = 0$.

B. $K = 1$.

C. $K = -2$.

D. $K = 4$.

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

! Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó gián đoạn tại x_0 .

2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG, TRÊN MỘT ĐOẠN

- ✓ Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ được gọi là liên tục trên khoảng đó, nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- ✓ Hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn đó, nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (liên tục bên phải tại a và bên trái tại b).

! **Chú ý:** Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó.

3 MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

- ✓ Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- ✓ Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.
- ✓ Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng.
- ✓ Các hàm $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên tập xác định của chúng.

4 TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

- ✓ **Định lý:** (Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục) Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = M$.
- ✓ **Hệ quả 1:** Nếu hàm f liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- ✓ **Hệ quả 2:** Nếu hàm f liên tục trên $[a; b]$ và $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $[a; b]$ thì hàm số f có dấu không đổi trên $[a; b]$.

5 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải: Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ta thực hiện các bước như sau:

- ☑ Tìm tập xác định D của hàm số.
- ☑ Kiểm tra xem x_0 có thuộc tập xác định D ?
Nếu $x_0 \in D$ thì thực hiện bước kế tiếp, nếu $x_0 \notin D$ thì kết luận hàm số gián đoạn tại x_0 .
- ☑ Tính $f(x_0)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- ☑ So sánh và kết luận:
 - Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số liên tục tại x_0 .
 - Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ hoặc không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ thì hàm số gián đoạn tại x_0 .

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}, & \text{khi } x \neq 2 \\ 1, & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x = 2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 64}{x + 8}, & \text{khi } x < -8 \\ 2x + 8, & \text{khi } x \geq -8 \end{cases}$ tại $x = -8$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{khi } x \leq -2 \\ ax - 1 & \text{khi } x > -2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$?

Lời giải:

.....

📁 Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, nửa khoảng, đoạn

Phương pháp giải:

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b] \Leftrightarrow f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

 **Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ trên tập xác định.

Lời giải:

 **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ trên tập xác định.

Lời giải:

📁 Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp giải: Để chứng minh phương trình có nghiệm bằng cách sử dụng tính liên tục của hàm số, ta thực hiện các bước sau:

- B1: Biến đổi phương trình về dạng $f(x) = 0$.
- B2: Tìm hai số a và b , $(a < b)$ sao cho $f(a).f(b) < 0$.
- B3: Chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Xét tính liên tục của hàm số f tại x_0 :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = -1.$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{khi } x \neq 4 \\ 1 & \text{khi } x = 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4.$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x + 2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{4x + 8} & \text{khi } x \neq -2 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = -2.$$

Câu 2. Xét tính liên tục của hàm số f tại x_0 :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{khi } x > 3 \\ 2x - 4 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 3, x_0 = 4. \\
 \textcircled{2} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} & \text{khi } x > 5 \\ (x - 5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 5, x_0 = 6. \\
 \textcircled{3} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1, x_0 = 4. \\
 \textcircled{4} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x - 7} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1, x_0 = 2. \\
 \textcircled{5} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{khi } x > 4 \\ \frac{x^2 - 5x + 8}{6} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4. \\
 \textcircled{6} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2x + 1} - 2}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 1}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1, x_0 = -1.
 \end{aligned}$$

Câu 3. Định a để hàm số f liên tục tại x_0

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a + \frac{1}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1. \\
 \textcircled{2} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + \frac{5}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1. \\
 \textcircled{3} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{khi } x \neq 1 \\ a - \frac{3}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1. \\
 \textcircled{4} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^4 - 4x^3 + 2x + 1}{x^3 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a + \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1. \\
 \textcircled{5} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{khi } x \neq 4 \\ ax - \frac{5}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4. \\
 \textcircled{6} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1. \\
 \textcircled{7} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{8} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ a+2 & \text{khi } x = 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4. \\
\textcircled{9} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2. \\
\textcircled{10} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1. \\
\textcircled{11} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2. \\
\textcircled{12} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{a + \frac{4-x}{x+2}} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0. \\
\textcircled{13} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2. \\
\textcircled{14} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{a + \frac{2x}{x^3 - 3x + 1}} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{2x}{x^3 - 3x + 1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0. \\
\textcircled{15} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 - 8} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2.
\end{aligned}$$

🔥 Câu 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ theo trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases} \\
\textcircled{2} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{-x^3 + 5x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9} & \text{khi } x > 3 \\ a + 4x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \\
\textcircled{3} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases} \\
\textcircled{4} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a - x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

🔥 Câu 5. Chứng minh phương trình:

- ① $3x^3 + 12x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm.
- ② $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng 5 nghiệm.
- ③ $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; \pi)$.
- ④ $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .
- ⑤ $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

🎯 TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \neq 0 \\ 17 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ có tính chất:

- A. Liên tục tại $x = 2$ nhưng không liên tục tại $x = 0$.
 B. Liên tục tại $x = 0, x = 4$.
 C. Liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.
 D. Liên tục tại $x = 0, x = 3, x = 4$.

🔥 **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu:

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$. C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$.

🔥 **Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu:

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b$.
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. D. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

🔥 **Câu 4.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ (với $x_0 \in [a; b]$) nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và:

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b$.
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b$. D. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

🔥 **Câu 5.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại a và b .
 B. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a; b)$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ khi $y = f(x)$ liên tục bên trái và bên phải tại $x = a$.
 D. Hàm số dạng: $y = ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 6.** Trong các hàm số sau hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$:

- A. $f(x) = \tan x$. B. $f(x) = \sqrt{x-1}$. C. $f(x) = -x^4$. D. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

🔥 **Câu 7.** Trong các hàm số sau hàm số nào không liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $f(x) = \sin x$. B. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. C. $f(x) = \cos x$. D. $f(x) = -x^4$.

🔥 **Câu 8.** Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$:

- A. $y = \sin x$. B. $y = \frac{2x+5}{x+2}$. C. $y = \frac{2x+5}{x^2+2}$. D. $y = -x^2 + 3$.

🔥 **Câu 9.** Cho hai hàm số: $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây không đúng:

- A. $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. B. $f(x) + g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
 C. $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$. D. $\frac{g(x)}{f(x)}$ liên tục tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 10.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a; b]$ và $f(a).f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
- B. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a).f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
- C. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a; b)$.
- D. Nếu $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

🔥 **Câu 11.** Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq 0; x \neq -1 \\ 3 & \text{khi } x = -1 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

- A. Liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[-1; 0]$.
- B. Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.
- C. Liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.
- D. Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -1$.

🔥 **Câu 12.** Cho phương trình $5x^7 + 4x - 3 = 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
- B. Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(\frac{1}{2}; 1)$.
- C. Phương trình đã cho vô nghiệm.
- D. Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

🔥 **Câu 13.** Trong các câu sau, câu nào **sai**?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0 thì nó luôn có giới hạn khi tiến x tới x_0 .
 B. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì $f(x)$ xác định tại x_0 .
 C. Khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ta nói $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 .
 D. Hàm số $y = \tan x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

🔥 **Câu 14.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây về $f(x)$ là đúng:

- A. liên tục tại $x = 0$.
 B. gián đoạn tại $x = 0$.
 C. liên tục trên $\mathbb{R}$.
 D. liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

🔥 **Câu 15.** Trong các hàm số sau hàm số nào liên tục tại $x = 1$?

- A. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \neq 1 \\ 5 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.
 B. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.
 C. $f(x) = \sqrt{x - 2}$.
 D. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

🔥 **Câu 16.** Kết luận nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số $y = \frac{2x+5}{x-2}$ gián đoạn tại $x = 2$.
 B. Hàm số $y = \frac{3x-1}{x^2-2x}$ gián đoạn tại $x = 2$ và $x = 0$.

C. Hàm số $y = \frac{2-x^3}{x+2}$ gián đoạn tại $x = -2$.

D. Hàm số $y = \frac{x+3}{x^2+4}$ gián đoạn tại $x = 2$ và $x = -2$.

🔥 Câu 17. Giả sử a thuộc tập xác định của hàm số $f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Khẳng định nào sau đây về hàm số $f(x)$ là **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục bên phải tại a .

B. Hàm số $f(x)$ liên tục bên trái tại a .

C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$.

D. Hàm số $f(x)$ không liên tục tại a .

🔥 Câu 18. Cho hàm số $f(x) = 3x^3 + 3x - 2$. Kết quả nào dưới đây **sai**?

A. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(-1; 1)$.

B. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0; 1)$.

C. Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trong $(0; 1)$.

D. Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất ba nghiệm.

🔥 Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x = 0$, $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$, phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu:

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

🔥 Câu 20. Trong các hàm số sau hàm số nào liên tục tại $x = 2$

A. $f(x) = x^3 + 3.$

B. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}.$

C. $f(x) = \sqrt{2-x}.$

D. $f(x) = \frac{5}{2-x}.$

🔥 Câu 21. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

B. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

C. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

D. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

🔥 Câu 22. Giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} -x+5, & \text{khi } x > -1 \\ mx, & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$ là

A. 4.

B. 6.

C. -4.

D. -6.

🔥 Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 + x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi

A. $a = 2.$

B. $a = \frac{5}{4}.$

C. $a = 3.$

D. $a = \frac{3}{4}.$

🔥 **Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi m

bằng:

A. 4.

B. -1.

C. 1.

D. -4.

🔥 **Câu 25.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x > 1 \\ m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

🔥 **Câu 26.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục

A. tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. tại mọi điểm trừ $x = 1$.

C. tại mọi điểm trừ $x = 3$.

D. tại mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.

🔥 **Câu 27.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+2x-1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 4-m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 =$

1 khi

A. $m = 3$.

B. $m = -3$.

C. $m = 7$.

D. $m = -7$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 1+3x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số gián đoạn tại $x = 3$.
 C. Hàm số gián đoạn tại $x = 0$.
 D. Hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 29. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- A. $a = 1$.
 B. $a = 0$.
 C. $a = 2$.
 D. $a = -1$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m^2+mx-8 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Tính tổng các giá trị tìm được của tham số m để hàm số liên tục tại $x = -2$.

- A. 2.
 B. 4.
 C. 1.
 D. 5.

CHƯƠNG 5

ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

với $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2 Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; f(x_0))$ là

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

3 Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA ĐẠO HÀM

✓ $v(t) = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t .

✓ $I(t) = Q'(t)$ là cường độ tức thời của dòng điện $Q = Q(t)$ tại thời điểm t .

4 QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Nếu $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Bảng công thức đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản

✓ $(c)' = 0$

✓ $(x)' = 1$

✓ $(x^n)' = nx^{n-1}$

✓ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

✓ $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

✓ $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

✓ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

✓ $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

✓ $(u \pm v)' = u' \pm v'$

✓ $(uv)' = u'v + v'u$

✓ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$

✓ $(ku)' = ku'$

✓ $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

5

CÁC DẠNG TOÁN

 Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số chứa đa thức, chứa căn thức

Áp dụng các qui tắc và công thức tính đạo hàm.

 **Ví dụ 1.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- ① $y = x^4 - 3x^2 + \sqrt{x}.$

② $y = (x^2 + 2)(x - 3).$
- ③ $y = \frac{2x + 1}{x + 3} + x^5.$

④ $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- ① $y = (3x + 2)^{10}.$

② $y = (x - x^2)^{32}.$

③ $y = \sqrt{x^2 + x + 5}.$
- ④ $y = \sqrt{x^3 + 4x}.$

⑤ $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$
- ⑥ $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) : $y = f(x)$ thường gặp

- ☑ Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C) : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (1).
- ☑ Phương trình tiếp tuyến với (C), biết hệ số góc k .
 - ✔ Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = k$.
 - ✔ Giải phương trình trên tìm x_0 , tiếp tục tính $y_0 = f(x_0)$.
 - ✔ Viết phương trình tiếp tuyến theo công thức (1).
- ☑ Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến song song với $\Delta : y = ax + b$. Khi đó ta có $f'(x_0) = a$.
- ☑ Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta : y = ax + b$. Khi đó ta có $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$.
- ☑ Viết phương trình tiếp tuyến d với đường cong (C), biết đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ cho trước.
 - ✔ Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm cần tìm.
 - ✔ Tiếp tuyến d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ nên ta có $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + y_0$.
 - ✔ Giải phương trình trên tìm được x_0 , tính y_0 và $f'(x_0)$.
 - ✔ Từ đó viết phương trình d theo (1).

Ví dụ 1. Cho đường cong (C) : $y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 1$.

- ① Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
- ② Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho đường cong (C) : $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x + y = 2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho đường cong (C) : $y = f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

Lời giải:

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

🔥 Câu 1. Tính đạo hàm các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$\textcircled{2} \quad y = -x^3 + 3x + 1$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{x^4}{4} - x^2 + 1$$

$$\textcircled{4} \quad y = -2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$\textcircled{6} \quad y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$$

$$\textcircled{7} \quad y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$$

$$\textcircled{8} \quad y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

$$\textcircled{9} \quad y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$$

$$\textcircled{10} \quad y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

$$\textcircled{11} \quad y = (x^2 + 3x)(2 - x)$$

$$\textcircled{12} \quad y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

$$\textcircled{13} \quad y = \frac{3}{2x+1}$$

$$\textcircled{14} \quad y = \frac{1-3x}{1+x-x^2}$$

$$\textcircled{15} \quad y = \frac{1-x+x^2}{x^2-3x+3}$$

$$\textcircled{16} \quad y = \frac{x-1}{2x^2-4x+1}$$

$$\textcircled{17} \quad y = \frac{x-3}{x-3}$$

🔥 Câu 2. Tính đạo hàm các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad y = (3 - 2x^2)^4$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$$

$$\textcircled{4} \quad y = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3$$

$$\textcircled{5} \quad y = \left(2 - \frac{3}{x^2} \right)^3$$

$$\textcircled{6} \quad y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$$

$$\textcircled{7} \quad y = \sqrt{x^3 - x + 2}$$

$$\textcircled{8} \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$\textcircled{9} \quad y = (x-2)\sqrt{x^2+3}$$

$$\textcircled{10} \quad y = \sqrt{(x-2)^3}$$

$$\textcircled{11} \quad y = (1 + \sqrt{1-2x})^3$$

$$\textcircled{12} \quad y = \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\textcircled{13} \quad y = (1 - 2x^2)^5$$

$$\textcircled{14} \quad y = (x^3 - 2x^2 + 1)^{11}$$

$$\textcircled{15} \quad y = (x^2 - 2x)^5$$

Câu 3. Cho hàm số $(C): y = f(x) = x^2 - 2x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) .

- ① Tại điểm thuộc (C) có hoành độ $x_0 = 1$.
- ② Song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$.
- ③ Vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2 - x + x^2}{x - 1}$ (C) .

- ① Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 4)$.
- ② Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x + 1}{1 - x}$ (C) .

- ① Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(2; -7)$.
- ② Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
- ③ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
- ④ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + 100$.
- ⑤ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x + 2y - 5 = 0$.

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $y = x - \frac{4}{x}$ có đạo hàm bằng:

A. $\frac{x^2 - 4}{x^2}$.

B. $\frac{x^2 + 4}{x^2}$.

C. $\frac{-x^2 - 4}{x^2}$.

D. $\frac{-x^2 + 4}{x^2}$.

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 5$ tại $x = -1$ bằng số nào sau đây?

A. 21.

B. 14.

C. 10.

D. -6.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = 2x^5 - \frac{2}{x} + 3$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $10x^4 + \frac{2}{x^2}$.

B. $10x^4 - \frac{2}{x^2}$.

C. $10x^4 + \frac{2}{x^2} + 3$.

D. $10x + \frac{2}{x^2}$.

Câu 4. Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $3(2x + 1)$?

A. $\frac{3}{2}(2x + 1)^2$.

B. $3x^2 + x$.

C. $3x(x + 1)$.

D. $2x^3 + 3x$.

🔥 **Câu 5.** Hàm số $y = -6\sqrt{x} + \frac{4}{x}$ có đạo hàm bằng

A. $-\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$.

B. $-\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}$.

C. $-\frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$.

D. $-\frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}$.

🔥 **Câu 6.** Hàm số $y = -9x^3 + 0,3x^2 - 0,12x + 0,123$ có đạo hàm bằng

A. $-27x^2 + 0,6x - 0,12$.

B. $-12x^2 + 0,6x - 0,12$.

C. $-27x^2 + 0,6x - 0,12 + 0,123$.

D. $-27x^2 - 0,6x - 0,12$.

🔥 **Câu 7.** Hàm số $y = \sqrt{x^3 + x}$ có đạo hàm bằng

A. $\frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$.

B. $\frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + x}}$.

C. $\frac{3x^2 + x}{2\sqrt{x^3 + x}}$.

D. $\frac{x^3 + x}{2\sqrt{x^3 + x}}$.

🔥 **Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giả sử các giới hạn bên dưới đều tồn tại, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0 - x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0))$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$.

🔥 **Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$.

B. $f'(1) = 3$.

C. $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

D. $f'(2) = 5$.

🔥 **Câu 10.** Cho hàm số $f(x) = 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{x}$.

B. $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{x+1}$.

C. $f'(-1) = -1$.

D. $f'(0) = 2$.

🔥 **Câu 11.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+9}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-9}{x}$.

B. $f'(7) = 4$.

C. $f'(7) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+9}-4}{x-7}$.

D. $f'(0) = 3$.

🔥 **Câu 12.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2}$.

B. $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{x} + 1}{x-1}$.

C. $f'(2) = 5$.

D. $f'(-1) = 0$.

🔥 **Câu 13.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ thuộc (C).

A. $y = f'(x)(x - x_0) - f(x_0)$.

B. $y = f'(x)(x + x_0) + f(x_0)$.

C. $y = f'(x)(x + x_0) - f(x_0)$.

D. $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$.

🔥 **Câu 14.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

A. $y = -x - 2$.

B. $y = x - 2$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = -x - 1$.

🔥 **Câu 15.** Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C). Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(2; 4)$.

A. $k = 2$.

B. $k = 4$.

C. $k = 6$.

D. $k = 8$.

🔥 **Câu 16.** Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{x - 3}$.

B. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(2x + 7)}{x - 3}$.

C. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 7)$.

D. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(2x + 7)}{x - 3}$.

🔥 **Câu 17.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+2}{2x-3} - 4}{x - 2}$.

B. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{2x - 3}$.

C. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-7x + 14}{(x - 2)(2x - 3)}$.

D. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-7}{2x - 3}$.

❖ **Câu 18.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

B. $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

C. $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$.

D. $f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

❖ **Câu 19.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3$ tại điểm $M_0(-1; -1)$.

A. $y = -3x + 2$.

B. $y = 3x + 3$.

C. $y = 3x - 4$.

D. $y = 3x + 2$.

❖ **Câu 20.** Một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = 2t^2 + 3t + 7$ (trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét). Tìm vận tốc tức thời v của chuyển động tại thời điểm $t = 6$ (giây).

A. $v = 27$ (m/s).

B. $v = 24$ (m/s).

C. $v = 30$ (m/s).

D. $v = 33$ m/s.

❖ **Câu 21.** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có $f'(-3) = 7$?

A. $f(x) = \frac{1 - 2x}{x + 4}$.

B. $f(x) = \sqrt{x^2 + 40}$.

C. $f(x) = x^2 - x + 8$.

D. $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{2}x + 3$.

- A. $k = 2$. B. $k = -2$. C. $k = -4$. D. $k = 4$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = (m^3 - 3m^2 + m)x + 2017$. Tìm m để $f'(2) = 3$.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 3$. D. $m = 0$.

Câu 24. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^2 - 2x + 3$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 2x + 10$.

- A. $y = 2x$. B. $y = 2x - 2$. C. $y = -2x + 5$. D. $y = 2x - 1$.

Câu 25. Đạo hàm của hàm số $y = 5$ bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. -5.
C. 0. D. Không có đạo hàm.

❖ **Câu 26.** Đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x - 1$ tại $x_0 = 1$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

❖ **Câu 27.** Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = -x^3$ tại điểm $M(-2; 8)$ là

- A. 12. B. -12. C. 192. D. -192.

❖ **Câu 28.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$, tại điểm có hoành độ $\frac{\pi}{4}$, có hệ số góc là

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

❖ **Câu 29.** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 3$ (giây) bằng

- A. 2 m/s. B. 5 m/s. C. 6 m/s. D. 3 m/s.

❖ **Câu 30.** Phương trình tiếp tuyến của Parabol $y = -3x^2 + x - 2$ tại điểm $M(1; -4)$ là

- A. $y = 5x + 1$. B. $y = -5x + 1$. C. $y = -5x - 1$. D. $y = 5x - 1$.

🔥 **Câu 31.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

A. $y = 2(4x - 3)$ và $y = -2(4x + 3)$.

B. $y = -2(4x - 3)$ và $y = 2(4x + 3)$.

C. $y = 2(4x - 3)$ và $y = 2(4x + 3)$.

D. $y = -2(4x - 3)$ và $y = -2(4x + 3)$.

🔥 **Câu 32.** Cho hàm số $y = x^2 + 6x - 4$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là

A. $y = -13$.

B. $y = -31$.

C. $y = x - 10$.

D. $y = 13$.

🔥 **Câu 33.** Parabol $y = x^2$ có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$. Phương trình tiếp tuyến đó là

A. $4x + 4y + 1 = 0$.

B. $x + y + 1 = 0$.

C. $x - y + 1 = 0$.

D. $4x - 4y + 1 = 0$.

🔥 **Câu 34.** Cho hàm số $y = x^2 + x$ có đồ thị là (C) và $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ là phương trình của hai tiếp tuyến với (C) có tung độ tiếp điểm đều bằng 2. Tính giá trị $a + a'$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

🔥 **Câu 35.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+3}$, có đồ thị là (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm với trục hoành có phương trình là

A. $y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$.

B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

C. $y = 2x + 3$.

D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 36.** Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x - 11$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ là

A. $[-1; 7]$.

B. $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

C. $[-7; -1]$.

D. $[1; 7]$.

🔥 **Câu 37.** Cho $f(x) = (m-1)x^3 + 2(m-1)x^2 + mx$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $(1; 4]$.

