



CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

TÌM GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ THEO CÔNG THỨC

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2.$$

- A. -4. B. -2. C. -1. D. -3.

Câu 2. Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 2. C. -2. D. 1

Câu 3. Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .

- A. $\frac{17}{5}$. B. $\frac{16}{5}$. **N.C.Đ** C. 2. D. 6.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

- A. $x = -\frac{5}{4}$. B. $x = -\frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{3}{2}$. D. $x = -2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

- A. 1. B. -4. C. 0. D. 4.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1.

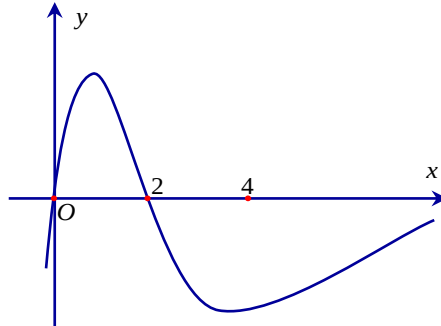
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.



Câu 8. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $d - 11a$. B. $d - 16a$. C. $d + 2a$. D. $d + 8a$.

Câu 9. Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.



- A. $m = f(4), M = f(2)$. B. $m = f(1), M = f(2)$
C. $m = f(4), M = f(1)$. D. $m = f(0), M = f(2)$.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 210. B. -195. C. 105. D. 300.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

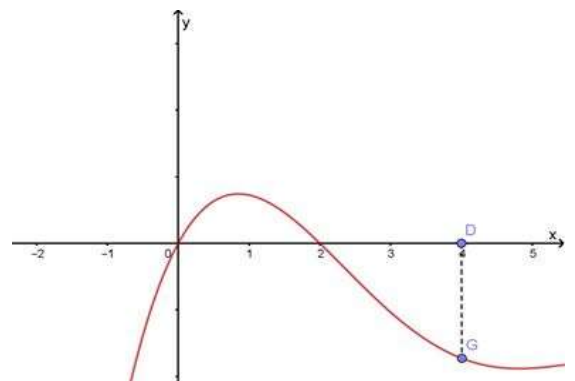
- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

- A. 4. B. 36. C. 140. D. 0.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ. Biết rằng $f(2) + f(4) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là

- A. $f(2), f(0)$. B. $f(4), f(2)$.
C. $f(0), f(2)$. D. $f(2), f(4)$.



Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.



x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$+\infty \searrow -3 \nearrow 5 \searrow -\infty$

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. 26. B. 13. C. 14. D. 27.

Câu 16. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

- A. 2. B. 4. C. -4. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min_{[-2; 2]} y = 4$ bằng

- A. $-\frac{31}{4}$. B. -8. C. $-\frac{23}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.

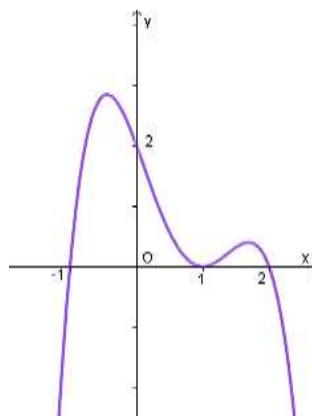
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

- A. 5. B. 4. C. -1. D. 3.

Câu 19. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. $-\frac{8}{3}$. B. 5. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. $f(-1) - \frac{5}{3}$. B. $f(1) - \frac{1}{3}$. C. $f(2) - \frac{5}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.



Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

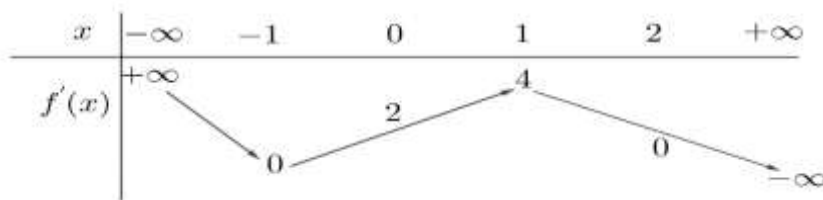
A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x]f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

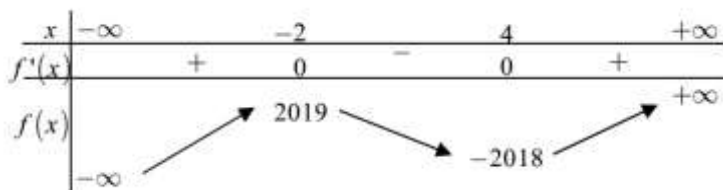
A. 4.

B. -28.

C. -3.

D. 33.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

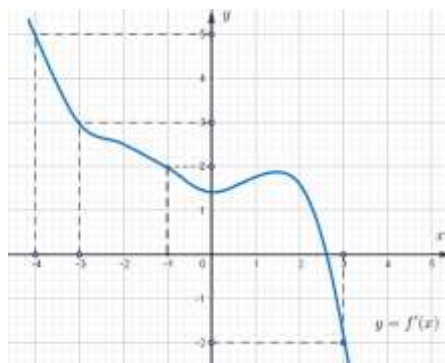
A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

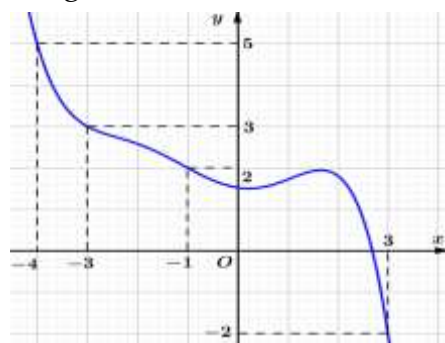
D. 2021.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



- A. $x_0 = -4$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 3$. D. $x_0 = -3$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm.



- A. $x_0 = -1$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = -4$. D. $x_0 = -3$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

- A. Vô số. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x-1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

- A. 13. B. -7. C. -13. D. -1.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2017)$. B. $(2017; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2017; 0)$.

Câu 31. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.



N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2.$$

A. -4.

B. -2.

C. -1.

D. -3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên $[2;3]$.

Với $m = -2$, hàm số trở thành $y = 2 \Rightarrow \max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$ (không thỏa).

Với $m \neq -2$, ta có $y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}$.

Khi đó hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $[2;3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max_{[2;3]} f(x) = f(2); \min_{[2;3]} f(x) = f(3) \\ \max_{[2;3]} f(x) = f(3); \min_{[2;3]} f(x) = f(2) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = |f(3) - f(2)| = \left| \frac{6+m}{2} - (4+m) \right| = \left| \frac{2+m}{2} \right|.$$

$$\text{Theo giả thiết } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2+m}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: -4.

Nhận xét: đề bài cho thêm dấu giá trị tuyệt đối ở trong biểu thức

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \text{ là không cần thiết.}$$

Câu 2. Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0.

B. 2.

C. -2.

D. 1

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt: } u(x) = x^3 - 3x + m \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 3$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } u(0) = m; u(1) = m - 2; u(2) = m + 2$$

$$\text{Suy ra: } \max_{[0;2]} u(x) = m + 2; \min_{[0;2]} u(x) = m - 2 \Rightarrow \max_{[0;2]} y = \max \{|m+2|; |m-2|\}.$$

$$\text{TH1: } (m-2) \cdot (m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow a = \min_{[0;2]} y = 0 \text{ (loại)}$$

(vì ko thỏa mãn giả thiết $Aa = 12$)



$$\text{TH 2: } m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Min}} y = m-2; A = \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = m+2.$$

$$\text{Từ giả thiết: } Aa = 12 \Rightarrow (m+2)(m-2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4(TM) \\ m = -4(koTM) \end{cases}$$

$$\text{TH 3: } m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Min}} y = -(m+2); \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = -(m-2).$$

$$\text{Từ giả thiết: } Aa = 12 \Rightarrow (m+2)(m-2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4(koTM) \\ m = -4(TM) \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp suy ra: $S = \{-4; 4\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng: $(-4) + 4 = 0$.

Câu 3. Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .

A. $\frac{17}{5}$.

B. $\frac{16}{5}$.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$.

Điều kiện $x \neq -m^2$.

$$y = \frac{mx+1}{x+m^2} \Rightarrow y' = \frac{m^3-1}{(x+m^2)^2}.$$

- Nếu $m=1$ thì $y = \frac{x+1}{x+1}$. Khi đó $\max_{[2;3]} y = 1$, suy ra $m=1$ không thỏa mãn.

- Nếu $m^3-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $y' > 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ đồng biến trên đoạn $[2;3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(3) = \frac{3m+1}{3+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2 - 18m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m > 1$, ta có $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m^3-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $y' < 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ nghịch biến trên đoạn $[2;3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(2) = \frac{2m+1}{2+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2 - 12m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m < 1$, ta có $m = \frac{2}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $T = \left\{3; \frac{2}{5}\right\}$. Do đó tổng các phần tử của T là $3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.



Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

A. $x = -\frac{5}{4}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = -\frac{3}{2}$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.

Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại

$x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$$\Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3).$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (đều là các nghiệm đơn)}$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ CT $\nearrow$ CĐ $\searrow$ CT $\nearrow$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc } \left[-2; -\frac{5}{4}\right].$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Câu 5. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

A. 1.

B. -4.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$.

Để GTNN của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 thì $\min_{[-1;1]} f(x) = 1$ hoặc

$$\max_{[-1;1]} f(x) = -1.$$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = 2 + m$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = -2 + m$.

Trường hợp 1: $\min_{[-1;1]} f(x) = 1 \Leftrightarrow -2 + m = 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Trường hợp 2: $\max_{[-1;1]} f(x) = -1 \Leftrightarrow 2 + m = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-1-m^2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

N.C.Đ

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$.

Suy ra $\min_{[2;3]} y = y(3) = \frac{3+m^2}{3-1} = 14 \Leftrightarrow m = \pm 5$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m .

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq m$.

Hàm số đã cho xác định trên $[0; 4]$ khi $m \notin [0; 4]$ (*).

Ta có $y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x-m)^2} > 0$ với $\forall x \in [0; 4]$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 4]$ nên $\max_{[0;4]} y = y(4) = \frac{2-m^2}{4-m}$.

$\max_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \frac{2-m^2}{4-m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$.



Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = -3$. Do đó có một giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số

$y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $d - 11a$.

B. $d - 16a$.

C. $d + 2a$.

D. $d + 8a$.

Lời giải

Tác giả: Đinh Thị Thúy Nhung; Fb: Thúy Nhung Đinh

Chọn B

Vì $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có

hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0$, $c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

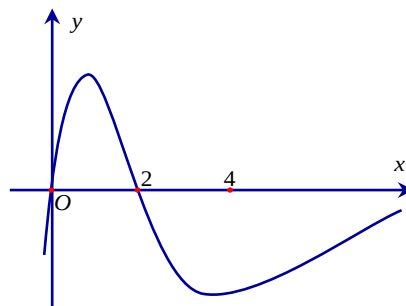
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				$f(2)$		$-\infty$

$\swarrow$ $f(-2)$ $\nearrow$

Ta suy ra $\max_{x \in [1; 3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Câu 9. Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.



A. $m = f(4), M = f(2)$.

B. $m = f(1), M = f(2)$

C. $m = f(4), M = f(1)$.

D. $m = f(0), M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.



x	0	2	4	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$	

Vậy giá trị lớn nhất $M = f(2)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên $f(2) > f(1) \Rightarrow f(2) - f(1) > 0$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$ nên $f(2) > f(3) \Rightarrow f(2) - f(3) > 0$.

Theo giả thuyết: $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$

$$\Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(1) + f(2) - f(3) > 0 \Rightarrow f(0) > f(4)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $m = f(4)$.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210.

B. -195.

C. 105.

D. 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$f'(x) = x^3 - 19x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	2
$f'(x)$		+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$

với $f(0) = m - 20$; $f(2) = m + 6$.

Xét hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$.

+ Trường hợp 1: $m - 20 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 20$. Ta có



$\text{Max}_{[0;2]} y = m+6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 20$ suy ra không có giá trị m .

+ Trường hợp 2: $m+6 \geq 20-m \Leftrightarrow m \geq 7$. Ta có:

$\text{Max}_{[0;2]} y = m+6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 7$ suy ra $7 \leq m \leq 14$.

Vì m nguyên nên $m \in \{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$.

+ Trường hợp 3: $20-m \geq m+6 \Leftrightarrow m \leq 7$. Ta có:

$\text{Max}_{[0;2]} y = 20-m \leq 20 \Leftrightarrow m \geq 0$. Kết hợp $m \leq 7$ suy ra $0 \leq m \leq 7$.

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy $S = \{0; 1; 2; \dots; 14\}$. Tổng các phần tử của S bằng $\frac{(14+0) \cdot 15}{2} = 105$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ với $x \in [0; 2]$.

N.C.Đ

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(0) = a; g(1) = 1 + a; g(2) = a.$$

Bảng biến thiên $g(x)$

x	0	1	2		
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$	a $\nearrow$ $a+1$ $\searrow$ a				

Trường hợp 1: $a \geq 0$. Khi đó $M = a+1; m = a$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow 1+a \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$.

Trường hợp 2: $a+1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$. Khi đó $M = -a; m = -(a+1)$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2(a+1) \Leftrightarrow a \leq -2$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-3; -2\}$.

Trường hợp 3: $-1 < a < 0$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$.



Vậy có 5 giá trị a cần tìm.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4.

B. 36.

C. 140.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 3x^2 - 6x$. Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên $[-2; 4]$ là:

$$\max_{x \in [-2; 4]} y = \max \{y(0); y(-2); y(2); y(4)\} = \max \{|m|; |m-4|; |m-20|; |m+16|\}.$$

Trường hợp 1: Giả sử $\max y = |m| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 50 \\ m = -50 \end{cases}$.

Với $m = 50$ thì $|m+16| = 66 > 50$ (loại).

Với $m = -50$ thì $|m-20| = 70 > 50$ (loại).

Trường hợp 2: Giả sử $\max y = |m-4| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 54 \\ m = -46 \end{cases}$.

Với $m = 54 \Rightarrow |m| = 54 > 50$ (loại).

N.C.Đ

Với $m = -46$ thì $|m-20| = 66 > 50$ (loại).

Trường hợp 3: Giả sử $\max y = |m-20| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ m = -30 \end{cases}$

Với $m = 70$ thì $|m+16| = 86 > 50$ (loại).

Với $m = -30$ thì $|m+16| = 14 < 50$, $|m| = 30 < 50$; $|m-4| = 34 < 50$ (thỏa mãn).

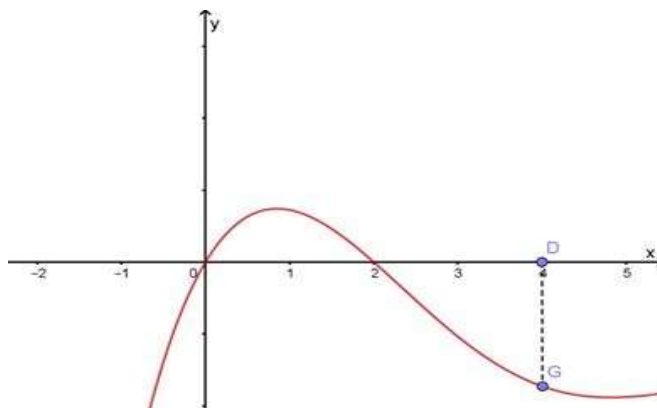
Trường hợp 4: Giả sử $\max y = |m+16| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 34 \\ m = -66 \end{cases}$.

Với $m = 34$ thì $|m| = 34 < 50$, $|m-4| = 30 < 50$, $|m-20| = 14 < 50$ (thỏa mãn).

Với $m = -66$ thì $|m| = 66 > 50$ (loại).

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30 + 34 = 4$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.





Biết rằng $f(2) + f(4) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là

- A. $f(2), f(0)$. B. $f(4), f(2)$. C. $f(0), f(2)$. D. $f(2), f(4)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.

x	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[0;4]} f(x) = f(2)$.

Ta có $f(2) + f(4) = f(3) + f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(3) > 0$.

Suy ra: $f(4) < f(0)$. Do đó $\min_{[0;4]} f(x) = f(4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là: $f(4), f(2)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$	

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x].$$

Với $x \in [1; 3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1; 3]$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3
g'	+	0	-


```

graph LR
    g1((g(1))) --> g2((g(2)))
    g2 --> g3((g(3)))
  
```

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12.$

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26 .

B. 13.

C. 14.

D. 27 .

Lời giải

Chọn D

Xét $u(x) = x^4 - 38x^2 + 120x + 4m$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có

$$u' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 76x + 120 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max_{[0;2]} u(x) = \max\{u(0), u(2)\} = \max\{4m, 4m+104\} = 4m+104 \\ \min_{[0;2]} u(x) = \min\{u(0), u(2)\} = \min\{4m, 4m+104\} = 4m \end{cases}.$$

Cách 1:

Nếu $4m > 0$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 4m > 0$

Nếu $4m+104 < 0 \Leftrightarrow m < -26$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = -4m-104 > 0$

Nếu $4m \leq 0 \leq 4m+104 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 0$. Vậy có 27 số nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

Khi đó $\min \left\{ \min_{[0;2]} y \right\} = 0 \Leftrightarrow 4m(4m+104) \leq 0 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$. Có 27 số nguyên thỏa mãn.

Câu 16. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. 2.

B. 4.

C. -4.

D. 3.

Lời giải

Chon C

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1-a+b| \\ M \geq |9+3a+b| \\ M \geq |1+a+b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1-a+b| + |9+3a+b| + 2|-1-a-b| \\ &\geq |1-a+b+9+3a+b+2(-1-a-b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2. \end{aligned}$$



Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b, 9 + 3a + b, -1 - a - b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$. Ta có: $a + 2b = -4$.

Câu 17. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min_{[-2; 2]} y = 4$

bằng

A. $-\frac{31}{4}$.

B. -8 .

C. $-\frac{23}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2; 2]$ ta có $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Ta tính được $u(-2) = m + 2; u\left(-\frac{1}{2}\right) = m - \frac{1}{4}; u(2) = m + 6$.

Nhận xét $m - \frac{1}{4} < m + 2 < m + 6, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $A = \max_{[-2; 2]} u = m + 6; a = \min_{[-2; 2]} u = m - \frac{1}{4}$

Nếu $a \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4} (t/m); m = -\frac{7}{4} (l).$

Nếu $A \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -6 \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = (m + 6)^2 = 4 \Leftrightarrow m = -8 (t/m); m = -4 (l).$

Nếu $Aa < 0 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = 0 (l).$

Vậy tổng các giá trị thực của tham số là $\frac{9}{4} - 8 = -\frac{23}{4}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số

$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

A. 5.

B. 4.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3 + x)$ trên $[0; 2]$. Đặt $t = x^3 + x, x \in [0; 2]$.

Ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $t \in [0; 10]$.

Vì vậy $\max_{x \in [0; 2]} f(x^3 + x) = \max_{t \in [0; 10]} f(t) = 4$ khi $t = 2 \Leftrightarrow x = 1$.



Mặt khác $p(x) = -x^2 + 2x + m = -(x-1)^2 + m + 1 \leq m + 1$. Suy ra $\max_{x \in [0;2]} p(x) = m + 1$ khi $x = 1$.

Vậy $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 4 + m + 1 = m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Chọn hàm $y = f(x) = 4$ thỏa mãn giả thiết: hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có

$$\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4.$$

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m = 4 - x^2 + 2x + m$.

$$g'(x) = -2x + 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Xét hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có $g(0) = 4 + m$,

$$g(1) = 5 + m, g(2) = 4 + m.$$

Rõ ràng $g(0) = g(2) < g(1)$ nên $\max_{x \in [0;2]} g(x) = g(1)$. Vậy $5 + m = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 19. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải
N.C.Đ

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ trên $[-1;1]$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1;1] \end{cases}; f(-1) = \frac{3m+1}{-3}; f(0) = -m; f(1) = \frac{m+1}{-1}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Trường hợp 1. $f(0) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó

$$3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max \{ |f(-1)|; |f(1)| \} \Leftrightarrow 3 = \max \left\{ \frac{3m+1}{3}; m+1 \right\} \Leftrightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

Trường hợp 2. $f(0) > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{Khả năng 1. } \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1. \text{ Khi đó } 3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = f(0) \Leftrightarrow m = -3.$$



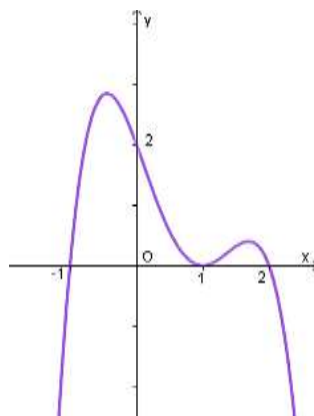
Khả năng 2. $-1 < m \leq -\frac{1}{3}$. Khi đó $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$. $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{f(0); |f(1)|\}$

$\Leftrightarrow 3 = \max\{-m; m+1\}$: Trường hợp này vô nghiệm.

Khả năng 3. $-\frac{1}{3} < m < 0$. Khi đó $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{f(0); |f(1)|; |f(-1)|\}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1 = -3, m_2 = 2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1 .

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $f(-1) - \frac{5}{3}$.

B. $f(1) - \frac{1}{3}$.

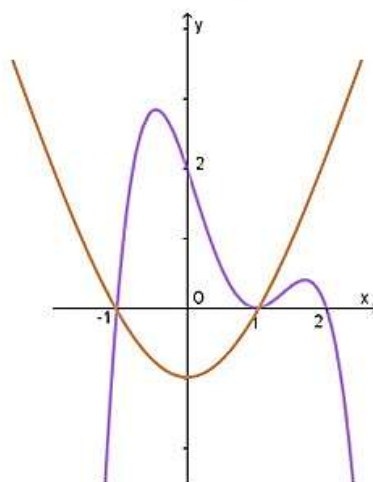
C. $f(2) - \frac{5}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 1 = f'(x) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1 (*)$



Từ đồ thị ta có bảng xét dấu



x	-1	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$g(1)$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(1) - \frac{1}{3}$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3x \cdot f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x) \Rightarrow 3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = 2x f^2(x)$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C.$$

Thay $x=1$ vào ta được $\frac{1}{f(1)} = 1 + C$, vì $f(1) = \frac{1}{3}$ nên suy ra $C = 2$.

Nên $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$. Ta có $f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

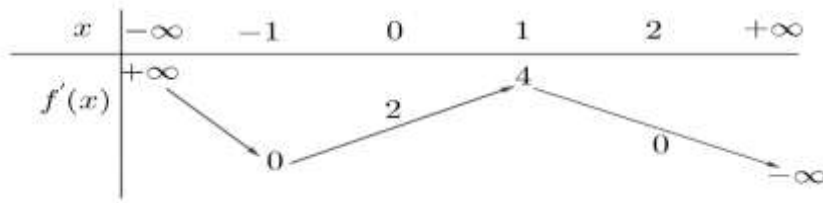
x	1	2
y'		+
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

Khi đó, $f(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Suy ra $m = f(1) = \frac{1}{3}$; $M = f(2) = \frac{4}{3}$.

Suy ra $M + m = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Lời giải

Tác giả: Trần Phương; Fb: Trần Phương

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$g'(x) = 3[f^2(x) - 1] \cdot f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f^2(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$

N.C.Đ

Và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1; 2]$ nên (2) vô nghiệm.

Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

$$\text{Ta có } g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{730}{27}.$$

$$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = 6^3 - 3(6) = 198.$$

$$\text{Vậy } \min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = \frac{730}{27}.$$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-3)$.

