

Họ và tên thí sinh:.....
Số báo danh:.....

Mã đề thi
132

Câu 1: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = |1 - 2x| + |2x + 1|$.

B. $y = x^4 + \sqrt{x}$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = x + 2x^3$.

Câu 2: Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$. Khi đó khoảng cách $d(M; \Delta)$ là

A. $d(M; \Delta) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

B. $d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

C. $d(M; \Delta) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

D. $d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Câu 3: Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I(2; 2), R = 5$.

B. $I(1; 1), R = 5$.

C. $I(-2; -2), R = 5$.

D. $I(-1; -1), R = 5$.

Câu 4: Cho hai tập hợp $A = [-2; 5]$ và $B = (0; 6)$. Tìm $A \cap B$.

A. $A \cap B = [0; 5]$.

B. $A \cap B = (0; 5]$.

C. $A \cap B = (0; 5)$.

D. $A \cap B = [-2; 6)$.

Câu 5: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác và S là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây SAI?

A. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

B. $S = bc \sin A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

D. $S = pr$.

Câu 6: Trong mặt phẳng (Oxy) , cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Một vector chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u} = (4; -5)$.

B. $\vec{u} = (5; 4)$.

C. $\vec{u} = (1; 3)$.

D. $\vec{u} = (3; 1)$.

Câu 7: Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là

A. 1.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Câu 8: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 9: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $|x - 2| < 1$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 6.

Câu 10: Bất phương trình $x^2 - 10x + 16 < 0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 2)$.

B. $(8; +\infty)$.

C. $(2; 8)$.

D. $(-2; 8)$.

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, BC = 10$. Tính $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}|$.

- A. 4. B. 16. C. 6. D. 8.

Câu 12: Trong các công thức sau, công thức nào **SAI**?

- A. $\sin 2a = \sin a \cos a$. B. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
C. $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$. D. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

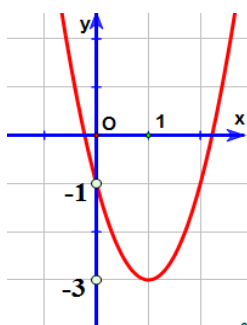
Câu 13: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-4} = 10-x$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\cos x = 2m$ có nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 15: Cho hàm số $y = 2x^2 - 4x - 1$ có đồ thị (P) như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

- A. $\min_{x \in [0; +\infty)} y = -3$. B. Tọa độ đỉnh của (P) là $I(1; -3)$.
C. $\max_{x \in [0; +\infty)} y = -1$. D. $\max_{x \in [0; 1]} y = -1$.

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 3x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 17: Số nghiệm của phương trình $|x+3| + |4-x^2| = 0$ là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 18: Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)^2(2x-3) \geq 0$.

- A. $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right)$. B. $[1; +\infty)$. C. $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right) \cup \{1\}$. D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty \right)$.

Câu 19: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 1)$, $\vec{v} = (2; -1)$. Giá trị của biểu thức $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

- A. 3. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+1}{x} + \sqrt{x-5}$ là

- A. $[5; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $(-\infty; 5] \setminus \{0\}$. D. $[5; +\infty) \cup \{0\}$.

Câu 21: Biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $A(2; -1)$, $B(1; -2)$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a + b$ bằng

- A. 0. B. -3. C. 3. D. -2.

Câu 22: Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Chọn khẳng định đúng.

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Câu 23: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau ít phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = -t^2 + 40t$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

- A. 15 phút. B. 10 phút. C. 20 phút. D. 30 phút.

Câu 24: Cho tam giác ABC cân tại A , biết $AB = a$, $BAC = 120^\circ$. Độ dài cạnh BC bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a$.

Câu 25: Bất phương trình $\frac{2x+1}{x-1} < 1$ có tập nghiệm là

- A. $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$. B. $(-2; 1)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 26: Số nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ là

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Câu 27: Cho hàm số $y = -x^2 - 6x + 3$. Chọn khẳng định SAI.