B. $(1; 4)$.

C. $[1; 4]$.

D. $[1; 4)$.

🔥 **Câu 38.** Cho hàm số $y = \frac{1}{x^2-3}$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. -1.

🔥 **Câu 39.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{(x^2 - 3x + 1)^2}$.

A. $y' = \frac{2(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 1)^3}$.

B. $y' = -\frac{2}{(x^2 - 3x + 1)^3}$.

C. $y' = -\frac{2(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 1)^3}$.

D. $y' = -\frac{2(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 1)^2}$.

🔥 **Câu 40.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính $y \cdot y'$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $2 - 2x$.

C. $1 - x$.

D. $\frac{2x - x^2}{2}$.

🔥 **Câu 41.** Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là

A. 2.

B. 4.

C. -2.

D. -4.

🔥 **Câu 42.** Phương trình tiếp tuyến của Parabol $y = -3x^2 + x + 3$ tại điểm $M(1; 1)$ là

A. $y = -5x - 6$.

B. $y = -5x + 6$.

C. $y = 5x + 6$.

D. $y = 5x - 6$.

🔥 **Câu 43.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục tung là

A. $y = 1$.

B. $y = 2$.

C. $y = 3$.

D. $y = 4$.

🔥 **Câu 44.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

🔥 **Câu 45.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc $k = 9$ là

A. $9x - y + 6 = 0$ và $9x - y - 26 = 0$.

B. $9x + y + 6 = 0$ và $9x - y - 26 = 0$.

C. $9x - y + 6 = 0$ và $9x - y - 26 = 0$.

D. $9x + y + 6 = 0$ và $9x + y + 26 = 0$.

🔥 **Câu 46.** Cho hàm số $y = x^4 + x$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là

A. $y = 5x - 3$.

B. $y = 3x - 5$.

C. $y = 2x - 3$.

D. $y = x + 4$.

🔥 **Câu 47.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ (C) song song với đường thẳng $(\Delta): y = 3x + 10$ có phương trình là

A. $y = 3x - \frac{2}{3}$.

B. $y = 3x - \frac{2}{3}; y = 3x + 10$.

C. $y = 3x + 10$.

D. $y = 3x + \frac{2}{3}; y = 3x - 10$.

Câu 48. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

- A.** $y = 0; y = -9x + 18$. **B.** $y = 0; y = -9x + 3$. **C.** $y = 0; y = -9x + 8$. **D.** $y = 0; y = -9x + 1$.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) , tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là k . Khi đó giá trị nhỏ nhất của k bằng

- A.** -3 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 0 .

Câu 50. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua $A(1; -3)$.

- A.** $\Delta: y = -3; \Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{1}{81}$. **B.** $\Delta: y = -3; \Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{1}{8}$.
C. $\Delta: y = -3; \Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{51}{2}$. **D.** $\Delta: y = -3; \Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{51}{81}$.

BÀI 2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC

$$\checkmark (\sin x)' = \cos x$$

$$\checkmark (\cos x)' = -\sin x$$

$$\checkmark (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\checkmark (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\checkmark (\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$\checkmark (\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$\checkmark (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$\checkmark (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

2 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác

Áp dụng các công thức đạo hàm của hàm số lượng giác và các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, căn bậc hai, ...

 **Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 3 \sin x + \cos x.$

② $y = 4 \cos x + \cot x.$

③ $y = \sin 2x - 3 \cos 5x.$

④ $y = \tan 3x + \cot 4x.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x.$

② $y = \sin^3 x - 5 \cos^5 x.$

③ $y = \sin^3 2x.$

④ $y = \tan^5 3x + \cot^2 4x.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình

Phương pháp giải: Dùng các công thức đạo hàm để tính đạo hàm của hàm số, sau đó sử dụng các công thức lượng giác biến đổi chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình.

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng $y' - y^2 - 1 = 0$.

Lời giải:

.....

 **Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = \cos^2 x - \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải:

.....

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Tính đạo hàm các hàm số sau

① $y = \sin x$

② $y = \frac{1}{\cos x}$

③ $y = x \cdot \cos x$

④ $y = \sin^3(2x + 1)$

⑤ $y = \sqrt{\cot 2x}$

⑥ $y = \sin \sqrt{2 + x^2}$

⑦ $y = \sqrt{\sin x + 2x}$

⑧ $y = 3 \sin^2 x - 2 \sin^3 x$

⑨ $y = \cos x \cdot \sin^2 x$

⑩ $y = \cos 3x \cdot \cos 2x$

⑪ $y = (1 + \cot x)^2$

⑫ $y = \cos x(1 + \sin x)$

⑬ $y = \sin x(2 - \cos x)$

⑭ $y = \frac{\sin x^2}{x}$

⑮ $y = \cos \frac{x}{x+1}$

.....

 **Câu 2.** Tính đạo hàm các hàm số sau

① $y = \sqrt{\tan^3 x}$

② $y = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)}$

③ $y = \frac{\sin x^2}{x}$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad y &= \cos \frac{x}{x+1} \\ \textcircled{5} \quad y &= (3 - \sin x)^3 \\ \textcircled{6} \quad y &= \sin^2 3x + \frac{1}{\cos^2 x} \\ \textcircled{7} \quad y &= \sqrt{1+2\tan x} \\ \textcircled{8} \quad y &= \cot \sqrt{1+x^2} \\ \textcircled{9} \quad y &= \sin 5x \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \quad y &= x^2 \cdot \sin x \\ \textcircled{11} \quad y &= (1-x^2) \cos x \\ \textcircled{12} \quad y &= x \cdot \cos 2x \\ \textcircled{13} \quad y &= (\sin x + \cos x)(2 \sin x - 3 \cos x) \\ \textcircled{14} \quad y &= \frac{x}{1 - \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{15} \quad y &= \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x \cos x} \\ \textcircled{16} \quad y &= \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} \\ \textcircled{17} \quad y &= \tan^3 x \\ \textcircled{18} \quad y &= \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)} \end{aligned}$$

🕒 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x) = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$ bằng:

- A. 0. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\sqrt{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

🔥 **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$. Giá trị bằng:

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. 2.

🔥 **Câu 3.** Xét hàm số $y = f(x) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

- A. -1. B. 0. C. 2. D. -2.

🔥 **Câu 4.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - \cos x$.

- A. $y' = 2 \cos x + \sin x$. B. $y' = 2 \sin x + \cos 2x$. C. $y' = 2 \cos x - \sin x$. D. $y' = 2 \cos 2x + \sin x$.

🔥 **Câu 5.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3 2x$.

- A. $y' = 3 \sin 2x \cos^2 2x$. B. $y' = -3 \sin 2x \cos^2 2x$.
C. $y' = -6 \sin 2x \cos^2 2x$. D. $y' = 6 \sin 2x \cos^2 2x$.

🔥 **Câu 6.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x^3$.

- A. $y' = \sin x^3$. B. $y' = -\sin x^3$. C. $y' = \sin(3x^2)$. D. $y' = -3x^2 \sin x^3$.

🔥 **Câu 7.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 5 \sin x - 3 \cos x$.

- A. $y' = 5 \cos x + 3 \sin x$. B. $y' = -5 \cos x + 3 \sin x$.
C. $y' = 5 \cos x - 3 \sin x$. D. $y' = -5 \cos x - 3 \sin x$.

🔥 **Câu 8.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

- A. $y' = 1 + \tan^2\left(\frac{x+1}{2}\right)$. B. $y' = 1 - \tan^2\left(\frac{x+1}{2}\right)$.
C. $y' = \frac{1}{2} \left[1 + \tan^2\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$. D. $y' = -\frac{1}{2} \left[1 + \tan^2\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$.

🔥 **Câu 9.** Tính đạo hàm của hàm số $y = (\sin x + \cos x)^2$.

- A. $y' = \cos 2x$. B. $y' = 2 \cos 2x$. C. $y' = -2 \cos 2x$. D. $y' = 2(\sin x + \cos x)$.

🔥 **Câu 10.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2 + 1}$.

A. $y' = 1 + \cot^2 \sqrt{x^2 + 1}$.

B. $y' = 2 \left(1 + \cot^2 \sqrt{x^2 + 1} \right)$.

C. $y' = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \cot^2 \sqrt{x^2 + 1} \right)$.

D. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \cot^2 \sqrt{x^2 + 1} \right)$.

🔥 **Câu 11.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x \cot x$.

A. $y' = \cot x - \frac{1}{\sin^2 x}$.

B. $y' = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$.

C. $y' = \cot x + \frac{1}{\sin^2 x}$.

D. $y' = -\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$.

🔥 **Câu 12.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$.

A. $y' = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$.

B. $y' = \frac{x \cos x + \sin x}{x^2}$.

C. $y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

D. $y' = \frac{x \sin x - \cos x}{x^2}$.

🔥 **Câu 13.** Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

A. $k = \frac{1}{2}$.

B. $k = 2$.

C. $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $k = 1$.

🔥 **Câu 14.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^5 x$.

A. $y' = -5 \cos^4 x \sin x$.

B. $y' = 5 \cos^4 x \sin x$.

C. $y' = -5 \cos x \sin^4 x$.

D. $y' = 5 \cos x \sin^4 x$.

🔥 **Câu 15.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x \sin 3x$.

A. $y' = \sin 3x + 3x \cos 3x$.

B. $y' = x \sin 3x$.

C. $y' = x \cos 3x$.

D. $y' = \sin 3x + 3x \sin 3x$.

🔥 **Câu 16.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{4 + x^3}$.

A. $y' = \cos \sqrt{4 + x^3}$.

B. $y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{4 + x^3}} \cos \sqrt{4 + x^3}$.

C. $y' = \frac{1}{2\sqrt{4 + x^3}} \cos \sqrt{4 + x^3}$.

D. $y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{4 + x^3}} \sin \sqrt{4 + x^3}$.

🔥 **Câu 17.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}$.

A. $y' = \frac{1 + \tan^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{2\sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}}$.

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)} \cdot \cos^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}$.

C. $y' = \frac{1 + \tan^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{2\sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$.

D. $y' = \frac{1 + \tan^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{2\sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$.

🔥 **Câu 18.** Tính đạo hàm $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 2 \tan x$.

A. $y' = -3 \cos x + 4 \sin x + \frac{2}{\cos^2 x}$.

B. $y' = 3 \cos x - 4 \sin x + \frac{2}{\cos^2 x}$.

C. $y' = 3 \cos x + 4 \sin x + \frac{2}{\cos^2 x}$.

D. $y' = 3 \cos x + 4 \sin x - \frac{2}{\cos^2 x}$.

🔥 **Câu 19.** Tính đạo hàm $y = \sin^6(3x - 1)$.

A. $y' = 3 \sin^5(3x - 1) \cdot \cos(3x - 1)$.

B. $y' = 6 \sin^5(3x - 1) \cdot \cos(3x - 1)$.

C. $y' = -6 \sin^5(3x - 1) \cdot \cos(3x - 1)$.

D. $y' = 18 \sin^5(3x - 1) \cdot \cos(3x - 1)$.

🔥 **Câu 20.** Tính đạo hàm $y = \sqrt{\cos 6x}$

A. $y' = \frac{3 \sin 6x}{2\sqrt{\cos 6x}}$.

B. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{\sqrt{\cos 6x}}$.

C. $y' = \frac{3 \sin 6x}{\sqrt{\cos 6x}}$.

D. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{2\sqrt{\cos 6x}}$.

🔥 **Câu 21.** Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2(\sqrt{x})$ là:

- A. $y' = 2\sin(\sqrt{x})$. B. $y' = \sin(2\sqrt{x})$. C. $y' = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. D. $y' = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

🔥 **Câu 22.** Tìm đạo hàm của hàm số $y = 5\tan x + 3\cot x$.

- A. $y' = \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}$. B. $y' = 5\cot x + 3\tan x$.
C. $y' = \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x}$. D. $y' = -5\cot x + 3\tan x$.

🔥 **Câu 23.** Hàm số $y = \cot \sqrt[3]{1+x^2}$ có đạo hàm là $y' = \frac{-2ax}{b\sqrt[3]{(1+x^2)^2} \sin^2 \sqrt[3]{1+x^2}}$ trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a^2 + 3b^2$.

- A. $S = 31$. B. $S = 13$. C. $S = 28$. D. $S = 16$.

🔥 **Câu 24.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$. Biết $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{a}{b}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + 2b$.

- A. $S = 15$. B. $S = 10$. C. $S = 25$. D. $S = 26$.

🔥 **Câu 25.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x$. Tìm tập xác định D của $f'(x)$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

🔥 **Câu 26.** Cho hàm số $y = x \sin x$. Thu gọn biểu thức $P = xy - 2(y' - \sin x) + x(2\cos x - y)$.

- A. $P = 2x \cos x$. B. $P = 4x \cos x$. C. $P = -4x \cos x$. D. $P = 0$.

🔥 **Câu 27.** Cho hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$. Biết $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$, tính giá trị của $P = a^2 + 2b$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = \frac{4}{5}$. C. $P = \frac{5}{2}$. D. $P = \frac{5}{4}$.

🔥 **Câu 28.** Tìm hàm số y biết $y' = x \sin x + 1$.

- A. $y = -x \cos x + \sin x + x$. B. $y = x \cos x - \sin x + x$.
C. $y = -x \sin x + \cos x + x$. D. $y = x \sin x - \cos x + 1$.

🔥 **Câu 29.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(\sin 3x)$.

- A. $y' = -3 \sin 3x \cdot \sin(\sin 3x)$. B. $y' = -3 \cos 3x \cdot \sin(\cos 3x)$.
C. $y' = -3 \cos 3x \cdot \sin(\sin 3x)$. D. $y' = -3 \cos 3x \cdot \cos(\cos 3x)$.

🔥 **Câu 30.** Cho hàm số $y = \cos(ax + b)$. Tìm giá trị của a để $y' = \sin(ax + b)$.

- A. $a = 0$. B. $a = 1$. C. $a = -2$. D. $a = -1$.

🔥 **Câu 31.** Cặp hàm số nào sau đây có cùng giá trị đạo hàm tại $x = 0$?

- A. $y = \cos 3x$ và $y = 3 \cos x$. B. $y = \sin 2x$ và $y = 2 \cos x$.
C. $y = \tan x$ và $y = \sin x$. D. $y = \cot x$ và $y = \cos x$.

🔥 **Câu 32.** Hàm số nào sau đây thỏa mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$?

- A. $y = \cos x$. B. $y = \sin x$. C. $y = \cot x$. D. $y = \tan x$.

🔥 **Câu 33.** Hàm số $y = \frac{\cos 2x}{2x+1}$ có đạo hàm là $y' = \frac{a \sin 2x + b \cos 2x + c}{(2x+1)^2}$. Tính $P = abc$.

- A. $P = -4$. B. $P = 0$. C. $P = 4$. D. $P = 6$.

🔥 **Câu 34.** Hàm số $f(x) = 2 \sin 2x + \cos 2x$ có đạo hàm là $f'(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$. Tính $Q = a^3 + b^3$.

- A. $Q = 56$. B. $Q = 16$. C. $Q = 72$. D. $Q = 0$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = 3x^2$ và $g(x) = \cos x + f'(3)$. Tính $P = \frac{f'(1)}{g'(\frac{\pi}{2})}$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = 1$. D. $P = -1$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2x + 2020$. Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ trong đoạn $[0; 4\pi]$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 37. Cho hàm số $y = x \cos x + \sin x$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm trên (C) có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là

- A. $-\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. -2 . D. 2.

Câu 38. Cho hàm số $y = \sin 3x + \frac{m}{3} \cos 3x + (2m + 1)x - 2019$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $y' = 0$ có nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

- A. -1 . B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 40. Cho hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 3x$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$.

- A. $y = -(\pi + 3)x + \pi + 6$. B. $y = (\pi + 3)x - \pi$.
C. $y = 3x$. D. $y = (\pi + 3)x + 3$.

BÀI 3. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm x thuộc khoảng $(a; b)$. Khi đó ta có hàm số y' xác định trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu hàm số y' có đạo hàm tại x thì ta nói đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$.
- Hàm số đạo hàm của hàm y' được kí hiệu là y'' .
- Đạo hàm cấp 3, 4, ... của hàm số cũng được định nghĩa tương tự và được kí hiệu là $y^{(3)}, y^{(4)}$.

1 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính đạo hàm cấp hai

Áp dụng các công thức đạo hàm của hàm số lượng giác và các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, căn bậc hai, ...

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- ① $y = (x^2 + 1)^3$. ③ $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. ④ $y = \sqrt{2x + 5}$.
② $y = \frac{x}{x - 2}$. ⑤ $y = x\sqrt{x^2 + 1}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2

- ① Tìm các đạo hàm đến cấp cao nhất có mặt trong đẳng thức cần chứng minh.
- ② Thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi vế này cho bằng vế kia.
- ③ Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1.$

② $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4.$

③ $y = -\frac{1}{x}.$

④ $y = \frac{1}{x-3}.$

⑤ $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}.$

⑥ $y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}$

⑦ $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

⑧ $y = \sin 2x.$

⑨ $y = \sin^2 2x.$

⑩ $y = 3\sin x + 2\cos x.$

⑪ $y = \tan x + \cot x + \sin x + \cos x.$

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{4x - 2x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3 y'' + 4 = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = -2 + \frac{5}{x}$. Chứng minh rằng: $\frac{2y'}{x} + y'' = 0$.

Câu 4. Cho $y = \frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x \cos x$. Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \cos x) + x \cdot y'' = 0$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, giá trị của $f''(1)$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 3.

D. 2.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x} (x > 0)$ Tính $f''(1)$.

A. $f''(1) = 4$.B. $f''(1) = 2$.C. $f''(1) = \frac{1}{2}$.D. $f''(1) = \frac{1}{4}$.

🔥 Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f''(1)$.

A. -1 .

B. -1 .

C. $\frac{3}{2}$.

D. 0 .

🔥 Câu 4. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. -2 .

B. 2 .

C. 1 .

D. $-2\sqrt{3}$.

🔥 Câu 5. Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = \frac{1}{3x-1}$ bằng

A. $\frac{18}{(3x-1)^3}$.

B. $\frac{54}{(3x-1)^3}$.

C. $\frac{18}{(3x-1)^2}$.

D. $\frac{9}{(3x-1)^3}$.

🔥 Câu 6. Đạo hàm cấp ba của hàm số $y = \cos^2 x$ bằng

A. $4\sin 2x$.

B. $4\cos 2x$.

C. $-4\sin 2x$.

D. $-2\cos 2x$.

- 🔥 Câu 7.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2021$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $y'' > 0$.
A. $[1; +\infty)$. **B.** $[0; 2]$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(1; +\infty)$.

- 🔥 Câu 8.** Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - x^3 + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y''' \leq 6$ là
A. $S = (-\infty; 1]$. **B.** $S = (-\infty; 2]$. **C.** $S = [2; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; 2)$.

- 🔥 Câu 9.** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5$.
A. $f''(x) = 2x + 6$. **B.** $f''(x) = x^2 + 6x$. **C.** $f''(x) = x^2 - 3x - 5$. **D.** $f''(x) = 2x + 3$.

PHẦN
III

HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

BÀI 1. PHÉP TỊNH TIẾN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA.

Định nghĩa 1.

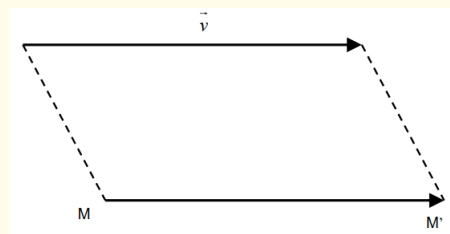
Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

Vậy thì

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

**Lưu ý:**

- ① $T_{\vec{0}}(M) = M$.
- ② $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow T_{-\vec{v}}(M') = M$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

2 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP TỊNH TIẾN.

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x; y)$ và $\vec{v} = (a; b)$.

$$M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biết

- ① $A(2; -3); \vec{v} = (-1; 3)$.
- ② $A(-5; -1); \vec{v} = (2; -7)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ điểm M có ảnh qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ là M' biết

- ① $M'(-4;3); \vec{v} = (5;1).$
- ② $M'(1;3); \vec{v} = (-4;-3).$

Lời giải:

.....

.....

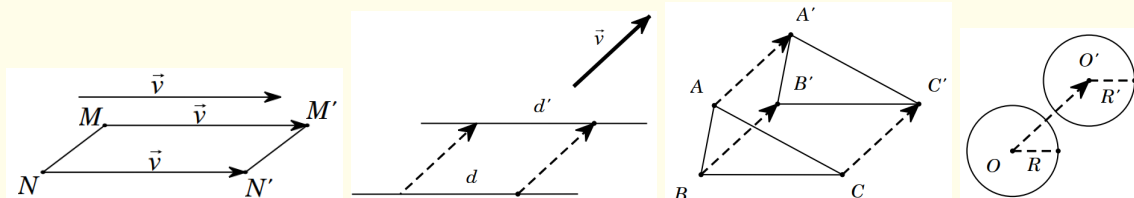
.....

.....