C. $\min_{[-3; 1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

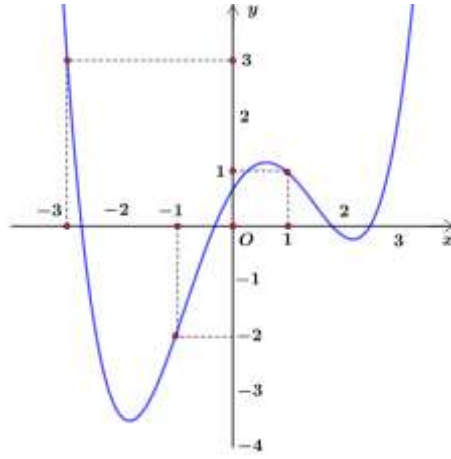
D. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm

$$\text{số } g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$



$$\text{Cho } g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta so sánh được $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

A. 4.

B. -28.

C. -3.

D. 33.

Lời giải
N.C.Đ

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } [f(x) - x] f(x) &= x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \\ \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) &= 4x^6 + 12x^4 + 8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) + x^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2 \\ \Leftrightarrow [2f(x) - x]^2 &= (2x^3 + 3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) - x = 2x^3 + 3x \\ 2f(x) - x = -2x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 - x \end{cases} \end{aligned}$$

Với $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f(x) = -x^3 - x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = -x^3 - x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M = \max_{[1;2]} f(x) = f(1) = -2$

và $m = \min_{[1;2]} f(x) = f(2) = -10$.

Từ đây, ta suy ra: $3M - m = 3(-2) + 10 = 4 \Rightarrow$ chọn đáp án A

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2019	-2018	$+\infty$	

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

**Chọn D**

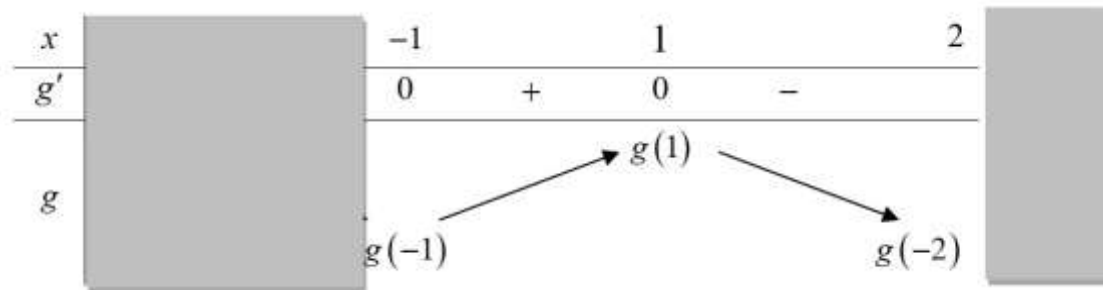
$$g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x) - x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 - 1)[3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Mà $x \in [-1; 2] \Rightarrow x^3 - 3x \in [-2; 2] \Rightarrow f'(x^3 - 3x) < 0 \Rightarrow 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 < 0$, do đó

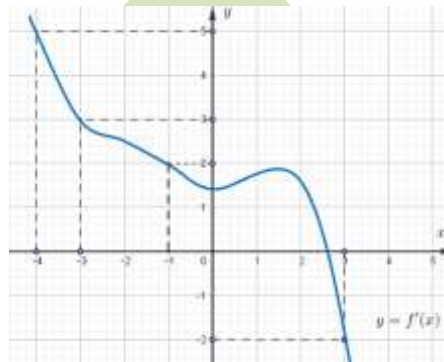
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Ta có



Vậy $\max_{[-1;2]} y = g(1) = f(-2) + 2 = 2021$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x_0 = -4$.

B. $x_0 = -1$.

C. $x_0 = 3$.

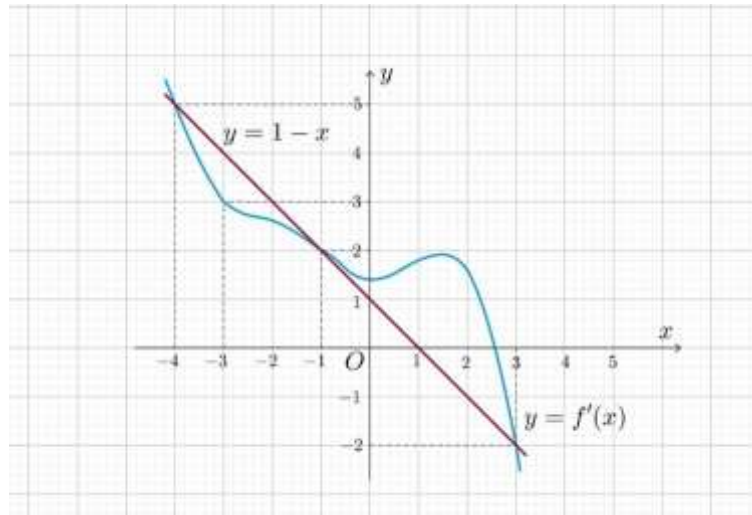
D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$$

Vẽ đường thẳng $y = 1 - x$ trên cùng hệ trục chứa đồ thị $y = f'(x)$.



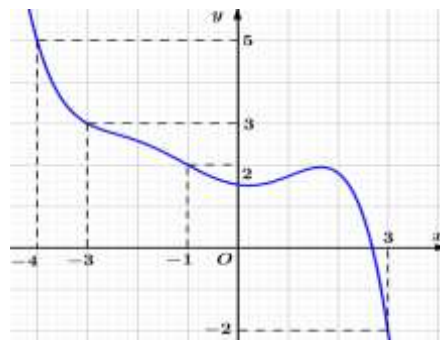
Dựa vào hình vẽ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-4	-1	3
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -1$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm.



A. $x_0 = -1$.

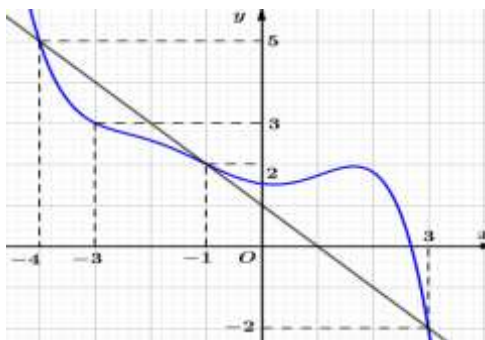
B. $x_0 = 3$.

C. $x_0 = -4$.

D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-4	-1	3
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Từ bảng biến thiên, suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$

Ta có: $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$

Vì trong đoạn $[-4; -1]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = 1 - x$
 $\Rightarrow f'(x) < 1 - x \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g'(x) < 0 \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-4; -1)$
 $\Rightarrow g(-4) > g(-3) > g(-1)$ (*)

Vì trong đoạn $[-1; 3]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = 1 - x$
 $\Rightarrow f'(x) > 1 - x \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$
 $\Rightarrow g(3) > g(-1)$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

A. Vô số.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$m-2$	$m-4$	m



Ta thấy $\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = m$ và $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = m - 4$.

Ta có $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = \max\{|m|; |m - 4|\}$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m| \leq |m - 4| \\ \max\{|m|; |m - 4|\} = |m - 4| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \leq m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m - 4 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 0 \leq m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m| > |m - 4| \\ \max\{|m|; |m - 4|\} = |m| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Vậy chọn đáp án D.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x - 1) + m$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. 13.

B. -7.

C. -13.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[0;1]} [f(3x - 1) + m] = m + \max_{[0;1]} f(3x - 1)$.

Đặt $t = 3x - 1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [-1;2]$.

Suy ra: $\max_{[0;1]} f(3x - 1) = \max_{[-1;2]} f(t) = 3$. Suy ra $\max_{[0;1]} g(x) = m + 3$.

Do đó $\max_{[0;1]} g(x) = -10 \Leftrightarrow m + 3 = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2017)$.

B. $(2017; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-2017; 0)$.

Lời giải.

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0
$f'(x)$		3	-2018	

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x + 2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$$g'(t) = f'(t) + 2018.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà

$$x_0 + 2017 \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017).$$

Câu 31. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5 .

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$.

TH1. $m \geq 1$: $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$m - 13$	$+\infty$

$$\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (TM)}.$$

TH2. $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1 - m}$.

□ Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$.

$$y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1 - m}.$$

$$y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1 - m}.$$

$$\Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$$

$$\Rightarrow \min_{(x_1; x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8 \text{ (Không TM)}.$$

□ Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

$$+) x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3:$$



x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$			$m-13$	$+\infty$

$$\min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (Loại).}$$

$$+) \ x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3:$$

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$

$$\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8 \text{ (Không TM). Vậy có 1 giá trị của } m.$$

N.C.Đ



CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2**TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN**

- Câu 1.** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{9x^3 + x}{y+1} = \sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 6x - y$ là:
- A. $\frac{89}{12}$. B. $\frac{11}{3}$. C. $\frac{17}{12}$. D. $\frac{82}{3}$.
- Câu 2.** Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y+1}$. Tính $M + m$.
- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{3}$.
- Câu 3.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là:
- A. $17 - 2\sqrt{6}$. B. $17 + \sqrt{6}$ C. $17 + 2\sqrt{6}$ D. $17 - \sqrt{6}$.
- Câu 4.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số a để $M \geq 2m$?
- A. 17. B. 15. C. 18. D. 16.
- Câu 5.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$.
- A. 3. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{114}{11}$. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 6.** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?
- A. $(-6; -5)$. B. $(-10; -9)$. C. $(-11; -9)$. D. $(-5; -4)$.
- Câu 7.** Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.
- A. $(4; 7)$. B. $(-2; 1)$. C. $(1; 4)$. D. $(7; 10)$.

Câu 8. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thỏa mãn $|z - 2 + i| = |z + 2 + 5i|$ và biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $H = \frac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}}$. Giá trị của $2x + y$ bằng:

- A. -6 B. $-6 + \sqrt{5}$
C. $-3 - \sqrt{5}$ D. $-6 - \sqrt{5}$

Câu 9. Cho x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

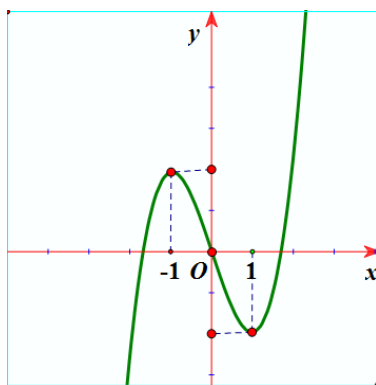
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 10. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$.

Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

- A. $-4 - 3\sqrt{2}$. B. $-4 - 5\sqrt{2}$. C. $-4 - 4\sqrt{2}$. D. $-4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho 2 số x, y thỏa mãn $x^2 + 5y^2 = 1 + 4xy$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{2x-3y-3}{-x+4y+4}\right)$.



Tích $M.m$ bằng

- A. $\frac{-1436}{1331}$ B. $\frac{3380}{1331}$ C. $\frac{1436}{1331}$ D. $\frac{1944}{1331}$

Câu 13. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2xy = 1$ và hàm số $f(t) = t^4 - 2t^2 + 2$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{x+y-1}{x+3y-2}\right)$. Tổng $M+m$

- A. $4\sqrt{3} + 2$. B. $8\sqrt{3} - 2$. C. 66. D. $9\sqrt{3} + 17$

Câu 14. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ và hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M+m$

- A. 3. B. $\frac{28}{9}$. C. $\frac{19}{9}$. D. 2



Câu 15. Cho các số thực dương x, y, z thay đổi và thỏa mãn: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$ bằng

- A. 18. B. 12. C. 16. D. 24.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$ và các số thực m, n thỏa mãn $m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $f\left(\frac{m - 2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng

- A. -99. B. -100. C. 5. D. 4.

Câu 17. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $x^2 + y^2$.

- A. $\frac{25}{16}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{2313}{1156}$. D. $\frac{153}{100}$.

Câu 18. Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{383}{16}$. B. $\frac{136}{3}$. C. $\frac{25}{2}$. D. $\frac{391}{16}$.

Câu 19. Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ $x \in (0; 2)$. Giá trị lớn nhất của $S = a + b$ là.

- A. $S_{\max} = -1$. B. $S_{\max} = 0$. C. $S_{\max} = 1$. D. $S_{\max} = -3$.

Câu 20. Hàm số $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-2019)^2$ ($x \in \mathbb{R}$) đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

- A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 0.

Câu 21. Hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$ là

- A. 2. B. 0. C. -2. D. -1.

Câu 22. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4$. Tính $P = a + 2b + 3c$ khi biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 7$. B. $P = 3$. C. $P = -3$. D. $P = -7$.

Câu 23. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c = 10$ và $a + c = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = 3a + 2b + c$ khi $Q = a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 8b + 18c$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. 10. B. -10. C. 12. D. -12.

Câu 24. Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng

- A. 2. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 4.



Câu 25. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 2$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 2x + 3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$.

A. $3\sqrt{2}$.B. $6\sqrt{2}$.

C. 6.

D. 3.

BỔ SUNG BÀI TẬP TỰ LUẬN HÀM NHIỀU BIẾN

Bài 1. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$

Bài 2: Cho $x, y, z \in [1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2(xy + yz + zx)}{xyz + 2(2x + y + z)} + \frac{8}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

Bài 3: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 2, c \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8 - b}{b + c + b(a + c) + 8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} + 8}$$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y + z = x(y^2 + z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

Bài 5: Cho $a > b > c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Bài 6: Cho $x, y, z > 0; xyz(x + y + z) = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x + y)(x + z) + y^2z^2$

Bài 7: Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right|$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0, a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, c \geq 1; b \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(3+ac)}$$

Bài 10: Cho các số thực $x, y, z \in [0;1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} + \frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}} + \frac{2}{xy+xz-yz}$$

Bài 11: Cho các số $a, b, c \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc$$

➤ Có nhiều bài toán tìm cực trị của biểu thức ta chỉ cần sử dụng các biến đổi cơ bản đã làm giảm được số biến. Tuy nhiên bài toán cực trị có dạng phân thức ta phải sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá mới làm giảm được số biến của bài toán.

➤ Các bất đẳng thức thường dùng

1. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$

2. Cho $a, b > 0$ ta có $a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4} \geq a^2b + ab^2$



3. Cho $a, b > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

4. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$

5. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

6. Cho $a, b, c > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

7. Cho $a, b > 0$ và $ab \geq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

8. Cho $a, b > 0$ và $ab \leq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Nhận xét: Trên đây chỉ là một số BDT tiêu biểu thường sử dụng để tìm cực trị bằng cách đơn biến, ngoài ra ta có thể sử dụng các hệ quả khác hoặc các bất đẳng thức khác. Ứng dụng các BDT trên để giải các bài toán sau đây.

Bài 12: Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)}$

Bài 13: Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}$

Bài 14: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$

N.C.Đ

Bài 15: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2 + y^2) - z^2}$

Bài 16: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Bài 17: Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + 2y - z \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y}$

Bài 18: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$

Bài 19: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 z}{y^2(xz + y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz + y^2)} + \frac{z^3 + 15x^3}{x^2 z}$

Bài 20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}$

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \geq b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



$$T = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab + bc + ca}}{abc(a + b + c)}$$

Bài 22: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức: $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$

Bài 23: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2z^2}{y^2 + z^2} - \frac{3z}{2x + z}$

N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{9x^3 + x}{y+1} = \sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$S = 6x - y$ là:

A. $\frac{89}{12}$.

B. $\frac{11}{3}$.

C. $\frac{17}{12}$.

D. $\frac{82}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết $y > 0$ nên ta có :

$$\frac{9x^3 + x}{y+1} = \sqrt{3y+2} \Leftrightarrow 9x^3 + x = \sqrt{3y+2}(y+1) \Leftrightarrow [(3x)^3 + 3x] = [\sqrt{(3y+2)^3} + \sqrt{3y+2}]$$

$$\Leftrightarrow f(3x) = f(\sqrt{3y+2}) \text{ với } f(t) = t^3 + t.$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $3x = \sqrt{3y+2}$

$$\text{hay } y = 3x^2 - \frac{2}{3}. \text{ Do } y > 0 \text{ và } 3x = \sqrt{3y+2} \text{ nên } x > \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Khi đó } S = 6x - y = 6x - 3x^2 + \frac{2}{3} = -3x^2 + 6x + \frac{2}{3} = -3(x-1)^2 + \frac{11}{3} \leq \frac{11}{3}.$$

$$\text{Do đó } \max S = \frac{11}{3} \text{ khi } x=1.$$

N.C.Đ

Câu 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y+1}$. Tính $M + m$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Với điều kiện $x + y \neq -1; x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta có $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

$$\text{Nếu } y = 0 \text{ thì } \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Khi đó } P = 0.$$

$$\text{Nếu } y \neq 0 \text{ thì } P = \frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}. \text{ Đặt } t = \frac{x}{y}. \text{ Ta có } P = \frac{t}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}. f'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$



t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	

Từ bảng biến thiên:

$$M = \frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -1 \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $M + m = -\frac{2}{3}$.

Cách 2:

Với điều kiện $x + y \neq -1$; $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta có $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

N.C.Đ

$$\Rightarrow Px^2 + xy(P-1) + Py^2 = 0 \quad (*)$$

+) Nếu $P = 0$ thì $x = 0$ hoặc $y = 0$.

$$+) \text{ Nếu } P \neq 0 \text{ thì } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Để phương trình (*) có nghiệm x thì $\Delta_x = -y^2(P+1)(3P-1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq P \leq \frac{1}{3}$.

Ta có:

$$M = \frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} x = \frac{-y(P-1)}{2P} = y \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -1 \text{ tại } \begin{cases} x = \frac{-y(P-1)}{2P} = -y \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó $M = \frac{1}{3}$; $m = -1$. Vậy $M + m = -\frac{2}{3}$.

Câu 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất,

giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là:

A. $17 - 2\sqrt{6}$.

B. $17 + \sqrt{6}$

C. $17 + 2\sqrt{6}$

D. $17 - \sqrt{6}$.



Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 + 3xy \leq 1 + \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow -2 \leq x+y \leq 2$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \frac{1}{3}[(x+y)^2 - 2] \leq 2$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 2 \right). \text{ Vậy } P = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1} = g(t)$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1} \left(t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right] \right)$$

$$g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 5}{t+1} \left(t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right] \right); g'(t) = 0 \Rightarrow t = -1 + \sqrt{6} \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right].$$

$$\text{Vậy } \min_{t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right]} g(t) = \frac{11}{15}; \max_{t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right]} g(t) = 6 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy } A = M + 15m = 17 - 2\sqrt{6}$$

Nhận xét: đây là bài toán thường gặp trong các đề thi TSDH những năm trước đây. Tư tưởng của các bài toán này là sử dụng ứng dụng đạo hàm tìm GTNN, GTLN của hàm số sau khi áp dụng phương pháp dồn biến.

Câu 4.

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 17.

B. 15.

C. 18.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = 6 + 4x - x^2 + \sqrt{6 + 4x - x^2}. (*)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t^2 + t, \text{ có } f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0.$$

$$\text{Ta có hàm } y = f(t) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty), \sqrt{y^2 + 6y + 10} \in [0; +\infty),$$

$$\sqrt{6 + 4x - x^2} \in [0; +\infty).$$

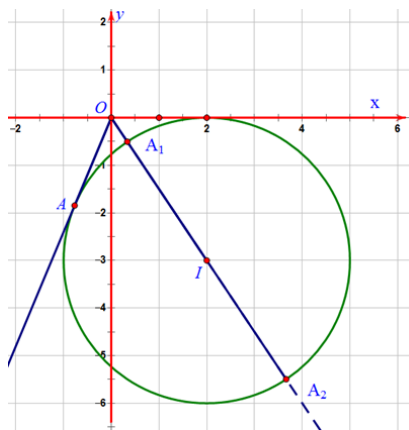
$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt{y^2 + 6y + 10}) = f(\sqrt{6 + 4x - x^2}) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 = 6 + 4x - x^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

$$\text{Xét điểm } A(x; y) \text{ thuộc đường tròn } (C) \text{ có phương trình } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

$$\text{Ta có } OA = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 3$ nên điểm $O(0; 0)$ nằm ngoài (C) .



Gọi A_1, A_2 là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) .

$$\forall A(x; y) \in (C): OA_1 \leq OA \leq OA_2, \text{ với } OA_1 = OI - R = \sqrt{13} - 3 \text{ và } OA_2 = OI + R = \sqrt{13} + 3.$$

$$\text{Tức là ta có } \sqrt{13} - 3 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{13} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 - a \leq \sqrt{x^2 + y^2} - a \leq \sqrt{13} + 3 - a.$$

$$\text{Th1: } \sqrt{13} - 3 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \sqrt{13} - 3, (1)$$

$$\text{Khi đó } M = \sqrt{13} + 3 - a \text{ và } m = \sqrt{13} - 3 - a.$$

$$M \geq 2m \Leftrightarrow \sqrt{13} + 3 - a \geq 2(\sqrt{13} - 3 - a) \Leftrightarrow a \geq \sqrt{13} - 9.$$

Kết hợp với điều kiện (1) và a nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ ta có

$$a \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}.$$

$$\text{Th2: } \sqrt{13} + 3 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{13} + 3, (**)$$

N.C.Đ

$$\text{Khi đó } M = a - \sqrt{13} + 3 \text{ và } m = a - \sqrt{13} - 3.$$

$$M \geq 2m \Leftrightarrow a - \sqrt{13} + 3 \geq 2(a - \sqrt{13} - 3) \Leftrightarrow a \leq \sqrt{13} + 9.$$

Kết hợp với điều kiện (**) và a nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ ta có $a \in \{7; 8; 9; 10\}$.

$$\text{Th3: } \begin{cases} \sqrt{13} - 3 - a < 0 \\ \sqrt{13} + 3 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 < a < \sqrt{13} + 3, (***)$$

Khi đó $M > 0$ và $m = 0$ nên ta luôn có $M \geq 2m$

Kết hợp điều kiện (***) và a nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ ta có $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy $a \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$.

A. 3.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{114}{11}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$$



$$P = \frac{(3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1) + (x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5)}{x + 2y + 1}$$

$$= \frac{4y^2 + 4xy + x^2 + x + 2y + 4}{x + 2y + 1} = \frac{(2y + x)^2 + (x + 2y) + 4}{x + 2y + 1}.$$

Đặt $t = x + 2y$.

$$(1^2 + 2^2)[(x - 3)^2 + (y - 1)^2] \geq [(x - 3) + (2y - 2)]^2 \Rightarrow (x + 2y - 5)^2 \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq x + 2y \leq 10.$$

$$P = \frac{t^2 + t + 4}{t + 1} = t + \frac{4}{t + 1}, 0 \leq t \leq 10.$$

Sử dụng MTCT $\Rightarrow \min P = 3$ khi $t = 1$.

Câu 6. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

A. $(-6; -5)$.

B. $(-10; -9)$.

C. $(-11; -9)$.

D. $(-5; -4)$.

Lời giải

Chọn A

Vì a, b dương nên từ giả thiết $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$, ta chia hai vế cho ab

$$2\left(a^2 + b^2\right) + ab = (a + b)(ab + 2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a + b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho hai số dương $(a + b)$ và $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$:

$$(a + b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{(a + b) \cdot 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a + b) = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Suy ra $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$. Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, (t > 0)$.