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

Câu 28: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 3x + 4y + 1 = 0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 15 + 12t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

- A. $\frac{33}{65}$. B. $\frac{60}{13}$. C. $\frac{36}{65}$. D. $\frac{56}{65}$.

Câu 29: Số tập con gồm hai phần tử của tập $X = \{1; 2; 3; 4\}$ là

- A. 12. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 30: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$. Diện tích tam giác ABC là

- A. 56. B. $2\sqrt{14}$. C. 6. D. 36.

Câu 31: Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M thỏa $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$. Tập hợp M là

- A. một đường thẳng. B. một đoạn thẳng. C. một đường tròn. D. nửa đường tròn.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\square$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(x^2 + 2x - 3) \leq f(mx - 13)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \square$?

- A. 13. B. 11. C. 10. D. 12.

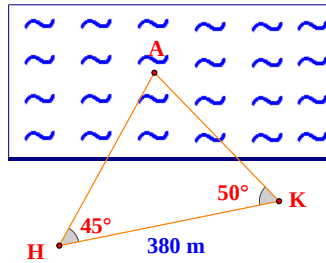
Câu 33: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 25 = 0$ và điểm $M(3; -1)$. Dây cung của (C) đi qua M có độ dài ngắn nhất là

- A. $16\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{17}$. C. $\sqrt{17}$. D. $8\sqrt{2}$.

Câu 34: Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(3; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Ox và điểm N thuộc tia Oy sao cho tam giác AMN vuông tại A và có diện tích bằng $\frac{3}{2}$. Biết điểm M có hoành độ bằng a , điểm N có tung độ bằng b khi đó $a + b$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 35: Trên biển một con thuyền thả neo ở vị trí A . Một người đứng ở vị trí K trên bờ biển muốn đo khoảng cách từ người đó đến con thuyền, người đó đã chọn một điểm H trên bờ với K và đo được $KH = 380\text{m}$, $AKH = 50^\circ$, $AHK = 45^\circ$. Khoảng cách KA từ người đó đến con thuyền bằng



- A. $KA \approx 290\text{m}$. B. $KA \approx 280\text{m}$. C. $KA \approx 270\text{m}$. D. $KA \approx 300\text{m}$.

Câu 36: Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường thẳng AB có phương trình $2x - y - 1 = 0$, đường cao AH có phương trình $x + y - 2 = 0$ (H thuộc cạnh BC). Gọi $P(1; -3)$ là trung điểm BH , Q là trung điểm AH . Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đường thẳng CQ ?

- A. $M\left(0; -\frac{1}{3}\right)$. B. $N\left(\frac{11}{3}; 0\right)$. C. $E(1; 1)$. D. $F\left(2; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 37: Cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và các mệnh đề:

(I) (E) có tiêu điểm $F_1(-3; 0)$ và $F_2(3; 0)$.

(II) (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

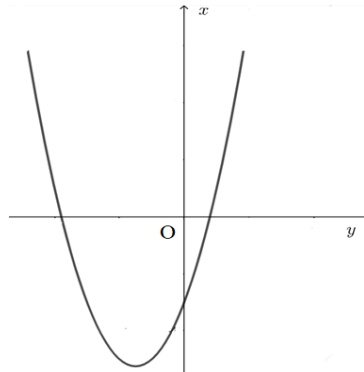
(III) (E) có một đỉnh $A_1(-5; 0)$.

(IV) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề **SAI**?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 38: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

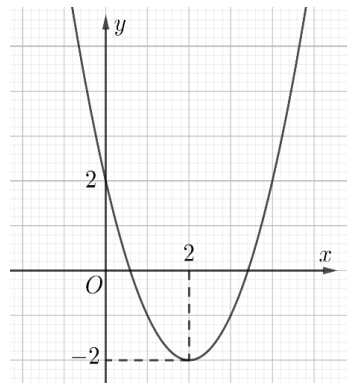
A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 39: Cho hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}) = 2m$ có nghiệm?

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 6.