3 TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TỊNH TIẾN.

Tính chất:

- ① Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- ② Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- ③ Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- ④ Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- ⑤ Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (-2;-1).$

- ① Tìm ảnh của đường thẳng $d: x - 3y + 5 = 0$ qua phép $T_{\vec{v}}$.
- ② Tìm ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ qua phép $T_{\vec{v}}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, biết

- | | |
|---------------------------------------|--|
| ① $\vec{v} = (2; -1)$ và $M(-3; 2)$. | ② $\vec{v} = (1; 2)$ và $M(2; 5)$. |
| ③ $\vec{v} = (2; 3)$ và $M(-1; 5)$. | ④ $\vec{v} = (0; 4)$ và $M(3; -3)$. |
| ⑤ $\vec{v} = (4; 1)$ và $M(-4; -3)$. | ⑥ $\vec{v} = (-5; 2)$ và $M(3; 4)$. |
| ⑦ $\vec{v} = (-3; 2)$ và $M(-4; 5)$. | ⑧ $\vec{v} = (-4; 1)$ và $M(4; 0)$. |
| ⑨ $\vec{v} = (2; 2)$ và $M(-2; -5)$. | ⑩ $\vec{v} = (-3; -2)$ và $M(-1; 7)$. |

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm M là ảnh của điểm nào qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, biết

- | | |
|---------------------------------------|--|
| ① $\vec{v} = (2; -1)$ và $M(-3; 2)$. | ② $\vec{v} = (1; 2)$ và $M(2; 5)$. |
| ③ $\vec{v} = (2; 3)$ và $M(-1; 5)$. | ④ $\vec{v} = (0; 4)$ và $M(3; -3)$. |
| ⑤ $\vec{v} = (4; 1)$ và $M(-4; -3)$. | ⑥ $\vec{v} = (-5; 2)$ và $M(3; 4)$. |
| ⑦ $\vec{v} = (-3; 2)$ và $M(-4; 5)$. | ⑧ $\vec{v} = (-4; 1)$ và $M(4; 0)$. |
| ⑨ $\vec{v} = (2; 2)$ và $M(-2; -5)$. | ⑩ $\vec{v} = (-3; -2)$ và $M(-1; 7)$. |

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A và B . Biết $B = T_{\vec{v}}(A)$, tìm tọa độ của $\vec{v}$, biết

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| ① $A(-3; 2), B(0; 5)$. | ② $A(-4; 1), B(4; 3)$. |
| ③ $A(3; 1), B(2; 4)$. | ④ $A(-3; -2), B(0; -2)$. |
| ⑤ $A(0; 1), B(-1; 2)$. | ⑥ $A(-4; 1), B(3; 3)$. |
| ⑦ $A(3; -2), B(4; 4)$. | ⑧ $A(3; -3), B(2; 4)$. |
| ⑨ $A(-5; 4), B(3; 6)$. | ⑩ $A(-7; 0), B(6; 5)$. |

🔥 **Câu 4.** Trong mặt phẳng Oxy cho d và $\vec{v}$. Tìm d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$, biết

- | | |
|---|---|
| ① $\vec{v} = (2; -1)$ và $d : 5x + 3y + 13 = 0$. | ② $\vec{v} = (1; 2)$ và $d : 5x + 3y + 13 = 0$. |
| ③ $\vec{v} = (2; 3)$ và $d : x + 3y + 3 = 0$. | ④ $\vec{v} = (0; 4)$ và $d : 2x + 3y + 5 = 0$. |
| ⑤ $\vec{v} = (4; 1)$ và $d : x - 3y - 4 = 0$. | ⑥ $\vec{v} = (-5; 2)$ và $d : 2x - 5y + 10 = 0$. |
| ⑦ $\vec{v} = (-3; 2)$ và $d : 5x + y + 1 = 0$. | ⑧ $\vec{v} = (-4; 1)$ và $d : x + 2y - 3 = 0$. |
| ⑨ $\vec{v} = (2; 2)$ và $d : 2x - y + 11 = 0$. | ⑩ $\vec{v} = (-3; -2)$ và $d : 4x - 3y + 9 = 0$. |

🔥 **Câu 5.** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) và vectơ $\vec{v}$. Tìm ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$, biết

- | | |
|--|---|
| ① $\vec{v} = (2; -1)$ và $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. | ② $\vec{v} = (1; 2)$ và $(C) : (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$. |
| ③ $\vec{v} = (2; 3)$ và $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$. | ④ $\vec{v} = (0; 4)$ và $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$. |
| ⑤ $\vec{v} = (4; 1)$ và $(C) : x^2 + y^2 = 1$. | ⑥ $\vec{v} = (-5; 2)$ và $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$. |
| ⑦ $\vec{v} = (-3; 2)$ và $(C) : x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$. | ⑧ $\vec{v} = (-4; 1)$ và $(C) : x^2 + y^2 - x + 4y - 5 = 0$. |
| ⑨ $\vec{v} = (2; 2)$ và $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$. | ⑩ $\vec{v} = (-3; -2)$ và $(C) : x^2 + y^2 - 4x = 0$. |

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho A, B cố định. Phép tịnh tiến T biến điểm M bất kỳ thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- | | |
|--|--|
| A. T là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$. | B. T là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{BA}$. |
| C. T là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$. | D. T là phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. |

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-3;4)$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là

- A. $M'(-2;6)$. B. $M'(2;5)$. C. $M'(2;-6)$. D. $M'(4;-2)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}M = M'$ và $T_{\vec{v}}N = N'$ (với $\vec{v} \neq \vec{0}$). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. C. $\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{NM'}$. D. $MM' = NN'$.

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (2;-3)$ và điểm $M(3;4)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm M' có tọa độ

- A. $(5;1)$. B. $(1;7)$. C. $(-1;-7)$. D. $(5;-1)$.

Câu 5. Giả sử qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d' . Chọn mệnh đề **sai**

- A. d trùng d' khi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của d .
 B. d song song với d' khi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của d .
 C. d song song với d' khi $\vec{v}$ là không vectơ chỉ phương của d .
 D. d không bao giờ cắt d' .

❖ **Câu 6.** Cho 2 đường thẳng song song là a và a' . Tất cả những phép biến hình biến a thành a' là:

- A. Các phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, với mọi vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ không song song với vectơ chỉ phương của a .
- B. Các phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, với mọi vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của a .
- C. Các phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$, trong đó 2 điểm A, A' tùy ý lần lượt nằm trên a và a' .
- D. Các phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, với mọi vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ tùy ý.

❖ **Câu 7.** Cho P, Q cố định. Phép biến hình T biến điểm M bất kì thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{PQ}$.

- A. T chính là phép tịnh tiến với vectơ tịnh tiến $\overrightarrow{PQ}$.
- B. T chính là phép tịnh tiến với vectơ tịnh tiến $\overrightarrow{MM'}$.
- C. T chính là phép tịnh tiến với vectơ tịnh tiến $2\overrightarrow{PQ}$.
- D. T chính là phép tịnh tiến với vectơ tịnh tiến $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

❖ **Câu 8.** Cho 2 đường thẳng d và d' song song nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d thành d' ?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. vô số.

❖ **Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho phép biến hình f xác định như sau: Với mỗi $M(x; y)$, ta có $M' = f(M)$ sao cho $M'(x'; y')$ thỏa $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$.

- | | |
|--|--|
| | |
| | |
| | |
| | |

🔥 **Câu 13.** Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường tròn: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;3)$ là đường tròn có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$.

B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$.

C. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$.

D. $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$.

🔥 **Câu 14.** Cho phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ biến A thành A' và M thành M'. Khi đó

A. $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$.

B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

D. $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{A'M'}$.

🔥 **Câu 15.** Trong hệ trục Oxy cho $M(0;2)$; $N(-2;1)$; $\vec{v}(1;2)$. $T_{\vec{v}}$ biến M,N thành M',N' thì độ dài M'N' là:

A. $\sqrt{13}$.

B. $\sqrt{10}$.

C. 3.

D. $\sqrt{5}$.

🔥 **Câu 16.** Cho $\vec{v}(-1;5)$ và điểm M'(4;2). Biết M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Tọa độ M là.

A. M(3;7).

B. M(5;-3).

C. M(3;-7).

D. M(-4;10).

🔥 **Câu 17.** Cho $\vec{v}(-4;2)$ và đường thẳng $\Delta: 2x-y-5=0$. Ảnh của Δ qua $T_{\vec{v}}$ là đường thẳng

A. $\Delta': 2x-y+5=0$.

B. $\Delta': x-2y-9=0$.

C. $\Delta': 2x+y-15=0$.

D. $\Delta': 2x-y-15=0$.

🔥 **Câu 18.** Cho ΔABC có $A(2;4), B(5;1), C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{BC}}$ biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$. Tọa độ trọng tâm của $\Delta A'B'C'$ là:

- A.** $(-4;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(4;-2)$. **D.** $(4;2)$.

🔥 **Câu 19.** Cho hình bình hành $ABCD$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{DA}}$ biến:

- A.** B thành C . **B.** C thành A . **C.** C thành B . **D.** A thành D .

🔥 **Câu 20.** Biết $M'(-3;0)$ là ảnh của $M(1;-2)$ qua $T_{\vec{u}}$, $M''(2;3)$ là ảnh của M' qua $T_{\vec{v}}$. Tọa độ $\vec{u} + \vec{v} =$

- A.** $(3;-1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(1;5)$.

BÀI 2. PHÉP QUAY

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

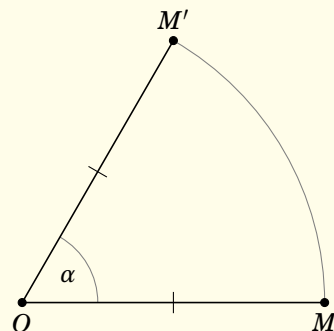
1 ĐỊNH NGHĨA.

Định nghĩa 1.

Cho điểm O và góc lượng giác α .

Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α .

Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay. Phép quay tâm O góc α , kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.



$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (OM, OM') = \alpha \\ OM = OM' \end{cases}$$

Với k là số nguyên ta luôn có:

- ① Phép quay $Q_{(O;2k\pi)}$ là phép đồng nhất.
- ② Phép quay $Q_{(O;(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O .

Ví dụ 1. Cho tam giác đều tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α , $0 < \alpha < 2\pi$ biến tam giác trên thành chính nó?

Lời giải:

.....

.....

.....

2 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP QUAY.

Trong mặt phẳng

Oxy

, giả sử $M(x; y)$ và $M'(x'; y') = Q_{(O,\alpha)}(M)$ thì:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Trong mặt phẳng Oxy , giả sử $M(x; y)$, $I(a; b)$ và $M'(x'; y') = Q_{(I,\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = a + (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' = b + (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$$

Nhận xét:① Nếu $\alpha = 90^\circ$ thì

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

② Nếu $\alpha = -90^\circ$ thì

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

③ Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm ảnh A' của A qua phép quay $Q_{(O;\alpha)}$ biết

① $A(3;0); \alpha = 90^\circ$.② $A(1;3); \alpha = -90^\circ$.③ $A(4;-2); \alpha = 30^\circ$.**Lời giải:**

.....

.....

.....

**TÍNH CHẤT CỦA PHÉP QUAY.****Tính chất:**

- ① Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- ② Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- ③ Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho.
- ④ Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- ⑤ Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Giả sử phép quay tâm I góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' , khi đó

① Nếu $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng α ② Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\pi - \alpha$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,

- ① Tìm ảnh của đường thẳng $d: 5x - 3y + 15 = 0$ qua phép $Q_{(O;90^\circ)}$.
- ② Tìm ảnh của đường thẳng $d: 2x - y - 2 = 0$ qua phép $Q_{(I;45^\circ)}$ biết $I(1;2)$.
- ③ Tìm ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ qua phép $Q_{(O;-90^\circ)}$.
- ④ Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ qua phép $Q_{(I;45^\circ)}$ biết $I(1;2)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 **Câu 1.** Tìm ảnh của các điểm sau qua phép quay tâm O góc 60° :

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) $A(2;1)$ | d) $D(0;4)$ | g) $G(-1;4)$ |
| b) $B(2;5)$ | e) $E(2;3)$ | h) $H(3;-5)$ |
| c) $C(-3;5)$ | f) $F(-3;2)$ | i) $I(-2;6)$ |

.....

.....

.....

.....

🔥 **Câu 2.** Tìm ảnh của các điểm sau qua phép quay tâm $I(2;1)$ góc -45° :

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) $A(3;1)$ | d) $D(7;1)$ | g) $G(-1;4)$ |
| b) $B(4;5)$ | e) $E(2;3)$ | h) $H(3;-5)$ |
| c) $C(-7;5)$ | f) $F(-3;2)$ | i) $I(-2;6)$ |

.....

.....

.....

.....

🔥 **Câu 3.** Tìm ảnh của các đường thẳng sau qua phép quay tâm O góc 90° :

- | | | |
|---------------------|--------------------|----------------------|
| a) $2x - y = 0$ | d) $y = 2x - 4$ | g) $-x + 3y - 6 = 0$ |
| b) $x + y + 2 = 0$ | e) $3x - 2y = 0$ | h) $-y + x = 2$ |
| c) $2x + y - 4 = 0$ | f) $x + y - 5 = 0$ | |

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Tìm ảnh của các đường tròn sau qua phép quay tâm O góc 90° :

a) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

b) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$

e) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 16$

f) $x^2 + (y-3)^2 = 5$

g) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$

h) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 15 = 0$

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho 2 đường thẳng bất kì d và d' . Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Câu 2. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 biết $Q_{(O; -120^\circ)}(\Delta_1) = \Delta_2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(\Delta_1, \Delta_2) = 120^\circ$.B. $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.C. $(\Delta_1, \Delta_2) = -120^\circ$.D. $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^\circ$.

Câu 3. Cho hai đường tròn cùng bán kính O và (O') tiếp xúc ngoài nhau. Có bao nhiêu phép quay góc 90° biến hình tròn O thành (O') ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

🔥 **Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ qua phép quay $Q\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

🔥 **Câu 5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$. Tìm tọa độ ảnh của đường tròn C qua $Q_{(O, 90^\circ)}$.

A. $x^2 + (y+3)^2 = 4$.

B. $x^2 + y^2 + 6y - 6 = 0$.

C. $x^2 + (y-3)^2 = 4$.

D. $x^2 + y^2 + 6x - 5 = 0$.

🔥 **Câu 6.** Cho tam giác đều tâm O . Phép quay tâm O , góc quay φ nào sau đây biến tam giác đều đó thành chính nó?

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

🔥 **Câu 7.** Trong mặt phẳng Oxy , ảnh của điểm $A(1;3)$ qua phép quay tâm O góc quay -90° là điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $N(3;-1)$.

B. $M(3;1)$.

C. $P(-3;1)$.

D. $Q(-3;-1)$.

🔥 Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , ảnh của điểm $M(2; -1)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° là điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $D(-1; -2)$.

B. $B(1; 2)$.

C. $C(-2; -1)$.

D. $A(2; 1)$.

🔥 Câu 9. Tìm ảnh của đường thẳng $d: 5x - 3y + 15 = 0$ qua phép quay $Q_{(O; 90^\circ)}$.

A. $d': x + y + 15 = 0$.

B. $d': 3x + 5y + 5 = 0$.

C. $d': 3x + y + 5 = 0$.

D. $d': 3x + 5y + 15 = 0$.

🔥 Câu 10. Trong các phép quay sau, phép quay nào là phép đồng nhất?

A. $Q(I; 5\pi)$.

B. $Q\left(O; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$.

C. $Q(I; 12\pi)$.

D. $Q\left(I; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

🔥 Câu 11. Phép quay tâm $Q_{(O; \varphi)}$ biến điểm M thành điểm M' . Khi đó:

A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $(OM; OM') = \varphi$.

B. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$.

C. $OM = OM'$ và $(OM; OM') = \varphi$.

D. $OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$.

🔥 Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3; 0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)}$

A. $A'(0; -3)$.

B. $A'(0; 3)$.

C. $A'(-3; 0)$.

D. $A'(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

🔥 **Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0; 3)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{\left(O; -\frac{\pi}{2}\right)}$

- A. $A'(0; -3)$. B. $A'(3; 0)$. C. $A'(-3; 0)$. D. $A'(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

🔥 **Câu 14.** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M'(-3; 2)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc -90° thì điểm M có tọa độ là:

- A. $(2; -3)$. B. $(2; 3)$. C. $(-2; -3)$. D. $(3; -2)$.

🔥 **Câu 15.** Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc 180° có phương trình:

- A. $3x + 2y + 1 = 0$. B. $-3x + 2y - 1 = 0$. C. $3x + 2y - 1 = 0$. D. $3x - 2y - 1 = 0$.

🔥 **Câu 16.** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc 90° có phương trình

- A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$.
C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$. D. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

🔥 Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng $d : x - y + 1 = 0$ là ảnh của đường thẳng (Δ) qua phép $Q_{(O; 90^\circ)}$. Phương trình của đường thẳng Δ là

- A.** $x + y - 1 = 0$. **B.** $x + y - 2 = 0$. **C.** $x + y + 1 = 0$. **D.** $x + y + 2 = 0$.

🔥 Câu 18. Trong mặt phẳng Oxy , qua phép quay $Q(O : -90^\circ)$, $M'(3; -2)$ là ảnh của điểm

- A.** $M(-3; 2)$. **B.** $M(2; 3)$. **C.** $M(-3; -2)$. **D.** $M(2; 3)$.

🔥 Câu 19. Cho đường thẳng $d : 3x - y + 1 = 0$, đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau là ảnh của d qua phép quay tâm $O(0; 0)$ góc 90°

- A.** $x + y + 1 = 0$. **B.** $x + 3y + 1 = 0$. **C.** $3x + y + 2 = 0$. **D.** $x - y + 2 = 0$.

🔥 Câu 20. Trong mặt phẳng Oxy , ảnh của điểm $M(-6; 1)$ qua phép quay $Q(O : 90^\circ)$ là:

- A.** $M'(-1; -6)$. **B.** $M'(1; 6)$. **C.** $M'(-6; -1)$. **D.** $M'(6; 1)$.

BÀI 3. PHÉP VỊ TỰ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

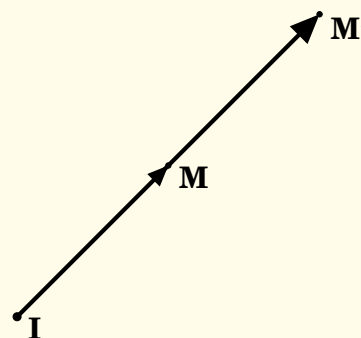
1 ĐỊNH NGHĨA.

Định nghĩa 1.

Cho điểm I và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I , tỉ số k .

Kí hiệu $V_{(I;k)}(M) = M'$.

Vậy $V_{(I;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$.



Nhận xét:

- ① Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- ② Khi $k = 1 \Rightarrow M \equiv M'$ phép vị tự là đồng nhất.
- ③ Khi $k = -1$, phép vị tự là phép đối xứng tâm.
- ④ $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(O, \frac{1}{k}\right)}(M')$.
- ⑤ Khi $k > 0$: M và M' nằm cùng phía đối với điểm O
- ⑥ Khi $k < 0$: M và M' nằm khác phía đối với điểm O

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , dựng ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm A tỉ số $k = 2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

2 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho $I(a;b)$, $M(x;y)$. Gọi $M'(x';y') = V_{(I;k)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ ảnh của điểm A qua phép $V_{(I;k)}$ biết

① $A(3;4)$, $I(2;-3)$, $k = 3$.

② $A(5;-2)$, $I(1;4)$, $k = -2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

3 TÍNH CHẤT.

Tính chất 1. Phép vị tự tỉ số k

- ① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó.
- ② Biến một đường thẳng thành đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- ③ Biến tia thành tia.
- ④ Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- ⑤ Nếu $V_{(I;k)}(M) = M'$, $V_{(I;k)}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.
- ⑥ Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.
- ⑦ Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,

- ① tìm ảnh của đường thẳng $d: 2x + y + 4 = 0$ qua phép vị tự $V_{(I;-2)}$ biết $I(-1;2)$.
- ② tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$ qua phép vị tự $V_{(I;-2)}$ biết $I(2;-3)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép vị tự tâm $I(2;3)$, tỉ số $k = -2$

- | | | |
|--------------|---------------|--------------|
| a) $A(2;3)$ | d) $D(3;0)$ | g) $G(1;-5)$ |
| b) $B(-3;4)$ | e) $E(5;-3)$ | h) $H(3;-2)$ |
| c) $C(0;5)$ | f) $F(-2;-4)$ | |

.....

.....

🔥 **Câu 2.** Tìm ảnh của các điểm sau qua phép vị tự tâm $I(2;3)$, tỉ số $k = \frac{1}{2}$

- | | | |
|--------------|---------------|--------------|
| a) $A(2;3)$ | d) $D(3;0)$ | g) $G(1;-5)$ |
| b) $B(-3;4)$ | e) $E(5;-3)$ | h) $H(3;-2)$ |
| c) $C(0;5)$ | f) $F(-2;-4)$ | |

🔥 **Câu 3.** Phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm M thành M' . Tìm tọa độ của điểm I trong các trường hợp sau

- a) $M(4;6)$ và $M'(-3;5)$. b) $M(2;3)$ và $M'(6;1)$. c) $M(-1;4)$ và $M'(-3;-6)$.

🔥 **Câu 4.** Phép vị tự tâm I tỉ số k biến điểm M thành M' . Tìm k trong các trường hợp sau:

- a) $I(-2;1), M(1;1), M'(-1;1)$. b) $I(1;2), M(0;4), M'(2;0)$. c) $I(2;-1), M(-1;2), M'(-2;3)$.

🔥 **Câu 5.** Tìm ảnh của các đường thẳng sau qua phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k = 2$:

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $x + 2y - 1 = 0$. | d) $x + 4 = 0$. | g) $x + y - 3 = 0$. |
| b) $x - 2y + 3 = 0$. | e) $3x + 2y - 5 = 0$. | h) $5x - 2y + 4 = 0$. |
| c) $y - 3 = 0$. | f) $x - 4y + 3 = 0$. | i) $2x + y - 6 = 0$. |

🔥 Câu 6. Tìm ảnh của các đường tròn sau qua phép vị tự tâm $I(0;3)$ tỉ số $k = 2$:

a) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$

c) $x^2 + y^2 = 4$

e) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$

b) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$

d) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$

f) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

© TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(3;2)$. Ảnh của A qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -1$ là

A. $A'(-3;-2)$.

B. $A'(3;-2)$.

C. $A'(-3;2)$.

D. $A'(3;2)$.

🔥 Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;2)$ và một phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$. Tìm trong các điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số k

A. $M'(2;4)$.

B. $M'(-2;4)$.

C. $M'(-2;-4)$.

D. $M'(4;2)$.

🔥 Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho phép vị tự tâm $I(x_0; y_0)$, tỉ số $k \neq 0$. Biểu thức nào sau đây là biểu thức tọa độ của phép vị tự?