Khi đó: $2t + 1 \geq 2\sqrt{2(t + 2)} \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{5}{2} \\ t \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$. Do đó, ta có điều kiện $t \geq \frac{5}{2}$.

$$\text{Mặt khác: } P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) = 4\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\right] - 9\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\right]$$

$$= 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18.$$

Đặt $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 \Rightarrow f'(t) = 12t^2 - 18t - 12 > 0, \forall t \geq \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên



t	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\frac{23}{4}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $\min_{t \in [\frac{5}{2}; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{23}{4}$ khi $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \\ (a+b) = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Câu 7. Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(4; 7)$.

B. $(-2; 1)$.

C. $(1; 4)$.

D. $(7; 10)$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y = 0 \Rightarrow P = \frac{5}{3}$ loại phương án A và **N.C.Đ** D.

Xét $y \neq 0 \Rightarrow P = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} > 0$ khi đó ta có biểu thức $\frac{5}{P} = \frac{3x^2 - 2xy - y^2}{x^2 + xy + 2y^2}$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho y^2 ta được $\frac{5}{P} = \frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} - 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 2}$.

Đặt $\frac{x}{y} = t (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{P} = \frac{3t^2 - 2t - 1}{t^2 + t + 2} = f(t) \Rightarrow f'(t) = \frac{5t^2 + 14t - 3}{(t^2 + t + 2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases}$

Bảng Biến thiên hàm số $f(t)$.

t	$-\infty$	-3	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	3	4	$-\frac{4}{7}$	3	

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{P} \leq 4 \Leftrightarrow P \geq \frac{5}{4}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $t = -3 \Leftrightarrow x = -3y$.

Câu 8. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thỏa mãn $|z - 2 + i| = |z + 2 + 5i|$ và biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $H = \frac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}}$. Giá trị của $2x + y$ bằng:

A. -6

B. $-6 + \sqrt{5}$

C. $-3 - \sqrt{5}$

D. $-6 - \sqrt{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z - 2 + i| = |z + 2 + 5i| \Leftrightarrow x + y + 3 = 0$ (1). Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thì M thuộc đường thẳng d có phương trình (1).

$$\begin{aligned} \text{Mà } H &= \frac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}} \\ &= \frac{(x+1)(x-1) + (y-1)(y-2)}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \quad (2) \end{aligned}$$

Đặt $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $M(x;y)$ thì

$$\overrightarrow{AM} = (x+1; y-1), \overrightarrow{MB} = (x-1; y-2) \Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}}{AM \cdot BM} = H$$

Mà A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d , M thuộc d nên $\cos \widehat{AMB}$ nhỏ nhất khi góc $\widehat{AMB}$ lớn nhất.

Gọi (C) là đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng d tại C.

Phương trình đường thẳng AB là: $x - 2y + 3 = 0$.

Gọi E là giao điểm của AB và d thì $E(-3;0)$

Vậy C thỏa mãn: $EC^2 = EA \cdot EB = 10$

$$\Rightarrow C(-3 + \sqrt{5}; -\sqrt{5}), C(-3 - \sqrt{5}; \sqrt{5})$$

$$\text{Chọn C để góc } \widehat{CEA} \text{ nhọn ta được } C(-3 + \sqrt{5}; -\sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 + \sqrt{5} \\ b = -\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow 2a + b = -6 + \sqrt{5}$$

Câu 9. Cho x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} > 0 \Leftrightarrow (x+y) > 0$.



Vì $x^2 + y^2 + xy + 2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 > 0$ với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$.

$$\Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-9(x+y).$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_3(x+y) + 9(x+y) = \log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 9(x+y) + 9(x+y) = \log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2 \quad (1).$$

Đặt $f(t) = \log_3 t + t \quad (\forall t > 0)$.

Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ với $(\forall t > 0) \Rightarrow f$ là hàm đồng biến với $(\forall t > 0)$. Khi đó:

$$f(9(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 9(x+y) = x^2+y^2+xy+2.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2-9x-9y=0.$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy+8-36x-36y=0.$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2 - 18(2x+y) + 3(y-3)^2 - 19 = 0.$$

$$\text{Mà } \Leftrightarrow 3(y-3)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x+y)^2 - 18(2x+y) - 19 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 2x+y \leq 19.$$

$$\text{Mặt khác } P-1 = \frac{2x+y-19}{x+y+10} \leq 0 \Rightarrow P \leq 1 \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 2x+y=19 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}.$$

Câu 10. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$.

Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-4-3\sqrt{2}$.

B. $-4-5\sqrt{2}$.

C. $-4-4\sqrt{2}$.

D. $-4-2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 1$. Ta đặt: $t = \frac{5x-y+2}{x+y+4}$

$$\Rightarrow t(x+y+4) = 5x-y+2 \Leftrightarrow (t-5)x + (t+1)y + 4t-2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (t-5)\left(x - \frac{y}{2}\right) + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}y}{2} = 2-4t.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(2-4t)^2 = \left[(t-5)\left(x - \frac{y}{2}\right) + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}y}{2}\right]^2 \leq \left[(t-5)^2 + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2\right] \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow (2-4t)^2 \leq \left[(t-5)^2 + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2\right] \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 24t \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

$$\text{Có: } f'(t) = 6t^2 - 6 \text{ nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}.$$

Ta có: $f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -5 + 4\sqrt{2}$

Do đó $M = f(0) = 1$, $m = f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}$.

Vậy $M + m = -4 - 4\sqrt{2}$.

Bài toán gốc: Cho $ax^2 + by^2 + cxy = d$. Tìm MGT $t = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$

Phương pháp giải:

Cách 1. Lượng giác hóa

Ta có: $ax^2 + by^2 + cxy = d \Leftrightarrow (a'x + b'y)^2 + (c'x + d'y)^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} a'x + b'y = \sin \alpha \\ c'x + d'y = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \sin \alpha \\ y = n \cos \alpha \end{cases}$

Suy ra: $t = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Leftrightarrow A \sin \alpha + B \cos \alpha = C$

Ta có: $A^2 + B^2 \geq C^2$ suy ra MGT của t .

Cách 2:

$$t = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Leftrightarrow A(mx + ny) + B(kx + qy) = C$$

□

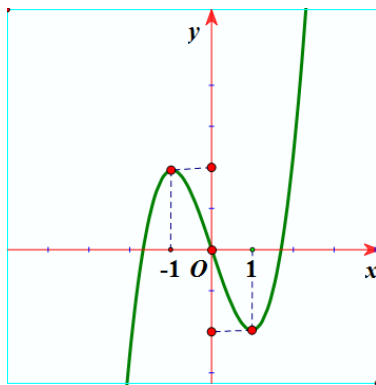
□ Chọn m, n, k, q sao cho $(mx + ny)^2 + (kx + qy)^2 \equiv ax^2 + by^2 + cxy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + k^2 = a \\ n^2 + q^2 = b \\ 2mn + 2kq = c \end{cases}$$

N.C.Đ

□ Áp dụng BĐT Bunhiacoxki ta có: $C^2 \leq (A^2 + B^2)d$ suy ra MGT của t .

Câu 12. Cho 2 số x, y thỏa mãn $x^2 + 5y^2 = 1 + 4xy$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{2x - 3y - 3}{-x + 4y + 4}\right)$.



Tích $M.m$ bằng

A. $\frac{-1436}{1331}$

B. $\frac{3380}{1331}$

C. $\frac{1436}{1331}$

D. $\frac{1944}{1331}$

Lời giải

Chọn C

Để thấy $f(x) = x^3 - 3x$



$$\text{Từ } x^2 + 5y^2 = 1 + 4xy \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x - 2y = \sin \alpha \\ y = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin \alpha + 2\cos \alpha \\ y = \cos \alpha \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$\text{Xét } t = \frac{2x - 3y - 3}{-x + 4y + 4} = \frac{2(\sin \alpha + 2\cos \alpha) - 3\cos \alpha - 3}{-(\sin \alpha + 2\cos \alpha) + 4\cos \alpha + 4} = \frac{2\sin \alpha + \cos \alpha - 3}{-\sin \alpha + 2\cos \alpha + 4}$$

$$\text{Ta có: } t(-\sin \alpha + 2\cos \alpha + 4) = 2\sin \alpha + \cos \alpha - 3 \Leftrightarrow (t + 2)\sin \alpha + (1 - 2t)\cos \alpha = 4t + 3 \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (t + 2)^2 + (2t - 1)^2 \geq (4t + 3)^2 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq \frac{-2}{11}$$

$$\text{Khi đó } P = f(t) = t^3 - 3t \text{ với } -2 \leq t \leq \frac{-2}{11}$$

$$\text{Dễ dàng tìm được } M = 2, m = \frac{718}{1331}. \text{ Vậy } M.m = \frac{1436}{1331}$$

Câu 13. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2xy = 1$ và hàm số $f(t) = t^4 - 2t^2 + 2$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{x+y-1}{x+3y-2}\right)$. Tổng $M + m$

A. $4\sqrt{3} + 2$.

B. $8\sqrt{3} - 2$.

C. 66.

D. $9\sqrt{3} + 17$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } x^2 + 5y^2 + 2xy = 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 4y^2 = 1$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x+y+1}{x+3y-2} \Rightarrow t(x+3y-2) = x+y+1 \Leftrightarrow (2t+1) = (t-1)(x+y) + 2ty$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(2t+1)^2 = [(t-1)(x+y) + 2ty]^2 \leq ((t-1)^2 + t^2)((x+y)^2 + 4y^2) \Rightarrow (2t+1)^2 \leq (t-1)^2 + t^2$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 6t \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 0$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^4 - 2t^2 + 2 \text{ với } -3 \leq t \leq 0$$

$$\text{Có: } f'(t) = 4t^3 - 4t, \text{ nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$f(0) = 2, f(-1) = 1, f(-3) = 65$$

$$\text{Do đó } M = f(-3) = 65; m = f(-1) = 1$$

$$\text{Vậy: } M + m = 66$$

Câu 14. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ và hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M + m$

A. 3.

B. $\frac{28}{9}$.

C. $\frac{19}{9}$.

D. 2

Lời giải

Chọn A



Viết lại điều kiện: $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} zy = 8 - x(y + z) \\ y + z = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = 8 - x(5 - x) \\ y + z = 5 - x \end{cases} (*)$

Vì x, y, z thỏa mãn $(*)$ nên y, z là hai nghiệm của phương trình

$$T^2 - (5 - x)T + 8 - 5x + x^2 = 0 (**)$$

Điều kiện có nghiệm của phương trình $(**)$ là:

$$\Delta = (5 - x)^2 - 4(8 - 5x + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ với $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$

Có $f'(x) = 2x - 4$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$f(1) = 2; f(2) = 1; f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{10}{9}$$

Do đó $M = f(1) = 2, m = f(2) = 1$.

Vậy $M + m = 3$.

Câu 15. Cho các số thực dương x, y, z thay đổi và thỏa mãn: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$ bằng

A. 18.

B. 12.

C. 16.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5x^2 - 9(y + z)x + 5y^2 + 5z^2 - 18yz = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 9(y + z)x - 2(y + z)^2 = -7(y - z)^2.$$

Vì $-7(y - z)^2 \leq 0 \Rightarrow 5x^2 - 9(y + z)x - 2(y + z)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2y - 2z)(5x + y + z) \leq 0$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 2z \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2(y + z) \Rightarrow 0 < x \leq 2(y + z).$$

Ta có: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3} \leq \frac{2(y + z)}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(2y + 2z + y + z)^3}$ Do $(y + z)^2 \leq 2(y^2 + z^2)$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2(y + z)}{\frac{1}{2}(y + z)^2} - \frac{1}{27(y + z)^3} = \frac{4}{y + z} - \frac{1}{27(y + z)^3}$$

Đặt $t = \frac{1}{y + z} > 0 \Rightarrow P = 4t - \frac{t^3}{27}$. Đặt $f(t) = 4t - \frac{t^3}{27} \Rightarrow f'(t) = 4 - \frac{t^2}{9}$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 36 \Leftrightarrow t = 6 \text{ (vì } t > 0 \text{)}.$$

Ta có bảng biến thiên của $f(t)$ là:



t	0	6	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	16	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(t) \leq 16 \Rightarrow P_{\max} = 16$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} y = z \\ x = 2y + 2z \\ \frac{1}{y+z} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = \frac{1}{12} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$ và các số thực m, n thỏa mãn $m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $f\left(\frac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng

A. -99.

B. -100.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

N.C.Đ

+) Xét hệ thức $m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$, (1).

+) Đặt $\frac{m-2\sqrt{2}}{n} = t$. Ta có $m - 2\sqrt{2} = nt \Leftrightarrow m = nt + 2\sqrt{2}$.

+) Thay vào (1) ta được: $(nt + 2\sqrt{2})^2 - 4(nt + 2\sqrt{2})n + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 4t + 5)n^2 + 2(2\sqrt{2}t - 5\sqrt{2})n + 9 = 0 \quad (2).$$

+) Có các số thực m, n thỏa mãn (1) $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{2}t - 5\sqrt{2})^2 - 9(t^2 - 4t + 5) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-5; 1].$$

+) Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 1$ trên đoạn $[-5; 1]$.

$$f'(t) = 6t^2 + 12t; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-5; 1] \\ t = -2 \in [-5; 1] \end{cases}.$$

Ta có $f(-5) = -99, f(-2) = 9, f(0) = 1, f(1) = 9$.

Suy ra $\min_{[-5; 1]} f(t) = -99$ khi $t = -5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f\left(\frac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng -99.

Câu 17. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $x^2 + y^2$.

A. $\frac{25}{16}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{2313}{1156}$.

D. $\frac{153}{100}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \frac{4^2}{4x} + \frac{1^2}{4y} \geq \frac{(4+1)^2}{4x+4y} = \frac{25}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{25}{6}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4}{4x} = \frac{1}{4y} \Leftrightarrow x = 4y$ mà $x + y = \frac{3}{2}$ nên $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

Cách 2:

Ta có $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \left(\frac{4}{x} + \frac{25}{9}x \right) + \left(\frac{1}{4y} + \frac{25}{9}y \right) - \frac{25}{9}(x+y)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{4}{x} + \frac{25}{9}x \geq 2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot \frac{25x}{9}} = \frac{20}{3}; \quad \frac{1}{4y} + \frac{25}{9}y \geq 2\sqrt{\frac{1}{4y} \cdot \frac{25y}{9}} = \frac{5}{3} \Rightarrow P \geq \frac{20}{3} + \frac{5}{3} - \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{25}{6}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{4}{x} = \frac{25}{9}x \\ \frac{1}{4y} = \frac{25}{9}y \end{cases}$ mà $\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

Cách 3:

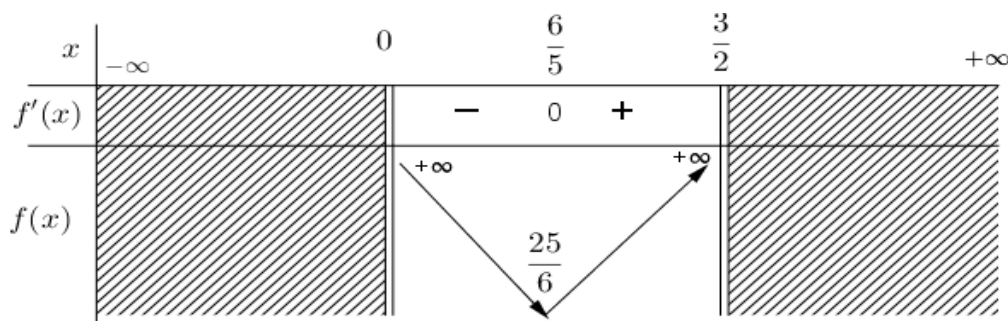
Do $x > 0$ và $x + y = \frac{3}{2}$ nên $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{6-4x}$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(6-4x)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (6-4x)^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4x = x \\ 6-4x = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \in \left(0; \frac{3}{2}\right) \\ x = 2 \notin \left(0; \frac{3}{2}\right) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên



Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^-} f(x) = +\infty$; $f(\frac{6}{5}) = \frac{25}{6}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có $\min_{(0; \frac{3}{2})} f(x) = f(\frac{6}{5}) = \frac{25}{6}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

Câu 18. Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{383}{16}$.

B. $\frac{136}{3}$.

N.C.Đ

C. $\frac{25}{2}$.

D. $\frac{391}{16}$.

Lời giải

Chọn D

+) $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019} \Leftrightarrow ((1-y)^2 + 2018) \cdot 2017^{1-y} = (x^2 + 2018) \cdot 2017^x \quad (1)$.

+) Xét hàm số $f(t) = (t^2 + 2018) \cdot 2017^t, t \geq 0$, ta có:

$f'(t) = 2017^t (t^2 \ln 2017 + 2t + 2018 \cdot \ln 2017) \geq 0, \forall t \geq 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Từ đó ta có $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(1-y) \Leftrightarrow 1-y = x \Leftrightarrow y = 1-x$.

+) Xét biểu thức: $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

$= (4x^2 + 3(1-x))(4(1-x)^2 + 3x) + 25x(1-x) = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$.

+) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $g(x) = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$ trên $[0; 1]$.

Ta có: $g'(x) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \in [0; 1] \\ x = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \in [0; 1] \\ x = \frac{1}{2} \in [0; 1] \end{cases}$



Ta có $g\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{191}{16}$; $g\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{191}{16}$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}$; $g(0) = 12$; $g(1) = 12$.

Khi đó $M = \frac{25}{2}$; $m = \frac{191}{16} \Rightarrow M + m = \frac{391}{16}$.

Cách khác: đặt $t = xy$ với $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ thì $S = 16t^2 - 2t + 12$. Khảo sát hàm số $y = 16t^2 - 2t + 12$ trên $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ để tìm max, min.

Câu 19. Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ $x \in (0; 2)$. Giá trị lớn nhất của $S = a + b$ là.

A. $S_{\max} = -1$. B. $S_{\max} = 0$. C. $S_{\max} = 1$. D. $S_{\max} = -3$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ

$x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = ax^2 + b & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2ax & (2) \end{cases}$ có nghiệm $x \in (0; 2)$.

Vì $x \in (0; 2)$ nên từ (2) suy ra: $2a = \frac{3x^2 - 3}{x}$ thay vào (1) ta được: $2b = -x^3 - 3x + 4$.

Suy ra: $2S = 2a + 2b = -x^3 - \frac{3}{x} + 4$.

N.C.Đ

Xét $f(x) = -x^3 - \frac{3}{x} + 4$ trên khoảng $(0; 2)$.

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + \frac{3}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	0	1	2
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{11}{2}$

Dựa vào BBT, ta có GTLN của $2S = 0$ nên GTLN của $S = 0$.

Vậy đáp án B.

Câu 20. Hàm số $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-2019)^2$ ($x \in \mathbb{R}$) đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) + \dots + 2(x-2019) = 2[2019x - (1+2+\dots+2019)]$$

$$= 2\left[2019x - \frac{2019 \cdot 2020}{2}\right] = 2019(2x - 2020).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019(2x - 2020) = 0 \Leftrightarrow x = 1010.$$

Ta có BBT:

x	$-\infty$	1010	$+\infty$
y'		0	
		$-$	$+$
y	$+\infty$	y_{CT}	$+\infty$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1010$.**Cách 2:**

$$\text{Ta có } f(x) = 2019x^2 - 2(1+2+3+\dots+2019)x + (1^2+2^2+\dots+2019^2)$$

$$= 2019x^2 - 2 \cdot \frac{2019}{2}(1+2019)x + (1^2+2^2+\dots+2019^2)$$

$$= 2019(x^2 - 2020x + 1010^2) + (1^2+2^2+\dots+2019^2 - 2019 \cdot 1010^2)$$

$$= 2019(x-1010)^2 + (1^2+2^2+\dots+2019^2 - 2019 \cdot 1010^2)$$

$$\geq 1^2+2^2+\dots+2019^2 - 2019 \cdot 1010^2, \forall x. \quad \text{N.C.Đ}$$

Do đó $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 1010$.**Câu 21.** Hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = a + b \text{ là}$$

A. 2.**B.** 0.**C.** -2.**D.** -1.**Lời giải****Chọn D**

$$\text{Ta có } f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + ax + b) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + ax + b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b \leq 0 \Leftrightarrow b \geq \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Khi đó: } S = a + b \geq a + \frac{a^2}{4} = \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - 1 \geq -1, \forall a.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} b = \frac{a^2}{4} \\ 1 + \frac{a}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Vậy $\min S = -1$, khi $a = -2, b = 1$.**Câu 22.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4$. Tính $P = a + 2b + 3c$ khi biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$ đạt giá trị lớn nhất.**A.** $P = 7$.**B.** $P = 3$.**C.** $P = -3$.**D.** $P = -7$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: phương pháp đại số.

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9$.

Áp dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối và bất đẳng thức BCS, ta có kết quả sau:

$$|2a + b - 2c + 7| = |2(a-1) + (b-2) - 2c + 11| \leq |2(a-1) + (b-2) - 2c| + 11$$

$$\stackrel{BCS}{\leq} \sqrt{[(a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2][2^2 + 1^2 + (-2)^2]} + 11 = 20.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} 2(a-1) + (b-2) - 2c > 0 \\ \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{1} = \frac{c}{-2} \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

Khi đó: $P = a + 2b + 3c = 3 + 2.3 + 3.(-2) = 3$.

Cách 2: phương pháp hình học.

Trong không gian $Oxyz$, gọi mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$. Khi đó:

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 4.$$

và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 7 = 0$.

$$\text{Gọi } M(a;b;c), \text{ ta có: } d(M;(P)) = \frac{|2a + b - 2c + 7|}{3}.$$

Vì $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4 \Rightarrow M \in (S)$.

Bài toán đã cho trở thành: Tìm $M \in (S)$ sao cho $d(M;(P))$ lớn nhất.

$$\text{Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng qua } I \text{ và vuông góc } (P) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}.$$

Điểm M cần tìm chính là 1 trong 2 giao điểm của Δ với $(S): M_1(3;3;-2), M_2(-1;1;2)$.

$$\text{Ta có: } d(M_1;(P)) = \frac{20}{3} > d(M_2;(P)) = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Max} d(M;(P)) = \frac{20}{3} \Leftrightarrow M \equiv M_1.$$

Vậy $P = a + 2b + 3c = 3 + 2.3 + 3.(-2) = 3$.

Phân tích: Khi quan sát 2 cách giải, đối với giáo viên ta sẽ dễ chọn Cách 1 vì ngắn gọn và tiết kiệm thời gian. Tuy nhiên học sinh không nhiều em đã từng được tiếp cận bất đẳng thức BCS. Đối với Cách 2, về mặt trình bày có thể dài hơi, nhiều tính toán hơn nhưng đó chỉ là những bước tính toán khá cơ bản, một học sinh khá nếu nhận ra ý đồ tác giả thì việc giải bài toán cũng không mất quá nhiều thời gian. Bài toán sẽ dễ hơn nếu đề bài chỉ yêu cầu tìm Min hoặc Max của biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$.

Câu 23. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c = 10$ và $a + c = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = 3a + 2b + c$ khi $Q = a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 8b + 18c$ đạt giá trị lớn nhất.