Câu 40: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. -3. B. -10. C. -2. D. 10.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^4 x + \cos 2x + m \cos^6 x = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 42: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x - 3$. Phương trình đường thẳng đi qua đỉnh của (P) và vuông góc với đường thẳng $d: y = 2 - x$ là

- A. $y = x - 6$. B. $y = x - 5$. C. $y = x - 2$. D. $y = -x - 3$.

Câu 43: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm các giá trị của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

- A. $m < 2$. B. $m > 1$. C. $1 < m \leq 2$. D. $1 < m < 2$.

Câu 44: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $6\sqrt{(x-2)(x-32)} \geq x^2 - 34x + 48$ là

- A. 4. B. 34. C. 35. D. 6.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 46: Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và điểm $M(3;1)$. Điểm $A(a;b)$ nằm trên đường thẳng Δ và cách M một khoảng bằng $\sqrt{13}$. Biết $a > 0$, khi đó giá trị biểu thức $a + b$ là

- A. 0. B. 2. C. -5. D. -1.

Câu 47: Biết rằng $A = \frac{4\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} + \frac{2}{\tan^2 x} = a \sin^b x$, với a, b là các số tự nhiên và $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. Tính $T = 3a + b$.

- A. $T = 20$. B. $T = 10$. C. $T = 14$. D. $T = 12$.

Câu 48: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}}$ là

- A. 12. B. 8. C. 9. D. 7.

Câu 49: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và BC . Phân tích $\overrightarrow{AC}$ theo hai vector $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

- A. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. B. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$.
C. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$. D. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 3 < 0 \\ m - x \leq 1 \end{cases}$ có nghiệm?

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

----- HẾT -----

Data

made	Câu	dapan	made	Câu	dapan	made	Câu	dapan	made	Câu	dapan
132	1	A	209	1	C	357	1	D	485	1	A
132	2	B	209	2	B	357	2	C	485	2	D
132	3	B	209	3	A	357	3	B	485	3	A
132	4	B	209	4	B	357	4	B	485	4	A
132	5	B	209	5	A	357	5	A	485	5	D
132	6	A	209	6	C	357	6	A	485	6	B
132	7	D	209	7	C	357	7	A	485	7	B
132	8	D	209	8	C	357	8	D	485	8	B
132	9	B	209	9	B	357	9	A	485	9	C
132	10	C	209	10	A	357	10	C	485	10	D
132	11	D	209	11	B	357	11	A	485	11	A
132	12	A	209	12	D	357	12	C	485	12	C
132	13	D	209	13	D	357	13	A	485	13	C
132	14	D	209	14	A	357	14	C	485	14	B
132	15	C	209	15	A	357	15	B	485	15	C
132	16	C	209	16	D	357	16	C	485	16	D
132	17	B	209	17	C	357	17	C	485	17	D
132	18	C	209	18	C	357	18	D	485	18	A
132	19	C	209	19	B	357	19	D	485	19	C
132	20	A	209	20	D	357	20	B	485	20	C
132	21	D	209	21	C	357	21	C	485	21	A
132	22	A	209	22	C	357	22	B	485	22	C
132	23	C	209	23	C	357	23	A	485	23	B
132	24	C	209	24	B	357	24	D	485	24	D
132	25	B	209	25	D	357	25	D	485	25	D
132	26	D	209	26	A	357	26	D	485	26	A
132	27	A	209	27	A	357	27	B	485	27	C
132	28	A	209	28	B	357	28	A	485	28	B
132	29	D	209	29	D	357	29	B	485	29	B
132	30	B	209	30	D	357	30	C	485	30	C
132	31	A	209	31	A	357	31	C	485	31	B
132	32	A	209	32	D	357	32	D	485	32	A
132	33	B	209	33	C	357	33	D	485	33	D
132	34	D	209	34	A	357	34	C	485	34	A
132	35	C	209	35	C	357	35	A	485	35	A
132	36	A	209	36	C	357	36	A	485	36	B
132	37	B	209	37	A	357	37	B	485	37	B
132	38	C	209	38	B	357	38	B	485	38	D
132	39	A	209	39	C	357	39	B	485	39	C
132	40	B	209	40	A	357	40	C	485	40	C
132	41	B	209	41	B	357	41	D	485	41	A
132	42	B	209	42	D	357	42	A	485	42	B
132	43	D	209	43	B	357	43	D	485	43	C
132	44	D	209	44	D	357	44	A	485	44	D
132	45	A	209	45	D	357	45	C	485	45	D
132	46	D	209	46	C	357	46	A	485	46	A
132	47	C	209	47	A	357	47	B	485	47	C
132	48	D	209	48	D	357	48	B	485	48	C
132	49	C	209	49	B	357	49	C	485	49	D
132	50	C	209	50	B	357	50	D	485	50	B

HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU TRONG ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(x^2 + 2x - 3) \leq f(mx - 13)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

Quan sát đồ thị ta nhận thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình:

$$f(x^2 + 2x - 3) \leq f(mx - 13) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq mx - 13 \Leftrightarrow x^2 + (2 - m)x + 10 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (2 - m)^2 - 40 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{10} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{10}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên ta có $m \in \{-4; -3; \dots; 7; 8\}$.

Vậy có tất cả 13 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Ox và điểm N thuộc tia Oy sao cho tam giác AMN vuông tại A và có diện tích bằng $\frac{3}{2}$. Biết điểm M có hoành độ bằng a , N có tung độ bằng b khi đó $a + b$ bằng

Lời giải

$$M(a;0), N(0;b), a, b \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AM} = (a - 3; -1), \overrightarrow{AN} = (-3; b - 1)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = -3(a - 3) - (b - 1) = 0 \Leftrightarrow 3(a - 3) + (b - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a.$$

$$\text{Diện tích của tam giác AMN là: } S = \frac{1}{2} AM \cdot AN = \frac{3}{2}(a^2 - 6a + 10), S = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 1.$$

$$\text{Vậy } a + b = 4.$$

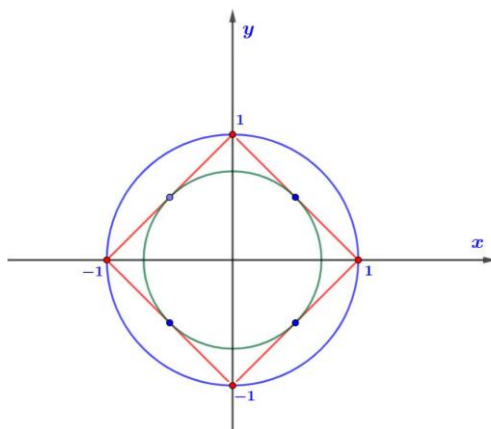
Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt?

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} |x| + |y| = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = m & (2) \end{cases}$. Từ (1) và (2) suy ra $m > 0$.

Ta có (1) tương đương với $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \geq 0, y < 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < 0, y \geq 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < 0, y < 0 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

Khi đó tập hợp các điểm $M(x; y)$ với x, y thỏa mãn (1) là hình vuông như hình vẽ.



Tập hợp các điểm $M(x; y)$ với x, y thỏa mãn (2) là đường tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính $\sqrt{m}$.

Do đó hệ đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi đường tròn và hình vuông nói trên cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.

Có 2 trường hợp xảy ra:

+) TH 1. Đường tròn ngoại tiếp hình vuông, khi đó $\sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

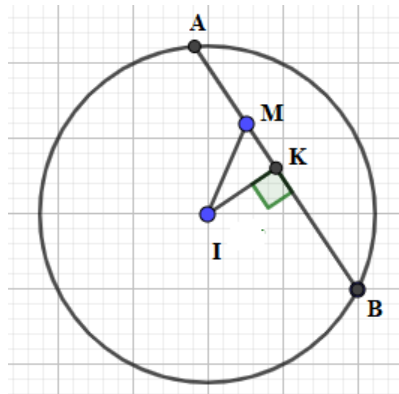
+) TH 2. Đường tròn nội tiếp hình vuông, khi đó $\sqrt{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vì m là số nguyên nên có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 25 = 0$ và điểm $M(3; -1)$.