A.
$$\begin{cases} x' = x + (1-k)x_0 \\ y' = y + (1-k)y_0 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

C. $\begin{cases} x' = kx + (1+k)x_0 \\ y' = ky + (1+k)y_0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x' = x + (1+k)x_0 \\ y' = y + (1+k)y_0 \end{cases}$

🔥 **Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm ảnh B của điểm $A(2;7)$ qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 2$.

A. $B(-2;-7)$.

B. $B(-2;7)$.

C. $B\left(1;\frac{7}{2}\right)$.

D. $B(4;14)$.

🔥 **Câu 5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $I(2;-1)$ và đường thẳng $(d): 2x + y - 3 = 0$. Hỏi phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$ biến d thành đường thẳng nào?

A. $x + 2y + 3 = 0$.

B. $4x - 2y - 6 = 0$.

C. $2x + y - 3 = 0$.

D. $4x + 2y - 5 = 0$.

🔥 **Câu 6.** Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = 1$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$.

A. $(x-4)^2 + y^2 = 4$.

B. $(x+4)^2 + y^2 = 4$.

C. $(x-4)^2 + y^2 = 1$.

D. $(x+4)^2 + y^2 = 1$.

🔥 **Câu 7.** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số -1 có phương trình:

A. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 9 = 0$.

🔥 Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số -3 có phương trình:

A. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 9 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 9 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$.

🔥 Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $2x + 4y - 1 = 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến đường thẳng d thành đường thẳng d' , phương trình đường thẳng d' là:

A. $x + 2y - 1 = 0$.

B. $x - 2y + 1 = 0$.

C. $2x + 4y + 7 = 0$.

D. $3x + 6y + 5 = 0$.

🔥 Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $I(1; -2)$. Phép vị tự $V_{(I;3)}$ biến điểm $M(-3; 2)$ thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(-11; 10)$.

B. $(6; -8)$.

C. $(11; 10)$.

D. $(-6; 2)$.

🔥 Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Hỏi phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $2x + 2y - 4 = 0$.

B. $x + y - 4 = 0$.

C. $x + y + 4 = 0$.

D. $2x + 2y = 0$.

🔥 **Câu 12.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $M(-5;6)$ và $N(4;12)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $M = V_{(I;-2)}(N)$.

A. $(1;10)$.B. $(-2;8)$.C. $(-1;9)$.D. $(0;9)$.

🔥 **Câu 13.** Điểm $M'(6;-4)$ là ảnh của điểm nào sau đây qua phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=2$

A. $M(12;-8)$.B. $M(3;2)$.C. $M(3;-2)$.D. $M(-8;12)$.

🔥 **Câu 14.** Cho điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm I tỉ số k mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.B. $IM' = k.IM$.C. $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM'}$.D. $IM = k.IM'$.

🔥 **Câu 15.** Trong mặt phẳng Oxy , điểm $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số k . Khi đó mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.B. $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$.C. $\begin{cases} x' = \frac{x}{k} \\ y' = \frac{y}{k} \end{cases}$.D. $\begin{cases} x' = -kx \\ y' = -ky \end{cases}$.

🔥 Câu 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó M là ảnh của G qua phép vị tự tâm A tỉ số k bằng:

A. $k = 2$.

B. $k = -2$.

C. $k = \frac{2}{3}$.

D. $k = \frac{3}{2}$.

🔥 Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

A. $3x + y + 1 = 0$.

B. $3x - y + 1 = 0$.

C. $x + 3y + 1 = 0$.

D. $3x + y - 1 = 0$.

🔥 Câu 18. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của C qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k = 2$.

A. $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 36$.

B. $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 36$.

C. $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 9$.

D. $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 9$.

🔥 Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Cho đường thẳng $\Delta: x + 2y - 1 = 0$ và điểm $I(1;0)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ thành Δ' có phương trình là:

A. $x - 2y + 3 = 0$.

B. $x + 2y - 1 = 0$.

C. $2x - y + 1 = 0$.

D. $x + 2y + 3 = 0$.

🔥 Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$ và điểm $I(2;-3)$. Gọi (C') là ảnh của C qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là:

A. $(x - 4)^2 + (y + 19)^2 = 16.$

C. $(x + 4)^2 + (y - 19)^2 = 16.$

B. $(x - 6)^2 + (y + 9)^2 = 16.$

D. $(x + 6)^2 + (y + 9)^2 = 16.$

CHƯƠNG 2

QUAN HỆ SONG SONG

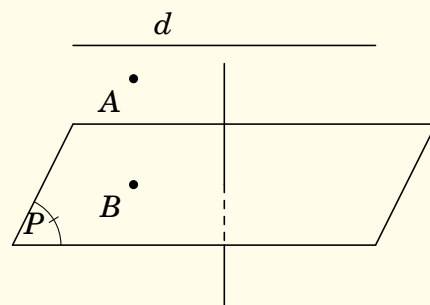
BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 MỞ ĐẦU VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN.

① Đối tượng cơ bản:

- ☑ Điểm: kí hiệu $A, B, C, \dots$
- ☑ Đường thẳng: kí hiệu $a, b, c, d, \dots$
- ☑ Mặt phẳng: kí hiệu $(P), (Q), (\alpha), (\beta), \dots$



② Quan hệ cơ bản:

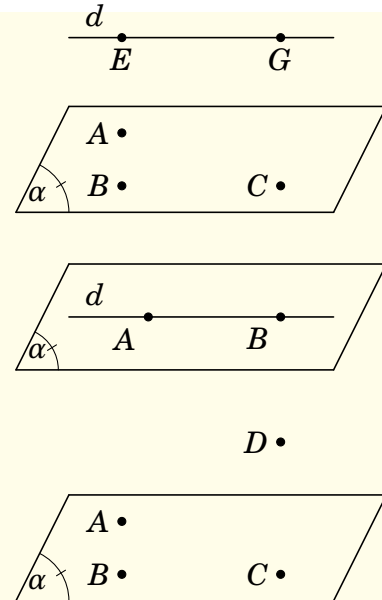
- ☑ Thuộc: kí hiệu $\in$. Ví dụ $A \in d, M \in (P) \dots$
- ☑ Chứa, nằm trong: kí hiệu $\subset$. Ví dụ: $d \subset (P), b \subset (\alpha)$.

③ Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

- ☑ Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng.
- ☑ Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
- ☑ Hai đoạn thẳng song song hoặc bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song và bằng nhau.
- ☑ Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

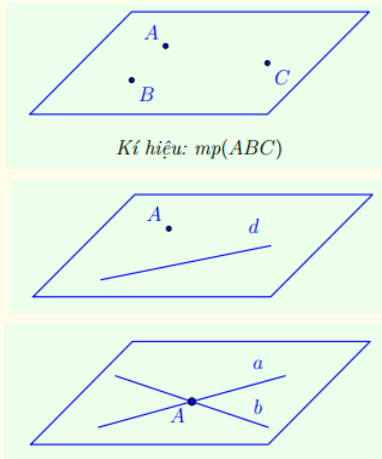
2 CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN.

- ① Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng cho trước.
- ② Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- ③ Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- ④ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
- ⑤ Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.



3 ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG.

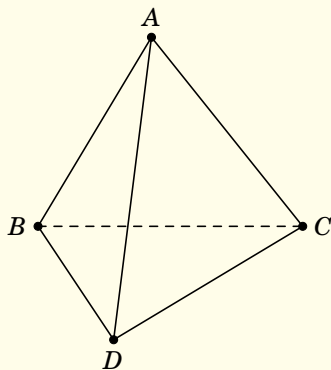
- ① Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- ② Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- ③ Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
Mặt phẳng hoàn toàn có thể mở rộng ra đến vô cực.



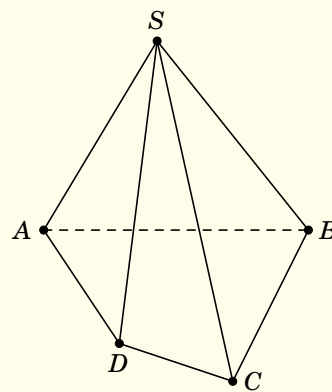
4 HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN.

- ① Cho đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm $S \notin (\alpha)$. Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1A_2A_3...A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu hình chóp này là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Khi đó ta gọi:
 - ☑ S là đỉnh của hình chóp.
 - ☑ $A_1A_2A_3...A_n$ là mặt đáy của hình chóp.
 - ☑ Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ được gọi là các mặt bên.
Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...
- ② Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm 4 tam giác ABC, ACD, BCD, ABD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn gọi là tứ diện) và được kí hiệu là $ABCD$.
 - ☑ Các điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.
 - ☑ Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện.
 - ☑ Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện của tứ diện.
 - ☑ Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt của tứ diện.

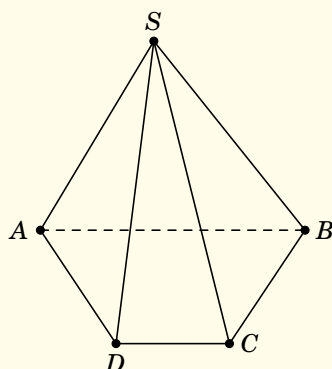
☑ Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.



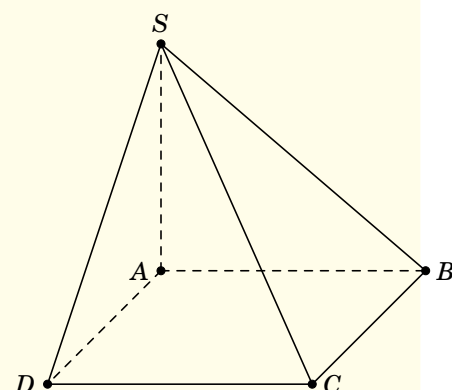
Hình chóp tam giác (Tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



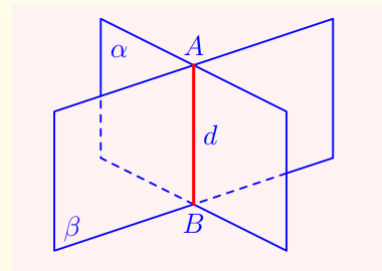
Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

5

DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

- ① Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.
- ② Đường thẳng nối hai điểm đó là giao tuyến của chúng.



Ví dụ 1. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) chứa tứ giác $ABCD$ có AB không song song CD ; BC không song song DA . Tìm giao tuyến của

- ① $(SAB) \cap (SBC)$. ② $(SAB) \cap (SCD)$. ③ $(SAD) \cap (SBC)$. ④ $(SAC) \cap (SBD)$.

Lời giải:

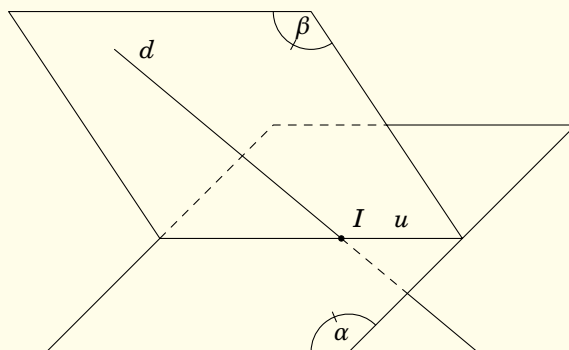
.....

.....

.....

.....

📁 Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)



- ① Tìm một mặt phẳng phụ (β) chứa d sao cho dễ tạo giao tuyến với (α) . Mặt phẳng này thường xác định bởi d và một điểm của (α) .
- ② Tìm giao tuyến u của (α) và (β) .
- ③ Trong (β) , d cắt u tại I , mà $u \subset (\alpha)$. Vậy d cắt (α) tại I .

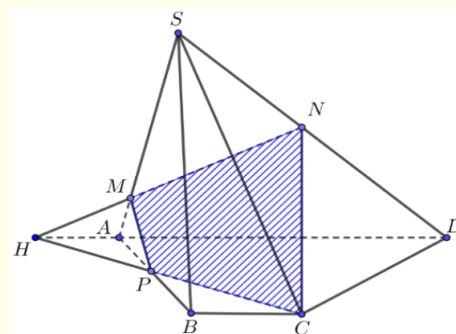
Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$ có M là điểm nằm trên tia đối của tia SA , O là điểm nằm trong tam giác ABC . Tìm các giao điểm của

- ① Đường thẳng BC và mặt phẳng (SOA) ;
- ② Đường thẳng MO và mặt phẳng (SBC) ;
- ③ Đường thẳng AB và mặt phẳng (MOC) ;
- ④ Đường thẳng SB và mặt phẳng (MOC) .

Lời giải:

Dạng 3. Tìm thiết diện của hình chóp (H) khi cắt bởi mặt phẳng (P).

- ① Khi cắt hình H bởi mặt phẳng (P) ta được phần chung của H và (P), phần chung này gọi là thiết diện của hình H và (P).
- ② Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng.
- ③ Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.



Ví dụ 1. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $AD = 2BC$, AB không song song CD . Lấy điểm M và N lần lượt là trung điểm của SA , AB . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Tìm thiết diện tạo bởi (MNO) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó mặt đáy $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- ① (SAC) và (SBD) ;
- ② (SAB) và (SCD) ;
- ③ (MBC) và (SAD) .

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, M lần lượt là hai điểm trên cạnh SA và SC . Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- ① (SAN) và (ABM) ;
- ② (SAN) và (BCK) .

.....

.....

🔥 **Câu 3.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M trên đoạn BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| ① (SAC) và (SBD) ; | ② (SAD) và (SBC) ; |
| ③ (SAM) và (SBD) ; | ④ (SDM) và (SAB) . |

🔥 **Câu 4.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Trên cạnh SA lấy điểm M . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| ① (SAC) và (SBD) . | ② (BCM) và (SAD) . |
| ③ (CDM) và (SAB) . | ④ (BDM) và (SAC) . |

🔥 **Câu 5.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trung điểm của CD là M . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| ① (SAC) và (SBD) . | ② (SBM) và (SAC) . | ③ (SBM) và (SAD) . |
| ④ (SAM) và (SBC) . | | |

🔥 **Câu 6.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M nằm trên đoạn SA . Hãy tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| ① (BDM) và (SAC) . | ② (BCM) và (SAD) . | ③ (BCM) và (SCD) . |
|------------------------|------------------------|------------------------|

🔥 Câu 7. Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh SA, SB và O là điểm nằm trong tam giác ABC . Xác định giao điểm của

- ① Đường thẳng AB và mặt phẳng (SOC) ;
- ② Đường thẳng MN và mặt phẳng (SOC) ;
- ③ Đường thẳng SO và mặt phẳng (CMN) .

🔥 Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Lấy điểm P trên cạnh BD sao cho $PB > PD$. Tìm giao điểm của

- ① CD và (MNP) .
- ② AD và (MNP) .

🔥 Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD . Gọi O là điểm thuộc miền trong $\triangle BCD$. Tìm giao điểm của

- ① BD và (OMN) .
- ② BC và (OMN) .
- ③ MN và (ABO) .
- ④ AO và (BMN) .

🔥 Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB , N là trọng tâm $\triangle SCD$. Xác định giao điểm của

- ① MN và $(ABCD)$.
- ② MN và (SAC) .
- ③ SC và (AMN) .
- ④ SA và (CMN) .

🔥 **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O . Trên SA, SB lần lượt lấy hai điểm M và N .

- ① Tìm giao điểm của SO và (CMN) . ② Tìm giao tuyến của (SAD) và (CMN) .

🔥 **Câu 12.** Cho tứ diện $SABC$ và O là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh SA và SC sao cho MN không song song với AC . Xác định thiết diện cắt tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (MNO) ?

🔥 **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với AB . Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC . Xác định giao tuyến của (MNP) và (ABC) từ đó suy ra thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (MNP) .

🔥 **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang thỏa mãn $AB \parallel CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB, SC .

- ① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
 ② Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) .
 ③ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) .

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC . Lấy điểm N thuộc miền trong tam giác SCD .

- ① Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng (SAC) .
- ② Tìm giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN) .
- ③ Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN) .

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Theo mô tả trong sách giáo khoa,

- A. Mặt bàn là mặt phẳng trong hình học không gian.
- B. Mặt bàn là một phần mặt phẳng trong hình học không gian.
- C. Mặt bàn là một hình ảnh của mặt phẳng trong hình học không gian.
- D. Mặt bàn là hình ảnh của một phần mặt phẳng trong hình học không gian.

Câu 2. Trong hình học không gian,

- A. Điểm luôn luôn phải thuộc mặt phẳng.
- B. Điểm luôn luôn không thuộc mặt phẳng.
- C. Điểm vừa thuộc mặt phẳng đồng thời vừa không thuộc mặt phẳng.
- D. Điểm có thể thuộc mặt phẳng, có thể không thuộc mặt phẳng.

Câu 3. Trong hình học không gian,

- A. Hình biểu diễn của một hình tròn thì phải là một hình tròn.
- B. Hình biểu diễn của một hình chữ nhật thì phải là một hình chữ nhật.
- C. Hình biểu diễn của một tam giác thì phải là một tam giác.
- D. Hình biểu diễn của một góc thì phải là một góc bằng nó.

🔥 **Câu 4.** Trong hình học không gian,

- A. Qua ba điểm xác định một và chỉ một mặt phẳng.
- B. Qua ba điểm phân biệt xác định một và chỉ một mặt phẳng.
- C. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định một mặt phẳng.
- D. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.

🔥 **Câu 5.** Trong không gian cho 4 điểm phân biệt, không đồng phẳng và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó, có bao nhiêu mặt phẳng đi qua 3 trong số 4 điểm trên?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

🔥 **Câu 6.** Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì:

- A. Cùng thuộc đường tròn.
- B. Cùng thuộc đường elip.
- C. Cùng thuộc đường thẳng.
- D. Cùng thuộc mặt cầu.

🔥 **Câu 7.** Cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Qua ba điểm không thẳng hàng xác định duy nhất một mặt phẳng.
 B. Qua một đường thẳng và một điểm không thuộc nó xác định duy nhất một mặt phẳng.
 C. Qua hai đường thẳng xác định duy nhất một mặt phẳng.
 D. Qua hai đường thẳng cắt nhau xác định duy nhất một mặt phẳng.

🔥 Câu 8. Cho 2 đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A . Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

🔥 Câu 9. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S không thuộc mp $(ABCD)$. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng xác định bởi các điểm A, B, C, D, S ?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

🔥 Câu 10. Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

🔥 Câu 11. Trong mp(α), cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm $S \notin mp(\alpha)$. Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

🔥 **Câu 12.** Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$, điểm $E \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm A, B, C, D, E ?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

🔥 **Câu 13.** Cho năm điểm A, B, C, D, E trong đó không có bốn điểm nào ở trên cùng một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong số năm điểm đã cho?

- A. 10. B. 12. C. 8. D. 14.

🔥 **Câu 14.** Trong mặt phẳng (α) , cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm S không nằm trong mp (α) . Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong bốn điểm nói trên?

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 8.

🔥 **Câu 15.** Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm ở trên cùng một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

- A. 8. B. 12. C. 10. D. 14.

🔥 Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD (AB \parallel CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.
- B. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
- C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
- D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

🔥 Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

- A. AM (M là trung điểm AB).
- B. AH (H là hình chiếu của B trên CD).
- C. AN (N là trung điểm của CD).
- D. AK (K là hình chiếu của C trên BD).

🔥 Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SA và SB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $IJCD$ là hình thang.
- B. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).
- C. $(SAB) \cap (IBC) = IB$.
- D. $(SBD) \cap (JCD) = JD$.

🔥 Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD (AD \parallel BC)$. Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A. SO (O là giao điểm của AC và BD).
- B. SI (I là giao điểm của AC và BM).
- C. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
- D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

🔥 **Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d qua S và song song với AB . B. d qua S và song song với BC .
C. d qua S và song song với DC . D. d qua S và song song với BD .

🔥 **Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(IBC) là:

- A. Tam giác IBC . B. Hình thang $IJBC$ (J là trung điểm SD).
C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB). D. Tứ giác $IBCD$.

🔥 **Câu 22.** Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Gọi (β) là mặt phẳng chứa d . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $M \in (\alpha)$. B. $M \in d$. C. $M \in (\beta)$. D. $(\alpha) \cap (\beta) = M$.

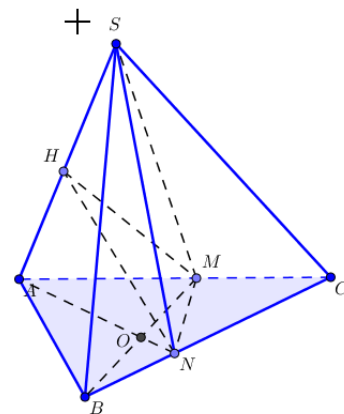
🔥 **Câu 23.** Hãy chọn câu trả lời đúng. Trong không gian

- A. Hình biểu diễn của một hình chữ nhật thì phải là một hình chữ nhật.
B. Hình biểu diễn của một hình tròn thì phải là một hình tròn.
C. Hình biểu diễn của một tam giác thì phải là một tam giác.
D. Hình biểu diễn của một góc thì phải là một góc bằng nó.

🔥 Câu 24.

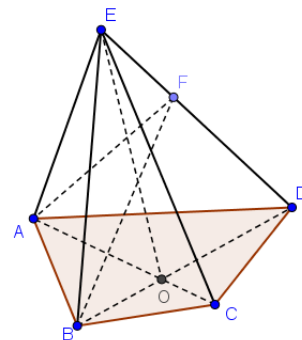
Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác, như hình vẽ bên. Với M, N, H lần lượt là các điểm thuộc vào các cạnh AC, BC, SA , sao cho MN không song song AB . Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AN với BM . Gọi T là giao điểm đường NH và (SBO) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. T là giao điểm của hai đường thẳng NH với SB .
- B. T là giao điểm của hai đường thẳng SO với HM .
- C. T là giao điểm của hai đường thẳng NH với BM .
- D. T là giao điểm của hai đường thẳng NH với SO .

**🔥 Câu 25.**

Cho hình chóp $S.ABCD$ như hình vẽ bên. Có $ABCD$ là tứ giác lồi. Với L là điểm thuộc vào các cạnh SB , và O là giao điểm của hai đường thẳng AC với BD . Gọi G là giao điểm đường SO và (ADL) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. G là giao điểm của hai đường thẳng SD với AL .
- B. G là giao điểm của hai đường thẳng SO với AL .
- C. G là giao điểm của hai đường thẳng DL với SC .
- D. G là giao điểm của hai đường thẳng SO với DL .