A. 10.

B. -10 .

C. 12.

D. -12 .**Lời giải****Chọn D**

Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{24}$. Khi đó:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 10.$$

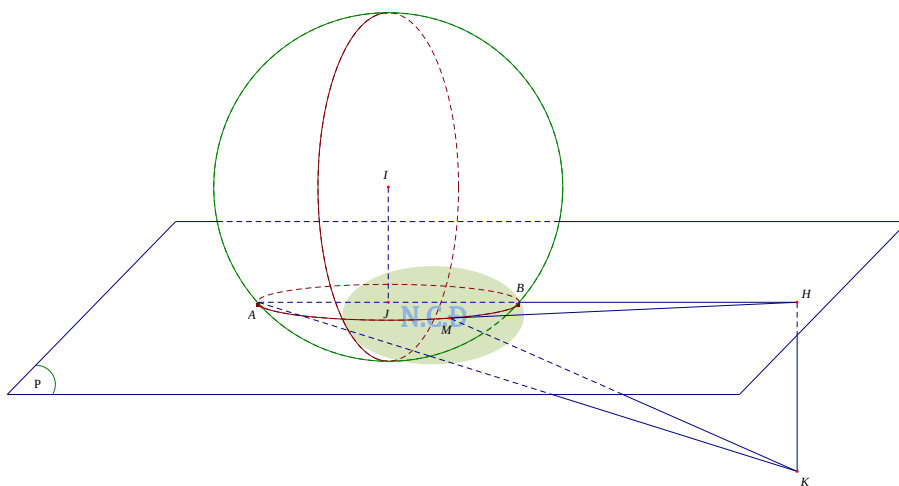
Gọi (P) là mặt phẳng có phương trình $x + z = 2$ và điểm $K(7; 4; -9)$.

Với $M(a; b; c)$. Theo giả thiết ta có: $M \in (S)$ và $M \in (P) \Rightarrow M \in (S) \cap (P)$.

Hơn nữa:

$$Q = a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 8b + 18c = (a - 7)^2 + (b - 4)^2 + (c + 9)^2 - 146 = KM^2 - 146.$$

Bài toán trở thành: Tìm M nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) sao cho KM lớn nhất.



(P) có VTPT $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua K và vuông góc $(P) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 4 \\ z = -9 + t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu của K lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow H = \Delta \cap (P) \Rightarrow H(9; 4; -7)$.

Ta có: $KM^2 = KH^2 + HM^2$, mà KH không đổi nên KM lớn nhất khi HM lớn nhất.

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc $(P) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Gọi J là tâm đường tròn giao tuyến của (S) và $(P) \Rightarrow J$ là hình chiếu của I lên $(P) \Rightarrow J = d \cap (P) \Rightarrow J(0; -2; 2)$.

Phương trình đường thẳng $HJ: \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.



Gọi A, B là các giao điểm của HJ và $(S) \Rightarrow A(-3; -4; 5), B(3; 0; -1)$.

Ta có: $HA = 4\sqrt{22} > HB = 2\sqrt{22}$.

Vậy $Max HM = 4\sqrt{22} \Leftrightarrow M \equiv A(-3; -4; 5)$. Khi đó: $P = 3a + 2b + c = -12$.

Câu 24. Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 2.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ (*).

$$\Rightarrow x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \Rightarrow ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 = -x_0^4 - 1.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$x_0^4 + 1^2 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \quad x_0^6 + x_0^4 + x_0^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{x_0^4 + 1^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2} \quad (x_0 = 0 \text{ không là nghiệm của phương trình } (*)).$$

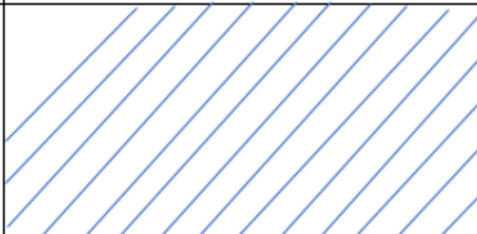
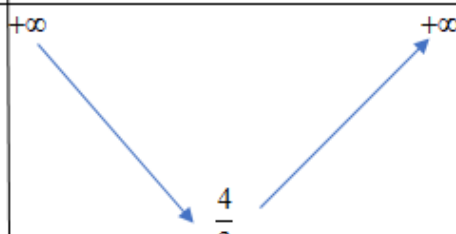
$$\text{Đặt } t = x_0^2 (t > 0) \text{ ta có } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{t^2 + 1^2}{t^3 + t^2 + t}.$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2 + 1^2}{t^3 + t^2 + t} \quad (t > 0)$$

N.C.Đ

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{4t^3 + 4t - t^3 - t^2 - t - t^4 + 2t^2 + 1}{t^3 + t^2 + t^2} = \frac{t + 1^2(t^4 - 1)}{t^3 + t^2 + t^2} = \frac{t + 1^3 t - 1}{t^3 + t^2 + t^2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(t)$	+	0	-	-	0	+
$f(t)$				$+\infty$		

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{0 < t} f(t) = \frac{4}{3}$ khi $t = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Khi $a = b = c = \frac{2}{3}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}$ và phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm $x_0 = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng $\frac{4}{3}$.

Câu 25. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 2$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 2x + 3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$.

A. $3\sqrt{2}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 4$ và $g'(x) = -3x^2 + 2bx - 2$.

Vì $f(x)$ và $g(x)$ có chung ít nhất một điểm cực trị nên $f'(x) = 0$ và $g'(x) = 0$ có chung

$$\text{nghiệm là } t. \text{ Suy ra } \begin{cases} 3t^2 + 2at + 4 = 0 \\ -3t^2 + 2bt - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-3t^2 - 4}{2t} \\ b = \frac{3t^2 + 2}{2t} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } P = |a| + |b| = \left| \frac{-3t^2 - 4}{2t} \right| + \left| \frac{3t^2 + 2}{2t} \right| = \frac{3t^2 + 3}{|t|} = 3 \left(|t| + \frac{1}{|t|} \right) \geq 6. \text{ (bất đẳng thức Cauchy)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } |t| = \frac{1}{|t|} \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Vậy $\min P = 6$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

N.C.Đ

Bài 1: Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị

$$\text{lớn nhất của biểu thức } P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$$

$$\text{Đặt } x = ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 12$$

$$\text{Ta có: } a, b, c \in [1;3] \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 \geq 0 \\ \Rightarrow abc - x + 5 \geq 0 \Rightarrow abc \geq x - 5$$

$$\text{Lại có: } (a-3)(b-3)(c-3) \leq 0 \Rightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0 \\ \Rightarrow abc \leq 3x - 27. \text{ Do đó: } 3x - 27 \geq abc \geq x - 5 \Rightarrow 2x \geq 22 \Rightarrow x \geq 11.$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}abc \leq \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}(x - 5) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}, x \in [11;12]$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{72}{x^2} \leq 0 \forall x \in [11;12] \text{ nên } P \leq f(x) \leq f(11) = \frac{160}{11}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{160}{11} \text{ khi } a = 1; b = 2; c = 3$$

Nhận xét: Đây là bài toán rất hay. Ta phải dùng hai lần giả thiết của các biến

$a; b; c \in [1;3]$ để tìm ra miền giá trị của $x = ab + bc + ca$ và đánh giá được P thông qua biến x .

Cũng từ bài toán trên phải chăng bằng việc đánh giá điều kiện ban đầu chúng ta sẽ giải quyết được một lớp các bài toán dạng này bằng cách đưa về hàm số một biến, chính vì vậy qua chuyên

đề này tác giả muốn rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải toán cực trị bằng phương pháp đơn biến.

Bài 2: Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2(xy + yz + zx)}{xyz + 2(2x + y + z)} + \frac{8}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

Lời giải

Vì $x, y, z \in [1; 2]$, nên ta có

$$(x - 1)(y - 2)(z - 2) \geq 0 \Leftrightarrow xyz + 2(2x + y + z) \geq 2(y + z)x + yz + 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$ hoặc $y = 2$ hoặc $z = 2$. Do đó

$$A \leq \frac{2(xy + yz + zx)}{2x(y + z) + yz + 4} + \frac{8}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1} = \frac{2x(y + z) + yz + 4 + yz + 4}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz + 4}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1} \leq 1 + \frac{yz + 4}{2(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz + 4}{yz + 4\sqrt{yz} + 4} - \frac{2\sqrt{yz} + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

Đặt $t = \sqrt{yz}$; $t \in [1; 2]$

Xét hàm số: $f(t) = 1 + \frac{t^2 + 4}{(t + 2)^2} - \frac{2t + 4}{t + 1}$ với $t \in [1; 2]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t - 8}{(t + 2)^3} + \frac{2}{(t + 1)^2} \geq \frac{4}{27} + \frac{2}{9} > 0$, nên $f(t)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

$$\text{Suy ra } A \leq f(t) \leq f(2) = -\frac{7}{6}$$

Vậy $\max A = -\frac{7}{6}$ khi $x = 1; y = z = 2$

Bài 3: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 2, c \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8 - b}{b + c + b(a + c) + 8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} + 8}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} = \sqrt{3(4a^2 + b^2 + 9c^2)} \geq 2a + b + 3c \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 2a + b + 3c - b - c - b(a + c) = (a + c)(2 - b) \geq 0$$

$$\Rightarrow 2a + b + 3c \geq b + c + b(a + c) \quad (2)$$

$$\text{Lại có } 2ab + ac + bc - b - c - b(a + c) = (b + c)(a - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 2ab + ac + bc \leq b + c + b(a + c) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được

$$B \leq \frac{2[b + c + b(a + c)]}{1 + b + c + b(a + c)} + \frac{8 - b}{b + c + b(a + c) + 8} + \frac{b}{b + c + b(a + c) + 8}$$

$$B \leq \frac{2[b + c + b(a + c)]}{1 + b + c + b(a + c)} + \frac{8}{b + c + b(a + c) + 8}$$

Đặt $t = b + c + b(a + c) \Rightarrow 0 \leq t \leq 13$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t + 1} + \frac{8}{t + 8}$ với $t \in [0; 13]$



$$f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{8}{(t+8)^2} = \frac{2(3t+10)(6-t)}{(t+1)^2(t+8)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$f(0) = 1, f(6) = \frac{16}{7}, f(13) = \frac{47}{21}$$

Từ đó suy ra $B \leq f(t) \leq \frac{16}{7} \Rightarrow \max B = \frac{16}{7}$ đạt được khi $a = 1, b = 2, c = \frac{2}{3}$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y + z = x(y^2 + z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $x(y+z)^2 \leq 2x(y^2+z^2) = 2(y+z) \Leftrightarrow y+z \leq \frac{2}{x}$

$$\text{Do đó: } (1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}(2+y+z)^2 \leq \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{(1+x)^2}{x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+y)(1+z)} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

$$P \geq \frac{2x^2+1}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2(5x-1)}{(1+x)^4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}. \quad \text{N.C.Đ}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được: } P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{91}{108}$. Khi $x = \frac{1}{5}, y = z = 5$.

Bài 5: Cho $a > b > c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Lời giải

Nhận xét: Giả thiết đã cho chính là gợi ý của bài toán. Cách làm giảm biến số quen thuộc là đặt $a = c + x, b = c + y \Rightarrow x > y > 0$

Khi đó:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= (c+x)^2 + (c+y)^2 + c^2 - (c+x)(c+y) - (c+y)c - c(c+x) \\ &= x^2 + y^2 - xy \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta viết lại } P \text{ dưới dạng } P = (x^2 - xy + y^2) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right]$$

Như vậy với cách đặt ẩn phụ này, ta đã làm giảm số biến của P thành hai biến.

Thậm chí là P là đồng bậc giữa x và y . Ta chỉ việc đặt ẩn phụ quen thuộc

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} > 1 \text{ ta được } P = (t^2 - t + 1) \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t^2} + 1 \right] = f(t);$$

Xét hàm $f(t)$ trên $(1; +\infty)$ ta có:



$$f'(t) = (2t-1) \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t^2} + 1 \right] + (t^2-t+1) \left[-\frac{2}{(t-1)^3} - \frac{2}{t^3} \right]$$

$$f'(t) = \frac{(2t-1)[t^3(t-1) + t(t-1)^3 + t^3(t-1)^3] - 2(t^2-t+1)[t^3 + (t-1)^3]}{t^3(t-1)^3}$$

Cách đặt này khá phức tạp. Ta có thể đặt theo cách khác sau đây

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow t > 2$. Khi đó ta có

$$P = \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \right) \left[\frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{xy}{y^2} + \frac{xy}{x^2} \right] = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

$$P = (t-1) \left(\frac{1}{t-2} + t \right) = \frac{(t-1)^3}{t-2} = f(t)$$

Xét hàm $f(t)$ trên $(2; +\infty)$ ta được: $\ln f(t) = 3\ln(t-1) - \ln(t-2)$

$$\Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{3}{t-1} - \frac{1}{t-2} = \frac{2t-5}{(t-1)(t-2)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(2t-5)(t-1)^2}{(t-2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

Lập bảng biến thiên ta được $P = f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow a = b + d = c + 2d, \forall d > 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{27}{4}$

Bài 6: Cho $x, y, z > 0; xyz(x+y+z) = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x+y)(x+z) + y^2z^2$

Lời giải

Nhận xét: Có một chú ý quan trọng của bài 6 là một phép biến đổi nhỏ

$$(x+y)(x+z) = x^2 + xy + xz + yz = x(x+y+z) + yz = \frac{20}{yz} + yz$$

Như vậy biến mới được hình thành.

Đặt $t = yz > 0$ suy ra $P = \frac{20}{t} + t + t^2 = f(t)$. Xét $f(t) = t^2 + t + \frac{20}{t}$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 2t + 1 - \frac{20}{t^2} = \frac{2t^3 + t^2 - 20}{t^2} = \frac{(t-2)(2t^2 + 5t + 10)}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \geq f(2) = 16$

Do đó $P \geq 16$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xyz(x+y+z) = 10 \\ yz = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Kết luận: $\min P = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Bài 7: Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right|$

Lời giải



Nhận xét: Khi gặp bài toán trên, ta chưa thể tìm cách phá giá dấu giá trị tuyệt đối. Do vậy cứ thử quy đồng và tách tung ra xem có gì đặc biệt không. Bởi vì lưu ý rằng: khi cho $a = b, b = c, c = a \Rightarrow P = 0$. Nên sau khi biến đổi chắc chắn sẽ chứa nhân tử $(a - b)(b - c)(c - a)$

$$\text{Do đó: } P = \left| \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{abc} \right| = \left| \frac{ab(a-b) - bc(a-b) + bc(a-c) - ca(a-c)}{abc} \right|$$

$$P = \left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \right|$$

Đến đây ta giả sử $\frac{1}{2} \leq c \leq b \leq a \leq 1$ để mục tiêu làm mất dấu giá trị tuyệt đối.

$$P = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Nhận xét rằng có một phép biến đổi làm giảm biến số một cách đơn giản là

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x = \frac{a}{c} \\ y = \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq y \leq x \leq 2$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{(x-y)(y-1)(x-1)}{xy} = \frac{x-1}{x} \cdot \left[x+1 - \left(y + \frac{x}{y} \right) \right] = f(x; y)$$

Mục tiêu viết như trên là đạo hàm theo biến y (hoặc biến x).

$$f'_y(x; y) = \frac{x-1}{x} \cdot \left(-1 + \frac{x}{y^2} \right) \Rightarrow f'_y(x; y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x} \in [1; x]$$

Lập bảng biến thiên ta thu được

N.C.Đ

$$P = f(x; y) \leq f(x; \sqrt{x}) = \frac{(x - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1)(x - 1)}{x\sqrt{x}} = \frac{(t^2 - t)(t - 1)(t^2 - 1)}{t^3}, t = \sqrt{x} \in [1; \sqrt{2}]$$

$$\text{hay } P \leq \frac{(t-1)^3(t+1)}{t^2} = g(t)$$

Xét hàm $g(t)$ trên $(1; \sqrt{2})$ ta có: $\ln g(t) = 3 \cdot \ln(t-1) + \ln(t+1) - 2 \cdot \ln t$

$$\Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{3}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t} = \frac{3t^2 + 3t + t^2 - t - 2t^2 + 2}{(t-1)(t+1)t} = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(t-1)(t+1)t} > 0; \forall t \in (1; \sqrt{2})$$

$$\text{Từ đó ta có } g(t) \leq g(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2}-1)^3(\sqrt{2}+1)}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}.$$

$$\text{Nhu vậy } P \leq g(t) \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ t = \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = c\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} \Leftrightarrow (a; b; c) = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0, a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2$

Lời giải

Nhận xét: Giả thiết chỉ cho dữ liệu liên quan tới a, b dù không dự đoán được đẳng thức xảy ra nhưng ta vẫn có thể khai thác được giả thiết bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz với mục tiêu là chỉ còn biến c .



Ta có: $\left(\frac{c}{x} \cdot \frac{x}{b} + \frac{c}{y} \cdot \frac{y}{a}\right)^2 \leq \left(\frac{c^2}{x^2} + \frac{c^2}{y^2}\right) \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)$

Từ thiết $a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} \leq 1$

Như vậy ta phải chọn $x^2 = 1, y^2 = 2$

Do đó ta có: $P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2 \leq \sqrt{\left(\frac{c^2}{1} + \frac{c^2}{2}\right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2}\right)} - (c-1)^2 \leq c\sqrt{\frac{3}{2}} - c^2 + 2c - 1$

$\Rightarrow P \leq -c^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)c - 1 = f(c)$

Xét hàm số $f(c)$ trên $(0; +\infty)$ ta có: $f'(c) = -2c + \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1 + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Lập bảng biến thiên ta suy ra: $P \leq f(c) \leq f\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\max P = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{6}, b = \frac{\sqrt{6}}{2}, c = 1 + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, c \geq 1; b \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(3+ac)}$$

Lời giải

Ta có $(1-a)(2-b) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - b + ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a + b \leq ab + 2$

$\Rightarrow \frac{1}{b+2a} \geq \frac{1}{ab+2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{b+2a} \geq \frac{c(a+b)}{ab+2}$

Tương tự ta có $\frac{a(b+c)}{b+2c} \geq \frac{a(b+c)}{bc+2}$

Lại có

$3(a+c)^2 + 2b^2 + 8 = 2[(a+c)^2 + b^2] + (a+c)^2 + 8 \geq 4(a+c)b + 4ac + 8 = 4(ab+ac+bc+2)$

$\Rightarrow P \geq \frac{c(a+b)}{ab+2} + \frac{a(b+c)}{bc+2} + \frac{4(ab+bc+ca+2)}{4(ac+3)}$

$= \left(\frac{ac+bc}{ab+2} + 1\right) + \left(\frac{ab+bc}{bc+2} + 1\right) + \left(\frac{ab+bc+ca+2}{ac+3}\right) - 2$

$= (ab+bc+ca+2) \left(\frac{1}{ab+2} + \frac{1}{bc+2} + \frac{1}{ac+3}\right) - 2 \geq \frac{9(ab+bc+ca+3)}{ab+bc+ca+7} - 2$

Xét hàm số $f(t) = \frac{9(t+2)}{t+7} - 2 = 7 - \frac{45}{t+7}$ mà $t = ab+bc+ca \geq 5 \Rightarrow P \geq 7 - \frac{45}{5+7} = \frac{13}{4}$

Vậy $\min P = \frac{13}{4} \Leftrightarrow (a; b; c) = (1; 2; 1)$

Bài 10: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} + \frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}} + \frac{2}{xy+xz-yz}$$

Lời giải

Với những bài toán có điều kiện ban đầu $x, y, z \in [0; 1]$ chúng ta sẽ tìm cách khai thác nó, dự đoán điểm rơi là $z = y = 1; z = 0$



Hơn nữa với $\frac{2}{xy+xz-yz}$ có chứa $xy+xz-yz$ ở mẫu, đây là hạng tử có thể gợi ý cho chúng ta dồn biến về $xy+xz-yz$.

Ta có $x \in [0;1]$ suy ra $\sqrt{x} \geq x^2$; $\frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} = \frac{\sqrt{x}(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}} \geq \frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{\sqrt{A.B}} \geq \frac{2}{A+B}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B>0$. Vì dự đoán điểm rơi $z=y=1; z=0$ nên khả năng $x=x+z$ và $y=y+z$ là hoàn toàn có thể xảy ra.

Ta có: $\frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}} \geq x^2(y+z)^2 \cdot \frac{2}{2x+z}$ và $\frac{(yz+1)^2}{\sqrt{y(y+z)}} \geq (yz+1)^2 \cdot \frac{2}{2y+z}$

Do đó $P \geq \frac{2x^2(y+z)^2}{2x+z} + \frac{2(yz+1)^2}{2y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz} \geq \frac{(xy+yz+xz+1)^2}{x+y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz}$

Với điều kiện $x, y, z \in [0;1]$ ta luôn có

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy+yz+xz+1 \geq xyz+x+y+z \geq x+y+z$$

Suy ra $P \geq x+y+z + \frac{2}{xy+xz-yz}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x^2 + (y+z)^2 \geq 2x(y+z) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$$

Mà $x, y, z \in [0;1] \Rightarrow x+y+z \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$

$$\Rightarrow P \geq 2(xy+xz-yz) + \frac{2}{xy+xz-yz} \geq 4 \quad \text{N.C.Đ}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=1 \\ z=0 \end{cases}$

Vậy $\min P = 4$ đạt được khi $x=y=1; x=0$

Bài 11: Cho các số $a, b, c \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $0 \leq c \leq b \leq a \leq 1$

$$\text{Ta có } P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc \leq \frac{1}{1+bc} + \frac{b}{1+bc} + \frac{c}{1+bc} + bc \leq bc + \frac{1}{1+bc} + \frac{b+c}{1+bc}$$

$$\text{Từ giả thiết ta được } (1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1-bc \geq b+c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b+c}{1+bc} \leq 1$$

$$\text{Suy ra } A \leq bc + 1 + \frac{1}{1+bc}. \text{ Đặt } t = 1+bc \Rightarrow 1 \leq t \leq 2. \text{ Xét hàm số } f(t) = t + \frac{1}{t}; t \in [1;2]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0 \forall t \in [1;2] \text{ suy ra } f(t) \text{ đồng biến trên } [1;2] \Rightarrow f(t) \leq f(2) = \frac{5}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{5}{2}$ khi $a=b=c=1$

Bài 12: Cho các số thực $a, b, c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$

Lời giải

Áp dụng hệ quả $1(a+b)^2 \geq 4ab$



$$\text{Ta có } P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)} \geq \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + (a+b)^2} = M$$

Do $a, b, c \in [1; 2]$ nên $a+b \neq 0$, chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$$M = \frac{1}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a+b}\right) + 1} = \frac{1}{t^2 + 4t + 1} \text{ với } t = \frac{c}{a+b}.$$

Với $a, b, c \in [1; 2]$ và $t = \frac{c}{a+b} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 1}$ trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-2(t+2)}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}; \forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ hay } P \geq \frac{1}{6}$$

Vậy $\min P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 1$ và $c = 2$

Bài 13: Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Nhận xét: từ giả thiết ta nhận thấy các biến a và b có tính chất đối xứng, do đó để giải bài toán

$$\text{ta sử dụng } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

N.C.Đ

$$\text{Ta có: } P \geq \frac{\frac{(a+b)^2}{2} + c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{a+b}{c} + 1\right)^2} \text{ vì } c > 0$$

$$\text{Với hai số thực } x, y \text{ tùy ý, ta có } x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Từ giả thiết $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$ sử dụng đánh giá trên ta thu được

$$c^2 = c + a^3 + b^3 = c + (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq c + \frac{(a+b)^3}{4} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{(a+b)^3}{4}} \Rightarrow 0 \leq \frac{a+b}{c} \leq 1.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a+b}{c} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \text{ (vì } a, b \geq 0 \text{ và } c > 0). \text{ Khi đó } P \geq \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2} \text{ trên } [0; 1], \text{ ta có } f'(t) = \frac{t-2}{(t+1)^3} < 0, \forall t \in [0; 1]$$

$$\text{Do đó } f(t) \text{ là hàm số nghịch biến trên } [0; 1] \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{8}, \forall t \in [0; 1]$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{3}{8}, \forall a, b, c \geq 0 \text{ thỏa mãn } c > 0 \text{ và } a^3 + b^3 = c(c-1).$$

Vậy $\min P = \frac{3}{8}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 1; c = 2$

Bài 14: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$$

Lời giải



Ta có $P = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$

Áp dụng hệ quả 2 ta có $\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3$

Do đó $P \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$. Đặt $t = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow t \in [0;1)$.