Dây cung của (C) đi qua M có độ dài ngắn nhất là:

Lời giải



+) (C) có tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{30}$

+ $IM = \sqrt{13} < \sqrt{30} \Rightarrow M$ nằm trong đường tròn.

+) AB là dây cung của (C) đi qua M

+) Gọi K là hình chiếu của I lên AB . Ta có $IM \geq IK$.

Suy ra $KB = \sqrt{R^2 - IK^2} \Rightarrow AB \text{ min} \Leftrightarrow IK = IM \Rightarrow M \equiv K$.

+) $MA = \sqrt{R^2 - IM^2} = \sqrt{30 - 13} = \sqrt{17} \Rightarrow AB = 2\sqrt{17}$.

Câu 5. Biết rằng $A = \frac{4\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} + \frac{2}{\tan^2 x} = a \sin^b x$, với a, b là các số tự nhiên

và $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. Tính $T = 3a + 4b$.

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{4\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} + \frac{2}{\tan^2 x}$$

$$A = \frac{4\sin^4 x + \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{2}{\tan^2 x}$$

$$A = \frac{4\sin^4 x + \cos^2 x - 3\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\cot^2 x$$

$$A = \frac{4\sin^4 x - 2\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\cot^2 x$$

$$A = 4\sin^2 x - 2\cot^2 x + 2\cot^2 x$$

$$A = 4\sin^2 x.$$

$$\text{Do đó } a = 4 \text{ và } b = 2 \Rightarrow T = 3a + b = 3.4 + 2 = 14.$$

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường thẳng AB có phương trình $2x - y - 1 = 0$, đường cao AH có phương trình $x + y - 2 = 0$ (H thuộc cạnh BC). Gọi $P(1; -3)$ là trung điểm BH , Q là trung điểm AH . Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đường thẳng CQ ?

- A. $M\left(0; -\frac{1}{3}\right)$. B. $N\left(\frac{11}{3}; 0\right)$. C. $E(1; 0)$. D. $F(0; 2)$.

Lời giải

Ta có PQ là đường trung bình của $\triangle AHB \Rightarrow PQ \parallel AB$,
mà

$$AB \perp AC \Rightarrow PQ \perp AC$$

$$\Rightarrow Q \text{ là trực tâm } \triangle APC \Rightarrow AP \perp CQ$$

$AB \cap AH = A$ nên tọa độ A là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A(1; 1)$$

Do $AB \perp AC$ nên $\vec{n}_{AC} = \vec{u}_{AB} = (1; 2)$. Ta có phương trình AC :

$$x - 1 + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$$

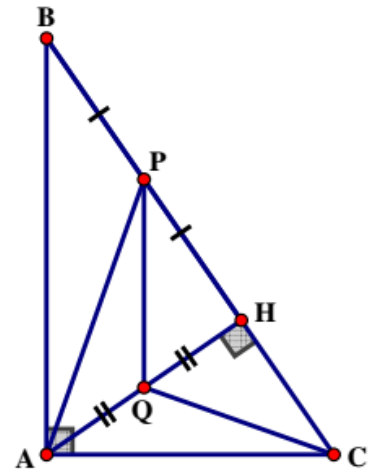
Do $BC \perp AH$ nên $\vec{n}_{BC} = \vec{u}_{AH} = (1; -1)$, mặt khác $P \in BC$
suy ra phương trình BC : $x - 1 - (y + 3) = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$

$BC \cap AC = C$ nên tọa độ C là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow C\left(\frac{11}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$AP \perp CQ$ nên đường thẳng CQ nhận $\frac{1}{4}\overrightarrow{AP} = (0; -1)$ làm véc tơ pháp tuyến

Phương trình đường thẳng CQ là: $-\left(y + \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3y + 1 = 0$. Vậy $M\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ thuộc CQ .



Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^4 x + \cos 2x + m\cos^6 x = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$?

Lời giải:

Phương trình

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 1 - 2\sin^2 x + m\cos^6 x = 0 \Leftrightarrow (\sin^2 x - 1)^2 + m\cos^6 x = 0 \Leftrightarrow \cos^4 x + m\cos^6 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^4 x = 0 \\ m\cos^2 x = -1 \end{cases} \cdot \text{Ta có } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1.$$

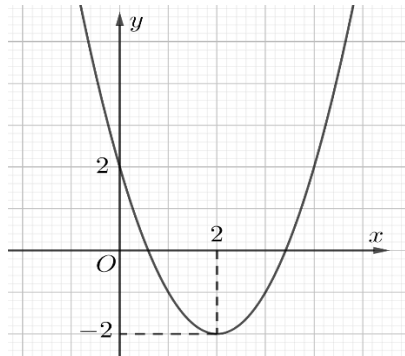
$$\text{Khi đó, YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{-\frac{1}{m}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -2 \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1. \text{ Do } m \in \mathbb{Q} \text{ nên } m \in \{-2; -1\}.$$

$$\text{Hoặc đánh giá: Trên } \left[0; \frac{\pi}{4}\right]: m \cos^2 x = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow m = -1 - \tan^2 x.$$

$$\text{Do } x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ nên } \tan x \in [0; 1] \Rightarrow -1 - \tan^2 x \in [-2; -1].$$

$$\text{Vậy } m \in [-2; -1]. \text{ Do } m \in \mathbb{Q} \text{ nên } m \in \{-2; -1\}.$$

Câu 8. Cho hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}) = 2m$ có nghiệm?

Lời giải

$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ ta có } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = -2 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ b = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x^2 - 4x + 2.$$

$$\text{Xét phương trình } f(2\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}) = 2m \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện } 2 \leq x \leq 6.$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} \Rightarrow \text{phương trình (1) có dạng } f(t) = 2m \quad (2).$$

$$\text{Từ cách đặt ta có } t \geq 0 \text{ và } t^2 = (2\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x})^2 = 3x - 2 + 4\sqrt{(x-2)(6-x)}.$$

Với mọi $x \in [2; 6]$ ta có:

$$+) \begin{cases} 3x - 2 \geq 4 \\ 4\sqrt{(x-2)(6-x)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow t \geq 2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = 2.$$

$$+) 4\sqrt{(x-2)(6-x)} = 2(\sqrt{x-2} \cdot 2\sqrt{6-x}) \leq (\sqrt{x-2})^2 + (2\sqrt{6-x})^2 = 22 - 3x$$

$$\Rightarrow t^2 \leq 3x - 2 + 22 - 3x \Rightarrow t^2 \leq 20 \Rightarrow t \leq 2\sqrt{5}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = \frac{26}{5}.$$

$$\text{Do đó, với } x \in [2; 6] \text{ ta được } t \in [2; 2\sqrt{5}].$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \text{Phương trình (2) có nghiệm } t \in [2; 2\sqrt{5}].$$

$$\text{Bảng biến thiên của hàm số } f(t) = t^2 - 4t + 2 \text{ trên đoạn } [2; 2\sqrt{5}]$$

t	2	$2\sqrt{5}$
$f(t)$	-2	$22-8\sqrt{5}$



Từ bảng biến thiên trên, phương trình (2) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{5}]$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2m \leq 22 - 8\sqrt{5} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 11 - 4\sqrt{5}.$$

Do m nguyên nên tập giá trị cần tìm của m là: $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Để đánh giá $t \leq 2\sqrt{5}$ ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau:

$$\left(2\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}\right)^2 \leq (2^2 + 1^2) \left[(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{6-x})^2 \right] = 20 \Rightarrow t^2 \leq 20 \Rightarrow t \leq 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x-2} = 4\sqrt{6-x} \Leftrightarrow x = \frac{26}{5}.$$