🔥 Câu 26. Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây:

- (I) Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- (II) Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- (III) Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

(IV) Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhận thấy và cho đường bị che khuất.

Số qui tắc đúng trong các qui tắc trên là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

🔥 **Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác lồi có các cạnh đối không song song. AC cắt BD tại O , AD cắt BC tại I . Khi đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là:

A. SI .

B. SB .

C. SC .

D. SO .

🔥 **Câu 28.** Gọi n là số cạnh của hình chóp có 101 đỉnh. Tìm n .

A. $n = 202$.

B. $n = 200$.

C. $n = 101$.

D. $n = 203$.

🔥 **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SC . Giao điểm của BC với mặt phẳng (ADM) là:

A. giao điểm của BC và AM .

B. giao điểm của BC và SD .

C. giao điểm của BC và AD .

D. giao điểm của BC và DM .

🔥 **Câu 30.** Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

🔥 **Câu 31.** Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

🔥 **Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$ Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng

A. SN .B. SC .C. SB .D. SM .

🔥 **Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$ Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng

A. SN .B. SA .C. MN .D. SM .

🔥 **Câu 34.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD (AB \parallel CD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

🔥 **Câu 35.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là một điểm bên trong tam giác BCD và M là một điểm trên đoạn AO . Gọi I, J là hai điểm trên cạnh BC, BD . Giả sử IJ cắt CD tại K , BO cắt IJ tại E và cắt CD tại H , ME cắt AH tại F . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MIJ) và (ACD) là đường thẳng:

- A. KM . B. AK . C. MF . D. KF .

🔥 **Câu 36.** Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

- A. AM , M là trung điểm AB . B. AN , N là trung điểm CD .
C. AH , H là hình chiếu của B trên CD . D. AK , K là hình chiếu của C trên BD .

🔥 **Câu 37.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trung điểm của SD , J là điểm trên SC và không trùng trung điểm SC . Giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AIJ) là:

- A. AK , K là giao điểm IJ và BC . B. AH , H là giao điểm IJ và AB .
C. AG , G là giao điểm IJ và AD . D. AF , F là giao điểm IJ và CD .

🔥 **Câu 38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

- A. SD . B. SO , O là tâm hình bình hành $ABCD$.
C. SG , G là trung điểm AB . D. SF , F là trung điểm CD .

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là một điểm bất kì nằm trên đoạn AC (khác A và C). Mặt phẳng (P) qua M và song song với các đường thẳng AB, CD . Thiết diện của (P) với tứ diện đã cho là hình gì?

- A. Hình vuông. B. Hình bình hành. C. Hình chữ nhật. D. Hình thang.

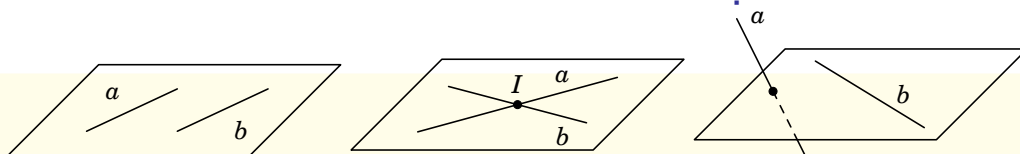
Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là một điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm của BC). Thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là

- A. Tứ giác. B. Ngũ giác. C. Lục giác. D. Tam giác.

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT



Định nghĩa 1. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b .

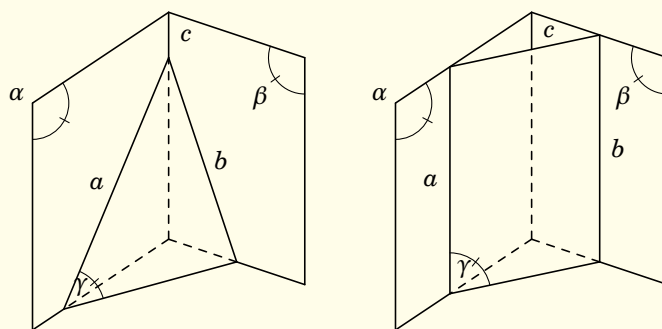
- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

2 TÍNH CHẤT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Định lý 1. Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

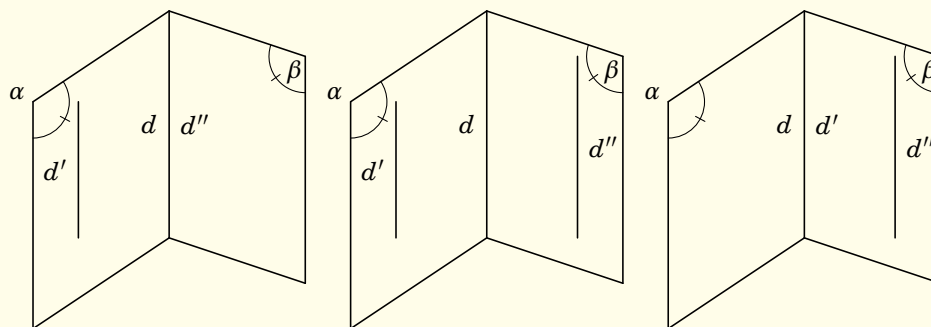
Định lý 2 (Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng). Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\gamma) = a \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ a, b, c \text{ đồng quy} \end{array} \right]$$



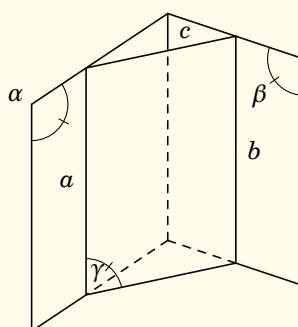
Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \\ a \parallel b \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel a \parallel b$$



Định lý 3. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel c \\ b \parallel c \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$



3

DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh hai đường thẳng song song.

Phương pháp giải:

Cách 1. Chứng minh hai đường thẳng a, b đồng phẳng, rồi dùng các định lý trong hình học phẳng, chẳng hạn định lý đường trung bình, định lý đảo Thales, ... để chứng minh $a \parallel b$.

Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Chẳng hạn, chứng minh

$$\left\{ \begin{array}{l} c \parallel a \\ c \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b.$$

Cách 3. Áp dụng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó. Chẳng hạn, chứng minh

$$\left\{ \begin{array}{l} b \parallel c \\ b \subset (\alpha), c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c. \end{array} \right.$$

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD . Lấy P trên AB . Gọi các điểm $I = PD \cap AN$; $J = PC \cap AM$. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

Lời giải:

.....

.....

.....

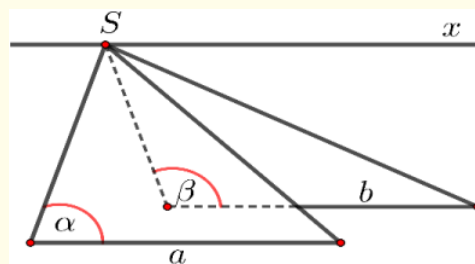
.....

.....

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

Phương pháp giải:

$$\begin{cases} S \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Sx \text{ với } Sx \parallel a \parallel b. \\ a \parallel b \end{cases}$$



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- ① Tìm $(SAB) \cap (SCD)$. ② Tìm $(MBC) \cap (SAD)$. ③ Tìm $(MEF) \cap (SAC)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và I là một điểm trên cạnh SO .

- ① Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA, SB . Chứng minh $EF \parallel AB$;
- ② Gọi K là giao điểm của DE và CF . Chứng minh $SK \parallel BC$.

Câu 2. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB .

- ① Chứng minh $EF \parallel CD$.
- ② Tìm $I = AF \cap (SCD)$.
- ③ Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi P là một điểm trên cạnh BC . Tìm giao tuyến của

- ① (SBC) và (SAD) ;
- ② (SAB) và (SCD) ;
- ③ (MNP) và $(ABCD)$.

Câu 4. Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB , G là một điểm trên cạnh AC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- ① (SAC) và (EFC) ;
- ② (SAC) và (EFG) .

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Lấy điểm E trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$.

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)
- ② Tìm giao điểm M của đường thẳng AE và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng SO .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SD, CD, BC .

- ① Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAC) và (SBC) , (AMN) và (SBC) .
- ② Tìm giao điểm I của (PMN) và AC , K của (PMN) và SA .
- ③ Gọi F là trung điểm của PM , chứng minh ba điểm K, F, I thẳng hàng.

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng chéo nhau khi chúng không có điểm chung.
- B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng song song nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
- D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.

- B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- D. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

🔥 **Câu 3.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung thì chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- D. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.

🔥 **Câu 4.** Hãy Chọn Câu đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng song song nhau nếu chúng không có điểm chung.
- C. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Không có mặt phẳng nào chứa cả hai đường thẳng a và b thì ta nói a và b chéo nhau.

🔥 **Câu 5.** Hãy Chọn Câu đúng?

- A. Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng qui.
- B. Nếu hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến, nếu có, của chúng sẽ song song với cả hai đường thẳng đó.
- C. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau thì có hai đường thẳng p và q song song nhau mà mỗi đường đều cắt cả a và b .
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

🔥 Câu 6. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b cùng thuộc mp (α). Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

🔥 Câu 7. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?

- A. Có thể song song hoặc cắt nhau. B. Cắt nhau.
C. Song song nhau. D. Chéo nhau.

🔥 Câu 8. Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a // b$. Khẳng định nào sau đây không đúng?

- A. Nếu $a // c$ thì $b // c$.
B. Nếu c cắt a thì c cắt b .
C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.
D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b .

🔥 Câu 9. Cho đường thẳng a nằm trên mp(P), đường thẳng b cắt (P) tại O và O không thuộc a . Vị trí tương đối của a và b là

- A. chéo nhau. B. cắt nhau. C. song song nhau. D. trùng nhau.

🔥 **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD (AB // CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.
- B. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
- C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
- D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

🔥 **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d qua S và song song với AB .
- B. d qua S và song song với BC .
- C. d qua S và song song với DC .
- D. d qua S và song song với BD .

🔥 **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A. AD .
- B. DC .
- C. EF .
- D. AB .

🔥 **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A. EF .
- B. DC .
- C. AD .
- D. AB .

🔥 Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD . Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào không song song với $A'B'$?

- A. AB . B. CD . C. $C'D'$. D. SC .

🔥 Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây SAI?

- A. $AB'C'D$ và $A'BCD'$ là hai hình bình hành có chung một đường trung bình.
 B. BD' và $B'C'$ chéo nhau.
 C. $A'C$ và DD' chéo nhau.
 D. DC' và AB' chéo nhau.

🔥 Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$. B. $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$.
 C. $MNPQ$ là hình bình hành. D. MP và NQ chéo nhau.

🔥 Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d qua S và song song với BC . B. d qua S và song song với DC .
 C. d qua S và song song với AB . D. d qua S và song song với BD .

🔥 **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

- A. là đường thẳng đi qua S song song với AB, CD .
- B. là đường thẳng đi qua S .
- C. là điểm S .
- D. là mặt phẳng (SAD) .

🔥 **Câu 19.** Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. AB .
- B. AC .
- C. BC .
- D. SA .

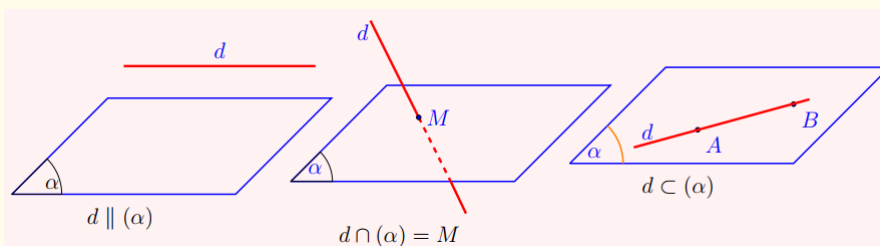
🔥 **Câu 20.** Cho tứ diện $ABCD$. I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng :

- A. qua I và song song với AB .
- B. qua J và song song với BD .
- C. qua G và song song với CD .
- D. qua G và song song với BC .

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.



Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Có ba trường hợp xảy ra:

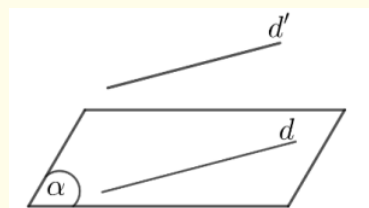
- ① Đường thẳng d và (α) có 2 điểm chung phân biệt $\Rightarrow d \subset (\alpha)$.
- ② Đường thẳng d và (α) có 1 điểm chung duy nhất $\Rightarrow d \cap (\alpha) = M$.
- ③ Đường thẳng d và (α) không có điểm chung nào $\Rightarrow d \parallel (\alpha)$.

Định nghĩa 1. Đường thẳng d và mặt phẳng (P) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

2 CÁC ĐỊNH LÝ

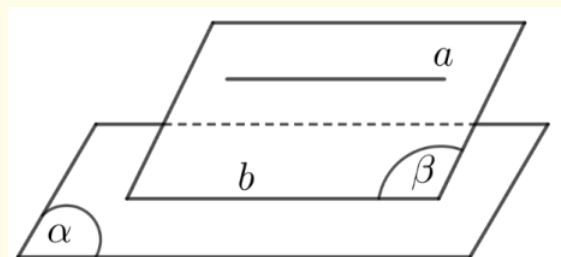
Định lý 1. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .

$$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$$



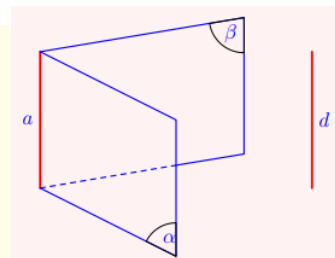
Định lý 2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với (α) .

$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

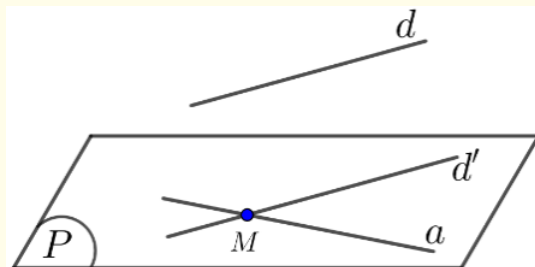


Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau và cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\alpha) \parallel d \\ (\beta) \parallel d \end{cases} \Rightarrow a \parallel d$$



Định lý 3. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



3 DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

Phương pháp: Chứng minh $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P).$

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (trong đó mặt phẳng này chứa một đường thẳng song song với mặt phẳng kia)

Phương pháp: Áp dụng một trong hai cách sau

$$\left. \begin{matrix} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \\ a \parallel b \end{matrix} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a$$

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

① Chứng minh $MG \parallel (ABD)$.

- ② Tìm $(ABD) \cap (BGM)$.
- ③ Tìm $(ABD) \cap (AGM)$.

Lời giải:

B TỰ LUẬN

🔥 Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- ① Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- ② Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE) .

🔥 Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Chứng minh rằng:

- ① $BC \parallel (SAD)$.
- ② $AD \parallel (SBC)$.
- ③ $MN \parallel (ABCD)$.
- ④ $MN \parallel (SBC)$.
- ⑤ $MO \parallel (SCD)$.
- ⑥ $NO \parallel (SBC)$.

🔥 **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- ① Chứng minh $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.
- ② Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

🔥 **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD .

- ① Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.
- ② Gọi P là trung điểm cạnh SA . Chứng minh $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.
- ③ Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh $GI \parallel (MNP)$.

🔥 **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , G là trọng tâm của tam giác SCD .

- ① Chứng minh $OG \parallel (SBC)$.
- ② Cho M là trung điểm của SD . Chứng minh $CM \parallel (SAB)$.
- ③ Gọi I là điểm trên cạnh SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh $SA \parallel (BDI)$.

🔥 **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB .

- ① Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.
- ② Tìm giao điểm của (MNP) với BC .
- ③ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) .
- ④ Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP) .

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $d \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng a sao cho $a \parallel d$.
- B. Nếu $d \parallel (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$.
- C. Nếu $d \parallel c \subset (\alpha)$ thì $d \parallel (\alpha)$.
- D. Nếu $d \cap (\alpha) = A$ và đường thẳng $d' \subset (\alpha)$ thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Câu 2. Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với $mp(P)$. Khẳng định nào sau đây không sai?

- A. $a \parallel b$.
- B. a và b cắt nhau.
- C. a và b chéo nhau.
- D. Chưa đủ điều kiện để kết luận vị trí tương đối của a và b .

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng $a \subset mp(P)$ và $mp(P) \parallel$ đường thẳng $\Delta \Rightarrow a \parallel \Delta$.
- B. $\Delta \parallel mp(P) \Rightarrow$ Tồn tại đường thẳng $\Delta' \subset mp(P) : \Delta' \parallel \Delta$.
- C. Nếu đường thẳng Δ song song với $mp(P)$ và (P) cắt đường thẳng a thì Δ cắt đường thẳng a .
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì 2 đường thẳng đó song song nhau.

🔥 **Câu 4.** Trong không gian có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

🔥 **Câu 5.** Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

🔥 **Câu 6.** Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

- A. 2. B. Vô số. C. 1. D. 0.

🔥 **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $MN \parallel (SBD)$. B. $MN \parallel (SBC)$. C. $MN \parallel (ABCD)$. D. $MN \parallel (SCD)$.

🔥 **Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD và ACD . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $MN \parallel (ABD)$.

B. $MN \parallel (ABC)$.

C. BM, AN, CD đồng qui.

D. $MN = \frac{2}{3}AB$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC .

B. AB .

C. BC .

D. SA .

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $MN \parallel (ABC)$.

B. $MN \parallel (ABD)$.

C. $MN \parallel (BCD)$.

D. $MN \parallel (ACD)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với hai đáy là AD và BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $AB \parallel (SCD)$.

B. $CD \parallel (SBC)$.

C. $AD \parallel (SBC)$.

D. $CD \parallel (SAB)$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ABD) là

A. AB .

B. AC .

C. BD .

D. CD .

❖ Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , I là trung điểm cạnh SC . Khẳng định nào sau đây SAI?

- A. $IO \parallel (SAB)$.
- B. $IO \parallel (SAD)$.
- C. (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.
- D. $(IBD) \cap (SAC) = IO$.

❖ Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD . Chọn câu sai :

- A. $G_1G_2 \parallel (ABD)$.
- B. $G_1G_2 \parallel (ABC)$.
- C. BG_1, AG_2 và CD đồng qui.
- D. $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$.

❖ Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA , mặt phẳng (α) cắt SC tại K . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. $SK = 2KC$.
- B. $SK = 3KC$.
- C. $SK = KC$.
- D. $SK = \frac{1}{2}KC$.

❖ Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ với M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD , ACD . Xét các khẳng định sau:

- I) $MN \parallel mp(ABC)$.
- III) $MN \parallel mp(ACD)$.
- II) $MN \parallel mp(BCD)$.
- IV) $MN \parallel mp(CDA)$.

Các mệnh đề nào đúng?

A. I, II.

B. II, III.

C. III, IV.

D. I, IV.

🔥 Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, M là trung điểm SA . Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là

A. tam giác.

B. hình bình hành.

C. hình thang vuông.

D. hình chữ nhật.

🔥 Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm ở trên cạnh AC . Mặt phẳng (α) qua và M song song với AB và CD . Thiết diện của tứ diện cắt bởi (α) là

A. hình bình hành.

B. hình chữ nhật.

C. hình thang.

D. hình thoi.

🔥 Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Thiết diện của mặt phẳng (α) tùy ý với hình chóp không thể là:

A. Lục giác.

B. Ngũ giác.

C. Tứ giác.

D. Tam giác.

🔥 Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm nằm trong tam giác ABC , $mp(\alpha)$ qua M và song song với AB và CD . Thiết diện của $ABCD$ cắt bởi $mp(\alpha)$ là:

A. Tam giác.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình vuông.

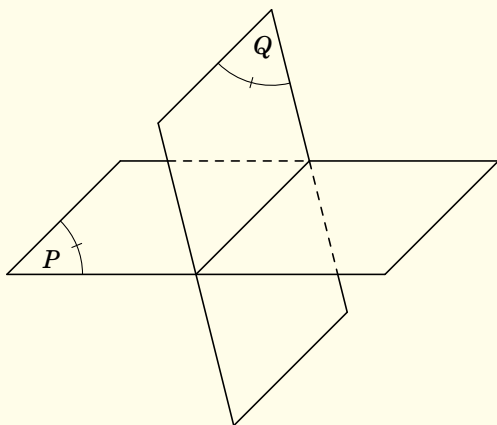
D. Hình bình hành.

BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

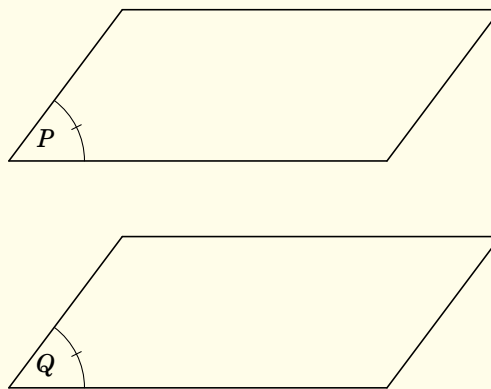
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG PHÂN BIỆT

Cho mặt phẳng (P) và (Q) . Có các trường hợp xảy ra:



$(P), (Q)$ có 1 điểm chung: $(P) \cap (Q) = a$



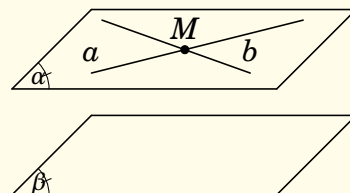
$(P), (Q)$ không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

Định nghĩa 1. Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

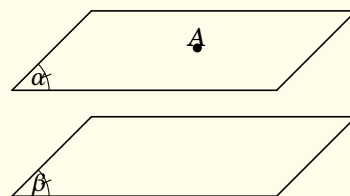
2 CÁC ĐỊNH LÝ

Định lý 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

$$\left. \begin{array}{l} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a, b \parallel (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$



Định lý 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

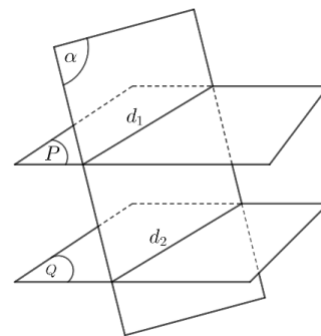


Hệ quả:

- ① Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) . Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.
- ② Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- ③ Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

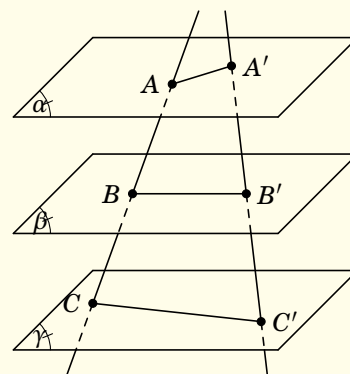
Định lí 3. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (P) = d_1 \\ (\alpha) \cap (Q) = d_2 \\ (P) \parallel (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$



Hệ quả 1. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

Định lí 4. Định lí Thales: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



3 VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD và K, I là trung điểm của BC, OM .

- ① Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.
- ② Chứng minh $(PMN) \parallel (ABCD)$.
- ③ Chứng minh $KI \parallel (SCD)$.

🔥 Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD

- ① Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.
- ② Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB . Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$ và $(ROM) \parallel (SCD)$.

🔥 Câu 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF . Chứng minh

- ① $(ADF) \parallel (BCE)$.
- ② $(DIK) \parallel (JBE)$.

TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Một mặt phẳng cắt hai mặt đối diện của hình hộp theo hai giao tuyến là a và b . Hãy chọn câu đúng:

- A. a và b song song.
- B. a và b chéo nhau.
- C. a và b trùng nhau.
- D. a và b cắt nhau.

🔥 **Câu 2.** Chọn câu đúng :

- A. Hai đường thẳng a và b không cùng nằm trong mặt phẳng (P) nên chúng chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt nằm trên hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng không song song và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song thì chéo nhau.

🔥 **Câu 3.** Chọn câu đúng:

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song.
- B. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
- D. Hai mặt phẳng không song song thì trùng nhau.

🔥 **Câu 4.** Hãy chọn câu sai:

- A. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
- B. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
- C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song nhau.
- D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

🔥 **Câu 5.** Cho một đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với (P) ?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. vô số.

🔥 **Câu 6.** Hãy chọn câu đúng

- A. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.
- B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì song song với nhau.
- C. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

🔥 **Câu 7.** Cho một điểm A nằm ngoài mp (P) . Qua A vẽ được bao nhiêu đường thẳng song song với (P) ?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. vô số.

🔥 **Câu 8.** Cho đường thẳng a nằm trên mp (α) và đường thẳng b nằm trên mp (β) . Biết $(\alpha) \parallel (\beta)$. Tìm câu **sai**

- A. $a \parallel (\beta)$.
- B. $b \parallel (\alpha)$.
- C. $a \parallel b$.
- D. Nếu có một mp (γ) chứa a và b thì $a \parallel b$.

🔥 **Câu 9.** Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (β) . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel b$.
- B. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel (\beta)$.
- C. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow b \parallel (\alpha)$.
- D. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

🔥 **Câu 10.** Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.

B. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.

D. a và b cắt nhau.

🔥 **Câu 11.** Hai đường thẳng a và b nằm trong (α) . Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

D. Nếu a cắt b , a cắt b' và $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

🔥 **Câu 12.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AB'C'D$ và $A'BCD'$ là hai hình bình hành có chung một đường trung bình.

B. BD' và $B'C'$ chéo nhau.

C. $A'C$ và DD' chéo nhau.

D. DC' và AB' chéo nhau.

🔥 **Câu 13.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (BCA') .

B. $(BC'D)$.

C. $(A'C'C)$.

D. (BDA') .

🔥 **Câu 14.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. $\text{Mp}(\alpha)$ qua AB cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A.** Hình bình hành. **B.** Hình thoi. **C.** Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

🔥 **Câu 15.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABB'A'$ và $DCC'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

- A.** $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AD}$.
B. $OO' \parallel (ADD'A')$.
C. OO' và BB' cùng ở trong một mặt phẳng.
D. OO' là đường trung bình của hình bình hành $ADC'B'$.

🔥 **Câu 16.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB . $\text{Mp}(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A.** Tam giác. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

🔥 **Câu 17.** Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , a là đường thẳng bất kì. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A.** Nếu a cắt $\text{mp}(\alpha)$ thì a cắt $\text{mp}(\beta)$.
B. Nếu $a \subset (\alpha)$ thì a song song với $\text{mp}(\beta)$.

C. Nếu $a \subset (\beta)$ thì a song song với $\text{mp}(\alpha)$.

D. Nếu a song song với $\text{mp}(\alpha)$ thì a song song với $\text{mp}(\beta)$.

🔥 **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $A'C' \parallel (SBD)$. **B.** $(A'B'C') \parallel (ABC)$. **C.** $A'B' \parallel (SAD)$. **D.** $A'C' \parallel BD$.

🔥 **Câu 19.** Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $a \parallel (\alpha)$. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (β) ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

🔥 **Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (NOM) cắt (OPM) . **B.** $(MON) \parallel (SBC)$.
C. $(PON) \parallel (SAD)$. **D.** $(NMP) \parallel (SBD)$.

CHƯƠNG 3

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN

- ① Định nghĩa, tính chất và các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.
- ② Phép cộng, trừ vectơ:
 - ✓ Quy tắc ba điểm (với phép cộng): Cho ba điểm A, B, C bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 - ✓ Quy tắc ba điểm (với phép trừ): Cho ba điểm A, B, C bất kì, ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
 - ✓ Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
 - ✓ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
- ③ Lưu ý:
 - ✓ Điều kiện để hai vectơ cùng phương:
Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại duy nhất $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
 - ✓ Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq -1$), điểm O tùy ý.
Ta có: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$
 - ✓ Trung điểm của đoạn thẳng: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB , điểm O tùy ý.
Ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$
 - ✓ Trọng tâm của tam giác: Cho G là trọng tâm $\triangle ABC$, điểm O tùy ý.
Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

2 SỰ ĐỒNG PHẪNG CỦA BA VECTƠ

- ① Định nghĩa: Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- ② Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.
Khi đó: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
- ③ Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tùy ý.
Khi đó: $\exists m, n, p \in \mathbb{R} : \vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

3 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- ① Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\overrightarrow{a \cdot b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- ② Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- ③ Bình phương vô hướng của một vectơ: $\overrightarrow{a^2} = |\vec{a}|^2$

④ Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

⑤ Công thức tính cosin của góc hợp bởi hai vectơ khác $\vec{0}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

⑥ Công thức tính độ dài của một đoạn thẳng: $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{AB^2}$

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vectơ và các khái niệm có liên quan

Phương pháp giải:

- ① Dựa vào định nghĩa của các khái niệm liên quan đến vectơ.
- ② Dựa vào tính chất hình học của các hình hình học cụ thể.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và

- ① cùng phương với $\vec{AB}$.
- ② cùng phương với $\vec{AA'}$.

Lời giải:

.....

.....

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ

Phương pháp giải:

Để chứng minh đẳng thức vectơ ta thường sử dụng:

- ① Quy tắc cộng, quy tắc trừ ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp.
- ② Tính chất trung điểm, trọng tâm tam giác, tích một số với một vectơ... Để biến đổi vế này thành vế kia.

Ví dụ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 3. Phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng cho trước

Phương pháp giải:

Để phân tích một vectơ $\vec{x}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của BG . Hãy biểu thị vectơ AI theo 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Lời giải:

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{AD'}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

.....

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

a) Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{BC'}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG'}$ qua ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

.....

Câu 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi A' , B' , C' , D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD , CDA , DAB , ABC . Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

.....

Câu 4. Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

.....

🔥 **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $O = AC \cap BD$. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{SD} + \vec{SB} = \vec{SA} + \vec{SC}$. Điều ngược lại có đúng không?
 b) $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$.

🔥 **Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\vec{AM} = k\vec{AB}$ và $\vec{DN} = k\vec{DC}$.

- a) Chứng minh rằng: $\vec{MN} = (1-k)\vec{AD} + k\vec{BC}$.
 b) Gọi các điểm E, F, I theo thứ tự thuộc AD, BC và MN sao cho $\vec{AE} = m\vec{AD}$, $\vec{BF} = m\vec{BC}$ và $\vec{MI} = m\vec{MN}$. Chứng minh rằng E, F, I thẳng hàng.

🔥 **Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\vec{MA} = -2\vec{MB}$ và $\vec{ND} = -2\vec{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\vec{IA} = k\vec{ID}$, $\vec{JM} = k\vec{JN}$ và $\vec{KB} = k\vec{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. B. $\vec{AM} = \vec{a} - \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. C. $\vec{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. D. $\vec{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

🔥 Câu 2. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

🔥 Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{0}$.

🔥 Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

🔥 Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$ đúng?

A. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

D. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

🔥 **Câu 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.
 B. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng.
 C. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$.
 D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

🔥 **Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ”. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD).
 B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD .
 C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC .
 D. Chưa thể xác định được.

🔥 **Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}, \vec{y} = \overrightarrow{AC}, \vec{z} = \overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.
 B. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.
 C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.
 D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

🔥 **Câu 9.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.
 B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
 C. M là trung điểm BB' .
 D. M là trung điểm CC' .

🔥 **Câu 10.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, có bao nhiêu véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{BA}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

🔥 **Câu 11.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ thì $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{AC}$.
 B. Nếu $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ thì $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.
 C. Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A là trung điểm của BC .
 D. Nếu $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ thì $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$.

🔥 **Câu 12.** Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.

🔥 **Câu 13.** Cho tứ diện $ABCD$ với M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và AD . Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NM}$. B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{NP}$. C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MP}$. D. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$.

🔥 **Câu 14.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' . Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$. B. $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{IJ}$. C. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{D'J}$. D. $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$.

🔥 **Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

- A. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC}$. B. $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SD}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$.

🔥 **Câu 16.** Cho tứ diện $ABCD$ với E, F lần lượt là trung điểm của AB và AC . Hãy tìm tất cả các số thực k thỏa mãn $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{EF}$.

- A. $k = 2$. B. $k = -2$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = -\frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 17.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm véc-tơ $\vec{x} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$.

- A. $\vec{x} = \overrightarrow{AC}$. B. $\vec{x} = \overrightarrow{CA}$. C. $\vec{x} = \overrightarrow{BD}$. D. $\vec{x} = \overrightarrow{DB}$.

🔥 Câu 18. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GM}$.

B. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$.

C. $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}$.

D. $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AM}$.

🔥 Câu 19. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi véc-tơ $\vec{y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\vec{y} = \overrightarrow{AG}$.

C. $\vec{y} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

D. $\vec{y} = 3\overrightarrow{AG}$.

🔥 Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'B}$.

B. $\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'A'}$.

C. $\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'C}$.

D. $\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'D}$.

🔥 Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Với điểm M bất kỳ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ})$.

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{IJ}$.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}$.

🔥 **Câu 22.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $MNPQ$ có O và O' tương ứng là giao điểm của hai đường chéo của mỗi hình đó. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = \vec{0}$.
 B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{OO'}$.
 C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = 4\overrightarrow{OO'}$.
 D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{OO'}$.

🔥 **Câu 23.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = 2\overrightarrow{AC'}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = 3\overrightarrow{AC'}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = 4\overrightarrow{AC'}$.

🔥 **Câu 24.** Cho hình bình hành $ABCD$, M là một điểm bất kỳ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.
 B. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$.
 C. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.
 D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

🔥 **Câu 25.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C và một điểm O tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$ ($m, n \in \mathbb{R}$), ba điểm A, B, C thẳng hàng khi

- A. $m + n = 3$.
 B. $m + n = 1$.
 C. $m + n = 0$.
 D. $m + n = 2$.

🔥 **Câu 26.** Cho đường thẳng DE song song với mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.

- B. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ đồng phẳng.

🔥 **Câu 27.** Cho bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

- B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.
D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương.

🔥 **Câu 28.** Hãy tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây?

- A. Ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba véc-tơ đó bằng véc-tơ $\vec{0}$.
B. Ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba véc-tơ đó cùng phương.
C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba véc-tơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.
D. Véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

🔥 **Câu 29.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A. Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.
B. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
C. Ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba véc-tơ đó cùng có giá thuộc một mặt phẳng.
D. Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

🔥 **Câu 30.** Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.
 B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - k(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$.
 C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$.
 D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

🔥 **Câu 31.** Cho ba mệnh đề.

P: "Ba véc-tơ đồng phẳng là ba véc-tơ có giá cùng nằm trong một mặt phẳng."

Q: "Ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất."

R: "Ba véc-tơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, khi đó với $\vec{d}$ là véc-tơ bất kì ta luôn tìm được bộ ba số m, n, p duy nhất sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$."

Trong các mệnh đề trên, số mệnh đề đúng là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

🔥 **Câu 32.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Tìm véc-tơ $\vec{z} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

- A. $\vec{z} = -3\overrightarrow{BG}$. B. $\vec{z} = 3\overrightarrow{BG}$. C. $\vec{z} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$. D. $\vec{z} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$.

🔥 **Câu 33.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài véc-tơ $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a .

- A. $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$. B. $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$. C. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$. D. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$.

🔥 **Câu 34.** Cho tứ diện $ABCD$ với G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác ACD . Gọi véc-tơ $\vec{x} = \vec{AB} - \vec{AD}$. Véc-tơ $\vec{x}$ bằng véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây?

A. $3\vec{MN}$.

B. $3\vec{G_1G_2}$.

C. $3\vec{G_2G_1}$.

D. $3\vec{NM}$.

🔥 **Câu 35.** Cho tứ diện $ABCD$ với G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi véc-tơ $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\vec{x} = \vec{AG}$.

B. $\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{AG}$.

C. $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{AG}$.

D. $\vec{x} = 3\vec{AG}$.

🔥 **Câu 36.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm véc-tơ $\vec{x} = \vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD'}$.

A. $\vec{x} = \vec{DB'}$.

B. $\vec{x} = \vec{DA'}$.

C. $\vec{x} = \vec{DB}$.

D. $\vec{x} = \vec{DC'}$.

🔥 **Câu 37.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm véc-tơ $\vec{x} = \vec{AA'} + \vec{B'A'} + \vec{D'A'}$.

A. $\vec{x} = \vec{A'C}$.

B. $\vec{x} = \vec{CA'}$.

C. $\vec{x} = \vec{AC'}$.

D. $\vec{x} = \vec{C'A}$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ với E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm $\vec{x} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

A. $\vec{x} = \vec{EF}$.

B. $\vec{x} = \vec{FE}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{EF}$.

D. $\vec{x} = 2\vec{FE}$.

Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\vec{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

B. $\vec{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

C. $\vec{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\vec{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SC} = \vec{c}$ và $\vec{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

B. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

D. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$.

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

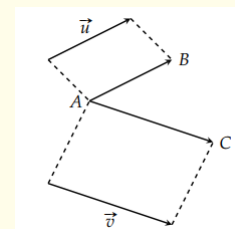
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ trong không gian. Từ một điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$, ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Ta có $(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC}$.

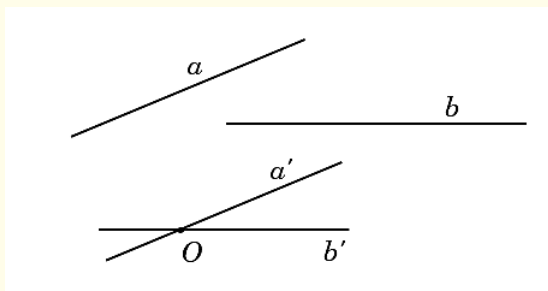


Vectơ chỉ phương của đường thẳng.

- ① Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song hoặc trùng với đường thẳng d .
- ② Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k \cdot \vec{a}$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .
- ③ Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương.

2 GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm bất kì và lần lượt song song với a và b . Ta có: $(a, b) = (a', b') = \varphi$.



Tìm hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt của hai đường thẳng a, b .

Khi đó góc giữa hai đường thẳng xác định bởi $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.

Chú ý:

- ① Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a , $\vec{v}$ là VTCP của b , $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$.

$$\text{Khi đó: } (\widehat{a, b}) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha & \text{nếu } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \end{cases}$$

- ② Nếu $a \parallel b$ hoặc a trùng b thì $(\widehat{a, b}) = 0^\circ$.
- ③ $0^\circ \leq (\widehat{a, b}) \leq 90^\circ$.

3 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Kí hiệu: $a \perp b$ hay $b \perp a$.

Nhận xét.

- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a \Rightarrow c \perp b$.

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định góc giữa hai vec-tơ

Ta xác định một điểm cho trước trên hình làm điểm gốc và dời các vec-tơ cần tính góc về điểm gốc đó.

 **Ví dụ 1.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB . Hãy tính góc giữa các cặp vec-tơ sau đây:

① $\vec{AB}$ và $\vec{BD}$.

② $\vec{DH}$ và $\vec{AD}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Ta thường có hai phương pháp để giải quyết cho dạng toán này.

- ① Sử dụng định nghĩa góc giữa hai đường thẳng, kết hợp sử dụng hệ thức lượng trong tam giác (định lý cos, công thức trung tuyến).
- ② Sử dụng tích vô hướng của hai vec-tơ.

 **Ví dụ 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

① AB và $A'D'$.

② AD và $A'C'$.

③ BC' và $B'D'$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 **Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

- a) Tính độ dài MN theo a .
b) Tính góc giữa MN với AB, CD và BC .

🔥 **Câu 2.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau:

- a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$
b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$
c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

🔥 **Câu 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD . Hãy tính góc giữa AB và CD , biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{2}$.

🔥 **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

🔥 **Câu 5.** Cho tứ diện $ABCD$, biết $AB = AC$ và $DB = DC$.

- a) Chứng minh rằng AD vuông góc với BC .
b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và BD sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC .

TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Trong không gian, khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** với mọi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$?

- A. $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 60^\circ$. B. $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 90^\circ$. C. $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 120^\circ$. D. $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

🔥 **Câu 2.** Trong không gian, khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** với mọi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$?

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$.
C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \tan(\vec{u}, \vec{v})$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

🔥 **Câu 3.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm số đo của góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = 30^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = 45^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = 60^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = 90^\circ$.

🔥 **Câu 4.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ theo a .

- A. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$. B. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \frac{a^2}{2}$. C. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = a^2$.

🔥 **Câu 5.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$.

A. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$.

B. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 1$.

🔥 **Câu 6.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Lấy điểm S bất kỳ sao cho $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}$. Tính độ dài $\overrightarrow{OS}$ theo a .

A. $|\overrightarrow{OS}| = a$.

B. $|\overrightarrow{OS}| = 2a$.

C. $|\overrightarrow{OS}| = 3a$.

D. $|\overrightarrow{OS}| = 4a$.

🔥 **Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi M là trung điểm của BC . Tính $P = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MC}$.

A. $P = -1$.

B. $P = 0$.

C. $P = 1$.

D. $P = 2$.

🔥 **Câu 8.** Trong không gian, cho hai đường thẳng d, d' bất kỳ lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Với mọi số thực k khác 0, véc-tơ $k\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .

B. Nếu hai đường thẳng d và d' song song thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

C. Nếu hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương thì hai đường thẳng d và d' song song.

D. Đường thẳng d hoàn toàn xác định nếu biết điểm A thuộc d và $\vec{u}$.

❖ **Câu 9.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Trong không gian, nếu các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì các đường thẳng đó cùng thuộc một mặt phẳng.
- B. Trong không gian, nếu các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì các đường thẳng đó vuông góc với nhau.
- C. Trong không gian, nếu các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì các đường thẳng đó song song với nhau.
- D. Trong không gian, nếu các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì các đường thẳng đó cùng song song với một mặt phẳng.

❖ **Câu 10.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Trong không gian, nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì hai đường thẳng đó song song với nhau.
- B. Trong không gian, nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.
- C. Trong không gian, nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng đó song song với đường thẳng còn lại.
- D. Trong không gian, nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì đường thẳng đó vuông góc với đường thẳng còn lại.

❖ **Câu 11.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Trong không gian, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì hai đường thẳng đó song song với nhau.
- C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , đường thẳng a' song song với đường thẳng a và đường thẳng b' song song với đường thẳng b thì các đường thẳng a' và b' vuông góc với nhau.
- D. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c .

🔥 **Câu 12.** Cho hình tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, BC, CD đôi một vuông góc. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BD ?

- A. BA . B. BC . C. AD . D. AC .

🔥 **Câu 13.** Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm A không nằm trên Δ . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua A và song song với Δ .
 B. Có duy nhất một đường thẳng đi qua A và vuông góc với Δ .
 C. Có duy nhất một đường thẳng đi qua A , cắt Δ và vuông góc với Δ .
 D. Có vô số đường thẳng đi qua A và vuông góc với Δ .

🔥 **Câu 14.** Trong không gian cho 3 điểm phân biệt A, B, C và I là trung điểm BC . Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

- A. $AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B. $AB \perp AC \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.
 C. $AB \perp AC \Leftrightarrow AI = \frac{1}{2}BC$. D. $AB \perp AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông.

🔥 **Câu 15.** Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Góc giữa hai đường thẳng là một góc nhọn.
 B. Góc giữa hai đường thẳng là góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.
 C. Nếu góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b và c song song với nhau.

D. Nếu hai đường thẳng b và c song song với nhau thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c .

🔥 **Câu 16.** Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O và hợp với nhau một góc α . Gọi A và B lần lượt là hai điểm nằm trên a và b (không trùng với O). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\alpha = \widehat{AOB}$.