Khi đó $P \geq \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$ trên $[0;1)$

Ta có $f'(t) = \frac{189t^2 + 6t - 3}{4} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{9} \in [0;1) \\ t = -\frac{1}{7} \notin [0;1) \end{cases}$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{81}, \forall t \in [0;1) \Rightarrow P \geq f(t) \geq \frac{16}{81}$

Vậy $\min P = \frac{16}{81}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 4z$

Bài 15: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2}$$

Lời giải

Nhận xét: Ta chỉ cần biến đổi $2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2 = z^2 + 4(x+y)z + 4xy$

Ta có $P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2} = \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + 4xy}$

Ta có $4xy \leq (x+y)^2$. Do đó $P \geq \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + (x+y)^2} = \frac{\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}$

Đặt $t = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, vì x, y, z thuộc đoạn $[1;2] \Rightarrow t \in [1;4]$. Khi đó ta có $P \geq \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$ trên $[1;4]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 + 2t}{(1 + 4t + t^2)^2} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in [1;4]$. Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên

$[1;4]$. Do đó $f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}, \forall t \in [1;4]$ hay $P \geq \frac{1}{6}, \forall x, y, z \in [1;2]$

Vậy $\min P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 1$ và $z = 2$

Bài 16: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Lời giải

Vì $c > 0$ do đó ta có $P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}}$

Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} \Rightarrow x, y > 0$ (vì $a, b, c > 0$) khi đó biểu thức P trở thành

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Biến đổi giả thiết $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$ ta thu được

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^2 y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Ta có $x^2 y^2 = 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Rightarrow xy \geq x+y$

$$\text{và } x^2 + y^2 + 1 = (x+y)^2 - 2xy + 1 \leq (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2 \quad (1)$$

Ta lại có $(x+y)^2 \geq 4xy \geq 4(x+y) \Rightarrow x+y \geq 4 \quad (2) \quad (\text{vì } x, y > 0)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq x+y-1$

Biến đổi biểu thức P , ta thu được

$$P+2 = \frac{x}{y+1} + 1 + \frac{y}{x+1} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = (x+y+1) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Từ hệ quả 3, ta có: $P+2 \geq (x+y+1) \frac{4}{x+y+2} + \frac{1}{x+y-1} \Rightarrow P \geq 2 - \frac{4}{x+y+2} + \frac{1}{x+y-1}$

Đặt $t = x+y \Rightarrow t \geq 4$. Do đó $P \geq 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1}$

Xét hàm số $f(t) = 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1}$ trên $[4; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{3t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2} \geq 0, \forall t \in [4; +\infty)$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (vì $t \in [4; +\infty)$)

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[4; +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(4) = \frac{5}{3}, \forall t \in [4; +\infty) \text{ hay } P \geq f(t) \geq \frac{5}{3}$$

Vậy $\min P = \frac{5}{3}$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 2c$

Bài 17: Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+2y-z \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y}$

Lời giải

Ta có $x+2y-z \geq 0 \Leftrightarrow z \leq x+2y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z \leq 2x+3y \\ 10y+z \leq x+12y \end{cases}$

Do đó $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y} \geq \frac{x}{x+12y} + \frac{y}{2x+3y} + \frac{x+2y}{2x+3y}$



$$\Rightarrow P \geq \frac{x}{x+12y} + \frac{x+3y}{2x+3y} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+12} + \frac{\frac{x}{y}+3}{2\frac{x}{y}+3}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \Rightarrow t > 0. \text{ Khi đó } \Rightarrow P \geq \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3} \text{ trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{12t}{(t+12)^2} - \frac{3}{(2t+3)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+12)^2 = 4(2t+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in (0; +\infty) \\ t = -\frac{18}{5} \notin (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên suy ra } f(t) \geq f(2) = \frac{6}{7}, \forall t \in (0; +\infty). \text{ Suy ra } P \geq \frac{6}{7}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{6}{7}, \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = 2y, z = 4y.$$

Nhận xét ta có thể coi P là hàm của z và x, y là tham số và xét hàm $P(z)$ trên $(0; x+2y]$

Bài 18: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$

Lời giải

$$\text{Vì } a > 0 \text{ do đó } P = \frac{1}{5\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)} + \frac{\frac{b}{a}}{5 - 2 \cdot \frac{c}{a}} + \frac{\frac{c}{a}}{5 - 2 \cdot \frac{b}{a}}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{b}{a} \\ y = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow x, y \in (0; 1] \text{ vì } a, b, c > 0 \text{ và } a \geq b, a \geq c.$$

$$\text{Khi đó biểu thức } P \text{ được viết lại như sau: } P = \frac{1}{5(1+x+y)} + \frac{x}{5-2y} + \frac{y}{5-2x}$$

$$\Rightarrow 2P - 2 = \frac{2}{5(1+x+y)} + (2x+2y-5) \left(\frac{1}{5-2y} + \frac{1}{5-2x} \right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{5-2x} + \frac{1}{5-2y} \geq \frac{4}{10-2x-2y} \text{ và } 2x+2y-5 < 0, \forall x, y \in (0; 1]$$

$$\text{Do đó } 2P - 2 \leq \frac{2}{5(1+x+y)} + (2x+2y-5) \frac{4}{10-2x-2y}$$

$$\text{hay } P \leq \frac{2}{5(1+x+y)} + \frac{5}{5-x-y} - 1$$

$$\text{Đặt } t = x+y \Rightarrow t \in (0; 2] \text{ vì } x, y \in (0; 1].$$

$$\text{Khi đó ta có } P \leq \frac{2}{5(t+1)} + \frac{5}{5-t} - 1$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2}{5(t+1)} + \frac{5}{5-t} - 1 \text{ trên } (0; 2]$$



$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{25(t+1)^2 - (t-5)^2}{5(t+1)^2(t-5)^2} = \frac{24t^2 + 60t}{5(t+1)^2(t-5)^2} > 0, \forall t \in (0; 2]$$

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; 2] \Rightarrow f(t) \leq f(2) = \frac{11}{15}, \forall t \in (0; 2]$

hay $P \leq \frac{11}{15}$, với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$.

Vậy $\text{Max} P = \frac{11}{15}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $a = b = c$

Bài 19: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3 z}{y^2(xz + y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz + y^2)} + \frac{z^3 + 15x^3}{x^2 z}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{15}{\frac{z}{x}}. \text{ Đặt } a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \\ c > 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c}$$

$$\text{Áp dụng hệ quả 2, ta có } P \geq \frac{ab(a+b)}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c} = c^2 + \frac{16}{c}$$

Xét hàm số $f(c) = c^2 + \frac{16}{c}$ trên $(1; +\infty)$. Ta có $f'(c) = 2c - \frac{16}{c^2} \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 2$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(c) \geq f(2) = 12, \forall c \in (1; +\infty)$

$$\text{Vậy } \text{Min} P = 12 \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } \begin{cases} a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c = 2 \end{cases} \text{ hay } 2x = y\sqrt{2} = z$$

Bài 20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức: } P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Lời giải

Đặt $a = xc; b = yc; (x, y \geq 1)$

Thay $x = 1$ vào giả thiết ta có: $\sqrt{b-c} = \sqrt{b} \Rightarrow c = 0$ (không thỏa mãn giả thiết)

Tương tự $y = 1$ cũng không thỏa mãn.

$\Rightarrow x > 1; y > 1$ thay vào giả thiết ta có:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} = xy$$

$$\Leftrightarrow x - x - y + 1 - 2\sqrt{(x-1)(y-1)} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(y-1)} = 1 \Leftrightarrow xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq 4$$

Mặt khác

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$



$$\Rightarrow P \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{xy}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy} = \frac{(xy)^3 - 2(xy)^2 + 3xy - 3}{3[(xy)^2 - 2xy]}$$

$$\text{Đặt } t = xy; t \geq 4, \text{ khi đó ta có } P \geq \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)} \text{ trên } [4; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{t^4 - 4t^3 + t^2 + 6t - 6}{3(t^2 - 2t)^2} = \frac{t^3(t-4) + t^2 + 6(t-4) + 18}{3(t^2 - 2t)^2} > 0, \forall t \geq 4$$

$$\text{Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } [4; +\infty). \text{ Do đó: } \min_{[4; +\infty)} f(t) = f(4) = \frac{41}{24}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{41}{24} \text{ khi } x = y = 2 \text{ hay } a = b = 2c$$

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \geq b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab + bc + ca}}{abc(a + b + c)}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = xb; c = yb \Rightarrow 0 < y \leq 1 \leq x$$

$$\text{Khi đó } T = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x + y + xy}}{xy(x + y + 1)} \geq \frac{(x + y)^2 \sqrt{x + y + xy}}{2xy(x + y + 1)}$$

$$\text{Đặt } S = x + y; P = xy \text{ vì } 0 < y \leq 1 \leq x \Rightarrow \begin{cases} S > 1 \\ (x-1)(y-1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < P \leq S - 1$$

$$\text{Đặt } f(P) = \frac{S^4(S + P)}{4P^2(S + 1)^2} \text{ ta có } f'(P) = -\frac{S^4(2S + P)}{4P^3(S + 1)^2} < 0, \forall P \in (0; S - 1]$$

Do đó $f(P)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; S - 1]$

$$\Rightarrow f(P) \geq f(S - 1) = \frac{S^4(2S - 1)}{4(S^2 - 1)^2}, \forall P \in (0; S - 1]. \text{ Xét hàm số } g(S) = \frac{S^4(2S - 1)}{4(S^2 - 1)^2} \text{ với } S > 1$$

$$\text{Ta có } g'(S) = \frac{(S - 2)(S^2 + 2S - 1)S^3}{2(S^2 - 1)^3} \Rightarrow g'(S) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \text{ (vì } S > 1).$$

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } g(S) \geq g(2) = \frac{4}{3}, \forall S \in (1; +\infty)$$

$$\text{Do đó ta có } T \geq \sqrt{f(P)} \geq \sqrt{g(S)} \geq \sqrt{g(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } \min T = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = y = 1 \text{ hay } a = b = c$$

Bài 22: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{xy}{1 + z^2} + \frac{yz}{1 + x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$$

Lời giải

Nhận xét: Bài 22 khi ta thay giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vào biểu thức P thì P là một biểu thức đồng bậc. Tuy nhiên nếu chỉ sử dụng các biến đổi đại số thì ta vẫn chưa làm giảm số biến của biểu thức. Ta cần sử dụng các hệ quả để đánh giá biểu thức

$$\text{Ta có } \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} = \frac{xy}{(x^2+z^2)+(y^2+z^2)} + \frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{xy}{2\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}} + \frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+y^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xy} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)$$

$$\text{Ta lại có } x^3y^3 + y^3z^3 \geq \frac{1}{4}(xy+yz)^3 \Rightarrow \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{x^3z^3} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{(xy+yz)^3}{x^3z^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{96} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3. \text{ Đặt } t = \frac{y}{z} + \frac{y}{x} \Rightarrow t > 0 \text{ (vì } x, y, z > 0)$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t - \frac{1}{96}t^3$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t - \frac{1}{96}t^3 \text{ trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}t^2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (vì } t > 0)$$

$$\text{Lập bảng biến thiên suy ra } f(t) \leq f(2) = \frac{5}{12}, \forall t \in (0; +\infty) \text{ hay } P \leq f(t) \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = \frac{5}{12}, \text{ giá trị lớn nhất đạt được khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 23: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2z^2}{y^2+z^2} - \frac{3z}{2x+z}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\frac{x}{z} + 2 = \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} \geq 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^4} + \frac{z}{x} = 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{x}{z} + 2 \geq 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{z} \Rightarrow t > 0 \text{ (vì } x, z > 0).$$

$$\text{Do đó } t + 2 \geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$\text{Ta có } P = \frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{2}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} - \frac{3}{2\frac{x}{z} + 1}$$



Nhận xét: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z}$ vì $\frac{x}{z} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \leq 1$. Mặt khác $x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{x}{y}, \frac{y}{z} > 0$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = \frac{2}{1 + \frac{x}{z}}$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{4}{1 + \frac{x}{z}} - \frac{3}{2 \frac{x}{z} + 1} = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{2t+1}. \text{ Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{2t+1} \text{ trên } \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-10t^2 - 4t + 2}{(t+1)^2(2t+1)^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{Suy ra } f(t) \text{ là hàm số nghịch biến trên } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{Hay } P \leq \frac{7}{6} \text{ với mọi } x, y, z > 0 \text{ thỏa mãn } \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = \frac{7}{6}, \text{ giá trị lớn nhất đạt được khi } \begin{cases} z = 2x \\ y = x\sqrt{2} \end{cases}$$

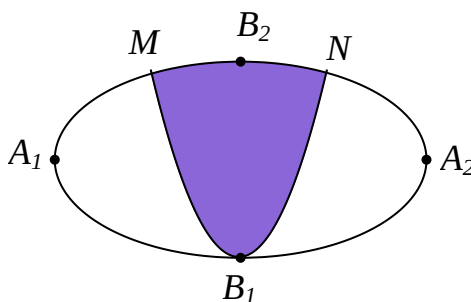
N.C.Đ

CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3

BÀI TOÁN TỐI ƯU

- Câu 1.** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1 , trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N . Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m² và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m². Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4m, B_1B_2 = 2m, MN = 2m$.



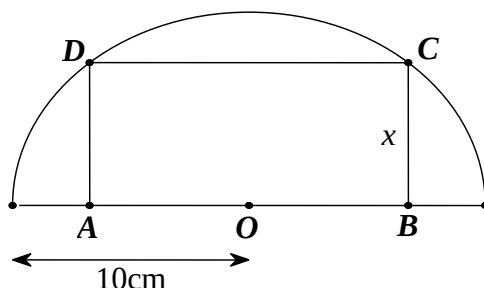
A. 2.341.000 đồng. B. 2.057.000 đồng. **C. 2.760.000 đồng.** D. 1.664.000 đồng.

- Câu 2.** Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2 (s). B. $\frac{8}{3}$ (s). C. 0 (s). D. $\frac{4}{3}$ (s).

- Câu 3.** Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10cm (hình vẽ).

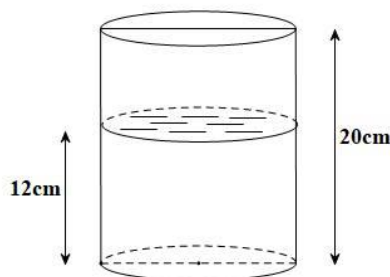
A. 160cm^2 . B. 100cm^2 . C. 80cm^2 . D. 200cm^2 .



- Câu 4.** Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(\text{m}^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

A. 2(m). B. $\frac{5}{2}$ (m). C. 1(m). D. $\frac{3}{2}$ (m).

- Câu 5.** Một cốc hình trụ có bán kính đáy là 2cm , chiều cao 20cm . Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là 12cm (hình vẽ). Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá 6cm . Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính $0,6\text{cm}$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



- A. 30. B. 27. C. 28. D. 29.

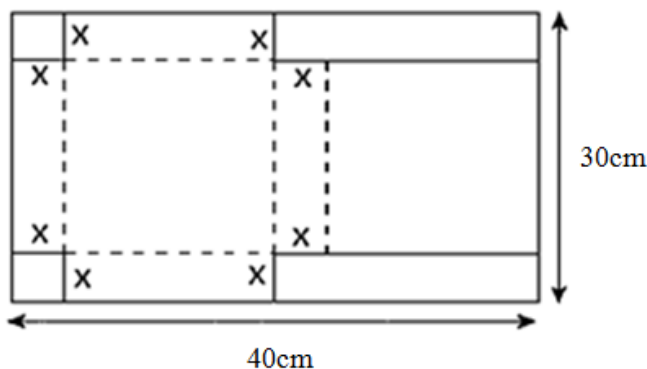
- Câu 6.** Một sợi dây có chiều dài 28m được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

- A. $\frac{56}{4+\pi}$. B. $\frac{112}{4+\pi}$. C. $\frac{84}{4+\pi}$. D. $\frac{92}{4+\pi}$.

- Câu 7.** Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là 384cm^2 , lề trên và lề dưới là 3cm , lề trái và lề phải là 2cm . Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

- A. 82cm . B. 100cm . C. 90cm . D. 84cm .

- Câu 8.** Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 30cm ; 40cm . Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



- A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}\text{cm}$. B. $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}\text{cm}$. C. $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}\text{cm}$. D. $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}\text{cm}$.

- Câu 9.** Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng(các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $2,26\text{m}^3$. B. $1,01\text{m}^3$. C. $1,33\text{m}^3$. D. $1,50\text{m}^3$.

Câu 10. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243. B. 144. C. 27. D. 36.

Câu 11. Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

- A. 1200cm^2 . B. 120cm^2 . C. 160cm^2 . D. 1600cm^2 .

Câu 12. Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên 1m^2 và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên 1m^2 . Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

- A. 67398224 đồng. B. 67593346 đồng. C. 63389223 đồng. D. 67398228 đồng.

Câu 13. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).

- A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 14. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{10 + 2\sqrt{725}}{30}$. C. $\frac{20 + \sqrt{725}}{30}$. D. 5.

Câu 15. Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 60cm, thể tích là 96.000cm^3 , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

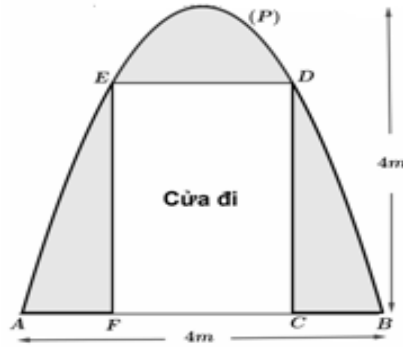
- A. 283.000 đồng. B. 382.000 đồng. C. 83.200 đồng. D. 832.000 đồng.

Câu 16. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của

chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

- A. 12. B. 13. C. 11. D. 10.

- Câu 17.** Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m , $AB = 4\text{ m}$. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ (với $C, F \in AB$; $D, E \in (P)$), phần còn lại (phần tô đậm) dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là $1.000.000\text{ đồng}/\text{m}^2$. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



- A. 4.450.000 đồng. B. 4.605.000 đồng. C. 4.505.000 đồng. D. 4.509.000 đồng.

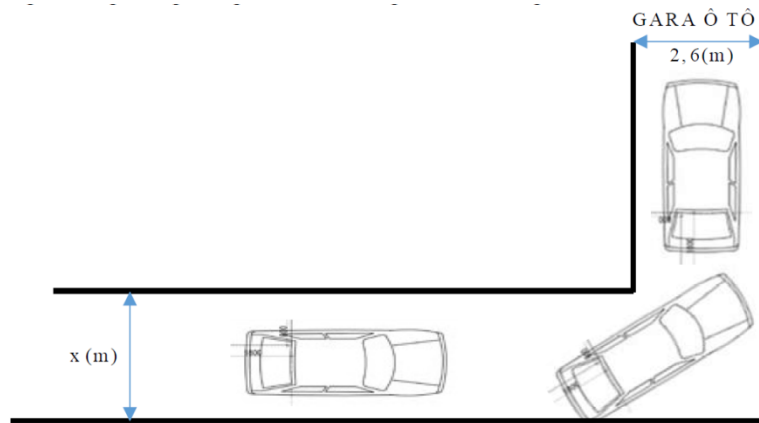
- Câu 18.** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

- A. 12. B. 13. C. 11. D. 10.

- Câu 19.** Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá $30000\text{ đồng}/\text{kg}$ thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng $1000\text{ đồng}/\text{kg}$ thì số rau thừa tăng thêm 20 kg . Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá $2000\text{ đồng}/\text{kg}$. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

- A. 32400000 đồng. B. 34400000 đồng. C. 32420000 đồng. D. 34240000 đồng.

- Câu 20.** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x(\text{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6(\text{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m} \times 1,9\text{m}$ (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5(\text{m})$, chiều rộng $1,9(\text{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng)



A. $x = 3,7$ (m) .

B. $x = 2,6$ (m) .

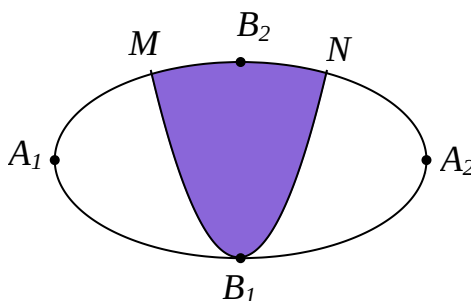
C. $x = 3,55$ (m) .

D. $x = 4,27$ (m) .

N.C.Đ

HƯỚNG DẪN GIẢI

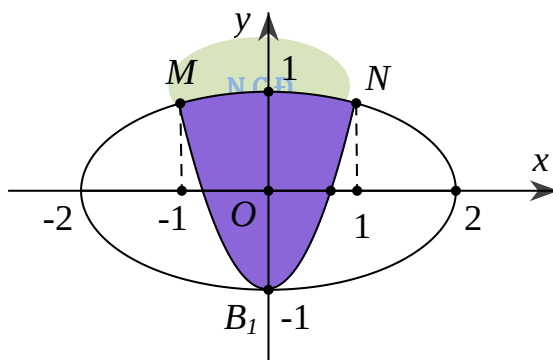
Câu 1. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1 , trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N . Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/ m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/ m^2 . Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4m, B_1B_2 = 2m, MN = 2m$.



A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Phương trình đường Elip là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Diện tích hình Elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 2\pi (m^2)$

Tọa độ giao điểm M, N là nghiệm hệ: $\begin{cases} x = \pm 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Vậy $M\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy có dạng $y = ax^2 + c (a \neq 0)$.

Vì $B_1(0; -1), N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (P) \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 - 1$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_1 = 2 \int_0^1 \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 + 1 \right] dx$



• Tính $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$. Đặt $\frac{x}{2} = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{2} = \cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{cases}$

Suy ra $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

• Tính $I_2 = \int_0^1 \left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) x^2 + 1 \right] dx = \left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \frac{x^3}{3} + x \right] \Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3}$.

Vậy $S_1 = 2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{3} \text{ m}^2$.

Tổng số tiền sử dụng là: $S_1 \cdot 200000 + (S_{(E)} - S_1) \cdot 500000 \approx 2.341.000$ đồng

Câu 2. Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2 (s).

B. $\frac{8}{3}$ (s).

C. 0 (s).

D. $\frac{4}{3}$ (s).

Lời giải

Chọn D

N.C.Đ

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t$.

$v'(t) = 6t - 8$. Có $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$.

t	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
v'		0	+
v	0	$-\frac{16}{3}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[0; +\infty)} v = v\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}$.

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t = \frac{4}{3}$.

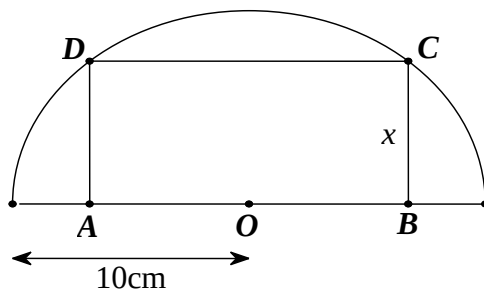
Câu 3. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10cm (hình vẽ).