B. $\cos \alpha = \cos \widehat{AOB}$.

C. $\cos \alpha = |\cos \widehat{AOB}|$.

D. $\cos \widehat{AOB} = |\cos \alpha|$.

🔥 **Câu 17.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$ bằng góc giữa hai đường thẳng

A. AC và $A'D'$.

B. AC và BC .

C. $A'C'$ và DC .

D. $A'C'$ và $D'D$.

🔥 **Câu 18.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Góc giữa hai đường thẳng AD và MN bằng góc giữa hai đường thẳng

A. AD và BC .

B. AD và DC .

C. BD và MN .

D. CD và MN .

🔥 **Câu 19.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa hai đường thẳng AB và DH bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

🔥 **Câu 20.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa hai đường thẳng AD và EG bằng
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

🔥 **Câu 21.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng hai tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ có tất cả các góc đều là góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng
A. $\widehat{AB'C}$. **B.** $\widehat{C'DA'}$. **C.** $\widehat{DA'C'}$. **D.** $\widehat{B'AC}$.

🔥 **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SC và AB . Tìm số đo của φ .
A. $\varphi = 45^\circ$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\varphi = 120^\circ$.

🔥 **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD và SD . Góc giữa hai đường thẳng MN và SC bằng
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

🔥 **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA và SC . Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

🔥 **Câu 25.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng 90° .
 B. Góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AA' bằng 60° .
 C. Góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng 90° .
 D. Góc giữa hai đường thẳng AD và $B'C$ bằng 45° .

🔥 **Câu 26.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và DD' là

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 120° .

🔥 **Câu 27.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD . Số đo góc giữa hai đường thẳng IJ và CD là

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 120° .

🔥 Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.** $A'C' \perp BD$. **B.** $BB' \perp BD$. **C.** $BA' \perp C'D$. **D.** $BC' \perp A'D$.

🔥 Câu 29. Cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB , nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CC' là

- A.** 45° . **B.** 90° . **C.** 30° . **D.** 120° .

🔥 Câu 30. Cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB , nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, BC, C'B, C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A.** Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

🔥 Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SC . Số đo góc giữa hai đường thẳng MN và CD là

- A.** 45° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 90° .

🔥 Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A.** $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{A'C}$. **B.** $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'}$. **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'D'}$. **D.** $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'}$.

🔥 **Câu 33.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'}$ theo a .

- A. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = a^2$. B. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = \frac{a^2}{2}$. C. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = 2a^2$.

🔥 **Câu 34.** Cho tứ diện $ABCD$. Tính $P = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $P = -1$. B. $P = 0$. C. $P = 1$. D. $P = 2$.

🔥 **Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, AC đôi một vuông góc và $SA = AB = AC = a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SC})$.

- A. $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SC}) = -1$. B. $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SC}) = -\frac{1}{2}$.
C. $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SC}) = 1$.

🔥 **Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = a$ và $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$. Tìm số đo của góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

- A. $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = 135^\circ$. B. $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$. C. $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = 45^\circ$. D. $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = 150^\circ$.

🔥 Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Tính $\cos(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AB})$.

- A. $\cos(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AB}) = -1$. B. $\cos(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}$. C. $\cos(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

🔥 Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Tìm số đo của góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

- A. $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$. B. $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 30^\circ$. C. $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$. D. $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

🔥 Câu 39. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$. Tìm số đo của góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

- A. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) = 30^\circ$. B. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$. D. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

🔥 Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BD . Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với đường thẳng AB ?

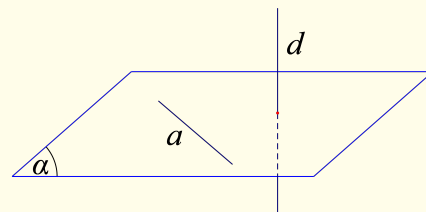
- A. CA . B. CD . C. CI . D. CJ .

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

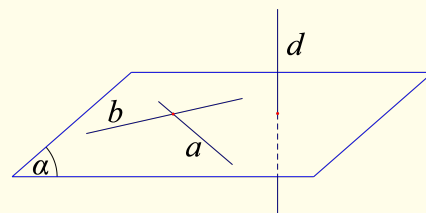
Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α) .
Ký hiệu: $d \perp (\alpha)$ hay $(\alpha) \perp d$.
Vậy $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$.



2 ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG.

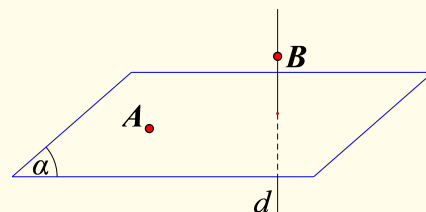
Định lý: Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) .

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



3 TÍNH CHẤT.

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



4 SỰ LIÊN QUAN GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC.

$$\textcircled{1} \begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a \neq b \\ a \perp (\alpha) \Rightarrow a \parallel b \\ b \perp (\alpha) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp a \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\beta) \perp a \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$$

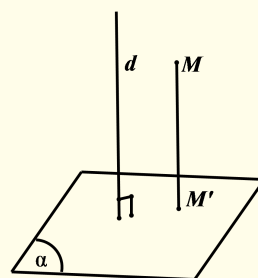
$$\textcircled{6} \begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \Rightarrow a \parallel (\alpha) \\ (\alpha) \perp b \end{cases}$$

5 PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC.

Phép chiếu vuông góc:

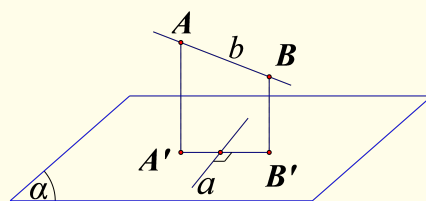
Cho đường thẳng $d \perp (\alpha)$.

Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α) .



Định lý ba đường vuông góc:

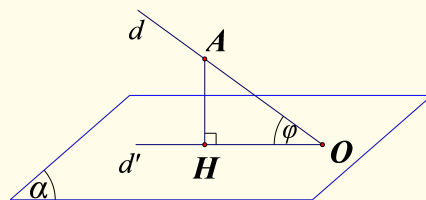
Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu của b trên (α) . Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

- Nếu d vuông góc với và mặt phẳng (α) thì ta nói góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90° .
- Nếu d không vuông góc với và mặt phẳng (α) thì góc giữa d với hình chiếu d' của nó trên (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .



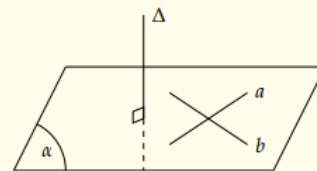
6 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) , ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

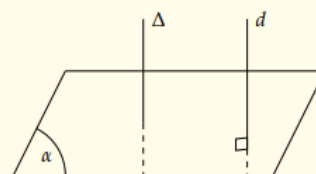
①

Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc (α) .



②

Chứng minh Δ song song với đường thẳng (d) , trong đó (d) vuông góc với (α) .



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.

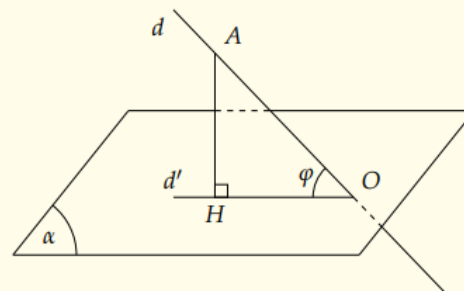
— Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.

—

Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P) , ta thường làm như sau

① Xác định giao điểm O của d và (P) .

② Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P) . Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \angle AOH$.



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

- ① SC và $(ABCD)$. ② SC và (SAB) . ③ SB và (SAC) . ④ AC và (SBC) .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

-  **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại $B, SA \perp (ABC)$.
- a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$
 - b) Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
 - c) Kẻ đường cao AK trong tam giác SAC . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
 - d) Đường thẳng HK cắt BC tại I . Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

.....

.....

.....

.....

-  **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.
- a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAD)$.
 - b) Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
 - c) Kẻ đường cao AK trong tam giác SAD . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
 - d) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AM \perp BD$ tại M . Chứng minh $BD \perp (SAM)$.

.....

.....

.....

.....

-  **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi và có $SA = SC$ và $SB = SD$.
- a) $SO \perp (ABCD)$
 - b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.

.....

.....

🔥 Câu 4. Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:

- $SO \perp (\alpha)$.
- Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ $SH \perp AB$ tại H thì $AB \perp (SOH)$.

🔥 Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt (ABC) và (BCD) là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC . Gọi I là trung điểm của BC .

- Chứng minh rằng $BC \perp (ADI)$.
- Gọi AH là đường cao của ΔADI , chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

🔥 Câu 6. Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (ABC) .

- Chứng minh rằng $BC \perp (OAH)$, $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.
- Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔABC .
- Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

🔥 Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$.

- Tính góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính góc giữa SC với mặt phẳng (SBA) .

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và có cạnh bằng a , SO vuông góc với đáy và $SO = a\sqrt{3}$.

- Tính góc giữa SA với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính góc giữa SO với mặt phẳng (SBC) .

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- Chứng minh $AD \perp SB$.
- Chứng minh $SI \perp (ABCD)$.
- Tính góc tạo bởi SD và mặt phẳng $(ABCD)$, biết $AD = 2a$, $SA = AB = a$.

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A xuống SB , SC , SD . Chứng minh rằng :

- $BD \perp (SAC)$; $\triangle SBC, \triangle SDC$ là những tam giác vuông.
- Tính góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$.
- $SC \perp (AHK)$, $I \in (AHK)$.

🕒 TRẮC NGHIỆM

❖ **Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và hình chiếu của (a) trên (P) .

- B.** Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song.
- C.** Nếu góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .
- D.** Nếu góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b .

🔥 Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Số mặt bên của hình chóp chứa tam giác vuông là:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

🔥 Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $BC \perp (SBA)$. **B.** $AC \perp (SBC)$. **C.** $AB \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SAC)$.

🔥 Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AD = CD = a$, $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm của AB . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A.** $CE \perp (SAB)$. **B.** $CB \perp (SAB)$.
C. $\triangle SDC$ vuông tại C . **D.** $CE \perp (SDC)$.

🔥 **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và (SAD) là góc nào trong các phương án dưới đây?

A. $\widehat{BSA}$.B. $\widehat{SBA}$.C. $\widehat{BSD}$.D. $\widehat{SBD}$.

🔥 **Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.B. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.C. Góc giữa CD và (ABC) là góc $\widehat{DBC}$.D. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

🔥 **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và (SBD) là

A. $\widehat{SAB}$.B. $\widehat{ASB}$.C. $\widehat{ASO}$.D. $\widehat{ASD}$.

🔥 **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) là

A. 60° .B. 75° .C. 45° .D. 30° .

🔥 **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và (SAB) là

A. $\widehat{CSA}$.B. $\widehat{CSB}$.C. $\widehat{SCA}$.D. $\widehat{SCB}$.

🔥 Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
 B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 C. H là trọng tâm tam giác ABC .
 D. H là trực tâm tam giác ABC .

🔥 Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều, các cạnh bên có độ dài bằng a và tạo với đáy một góc 60° . Tính chu vi đáy P của hình chóp đó.

- A. $P = 3a$. B. $P = \frac{3a}{2}$. C. $P = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. D. $P = 3a\sqrt{3}$.

🔥 Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $AC \perp (SAB)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $AB \perp (SBC)$. D. $AC \perp (SBC)$.

🔥 Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có hai tam giác ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $CM \perp (ABD)$. B. $AB \perp (MCD)$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $DM \perp (ABC)$.

🔥 **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $BC \perp (SAB)$. **B.** $CD \perp (SAD)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $BD \perp (SAC)$.

🔥 **Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $AB \perp (SBC)$. **B.** $BC \perp (SAM)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $AC \perp (SBC)$.

🔥 **Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $SA \perp (ABCD)$. **B.** $AC \perp (SBC)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AC \perp (SCD)$.

🔥 **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $BC \perp SB$. **B.** $CD \perp SD$. **C.** $BD \perp SC$. **D.** $SA \perp AB$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD$ và đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAB)$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $CD \perp (SAD)$. D. $SA \perp (ABCD)$.

Câu 19. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d không nằm trong (P) . Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d lên (P) . Đường thẳng a nằm trong (P) và $a \perp d$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

- A. $a \parallel d'$. B. $a \perp d'$.
C. Hai đường thẳng a và d đồng phẳng. D. Hai đường thẳng a và d' trùng nhau.

Câu 20. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.
D. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song với nhau thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

Câu 21. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song với nhau thì chéo nhau.

❖ **Câu 22.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (α) .
- B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (α) thì a song song hoặc thuộc mặt phẳng (α) .
- C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (α) thì a vuông góc với b .
- D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

❖ **Câu 23.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- D. Mặt phẳng (α) và đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng d thì (α) song song với a .

❖ **Câu 24.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 25. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 26. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
- C. Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b mà b vuông góc với đường thẳng a thì a song song với (α) .
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

Câu 27. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.
- D. Cho hai đường thẳng song song với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 28. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) , trong đó $a \perp (\alpha)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu $b \perp (\alpha)$ thì $a \parallel b$.
- B. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \perp a$.
- C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (\alpha)$.
- D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (\alpha)$.

🔥 **Câu 29.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
 B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
 C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
 D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

🔥 **Câu 30.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
 B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $a \parallel b$ thì $b \parallel (\alpha)$.
 C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
 D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \perp a$.

🔥 **Câu 31.** Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
 B. Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
 C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và song song với một đường thẳng cho trước.
 D. Có duy nhất một mặt phẳng chứa một đường thẳng cho trước và vuông góc với một đường thẳng khác cũng cho trước.

🔥 **Câu 32.** Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. Nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) .
- B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) .
- C. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) .
- D. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) .

🔥 **Câu 33.** Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- B. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- C. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và song song với một mặt phẳng cho trước.
- D. Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

🔥 **Câu 34.** Trong không gian, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Điều kiện nào sau đây **không** đủ để suy ra rằng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ?

- A. d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .
- B. d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .
- C. d vuông góc với vô số đường thẳng nằm trong (P) .
- D. d vuông góc với các cạnh của một tam giác có 3 đỉnh đều thuộc (P) .

🔥 **Câu 35.** Trong không gian, cho các đường thẳng d, d_1, d_2 , trong đó, hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Nếu d vuông góc với một trong hai đường thẳng d_1, d_2 thì d vuông góc với (P) .
 B. Nếu d vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 thì d vuông góc với (P) .
 C. Nếu d vuông góc với (P) thì d vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 .
 D. Nếu d vuông góc với (P) thì d vuông góc với ít nhất một trong hai đường thẳng d_1, d_2 .

🔥 **Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi trong các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

🔥 **Câu 37.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. (SAB) . B. (SAD) . C. (SAC) . D. (SCD) .

🔥 **Câu 38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A. (SAB) . B. (SAC) . C. (SAD) . D. (SCD) .

🔥 **Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Hỏi đường thẳng SC

vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (AHK) .

B. (AHD) .

C. (AKB) .

D. (SBD) .

🔥 Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC bằng nhau. Hỏi trong các mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng AB, BC, CA , có bao nhiêu mặt phẳng chứa điểm S ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

🔥 Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Khi đó, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là

A. giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác ABC .

B. giao điểm của các đường phân giác trong của tam giác ABC .

C. giao điểm của các đường trung trực của tam giác ABC .

D. giao điểm của các đường cao của tam giác ABC .

🔥 Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $SO \perp (ABCD)$.

B. $SA \perp (ABCD)$.

C. $SC \perp (ABCD)$.

D. $SB \perp (ABCD)$.

🔥 Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi trong các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

🔥 **Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và $(ABCD)$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 45.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và $(A_1B_1C_1D_1)$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\tan \alpha = 1$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

🔥 **Câu 46.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông với cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC . Biết $SB = a$. Số đo của góc giữa SA và (ABC) là

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 75° .

🔥 **Câu 47.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và (SAD) . Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

🔥 **Câu 48.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Góc giữa BD và (SAC) là 90° .
 B. Góc giữa BD và (SAB) là $\widehat{DBA}$.
 C. Góc giữa BD và (IJK) là 60° .
 D. Góc giữa BD và (SAD) là $\widehat{BDA}$.

🔥 **Câu 49.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác (ABC) không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC . Số đo góc giữa HK và (SBC) là

- A. 60° .
 B. 90° .
 C. 45° .
 D. 120° .

🔥 **Câu 50.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và $(ABCD)$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = 1$.
 B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 C. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
 D. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Góc giữa 2 mặt phẳng là góc giữa 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng đó.

Nhận xét: Nếu 2 mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói rằng góc giữa 2 mặt phẳng đó bằng 0° .

Cách xác định góc giữa 2 mặt phẳng cắt nhau:

Cho $(P) \cap (Q) = c$, lấy I bất kì thuộc c .

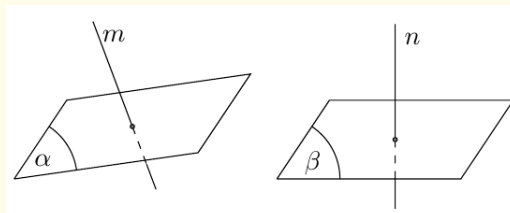
Trong (P) qua I kẻ $a \perp c$. Trong (Q) qua I kẻ $b \perp c$.

Khi đó góc $[(P), (Q)] = (a, b)$.

Diện tích hình chiếu của đa giác: $S' = S \cdot \cos \phi$.

Với S là diện tích đa giác nằm trong (P) .

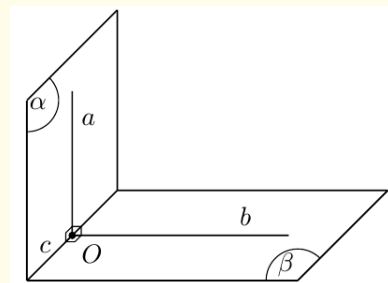
S' là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên (Q) , $\phi = [(P), (Q)]$.



2 HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC.

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc của chúng bằng 90° .

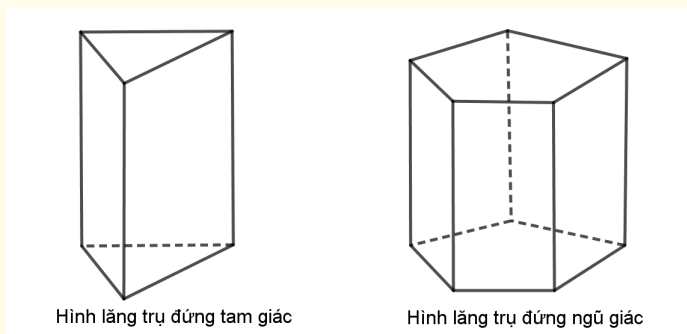
Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau, kí hiệu : $(P) \perp (Q)$ hay $(Q) \perp (P)$.



Tính chất :

- Điều kiện cần và đủ để 2 mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa 1 đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Tóm tắt : $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \exists a \subset (P) : a \perp (Q)$.
- Nếu 2 mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.
Tóm tắt : $(P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c, a \subset (P), a \perp c \Rightarrow a \perp (Q)$
- Nếu 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) .
Tóm tắt : $(P) \perp (Q), A \in (P), A, a \perp (Q) \Rightarrow a \subset (P)$
- Nếu 2 mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với 1 mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.
Tóm tắt : $(P) \cap (Q), (P) \perp (R), (Q) \perp (R) \Rightarrow a \perp (R)$
- Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất 1 mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .
Tóm tắt : $a \perp (P) \Rightarrow \exists! (Q) \supset a, (Q) \perp (P)$

3 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG:



① Hình lăng trụ đứng:

* Định nghĩa: Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.

* Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

② Hình lăng trụ đều:

* Định nghĩa: Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

* Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

③ Hình hộp đứng:

* Định nghĩa: Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

* Nhận xét: Trong hình hộp đứng 4 mặt bên đều là hình chữ nhật.

④ Hình hộp chữ nhật:

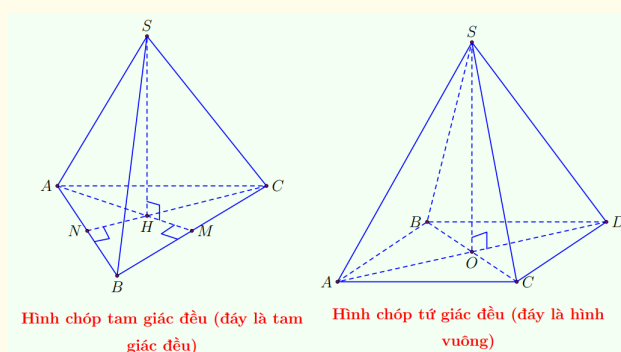
* Định nghĩa: Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

* Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

⑤ Hình lập phương:

* Định nghĩa: Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

4 HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU



① Hình chóp đều:

* Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

* Nhận xét:

— Đường vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh gọi là đường cao của hình chóp.

— Một hình chóp là hình chóp đều $\Leftrightarrow$ đáy của nó là đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đáy.

— Một hình chóp là hình chóp đều $\Leftrightarrow$ đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

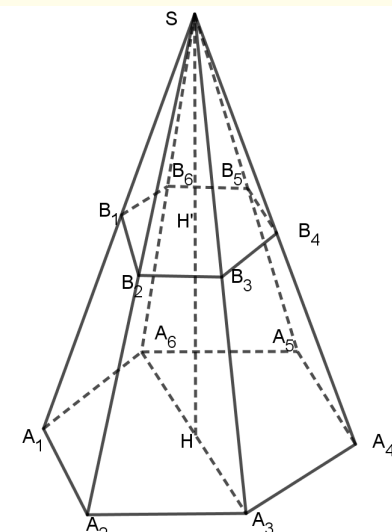
②

Hình chóp cắt:

* **Định nghĩa:** Khi cắt hình chóp đều bởi 1 mặt phẳng song song với đáy để được 1 hình chóp cắt thì hình chóp cắt đó được gọi là hình chóp cắt đều.

* **Nhận xét:**

- Hai đáy của hình chóp cắt đều là 2 đa giác đều đồng dạng với nhau.
- Đoạn nối tâm 2 đáy được gọi là đường cao của hình chóp cắt đều.
- Trong hình chóp cắt đều các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau.