A. 160cm^2 .

B. 100cm^2 .

C. 80cm^2 .

D. 200cm^2 .



Lời giải

Chọn B

Đặt $OA = x$ ($0 < x < 10$). Suy ra: $AB = 2x$; $AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

Khi đó: $S_{ABCD} = S = AB \cdot AD = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{100x^2 - x^4}$

Suy ra: $S' = \frac{200x - 4x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}}$

$$\Rightarrow S' = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2} \text{ (do } 0 < x < 10) \\ x = -5\sqrt{2} \end{cases}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$S'(x)$	+	0	-
$S''(x)$		100	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ bằng 100 cm^2 khi $x = 5\sqrt{2}\text{ cm}$.

Câu 4. Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(\text{m}^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

A. $2(\text{m})$.

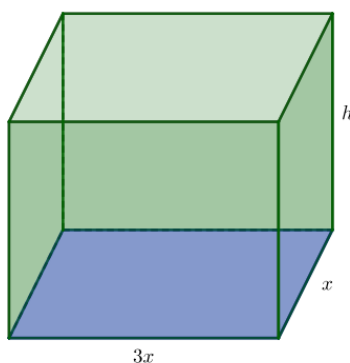
B. $\frac{5}{2}(\text{m})$.

C. $1(\text{m})$.

D. $\frac{3}{2}(\text{m})$.

Lời giải

Chọn D



Gọi x ($x > 0$) là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$$V = h.x.3x = h.3x^2 = 18 \quad (x > 0).$$

$$\Rightarrow h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2},$$

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật. Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$$P = 2hx + 2.h.3x + 3x^2 = 2.\frac{6}{x^2}.x + 2.\frac{6}{x^2}.3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2, \quad (x > 0).$$

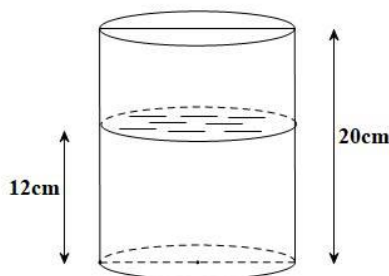
$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-48}{x^2} + 6x, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		36	

$$\text{Suy ra vật liệu ít nhất khi } h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} (m).$$

Câu 5. Một cốc hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $20cm$. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$ (hình vẽ). Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



A. 30.

B. 27.

C. 28.

D. 29.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính hình trụ là r , bán kính viên đá hình cầu là R .

$$\text{Thể tích một viên đá là } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.(0,6)^3.$$

Gọi n là số viên đá con quạ thả vào cốc, n nguyên dương.

Thể tích nước cần đổ thêm vào cốc để mực nước cách miệng cốc 6cm là $\pi.r^2.2 = 8\pi$.
Để con quạ uống được nước thì lượng đá bỏ vào cốc phải làm mực nước dâng lên cách miệng cốc không quá 6cm nên ta phải có: $n.\frac{4}{3}.\pi.(0,6)^3 \geq 8\pi \Leftrightarrow n \geq \frac{24}{4.(0,6)^3} \Leftrightarrow n \geq \frac{250}{9}$.

Do n nguyên dương nên suy ra $n \geq 28$.

Vậy con quạ cần thả vào cốc ít nhất 28 viên đá.

Câu 6. Một sợi dây có chiều dài 28m được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$.

B. $\frac{112}{4+\pi}$.

C. $\frac{84}{4+\pi}$.

D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi l_1, l_2 (m) lần lượt là chu vi hình vuông và hình tròn. ($0 < l_1, l_2 < 28$)

Gọi a, R (m) lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn. Khi đó ta có:

$$l_1 + l_2 = 28$$

$$l_1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{l_1}{4}$$

$$l_2 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{28-l_1}{2\pi}$$

N.C.Đ

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$$S = a^2 + \pi.R^2 = \frac{l_1^2}{16} + \pi.\left(\frac{28-l_1}{2\pi}\right)^2, \quad 0 < l_1 < 28$$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm $l_1 \in (0, 28)$ để S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$S' = \frac{l_1}{8} - \left(\frac{28-l_1}{2\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow l_1 = \frac{112}{\pi+4}$$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị nhỏ nhất tại $l_1 = \frac{112}{\pi+4}$.

Câu 7. Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là 384cm^2 , lề trên và lề dưới là 3cm , lề trái và lề phải là 2cm . Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. 82 cm .

B. 100 cm .

C. 90 cm .

D. 84 cm .

Lời giải

Chọn B

Ta thấy muốn chi phí sản xuất nhỏ nhất thì kích thước tối ưu là khi diện tích mỗi trang sách phải nhỏ nhất đồng thời vẫn bảo đảm yêu cầu đề ra.

Gọi x, y thứ tự là chiều dài và chiều rộng của trang sách, đơn vị cm , điều kiện:

$$x > 6; y > 4.$$

Diện tích phần chữ trên mỗi trang là:

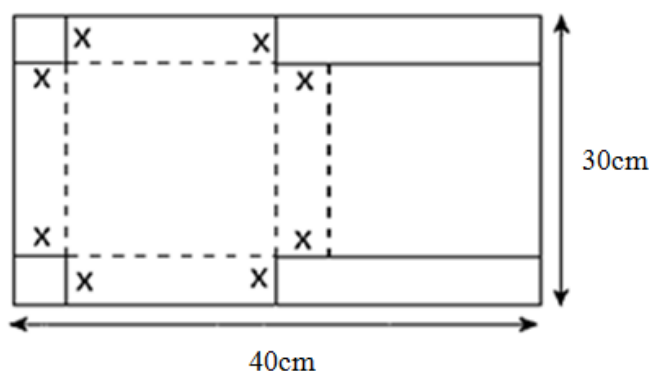
$$(x-6)(y-4)=384 \Leftrightarrow xy=4x+6y+360 \geq 2\sqrt{4x \cdot 6y}+360.$$

Khi đó $xy-4\sqrt{6xy}-360 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 10\sqrt{6} \Rightarrow xy \geq 600$, dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} xy=600 \\ 4x=6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ y=20 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy chu vi trang sách khi sản xuất theo kích thước tối ưu là $2(x+y)=100$ (cm).

- Câu 8.** Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 30cm; 40cm. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



- A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}$ cm. B. $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}$ cm. **C. $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ cm.** D. $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}$ cm.

Lời giải

Chọn C

Khối hộp chữ nhật thu được có kích thước là $30-2x$; $20-x$; x với $x \in [0;15]$.

Khi đó $V = x(30-2x)(20-x) = f(x) \leq \max_{[0;15]} f(x) = f\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$.

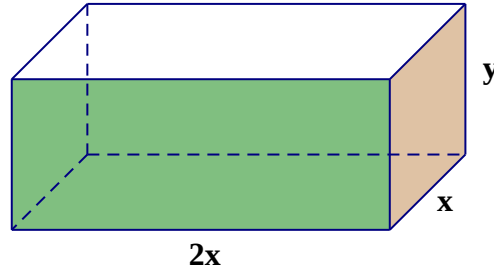
Dấu "=" đạt tại $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$.

- Câu 9.** Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng(các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $2,26\text{m}^3$. B. $1,01\text{m}^3$. C. $1,33\text{m}^3$. **D. $1,50\text{m}^3$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi chiều rộng của bể cá là $x(\text{m})$, chiều cao là $y(\text{m})$ ($x, y > 0$), khi đó chiều dài bể cá là $2x(\text{m})$. Diện tích kính sử dụng là $S = 2x^2 + 2xy + 4xy(\text{m}^2)$.

Theo bài ra ta có: $2x^2 + 2xy + 4xy = 6,5 \Rightarrow y = \frac{6,5 - 2x^2}{6x} = \frac{13 - 4x^2}{12x}$.

Thể tích bể cá là $V(x) = 2x^2 \cdot \frac{13 - 4x^2}{12x} = \frac{x(13 - 4x^2)}{6}(\text{m}^3)$.

Ta xét hàm số $V(x) = \frac{x(13 - 4x^2)}{6}$ với $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Suy ra $V'(x) = \frac{13 - 12x^2}{6} \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là $\max_{\left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50(\text{m}^3)$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50 \text{ m}^3$.

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V(x) = \frac{x(13 - 4x^2)}{6}$ với $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $V(x) = \frac{x(13 - 4x^2)}{6} = \frac{1}{6} \sqrt{8x^2(13 - 4x^2)(13 - 4x^2)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$8x^2(13 - 4x^2)(13 - 4x^2) \leq \left(\frac{8x^2 + 13 - 4x^2 + 13 - 4x^2}{3} \right)^3 = \frac{26^3}{27}.$$

Suy ra $V(x) \leq \frac{1}{6} \sqrt{\frac{26^3}{8,27}} = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = 13 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50 \text{ m}^3$.

Câu 10. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 .

B. 144 .

C. 27 .

D. 36 .

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t) = s'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 6t^2\right)' = -t^2 + 12t$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Vì $-t^2 + 12t = -(t-6)^2 + 36 \leq 36$ với mọi $t > 0$.

Suy ra $\max_{t \geq 0} v(t) = 36$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Vậy trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36.

Câu 11. Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200 cm^3 , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. 1200 cm^2 .

B. 120 cm^2 .

C. 160 cm^2 .

D. 1600 cm^2 .

Lời giải

Chọn C

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga; h là chiều cao của hố ga ($x, y, h > 0$)

Ta có: $h = 2x$

$$V = xyh = 2x^2y = 3200 \Rightarrow y = \frac{1600}{x^2}$$

Diện tích bề mặt sử dụng của hố ga không nắp là

$$S = xy + 2xh + 2yh = 4x^2 + 5xy = 4x^2 + \frac{8000}{x}$$

Đặt $f(x) = 4x^2 + \frac{8000}{x}$. Ta có $f'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên

x	0	10			$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$					

Vậy S nhỏ nhất khi $x=10 \Rightarrow y=16$.

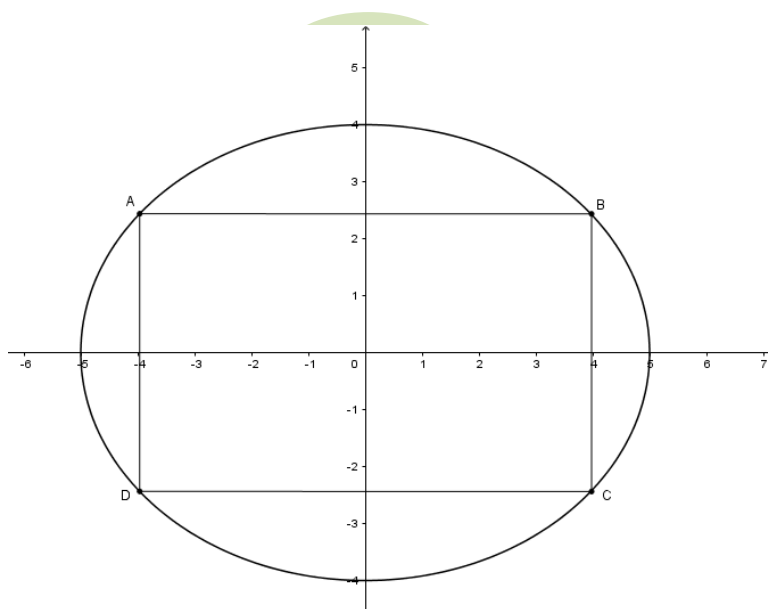
Diện tích đáy hố ga khi đó là 160cm^2 .

Câu 12. Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên 1m^2 và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên 1m^2 . Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. B. 67593346 đồng. C. 63389223 đồng. D. 67398228 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a=5$ và $b=4$.

Phương trình của elip là: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Diện tích của elip là: $S_{(E)} = \pi ab = 20\pi$.

Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp elip. Đặt $AB=2x$ ($0 < x < 5$) $\Rightarrow AD = 8\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Diện tích phần còn lại trồng hoa là: $S_{hoa} = 20\pi - 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$T = 16000000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} + 12000000 \left(20\pi - 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right)$$

$$= 240000000\pi - 32000000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}.$$

Mặt khác ta có: $16000000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \leq 16000000x \cdot \frac{\frac{x^2}{25} + 1 - \frac{x^2}{25}}{2} = 8000000x$.

$$\Rightarrow T = 240000000\pi - 32000000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \geq 240000000\pi - 8000000x = 67398223.69.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{5} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224.

Câu 13. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).

A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$.

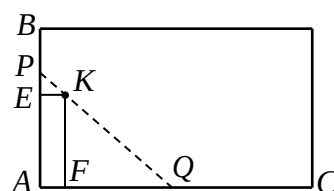
B. $5\sqrt{5}$.

C. $9\sqrt{2}$.

D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AP = a$, $AQ = b$ ($a, b > 0$). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC . Suy ra $KE = 1$, $KF = 8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}$; $\frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ} \Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1$ hay $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

(Hoặc có thể dùng phép tọa độ hóa: Gán $A = (0; 0)$, $P = (0; a)$, $Q = (b; 0)$. Khi đó $K = (1; 8)$.

Phương trình đường thẳng PQ : $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. Vì PQ đi qua K nên $\frac{1}{b} + \frac{8}{a} = 1$.)

Cách 1:

Ta có: $PQ^2 = a^2 + b^2$. Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{8k}{a} + \frac{k}{b} = k \quad \forall k > 0$.

$$a^2 + b^2 + k = \left(a^2 + \frac{8k}{a} \right) + \left(b^2 + \frac{k}{b} \right) = \left(a^2 + \frac{4k}{a} + \frac{4k}{a} \right) + \left(b^2 + \frac{k}{2b} + \frac{k}{2b} \right) \geq 3\sqrt[3]{16k^2} + 3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

$$\text{Suy ra } PQ \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{4k}{a} \\ b^2 = \frac{k}{2b} \\ \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 250 \\ a = 10 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2:

$$\text{Vì } \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-8} \text{ với } a > 8. \text{ Khi đó } PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2 \text{ với } a > 8.$$

$$\text{Xét hàm số } f(a) = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2 \text{ với } a > 8.$$

$$\text{Ta có } f'(a) = 2a + \frac{2a}{a-8} \cdot \frac{-8}{(a-8)^2} = \frac{2a[(a-8)^3 - 8]}{(a-8)^3}; f'(a) = 0 \Rightarrow a = 10.$$

BBT của $f(a)$:

a	8	10	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$+\infty$	125	$+\infty$

Vậy GTNN của $f(a)$ là 125 khi $a = 10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Câu 14. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

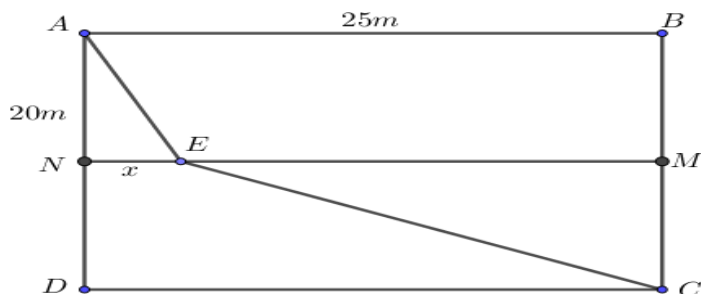
B. $\frac{10 + 2\sqrt{725}}{30}$.

C. $\frac{20 + \sqrt{725}}{30}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn A



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE = x(\text{m})$ (với $0 \leq x \leq 25$).

$$\Rightarrow EM = 25 - x(\text{m}).$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25 - x)^2} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30} \quad (\text{h}) \quad (\text{Với } 0 \leq x \leq 25)$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}.$$

$$\text{Xét } t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25 - x)^2 + 100} = (25 - x)\sqrt{100 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2((25 - x)^2 + 100) = (25 - x)^2(100 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(25 - x)^2 + 400x^2 - 100(25 - x)^2 - (25 - x)^2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(25 - x)^2(x^2 - 25) + x^2(20^2 - (25 - x)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(4(25 - x)^2(x + 5) + x^2(45 - x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} t(0) = \frac{4 + \sqrt{29}}{6} \\ t(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25) = \frac{1 + \sqrt{29}}{3} \end{cases}.$$

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là

$$\frac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h}).$$

* Cách 2:

$$\text{Xét } t(x) = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 10^2}}{30} = \frac{\sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}}{30} \quad (\text{Với } 0 \leq x \leq 25).$$

$$\text{Lại có } \sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2 + 10^2} \geq \sqrt{(45-x)^2 + (2x+10)^2} \quad (\text{do } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2 + 10^2} \geq \sqrt{5(x-5)^2 + 2000}.$$

$$\text{Do đó } t(x) \geq \frac{\sqrt{5(x-5)^2 + 2000}}{30} \geq \frac{\sqrt{2000}}{30} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } t(x)_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ (h) khi và chỉ khi } x = 5 \text{ (m)}.$$

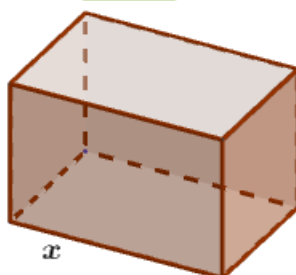
Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

Câu 15. Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60 cm, thể tích là 96.000 cm^3 , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

- A. 283.000 đồng. B. 382.000 đồng. **C. 83.200 đồng.** D. 832.000 đồng.

Chọn C

Lời giải
N.C.Đ



Gọi x (m) là chiều dài của hình chữ nhật đáy ($x > 0$).

$$\text{Khi đó chiều rộng là: } \frac{0,096}{0,6x} = \frac{4}{25x}.$$

$$\text{Khi đó diện tích mặt xung quanh là: } 1,2 \left(x + \frac{4}{25x} \right).$$

$$\text{Chi phí để làm mặt xung quanh là: } 70.1,2 \left(x + \frac{4}{25x} \right) = 84 \left(x + \frac{4}{25x} \right) \text{ (nghìn đồng)}.$$

$$\text{Diện tích mặt đáy là: } x \cdot \frac{4}{25x} = \frac{4}{25}.$$

$$\text{Cho phí để làm mặt đáy là: } 100 \cdot \frac{4}{25} = 16 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Chi phí để làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi chi phí làm mặt bên thấp nhất

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x + \frac{4}{25x}, x > 0; f'(x) = 1 - \frac{4}{25x^2} = \frac{25x^2 - 4}{25x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{2}{5}$	$-\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$	

Khi đó chi phí thấp nhất là: $84 \cdot \frac{4}{5} + 16 = 83.200$ đồng.

Bổ sung cách 2

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{4}{25x}$ với $x > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si ta có $f(x) = x + \frac{4}{25x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{25x}} = \frac{4}{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{4}{25x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$.

Vậy chi phí thấp nhất là: $84 \cdot \frac{4}{5} + 16 = 83.200$ đồng.

Câu 16. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất.

Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

A. 12.

B. 13.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi chiều rộng của hộp là x ($x > 0$) $\Rightarrow$ Chiều dài của hình hộp là $2x$.

Thể tích của hộp là $V = x \cdot 2x \cdot h = 48 \Leftrightarrow h = \frac{24}{x^2}$.

Tổng diện tích mặt đáy và 4 mặt bên của hộp là $2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x \cdot \frac{24}{x^2} = 2x^2 + \frac{144}{x}$.

Diện tích nắp hộp là $2x^2$.

Giá thành hộp thấp nhất $\Leftrightarrow f(x) = 3\left(2x^2 + \frac{144}{x}\right) + 2x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x > 0$.

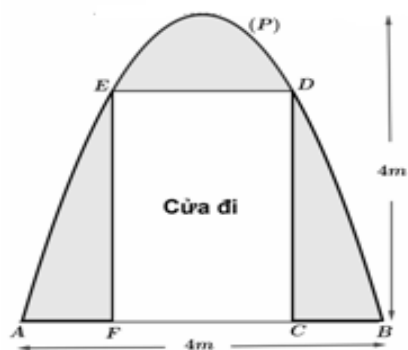
Ta có $f(x) = 8x^2 + \frac{432}{x} = 8x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{216}{x} \cdot \frac{216}{x}} = 216$.

Vậy $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 216$ xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = \frac{216}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow h = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$.

Vậy $m = 8; n = 3 \Rightarrow m + n = 8 + 3 = 11$.

Câu 17. Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m, $AB = 4$ m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ (với $C, F \in AB; D, E \in (P)$), phần còn lại (phần tô đậm) dùng để trang trí. Biết chi phí để

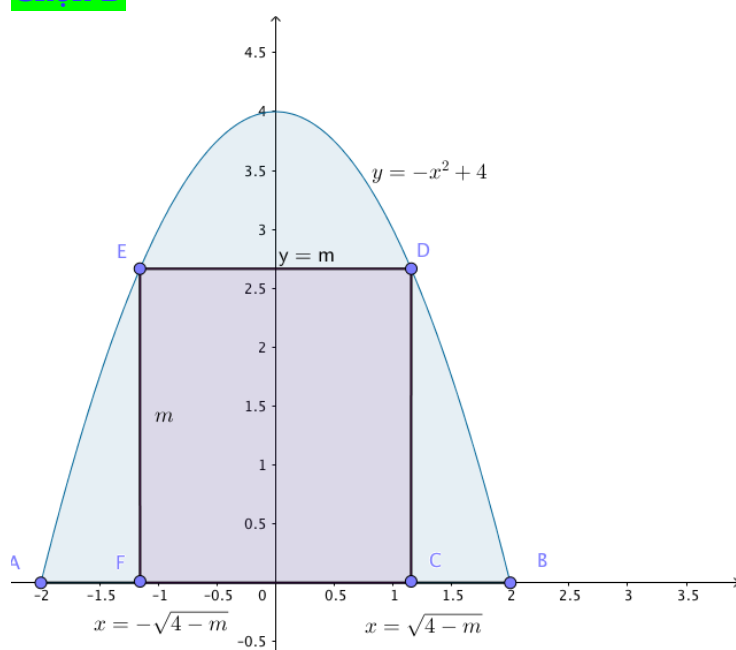
trang trí phần tô đậm là 1.000.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



- A. 4.450.000 đồng. B. 4.605.000 đồng. C. 4.505.000 đồng. D. 4.509.000 đồng.

Lời giải

Chọn D



* Xét $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có tọa độ đỉnh $(0; 4)$ và qua điểm có tọa độ $(2; 0)$.

Ta có hoành độ đỉnh: $\frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$; (P) qua điểm $(0; 4) \Rightarrow c = 4$ và (P) qua điểm $(2; 0) \Rightarrow a = -1$

Suy ra: $(P): y = -x^2 + 4$

* Xét đường thẳng qua $E, D: y = m$ (với $0 < m < 4$). Khi đó $E(-\sqrt{4-m}; m)$ và $D(\sqrt{4-m}; m)$ là giao điểm của (P) và đường thẳng $y = m$. Suy ra: $ED = 2\sqrt{4-m}$, $EF = m$.

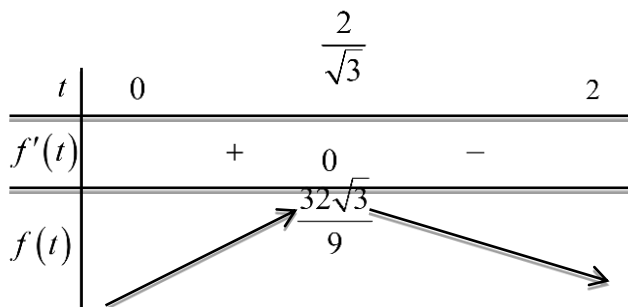
* Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED \cdot EF = 2\sqrt{4-m} \cdot m$

Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4-m \Rightarrow m = 4-t^2$ (với $0 < t < 2$)

Khi đó: $S_{CDEF} = f(t) = 2t(4-t^2) = -2t^3 + 8t$

$$f'(t) = -6t^2 + 8 = 0 \Rightarrow t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$



Suy ra: $MaxS_{CDEF} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{8}{3}$

* Mặt khác diện tích của chiếc công: $S = \int_{-2}^2 |-x^2 + 4| = \frac{32}{3} (m^2)$

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S - MaxS_{CDEF} = \frac{32}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4,5083 (m^2)$

* Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083 \times 1.000.000 = 4.508.300$ (đồng).