$A_1A_2A_3A_4A_5A_6, B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ là hình chóp cắt đều

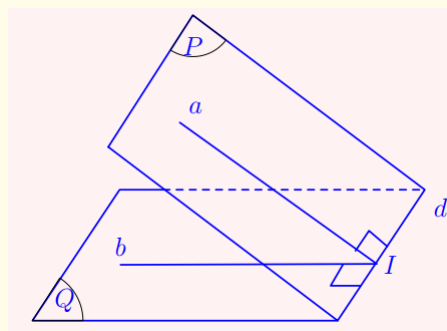
5 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm góc giữa hai mặt phẳng

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \Rightarrow \widehat{[(P), (Q)]} = \widehat{(a, b)}. \\ b \subset (Q), b \perp d \end{cases}$$

Lưu ý:

- ✓ Nếu $(P) \perp (Q)$ thì kết luận ngay $\widehat{[(P), (Q)]} = 90^\circ$.
- ✓ Khi giải bài tập, không phải lúc nào a, b cũng có sẵn trong hình hoặc a, b khó xác định. Khi đó, ta có một phương pháp để tìm a, b như sau:
 B1: Xác định $d = (P) \cap (Q)$;
 B2: Tìm mặt phẳng (R) vuông góc với d ;
 B3: Xác định: $a = (R) \cap (P), b = (R) \cap (Q)$.
 B4: (a, b) chính là hai đường thẳng cần tìm).



Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

Lời giải:

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa các mặt phẳng sau.

- ① $((SBC), (ABCD))$. ② $((SBD), (ABCD))$. ③ $((SAB), (SCD))$.

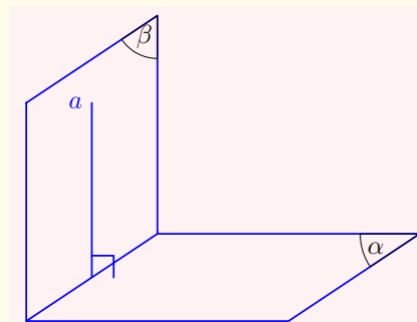
Lời giải:

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

✓ **Cách 1:** Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

✓ **Cách 2:** Chứng minh trực tiếp góc giữa hai mặt phẳng bằng 90° .



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh

- ① $(SAB) \perp (SBC)$. ② $(SAD) \perp (SCD)$. ③ $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải:

Ví dụ 2. Cho tứ diện $S.ABC$ có ΔABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. AH , AK lần lượt là các đường cao của ΔSAB và ΔSAC . Chứng minh

- ① $(SBC) \perp (SAB)$. ② $(AHK) \perp (SBC)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ với $\triangle ABC$ vuông cân tại B và $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$.

- ① Tính góc giữa (SBC) và (ABC)
- ② Tính góc giữa (SAC) và (SBC)

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| ① (SAB) và (SCD) | ③ (SBD) và (ABD) | ⑤ (SAB) và (SBD) |
| ② (SBC) và (ABC) | ④ (SBC) và (SCD) | |

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính góc giữa các mặt phẳng sau

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| ① (SAB) và $(ABCD)$. | ④ (SAD) và $(ABCD)$. | ⑦ (SBC) và (SCD) . |
| ② (SBC) và $(ABCD)$. | ⑤ (SAB) và (SAD) . | ⑧ (SAD) và (SCD) . |
| ③ (SCD) và $(ABCD)$. | ⑥ (SBC) và (SAB) . | |

.....

🔥 **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $AB = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$, $OH \perp SC$

- ① Tính góc giữa (SBC) và (SAC) .
- ② Tính góc giữa (SBC) và (SCD) .

🔥 **Câu 5.** Cho tứ diện $SABC$, $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $AB = a$. Hình chiếu của S trên (ABC) trùng với trung điểm H của BC và $SH = \frac{a}{2}$. Tính góc giữa (SAB) và (SBC) .

🔥 **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O . Các tam giác SAC và SBD cân tại S .

- ① $SO \perp (ABCD)$.
- ② $(SBD) \perp (ABCD)$.
- ③ $(SAC) \perp (SBD)$.

🔥 **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$, M là trung điểm của AC . Chứng minh

- ① $(SBC) \perp (SAB)$.
- ② $(SBM) \perp (SAC)$.

🔥 Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm AB .

- | | |
|--|--------------------------------------|
| ① Chứng minh $SI \perp (ABCD)$. | ④ Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$. |
| ② Chứng minh $\triangle SAD$ và $\triangle SBC$ vuông. | ⑤ Tính góc giữa (SAD) và (SBC) . |
| ③ Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$. | |

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
 B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
 C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 D. Nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

🔥 Câu 2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

- A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không nằm trong (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a .
 B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
 C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.
 D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- B. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- C. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng tùy ý nằm trong mỗi mặt phẳng.
- D. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

Câu 5. Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.
- B. Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.
- C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$.
- D. Nếu $c \parallel m$ thì $c \parallel (\alpha)$ hoặc $c \parallel (\beta)$.

Câu 6. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và điểm M . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng qua M và vuông góc với (P) .
- B. Có vô số mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q) .
- C. Có duy nhất một mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q) .
- D. Không có mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q) .

🔥 **Câu 7.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d . Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d .
- B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R) .
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

🔥 **Câu 8.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.
- C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
- D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

🔥 **Câu 9.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

☞ **Câu 10.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- A. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.
- B. Cho đường thẳng $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.
- C. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b , luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.
- D. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

☞ **Câu 11.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.
- D. Một mặt phẳng (P) và một đường thẳng a không nằm trong (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì $a \parallel (P)$.

☞ **Câu 12.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song nhau.
- D. Đường thẳng a và mặt phẳng (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì a song song với b .

🔥 **Câu 13.** Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β) , biết rằng có các đường thẳng thỏa mãn $d_1 \perp (\alpha)$, $d_2 \perp (\beta)$, $d_3 \parallel (\alpha)$, $d_4 \parallel (\beta)$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_3 và d_4 . B. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_1 và d_2 .
C. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_1 và d_4 . D. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_2 và d_4 .

🔥 **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng góc nào dưới đây?

- A. $\widehat{CSA}$. B. $\widehat{SBA}$. C. $\widehat{SCA}$. D. $\widehat{ASB}$.

🔥 **Câu 15.** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, cạnh bên $SA = 2a$ vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

- A. 45° . B. $49^\circ 6'$. C. $40^\circ 53'$. D. $62^\circ 14'$.

🔥 **Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Biết rằng cạnh bên $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

🔥 **Câu 17.** Cho tam giác ABC không nằm trong mặt phẳng (P) , giả sử góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) là φ , $\varphi \neq 90^\circ$. Gọi A' , B' , C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của ba

điểm A, B, C lên mặt phẳng (P) . Khi đó, hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $S_{ABC} = S_{A'B'C'} \cdot \cos \varphi$.

B. $S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$.

C. $S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \sin \varphi$.

D. $S_{ABC} = S_{A'B'C'} \cdot \sin \varphi$.

🔥 Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_{ABC} = S_{SBC} \cdot \cos \varphi$.

B. $S_{ABC} = S_{SBC} \cdot \sin \varphi$.

C. $S_{ABC} = S_{SAB} \cdot \cos \varphi$.

D. $S_{ABC} = S_{SAC} \cdot \cos \varphi$.

🔥 Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh AB, CD . Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng nào?

A. SA và SD .

B. SB và SC .

C. SB và SD .

D. SI và SJ .

🔥 Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. 30° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

🔥 Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

A. 30° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

🔥 **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD) .

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

🔥 **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh SC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng nào sau đây?

- A. SB và SD . B. BH và CH . C. CH và DH . D. BH và DH .

🔥 **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính tang của góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy của chóp.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

🔥 **Câu 25.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng $(DA'C')$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Trong các mặt phẳng chứa các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Trong số các mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (SAB) ?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của AD . Trong các điểm sau, điểm nào là chân đường cao của hình chóp?

- A. A . B. B . C. I . D. O .

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Hãy xác định đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ trong những đường sau đây?

- A. SA . B. SB . C. SO . D. SC .

🔥 **Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD . Các mặt phẳng (SCI) và (SDI) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. AD vuông góc với (SAB) .

B. BC vuông góc với (SAB) .

C. CD vuông góc với (SAB) .

D. IJ vuông góc với (SAB) .

🔥 **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . $SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính SO .

A. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $SO = a\sqrt{2}$.

D. $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

🔥 **Câu 32.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, CC' = c$. Độ dài đường chéo AC' là

A. $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

B. $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

C. $AC' = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

D. $AC' = \sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

🔥 **Câu 33.** Độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $2a\sqrt{2}$.

B. $2a\sqrt{3}$.

C. $2a\sqrt{5}$.

D. $4a$.

🔥 Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $(SBC) \perp (SAB)$. **B.** $(BIH) \perp (SBC)$. **C.** $(SAC) \perp (SAB)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

🔥 Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $(SAC) \perp (SAB)$. **B.** $(BIH) \perp (SBC)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

🔥 Câu 36. Cho các mệnh đề sau:

- (1) Hình hộp là hình lăng trụ đứng.
- (2) Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
- (3) Hình lăng trụ là hình hộp.
- (4) Hình lăng trụ đứng là hình hộp chữ nhật.

Số mệnh đề **sai** là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

🔥 Câu 37. Các mặt bên của hình chóp cắt đều là hình gì?

- A.** Hình thang cân. **B.** Hình tam giác cân.
C. Hình vuông. **D.** Hình tam giác đều.

🔥 **Câu 38.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a . Gọi M là trung điểm SA . Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 75° .

🔥 **Câu 39.** Tính độ dài d của đường chéo của hình hộp chữ nhật khi biết độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là a, b, c .

A. $d = \sqrt{a+b+c}$.

B. $d = a+b+c$.

C. $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

D. $d = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

🔥 **Câu 40.** Tính chiều cao h của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

A. $h = a\sqrt{2}$.

B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $h = \frac{1}{2}a$.

D. $h = 2a$.

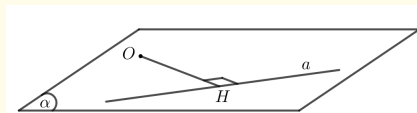
BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là OH , với H là hình chiếu của O trên đường thẳng a .

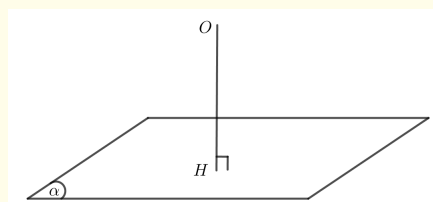
Kí hiệu: $d(O, a) = OH$.



2 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là OH , với H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α) .

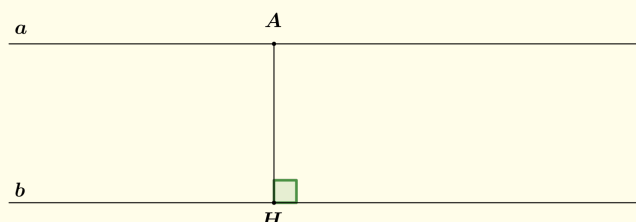
Kí hiệu: $d(O, (\alpha)) = MH$.



3 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường này đến đường kia.

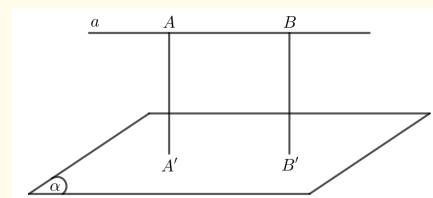
Kí hiệu: $d(a, b) = d(A, b) = AH$ ($A \in a$)



4 KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc đường a đến mặt phẳng (α) .

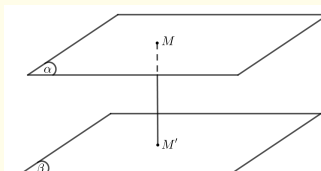
Kí hiệu: $d(a, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) = AA'$ ($A \in a$).



5 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

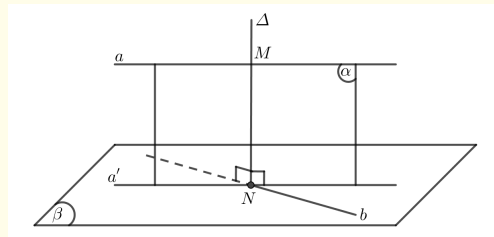
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Kí hiệu: $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = MM'$.



6 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

- Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy gọi là đường vuông góc chung của a và b .
 MN gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.



Nhận xét:

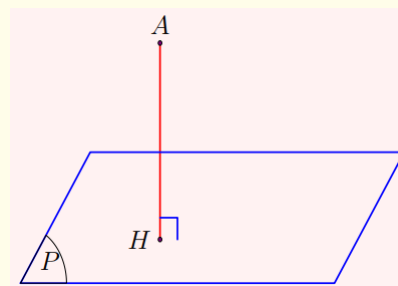
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

7 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

☑ Cách 1: Trực tiếp.

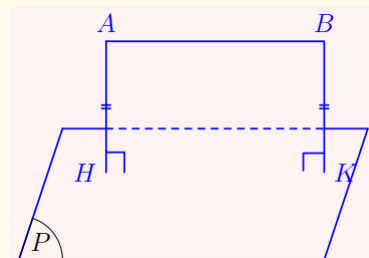
Ta tìm hình chiếu của A trên (P) , nghĩa là tìm H sao cho $AH \perp (P)$. Khi đó $d(A, (P)) = AH$.



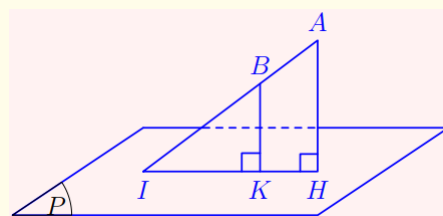
☑ Cách 2: Gián tiếp.



Nếu $AB \parallel (P)$ thì $d(A, (P)) = d(B, (P))$.



Nếu AB cắt (P) tại I thì $\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{IA}{IB}$



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, $SA = a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| ① Tính $d(S, (ABC))$. | ③ Tính $d(B, (SAC))$. |
| ② Tính $d(C, (SAB))$. | ④ Tính $d(A, (SBC))$. |

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

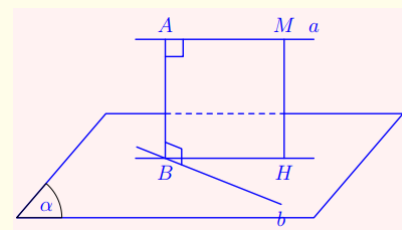
.....

Dạng 2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

☑ **Cách 1:** Tìm đường vuông góc chung.

☑ **Cách 2:**

- ☑ *Dựng mặt phẳng (α) qua b và song song với a .*
- ☑ *Khi đó $d(a, b) = d(a, (\alpha))$*



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa

- | | |
|------------------|------------------|
| ① SC và BD . | ② AC và SD . |
|------------------|------------------|

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

.....

.....

.....

.....

 **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

.....

.....

.....

.....

 **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) .

.....

.....

.....

.....

 **Câu 4.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD) .

🔥 Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

🔥 Câu 7. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

- OA và BC
- AI và OC

🔥 Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , có cạnh $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

- SB và CD
- SC và BD
- SC và AB

🔥 **Câu 9.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- a) AA' và CB'
- b) AA' và DB'
- c) AC và $B'D'$
- d) BC' và CD'

🔥 **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$. Đường cao SO của hình chóp vuông góc với mặt đáy ($ABCD$) và có $SO = a$. Tính khoảng cách giữa:

- a) AC và SD
- b) SC và AB

🔥 **Câu 11.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa:

- a) AA' và mặt phẳng song song (BB', DD')
- b) Hai mặt phẳng song song ($A'BD$) và ($CB'D'$)

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a, AC = b, AD = c$. Gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A.** $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. **B.** $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. **C.** $d^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. **D.** $d = abc$.

🔥 Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi d là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng chứa cạnh BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $d = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$. B. $d = \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC}$. C. $d = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. D. $d = \frac{AB + AC}{AB \cdot AC}$.

🔥 Câu 3. Cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng (α) . Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ M và N đến (α) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $d_1 = d_2$. B. $d_1 = \frac{1}{2}d_2$. C. $d_1 = 2d_2$. D. $d_1 = d_2 = 0$.

🔥 Câu 4. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên (α) và (β) sao cho đường thẳng MN không vuông góc với (α) . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $d(M, (\beta)) = d(N, (\alpha))$. B. $d(M, (\beta)) = d((\alpha), (\beta))$.
C. $d(N, (\alpha)) = d((\alpha), (\beta))$. D. $d((\alpha), (\beta)) = MN$.

🔥 Câu 5. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau. Lấy hai điểm M, N lần lượt thuộc Δ_1, Δ_2 sao cho MN không vuông góc với Δ_1 . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $d(\Delta_1, \Delta_2) < MN$. B. $d(\Delta_1, \Delta_2) > MN$.
C. $d(\Delta_1, \Delta_2) = MN$. D. $d(M, \Delta_2) = d(N, \Delta_1) = MN$.

🔥 **Câu 6.** Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau, đường thẳng Δ_3 bất kì cắt Δ_1 tại M và cắt Δ_2 tại N . Khẳng định nào dưới đây luôn đúng?

- A. $d(\Delta_1, \Delta_2) \leq MN$. B. $d(\Delta_1, \Delta_2) > MN$. C. $d(M, \Delta_2) = d(N, \Delta_1)$. D. $d(\Delta_1, \Delta_2) = MN$.

🔥 **Câu 7.** Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau, mặt phẳng (β) chứa Δ_2 và song song với Δ_1 , mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(\Delta_1, (\beta))$. B. $d(\Delta_1, (\beta)) = d(\Delta_2, (\alpha))$.
C. $d(\Delta_1, \Delta_2) < d((\alpha), (\beta))$. D. $d((\alpha), (\beta)) \leq MN, \forall M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$.

🔥 **Câu 8.** Cho đường thẳng Δ_1 và mặt phẳng (α) song song với nhau. Mặt phẳng (β) chứa Δ_1 , vuông góc với (α) và cắt (α) theo giao tuyến là Δ_2 . Khi đó khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(\Delta_1, (\alpha))$. B. $d(\Delta_1, \Delta_2) < d(\Delta_1, (\alpha))$.
C. $d(M, \Delta_2) > d(M, (\alpha)), \forall M \in \Delta_1$. D. $d(\Delta_1, (\alpha)) = MN, \forall M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$.

🔥 **Câu 9.** Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) . Gọi d là khoảng cách từ Δ đến (α) . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. d bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến (α) .
B. d bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên (α) đến Δ .
C. d bằng khoảng cách từ mặt phẳng (β) đến (α) với (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α) .
D. d bằng khoảng cách giữa Δ và hình chiếu vuông góc của Δ lên (α) .

Câu 10. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Gọi d là khoảng cách giữa (α) và (β) . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. d bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc (α) đến (β) .
- B. d bằng khoảng cách giữa một đường thẳng bất kì nằm trong (β) đến (α) .
- C. d bằng khoảng cách giữa một đường thẳng Δ bất kì nằm trong (α) đến hình chiếu vuông góc của Δ lên (β) .
- D. d bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng bất kì Δ_1 và Δ_2 lần lượt nằm trong (α) và (β) .

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi d là khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $d = DG$ với G là trọng tâm tam giác ABC .
- B. $d = DH$ với H là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) .
- C. $d = DI$ với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- D. $d = DN$ trong đó N là trung điểm đoạn AM với M là trung điểm đoạn BC .

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = 2, AC = 3, AD = 4$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (BCD) .

- A. $d = \frac{12\sqrt{61}}{61}$.
- B. $d = \frac{144}{61}$.
- C. $d = \frac{\sqrt{61}}{12}$.
- D. $d = \sqrt{61}$.

Câu 13. Khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh của một hình lập phương cạnh a bằng bao nhiêu?

- A. $a\sqrt{3}$.
- B. $a\sqrt{2}$.
- C. $2a$.
- D. $a\sqrt{5}$.

🔥 **Câu 14.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng CC' là

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a}{2}$.

🔥 **Câu 15.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{7}$, $AB = 3a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A. a . B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{20}}{\sqrt{3}}$. D. $a\sqrt{10}$.

🔥 **Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SC = 2a$, đáy là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$. Gọi K là trung điểm của SA . Khoảng cách từ K đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. a . B. $2a$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

🔥 **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SC = 2a$, đáy là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. $2a$. C. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

🔥 Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao SC , đáy là hình chữ nhật. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên cạnh AC và O là giao điểm hai đường chéo AC, BD . Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) là đoạn thẳng

- A. DC . B. DA . C. DH . D. DO .

🔥 Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

🔥 Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi d và h lần lượt là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAD) . Tỷ số $\frac{d}{h}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

🔥 Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $d(A, (CDD'C')) = d(B, (CDD'C'))$.
 B. $d((ABCD), (A'B'C'D')) = d(B, (A'B'C'D'))$.
 C. $d((ABCD), (A'B'C'D')) = d((ABB'A'), (CDC'D'))$.
 D. $d((ABCD), (A'B'C'D')) = d((AC), (A'B'C'D'))$.

🔥 **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

B. $d(C, (SAB)) = d(D, (SAB))$.

C. $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

D. $d(B, (SCD)) = d(BC, (SAD))$.

🔥 **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

A. $d = \frac{a}{2}$.

B. $d = a$.

C. $d = a\sqrt{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

🔥 **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc, tam giác ABC cân và có $AC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. $d = a\sqrt{2}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $d = 2a$.

🔥 **Câu 25.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng độ dài của đoạn thẳng nào dưới đây.

A. AI .

B. IJ .

C. AB .

D. AJ .

🔥 Câu 26. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và SC .

A. $d = \frac{a}{4}$.

B. $d = \frac{a}{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $d = a\sqrt{2}$.

🔥 Câu 27. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB' và CD' .

A. $d = a\sqrt{3}$.

B. $d = a\sqrt{5}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

🔥 Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AD = a$ và SA vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến (SCD) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $2a$.

🔥 Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $a\sqrt{2}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. a .

🔥 Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}.$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}.$

C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$

D. $\frac{2a\sqrt{3}}{7}.$