(Lưu ý: Có thể dùng MTBT để tìm GTLN của S_{CDEF} trên khoảng $0 < m < 4$).

Câu 18. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất.

Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

A. 12.

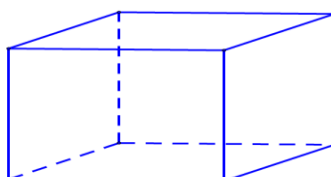
B. 13.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x ($x > 0$). Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt[3]{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy $m=8, n=3$ và $m+n=11$.

Câu 19. Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu ?

A. 32400000 đồng. B. 34400000 đồng. **C. 32420000 đồng.** D. 34240000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi số lần tăng giá là y ($y \geq 0$)

Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá là $30000 + 1000y$ đồng/kg.

Số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y$ ($y \leq 50$) kg.

Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi là $1000 - 20y$ kg.

Tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

$$P = (1000 - 20y) \cdot (30000 + 1000y) + 20y \cdot 2000.$$

$$P = -20000y^2 + 440000y + 30000000.$$

$$P = 32420000 - 20000(y - 11)^2.$$

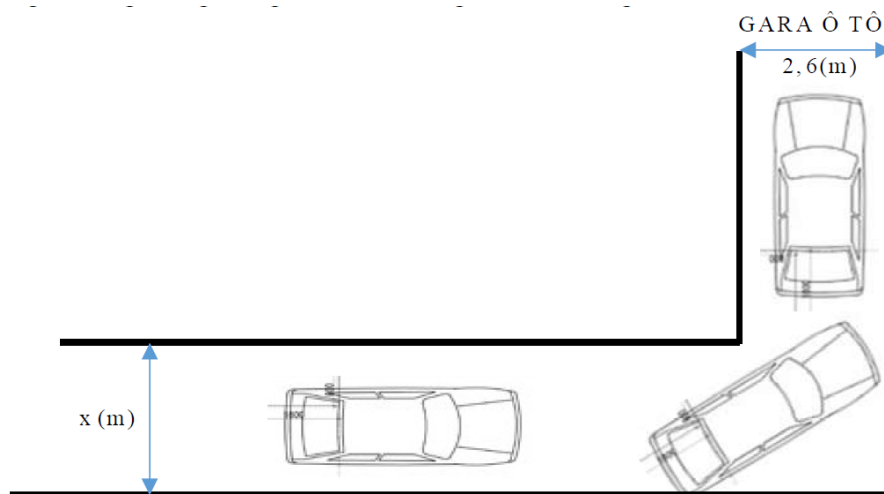
Ta có:

$$32420000 - 20000(y - 11)^2 \leq 32420000.$$

$$\Rightarrow P \leq 32420000.$$

$$\Rightarrow P_{\max} = 32420000 \text{ khi } y = 11(N).$$

Câu 20. Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1,9m$ (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được ? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng)



A. $x = 3,7$ (m).

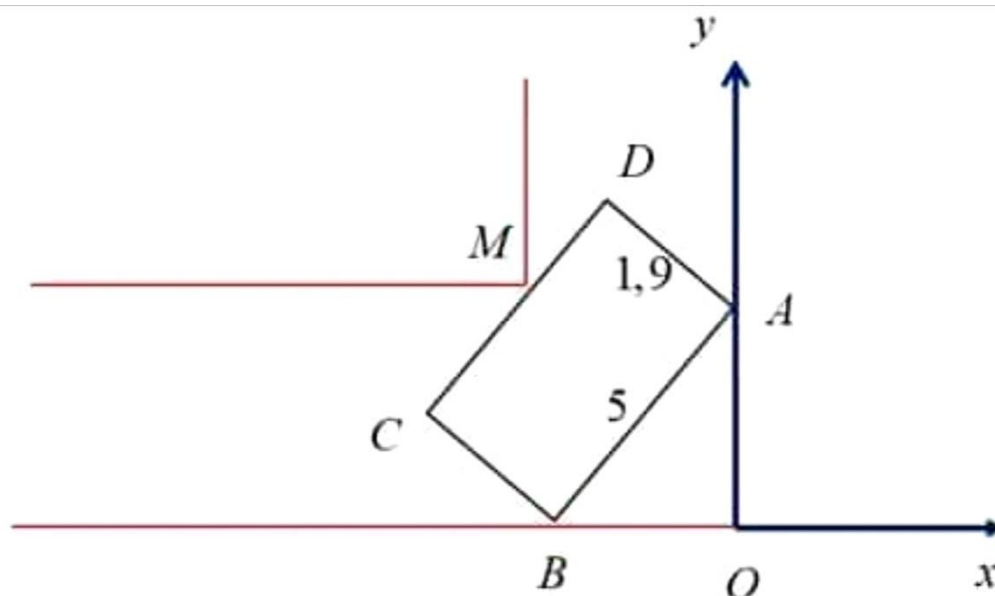
B. $x = 2,6$ (m).

C. $x = 3,55$ (m).

D. $x = 4,27$ (m).

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Khi đó $M(-2,6; x)$.

Gọi $B(-a; 0)$ suy ra $A(0; \sqrt{25-a^2})$. Phương trình AB: $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - 1 = 0$.

Do $CD \parallel AB$ nên phương trình CD: $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - T = 0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng 1,9(m) nên

$$\frac{|T-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Rightarrow T = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M, O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD.

Suy ra:

$$\frac{-2,6}{-a} + \frac{x}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-a^2}}{a} \text{ (đúng với mọi } a \in (0; 5))$$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính **Casio570ES PLUS**.

$$f(X) = \sqrt{25-X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-X^2}}{X} \text{ với } \text{STEP} = \frac{5}{29}; \text{START} = 0; \text{END} = 5.$$

Thấy GTLN của $f(X) = \sqrt{25-X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ 3,698.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị ở câu A.

N.C.Đ

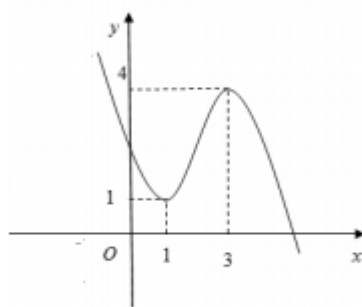
CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 4

ỨNG DỤNG GTLN, GTNN VÀO TÌM SỐ NGHIỆM PT VÀ BPT

- Câu 1.** Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 31^x + 3^x + mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2
- A. $m \in (-10; -5)$. B. $m \in (-5; 0)$. C. $m \in (0; 5)$. D. $m \in (5; 10)$.
- Câu 2.** Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2018^x + 2019^x - mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2. Khi đó:
- A. $m \in (-30; -20)$. B. $m \in (-20; 0)$. C. $m \in (0; 20)$. D. $m \in (20; 30)$.
- Câu 3.** Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \log_{31}(x+1) + \log_3(x+1) + mx$ trên $(-1; +\infty)$ là 0. Khi đó:
- A. $m \in (-3; -2)$. B. $m \in (-2; 0)$. C. $m \in (0; 2)$. D. $m \in (2; 3)$.
- Câu 4.** Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m + \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = \sin x$ có nghiệm là $[a, b]$. Giá trị $a+b$ bằng
- A. $-\frac{1}{4} - \sqrt{2}$. B. $-\frac{1}{4} + \sqrt{2}$. **N.C.Đ.C.** $-\frac{1}{2} - \sqrt{2}$. D. $-\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.
- Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 2x = m\sqrt{1+\tan x} \cdot \cos^2 x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$?
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 6.** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình: $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Số phần tử của tập S bằng:
- A. 1. B. 2020. C. 2019. D. 2.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, bất phương trình $f(x) > \ln(\cos x) - e^{\pi x} + m$ (với m là tham số) thỏa mãn với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi
- A. $m \leq f(0) + 1$. B. $m > f(0) - 1$. C. $m < f(0) + 1$. D. $m \geq f(0) + 1$.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau
- | | | | | | | | | |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|
| x | $-\infty$ | -2 | 0 | 2 | $+\infty$ | | | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
- Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi
- A. $m \geq f(0) - 1$. B. $m > f(-1) - e$. C. $m > f(0) - 1$. D. $m \geq f(-1) - e$.

- Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x-m|+1) = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



- A. 3. B. Vô số. C. 1. D. 2.
- Câu 10.** Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$ có nghiệm là
- A. 2011. B. 2012. C. 2013. D. 2014.

- Câu 11.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	3
y'	+	0	-
y	8	9	5

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$.

- A. 9. B. 5. C. 4. D. 7.
- Câu 12.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là
- A. -5. B. 1. C. -3. D. -8.

- Câu 13.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	-	+	0	-	+
y	$+\infty$	-1	4	$-\infty$	$+\infty$

Phương trình $f(2^{\sin x}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.
- Câu 14.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9; 9]$ để phương trình: $\sqrt{1-x^2} - m(2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} - 3) + 1 = 0$ có nghiệm?

A. 14.

B. 8.

C. 10.

D. 12.

Câu 15. Cho phương trình $16m^2x^3 + 16x + \sqrt{8x^3 + 2x + 2} = 2m^2 + 10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m .

Câu 16. Tổng các giá trị nguyên dương của m để tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{\frac{m}{72}}x^2 + 1 < \sqrt{x} \text{ có chứa đúng hai số nguyên là}$$

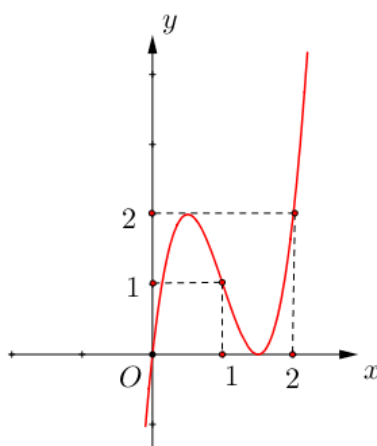
A. 27.

B. 29.

C. 28.

D. 30.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. B. $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$. C. $m \geq f(0) - \frac{1}{2}$. D. $m > f(0) - \frac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(-2) = m+1$, $f(1) = m-2$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	-2	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} = m$ có nghiệm $x \in (-2; 1)$ là

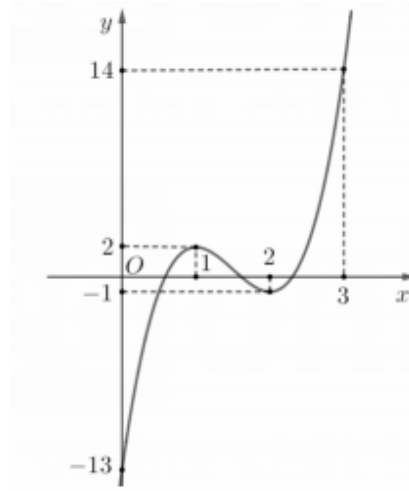
A. $\left(-5; -\frac{7}{2}\right)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-2; 7)$.

D. $\left(-\frac{7}{2}; 7\right)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(f(x+1)) = m$ có ít nhất 6 nghiệm thực phân biệt?



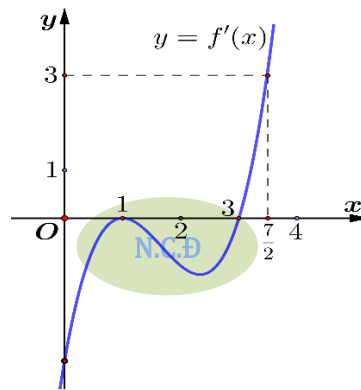
A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây ?

A. $x_0 = 0$.

B. $x_0 = \frac{7}{2}$.

C. $x_0 = 3$.

D. $x_0 = 1$.

Câu 21. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1$ (m là tham số). Gọi p, q lần lượt là các giá trị m nguyên nhỏ nhất và giá trị lớn nhất thuộc $[-10; 10]$ để phương trình có nghiệm. Khi đó giá trị $T = p + 2q$ là

A. 10.

B. 19.

C. 20.

D. 8.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 4$. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\sqrt{f(f(x) - 2) - 2} = 3 - f(x)$ là

A. 7.

B. 4.

C. 6.

D. 9.

Câu 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = \frac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 10.

B. 6.

C. 4.

D. 2.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-

Xét hàm số $g(x) = e^{f(1+x-x^2)}$, tập nghiệm của bất phương trình $g'(x) > 0$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

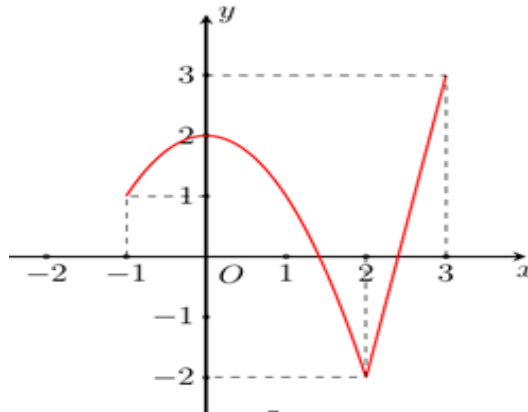
Câu 25. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xy + yz + xz = -3 \end{cases}$ với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số. Số giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm là

- A. 25. B. 24. C. 12. D. 13.

Câu 26. Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3} + (2m-1)\sqrt{1-x} + m = 1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Giá trị của biểu thức $5a+3b$ bằng

- A. 13. B. 7. C. 19. D. 8.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq 7$. B. $m \geq 7$. C. $m \leq 2\sqrt{2} - 2$. D. $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2; 4]$.

- A. 2021. B. 2019. C. 2020. D. 4037.

Câu 30. Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$
 $m(|\sin x| + |\cos x| + 1) \leq |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| - 2018$.

- A. $-\frac{1}{3}$. B. -2018. C. $-\frac{2017}{2}$. D. -2017.

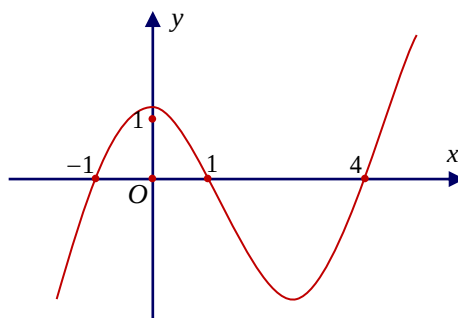
Câu 31. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3; 6]$.

- A. 28. B. 20. C. 4. D. 19.

Câu 32. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y}$ bằng

- A. $\frac{e + \ln 2}{2}$. B. $\frac{e - \ln 2}{2}$. C. $\frac{e \ln 2}{2}$. D. $\frac{e}{2 \ln 2}$.

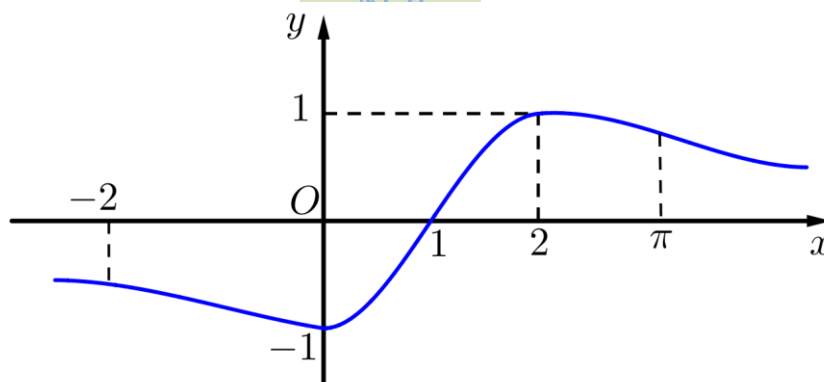
Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2019f(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}) - m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2]$

- A. 1513. B. 1512. C. 1515. D. 1514.

Câu 34. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(0)$. B. $m < f(1) - 1$. C. $m < f(-1) + 1$. D. $m < f(2)$.

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 36. Số giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(0; 2020)$ để phương trình $\|x - 1\| - \|2019 - x\| = 2020 - m$ có nghiệm là

- A. 2020. B. 2021. C. 2019. D. 2018.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

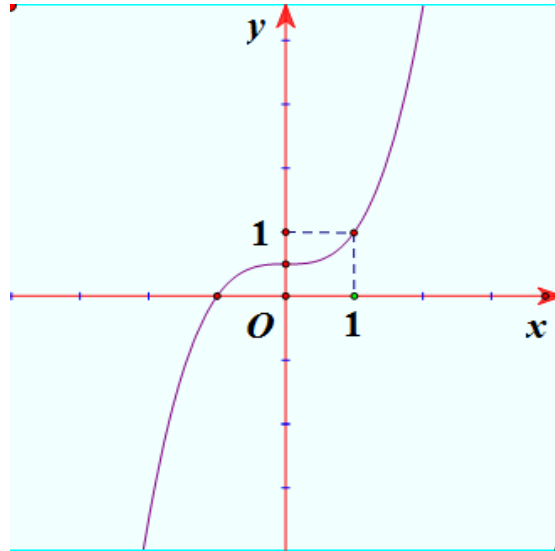
Câu 38. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. gọi S là tập hợp các giá trị của m ($m \in \mathbb{R}$) sao cho $(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là?

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.



N.C.Đ

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 31^x + 3^x + mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2

A. $m \in (-10; -5)$.

B. $m \in (-5; 0)$.

C. $m \in (0; 5)$.

D. $m \in (5; 10)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 + m$.

Ta xét các trường hợp:

+ Khi $m > 0$ thì $f'(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tức $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (31^x + 3^x + mx) = -\infty$ nên không thỏa mãn yêu cầu $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.

+ Khi $m = 0$ thì $f'(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tức $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (31^x + 3^x) = 0$ nên không thỏa mãn yêu cầu $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$

+ Khi $m < 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 = -m$.

Đặt hàm số $g(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3$ thì $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có tập giá trị là $(0; +\infty)$

Mà $-m > 0$ nên tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) = -m$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	0	$-m$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ là:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f(a)$	

Ta có $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $f(a)$ tại duy nhất giá trị $x = a$

Do đó, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2 \Leftrightarrow f(a) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$

Suy ra $g(0) = -m \Leftrightarrow m = -\ln 31 - \ln 3 = -\ln 93 \in (-5; 0)$.

CÁCH 2

Nhận xét: Ta có $f(0) = 2$

Giả thiết bài toán ta có: $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{31^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \geq -m, \forall x > 0 \\ \frac{31^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \leq -m, \forall x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

Suy ra $-m = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{31^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \right) = \ln 31 + \ln 3 = \ln 93 \Leftrightarrow m = -\ln 93$

Nhận xét: Để giải tốt dạng toán này học sinh cần vận dụng linh hoạt ứng dụng đạo hàm vào khảo sát hàm số chứa tham số.

Câu 2. Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2018^x + 2019^x - mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2. Khi đó:

A. $m \in (-30; -20)$. B. $m \in (-20; 0)$. C. $m \in (0; 20)$. D. $m \in (20; 30)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 2018^x \ln 2018 + 2019^x \ln 2019 - m$.

Ta xét các trường hợp:

+ Khi $m < 0$ thì $f'(x) = 2018^x \ln 2018 + 2019^x \ln 2019 - m$ tức $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2018^x + 2019^x - mx) = -\infty$ nên không thỏa mãn yêu cầu $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.

+ Khi $m = 0$ thì $f'(x) = 2018^x \ln 2018 + 2019^x \ln 2019 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tức $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2018^x + 2019^x) = 0$ nên không thỏa mãn yêu cầu $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.

+ Khi $m > 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2018^x \ln 2018 + 2019^x \ln 2019 = m$.

Đặt hàm số $g(x) = 2018^x \ln 2018 + 2019^x \ln 2019$ thì $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có tập giá trị là $(0; +\infty)$

Mà $m > 0$ nên tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) = m$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	0	m	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ là:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$f(a)$	

Ta có $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $f(a)$ tại duy nhất giá trị $x = a$

Do đó, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2 \Leftrightarrow f(a) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$

Suy ra $m = g(0) \Leftrightarrow m = \ln 2018 + \ln 2019 \approx 15,2$ nên $m \in (0; 20)$.

Câu 3. Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \log_{31}(x+1) + \log_3(x+1) + mx$ trên $(-1; +\infty)$ là 0. Khi đó:

A. $m \in (-3; -2)$. B. $m \in (-2; 0)$. C. $m \in (0; 2)$. D. $m \in (2; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (-1; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3} + m$.

Ta xét các trường hợp:

+ Khi $m \geq 0$ thì $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3} + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tức $f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\log_{31}(x+1) + \log_3(x+1) + mx) = -\infty$ nên không thỏa $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.

+ Khi $m < 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3} = -m$.

Đặt hàm số $g(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3}$ thì $g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2 \ln 31} - \frac{1}{(x+1)^2 \ln 3}$ nên $g(x)$

ng nghịch biến trên $(-1; +\infty)$ và có tập giá trị là $(0; +\infty)$

Mà $-m > 0$ nên tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) = -m$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	-1	a	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$+\infty$	$-m$	0

Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ là:

x	-1	a	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(a)$	

Ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $f(a)$ tại duy nhất giá trị $x = a$

Do đó, $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$

Suy ra $g(0) = -m \Leftrightarrow m = -g(0) = -\left(\frac{1}{\ln 31} + \frac{1}{\ln 3}\right) \approx -1,2$.

Câu 4. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m + \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = \sin x$ có nghiệm là $[a, b]$. Giá trị $a+b$ bằng

A. $-\frac{1}{4} - \sqrt{2}$.

B. $-\frac{1}{4} + \sqrt{2}$.

C. $-\frac{1}{2} - \sqrt{2}$.

D. $-\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$m + \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = \sin x \Leftrightarrow (m+1) + \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = (\sin x + 1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1) + c = d^2 \\ (m+1) + d = c^2 \end{cases} \left(c = \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x}, d = \sqrt{1+\sin x} \right).$$

$$\Rightarrow (c-d)(1+c+d) = 0 \Leftrightarrow c = d \Rightarrow \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = \sqrt{1+\sin x}.$$

$$\Leftrightarrow m+1 + \sqrt{1+\sin x} = 1 + \sin x.$$

$$\Leftrightarrow m+1 = t^2 - t = f(t), t = \sqrt{1+\sin x} \in [0, \sqrt{2}].$$

$$\text{Ta có } \max_{[0, \sqrt{2}]} f(t) = 2 - \sqrt{2}, \min_{[0, \sqrt{2}]} f(t) = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m+1 \leq 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq m \leq 1 - \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow a+b = -\frac{1}{4} - \sqrt{2}.$$

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 2x = m\sqrt{1+\tan x} \cdot \cos^2 x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos 2x = m\sqrt{1+\tan x} \cdot \cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = m\sqrt{1+\tan x} \cdot \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\cos^2 x} = m\sqrt{1+\tan x} \text{ vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \tan^2 x = m\sqrt{1+\tan x}.$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \tan x \in [0; \sqrt{3}] \Rightarrow \sqrt{1+\tan x} \neq 0 \Rightarrow m = \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+\tan x} \Rightarrow t \in [1; \sqrt{1+\sqrt{3}}] \Rightarrow m = \frac{-t^4 + 2t^2}{t} = -t^3 + 2t \quad (1).$$

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ khi và chỉ phương trình (1) có nghiệm $t \in [1; \sqrt{1+\sqrt{3}}]$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 2t$ với $t \in [1; \sqrt{1+\sqrt{3}}]$.

Có $f'(t) = -3t^2 + 2$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \notin [1; \sqrt{1+\sqrt{3}}]$.

$$f(1) = 1, -2 < f(\sqrt{1+\sqrt{3}}) = -\sqrt{1+\sqrt{3}}^3 + 2\sqrt{1+\sqrt{3}} < -1.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên phương trình (1) có nghiệm khi $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình:

$$x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0 \text{ đúng với mọi } x \in [-1; 1]. \text{ Số phần tử của tập } S \text{ bằng:}$$

A. 1.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$. Khi đó, $0 \leq t \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$.

Ta có, bất phương trình: $1-t^2-m+t^3 \leq 0, \forall t \in [0; 1]$

$$\Leftrightarrow m \geq t^3 - t^2 + 1, \forall t \in [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow m \geq f(t), \forall t \in [0; 1], \text{ với } f(t) = t^3 - t^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{[0;1]} f(t)$$

Ta có, $f'(t) = 3t^2 - 2t$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

N.C.Đ

Lập bảng biến thiên ta được: $\max_{[0;1]} f(t) = 1$.

Do đó, $m \geq 1$, mà $m \in [0; 2019] \Rightarrow m \in [1; 2019]$

$\Rightarrow$ có 2019 giá trị nguyên của m .

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, bất phương trình

$$f(x) > \ln(\cos x) - e^{\pi x} + m \text{ (với } m \text{ là tham số) thỏa mãn với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ khi và chỉ khi}$$

A. $m \leq f(0) + 1$.

B. $m > f(0) - 1$.

C. $m < f(0) + 1$.

D. $m \geq f(0) + 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) > \ln(\cos x) - e^{\pi x} + m \Leftrightarrow m < f(x) - \ln(\cos x) + e^{\pi x} (*)$, trong đó $f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Xét hàm số $g(x) = -\ln(\cos x) \Rightarrow g'(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Xét hàm số $h(x) = e^{\pi x} \Rightarrow h'(x) = \pi \cdot e^{\pi x}$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow f(x) - \ln(\cos x) + e^{\pi x}$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên đạt GTNN trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

$$f(0) + g(0) + h(0) = f(0) + 1.$$

Suy ra: Bất phương trình (*) thỏa mãn với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $m \leq f(0) + 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0) - 1$. B. $m > f(-1) - e$. **C. $m > f(0) - 1$.** D. $m \geq f(-1) - e$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) < e^{x^2} + m \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} < m$$

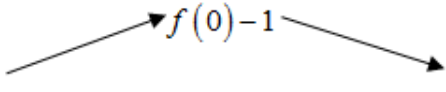
Xét hàm số: $g(x) = f(x) - e^{x^2}$; $g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$.

Trên khoảng $(-1; 0)$ ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ -2x > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0)$.

Trên khoảng $(0; 1)$ ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -2x < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$.

Tại điểm $x = 0$ ta có $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ -2xe^{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = 0$. **N.C.Đ**

Suy ra bảng biến thiên của $g(x)$:

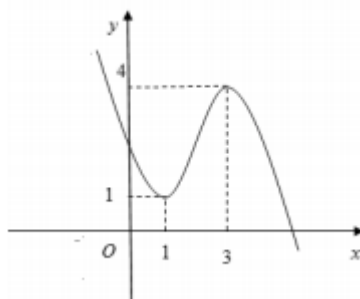
x	-1	0	1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$			

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(-1; 1)} g(x) = f(0) - 1$.

Do đó bất phương trình $m > g(x)$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

$$m > \max_{(-1; 1)} g(x) = f(0) - 1.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x - m| + 1) = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



A. 3.

B. Vô số.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = |x - m| + 1 (t \geq 1)$, phương trình trở thành: $f(t) = m (*)$

+ Với $t = 1 \Leftrightarrow x = m$.

+ Với $t > 1 \Leftrightarrow |x - m| = t - 1 \Leftrightarrow x = m \pm (t - 1)$. Khi đó với mỗi $t > 1$ cho ta hai giá trị x .

Vậy phương trình có đúng 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có đúng 2 nghiệm lớn hơn 1 $\Leftrightarrow 1 < m < 4 \Rightarrow m \in \{2; 3\}$.

Câu 10. Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình

$$x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x} \text{ có nghiệm là}$$

A. 2011.

B. 2012.

C. 2013.

D. 2014.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện : $x^3 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

*) Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

*) Với $x > 0$ chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x^3 + 4x}$ ta được:

$$\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} + (m+2)\sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} = m-1. \quad (1) \quad \text{N.C.Đ}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} = \sqrt{x + \frac{4}{x}} \geq \sqrt{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{4}{x}} = 2$. Vậy $t \geq 2$ với $\forall x > 0$.

Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - (m-1)t + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 2}{t-1} \Leftrightarrow m = t + 2 + \frac{4}{t-1} \quad (t \geq 2) \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2 + \frac{4}{t-1}$ trên $[2; +\infty)$.

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \in [2; +\infty) \\ t = -1 \notin [2; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	2	3	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	8	7	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [2; +\infty)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \geq 7$. Kết hợp m là số nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ suy ra có 2013 giá trị m .

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	3
y'	+	0	-
y		9	5

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$.

A. 9.

B. 5.

C. 4.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Theo đề ta có $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2) \Leftrightarrow m = \frac{f(x)}{x^4 - 2x^2 + 2}$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ (*).

Đặt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

$$g'(x) = 4x^3 - 4x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 3] \\ x = 1 \in [0; 3] \end{cases}, g(0) = 2; g(1) = 1; g(3) = 65$$

$$\text{Nên } \min_{[0; 3]} g(x) = g(1) = 1; \max_{[0; 3]} g(x) = g(3) = 65$$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{[0; 3]} f(x) = f(1) = 9; \min_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 5$.

$$\text{Do đó } \min_{[0; 3]} h(x) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{1}{13}; \max_{[0; 3]} h(x) = \frac{f(1)}{g(1)} = 9.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \frac{1}{13} \leq m \leq 9 \Rightarrow m \in \{1, \dots, 9\}.$$

Câu 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5.

B. 1.

C. -3.

D. -8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}.$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của } y = f(x) \text{ trên } [0; 2] \text{ bằng } 5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 2] \\ \exists x_0 \in [0; 2] \mid f(x_0) = 5 \end{cases}.$$

$$* f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} \leq 5, \forall x \in [0; 2]$$

$$\Leftrightarrow m \geq x^3 + x^2 - 5x - 5, \forall x \in [0; 2]$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{[0; 2]} h(x), \text{ với } h(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5.$$

+ Ta có: $h'(x) = 3x^2 + 2x - 5$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} (L)$.

Ta có: $h(0) = -5$, $h(2) = -3$, $h(1) = -8$.

Suy ra $\max_{[0;2]} h(x) = -3$, $\min_{[0;2]} h(x) = -8$.

Vậy $m \geq -3$. (1)

* $\exists x_0 \in [0;2] \parallel f(x_0) = 5 \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1} = 5$ có nghiệm trên $[0;2]$.

$\Leftrightarrow m = x^3 + x^2 - 5x - 5$ có nghiệm trên $[0;2]$.

Theo phần trên, ta suy ra $-8 \leq m \leq -3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m = -3$.

Cách dùng casio:

Kiểm tra từng giá trị của m từ các đáp án A, B, C, D như sau

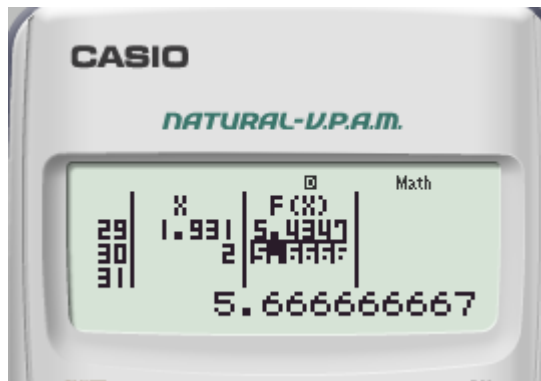
Trường hợp 1: $m = -5$ thì $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{x+1}$.

Trước khi làm thì tắt hàm $g(x)$ bằng lệnh "SHIFT + MODE + $\downarrow$ + 5 + 1".

Bước 1: Vào môi trường TABLE bằng lệnh "Mode + 7".

Bước 2: Nhập hàm $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{x+1}$. **N.C.Đ**

Bước 3: Nhập $Start = 0$; $End = 2$; $Step = \frac{2-0}{29}$.



Quan sát bên cột $f(x)$ có giá trị $f(x) \approx 5,67$ nên loại $m = -5$.

Ba trường hợp còn lại làm tương tự như trên chỉ có $m = -3$ thỏa mãn giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 5.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	-	+	0	-	+
y	$+\infty$	-1	4	$-\infty$	$+\infty$

Phương trình $f(2^{\sin x}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Với $x \in \left[0; \frac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow \sin x \in [0; 1] \Rightarrow t = 2^{\sin x} \in [1; 2]$.

Phương trình trở thành $f(t) = 3$. Kẻ đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x = a < 1; x = b \in (1; \sqrt{2}); x = c \in (\sqrt{2}; 2); x = d \in (2; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(t) = 3$ có bốn nghiệm là:

$t = a < 1; t = b \in (1; \sqrt{2}); t = c \in (\sqrt{2}; 2); t = d \in (2; +\infty)$.

Đối chiếu điều kiện $t \in [1; 2]$ nhận $t = b; t = c$.

$2^{\sin x} = b \in (1; \sqrt{2}) \Leftrightarrow \sin x = \log_2 b \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Phương trình này có một nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

$2^{\sin x} = c \in (\sqrt{2}; 2) \Leftrightarrow \sin x = \log_2 c \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **N.C.Đ**

Phương trình này có hai nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9; 9]$ để phương trình: $\sqrt{1-x^2} - m(2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} - 3) + 1 = 0$ có nghiệm?

A. 14.

B. 8.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt: $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ (1)

Xét hàm số $t(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ trên $[-1; 1]$

$$t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$t'(x)$			$-$	0	$+$
$t(x)$			2		
		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	

Suy ra $t \in [\sqrt{2}; 2]$

Từ (1) suy ra $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-2}{2}$. Khi đó PT trở thành:

$$\frac{t^2-2}{2} - m(2t-3) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4mt + 6m = 0 \quad (2)$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị nguyên của tham số m để phương trình:

$t^2 - 4mt + 6m = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $[\sqrt{2}; 2]$.

Ta có: $t^2 - 4mt + 6m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2m(2t-3) = 0$

TH1: Nếu $2t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$ thay vào (2) ta được: $\frac{9}{4} = 0$ (vô lý)

TH2: Nếu $t \neq \frac{3}{2}$ PT (2) $\Leftrightarrow 2m = \frac{t^2}{2t-3}$ (*) N.C.Đ

Xét hàm số: $g(t) = \frac{t^2}{2t-3}$ trên $[\sqrt{2}; 2]$ $\Rightarrow g'(t) = \frac{2t(t-3)}{(2t-3)^2}$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2t(t-3)}{(2t-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \notin [\sqrt{2}; 2] \\ t=3 \notin [\sqrt{2}; 2] \end{cases}$$

BBT

t	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$g'(t)$			$-$	$-$	
$g(t)$		$-4\sqrt{2}-6$	$+\infty$	4	
			$-\infty$		

Dựa vào BBT suy ra: để PT có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 4 \\ 2m \leq -2(2\sqrt{2}+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -(2\sqrt{2}+3) \end{cases}$

Với $m \geq 2$, $m \in [-9; 9] \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ (8 giá trị thỏa mãn).

Với $m \leq -(2\sqrt{2}+3)$, $m \in [-9; 9] \Rightarrow m \in \{-6; -7; -8; -9\}$ (4 giá trị thỏa mãn).

Vậy có tất cả 12 giá trị nguyên của tham số $m \in [-9; 9]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Cho phương trình $16m^2x^3 + 16x + \sqrt{8x^3 + 2x + 2} = 2m^2 + 10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m .

Lời giải

Chọn B

Ta có $16m^2x^3 + 16x + \sqrt{8x^3 + 2x + 2} = 2m^2 + 10$

$$\Leftrightarrow 16m^2x^3 + 16x + \sqrt{8x^3 + 2x + 2} - 2m^2 - 10 = 0.$$

$$\text{Điều kiện: } 8x^3 + 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt: } f(x) = 16m^2x^3 + 16x + \sqrt{8x^3 + 2x + 2} - 2m^2 - 10 \text{ với } x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } f'(x) = 48m^2x^2 + 16 + \frac{12x^2 + 1}{\sqrt{8x^3 + 2x + 2}} > 0, \forall x > -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$
$f'(x)$		N.C.Đ ₊
$f(x)$	-18	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm với mọi x .

Câu 16. Tổng các giá trị nguyên dương của m để tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{\frac{m}{72}}x^2 + 1 < \sqrt{x} \text{ có chứa đúng hai số nguyên là}$$

A. 27.

B. 29.

C. 28.

D. 30.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x \geq 0$.

Do m dương nên $\frac{m}{72}x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có, } \sqrt{\frac{m}{72}}x^2 + 1 < \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{m}{72}x^2 + 1 < x \Leftrightarrow mx^2 < 72(x-1) \quad (1)$$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của (1) nên (1) $\Leftrightarrow m < \frac{72(x-1)}{x^2}$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{72(x-1)}{x^2}$ với $x > 0$.

$$y' = f'(x) = \frac{72(-x+2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$ với $x > 0$:

x	0	1	2	3	4	$+\infty$
y'		+	0	-		
y	$-\infty$	0	18	-16	$\frac{27}{2}$	0

Từ bảng biến thiên ta có $f(2) > f(3) > f(4) = \frac{27}{2} > f(x), \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4\}$, nên để tập

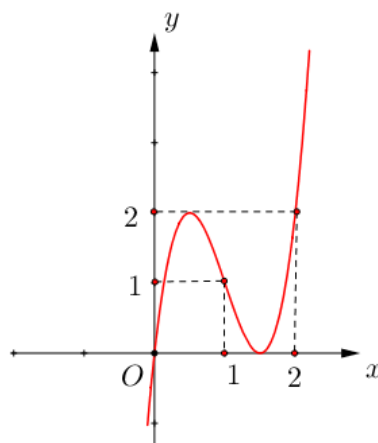
nghiệm của bất phương trình $m < \frac{72(x-1)}{x^2}$ có chứa đúng hai số nguyên thì

$$f(4) = \frac{27}{2} < m < f(3) = 16. \text{ (tập nghiệm chứa } x = 2, x = 3)$$

Với $m \in \mathbb{N}^*$ thì $m \in \{14, 15\}$

Do vậy, tổng các giá trị nguyên dương của m là $14 + 15 = 29$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

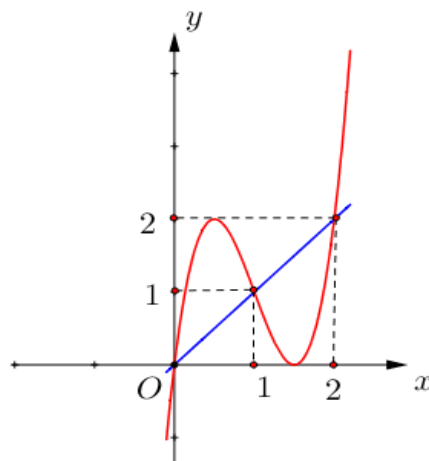


Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. **B.** $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$. **C.** $m \geq f(0) - \frac{1}{2}$. **D.** $m > f(0) - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



$$f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m \quad (1)$$

Ta có: $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1]$. Đặt $2\sin x = t$ ($t \in (0; 2]$) ta được bất phương trình:

$$f(t) - \frac{1}{2}t^2 < m \quad (2).$$

(1) đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi (2) đúng với mọi $t \in (0; 2]$.

Xét $g(t) = f(t) - \frac{1}{2}t^2$ với $t \in (0; 2]$.

$$g'(t) = f'(t) - t.$$

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và $y = x$ (hình vẽ) ta có BBT của $g(t)$ như sau:

t	0	1	2	
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$				

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $m > g(1) = f(1) - \frac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(-2) = m+1$, $f(1) = m-2$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		$+\infty$
	$-\infty$		-2	

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} = m$ có nghiệm $x \in (-2; 1)$ là

A. $\left(-5; -\frac{7}{2}\right)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-2; 7)$.

D. $\left(-\frac{7}{2}; 7\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3}$, với $x \in (-2; 1)$.

Ta có $h'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{5}{(x+3)^2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; 1)$

và $-\frac{5}{(x+3)^2} < 0, \forall x \in (-2; 1)$. Do đó $h'(x) < 0, \forall x \in (-2; 1)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ trên khoảng $(-2; 1)$.

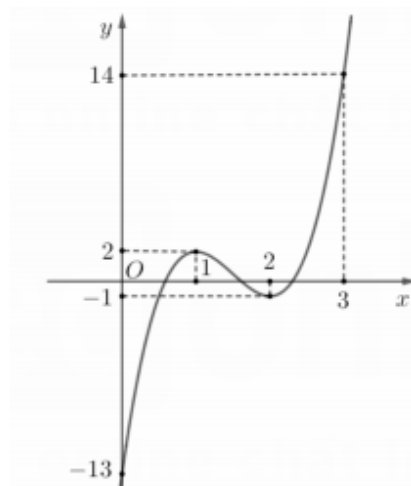
x	-2	1
$h'(x)$		-
$h(x)$	$h(-2)$	$h(1)$

Khi đó, phương trình $h(x) = m$ có nghiệm $x \in (-2; 1)$ khi và chỉ khi $h(1) < m < h(-2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f(1) - \frac{3}{4} < m < \frac{1}{2}f(-2) + 3 \Leftrightarrow \frac{m-2}{2} - \frac{3}{4} < m < \frac{m+1}{2} + 3 \Leftrightarrow \frac{2m-7}{4} < m < \frac{m+7}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < 7.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(f(x+1)) = m$ có ít nhất 6 nghiệm thực phân biệt?



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình $f(x+b) = a$ cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = a$.

Xét phương trình $f(f(x+1)) = m$ (1).

Đặt $t = f(x+1)$ Khi đó ta có phương trình $f(t) = m$ (*).

+ Trường hợp 1: Với $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Khi đó phương trình (*) có đúng 1 nghiệm. Suy ra phương trình (1) có tối đa 3 nghiệm (không thỏa mãn).

+ Trường hợp 2: Với $m = -1$. Khi đó (*) trở thành

$$f(t) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = t_1 \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+1) = 2 \\ f(x+1) = t_1, t_1 \in (0; 1) \end{cases}.$$

Phương trình $f(x+1) = 2$ có 2 nghiệm, phương trình $f(x+1) = t_1, t_1 \in (0; 1)$ có 3 nghiệm.

Suy ra phương trình (1) có 5 nghiệm (không thỏa mãn).

+ Trường hợp 3: Với $m = 2$. Khi đó (*) trở thành

$$f(t) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = t_2 \in (2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+1) = 1 \\ f(x+1) = t_2, t_2 \in (2; 3) \end{cases}.$$

Phương trình $f(x+1) = 1$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x+1) = t_2, t_2 \in (2; 3)$ có 1 nghiệm. Suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm (không thỏa mãn).

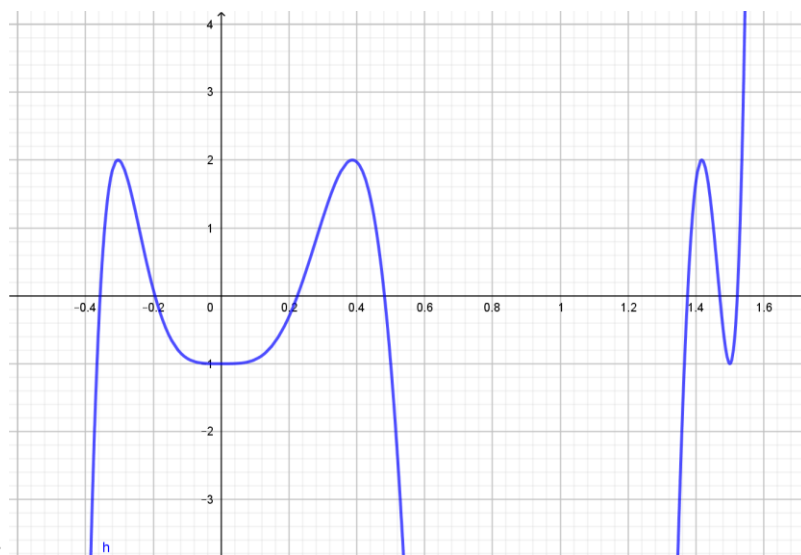
+ Trường hợp 4: Với $m \in (-1; 2)$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_3 \in (0; 1) \\ t = t_4 \in (1; 2) \\ t = t_5 \in (2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+1) = t_3, t_3 \in (0; 1) \\ f(x+1) = t_4, t_4 \in (1; 2) \\ f(x+1) = t_5, t_5 \in (2; 3) \end{cases}.$$

Phương trình $f(x+1) = t_3, t_3 \in (0; 1)$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x+1) = t_4, t_4 \in (1; 2)$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x+1) = t_5, t_5 \in (2; 3)$ có 1 nghiệm. Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm trên là các nghiệm phân biệt. Suy ra phương trình (1) có 7 nghiệm phân biệt (thỏa mãn).

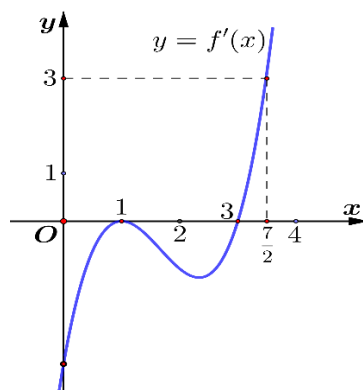
Vậy, phương trình $f(f(x+1)) = m$ có ít nhất 6 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow -1 < m < 2$.

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1\}$.



Minh họa bằng đồ thị:

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây ?

A. $x_0 = 0$.

B. $x_0 = \frac{7}{2}$.

C. $x_0 = 3$.

D. $x_0 = 1$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	1	3	$\frac{7}{2}$
y'		-	0	-
y	$f(0)$		$f(3)$	$f(\frac{7}{2})$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm $x_0 = 3$.

Câu 21. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1$ (m là tham số). Gọi p, q lần lượt là các giá trị m nguyên nhỏ nhất và giá trị lớn nhất thuộc $[-10; 10]$ để phương trình có nghiệm. Khi đó giá trị $T = p + 2q$ là

A. 10.

B. 19.

C. 20.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - (2m - 2)x - 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$

$$x^2 - (2m - 2)x - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x - 5}{2x}$$

Xét hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 5}{2x}$ trên $[1; +\infty)$. Ta có $y' = \frac{2x^2 + 10}{4x^2}$.

Bảng biến thiên sau



x	1	$+\infty$
y'		+
y	-1	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm lớn hơn bằng 1 $\Leftrightarrow m \geq -1$. Kết hợp điều kiện $m \in [-10; 10] \Rightarrow m \in [-1; 10]$.

Do đó $p = -1, q = 10 \Rightarrow p + 2q = 19$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 4$. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\sqrt{f(f(x) - 2) - 2} = 3 - f(x)$ là

A. 7 .

B. 4 .

C. 6 .

D. 9 .

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) - 2 = t \Rightarrow f(x) = t + 2$ phương trình trở thành:

$$\sqrt{f(t) - 2} = 3 - (t + 2) \Leftrightarrow \sqrt{f(t) - 2} = 1 - t \Leftrightarrow \sqrt{t^3 - 3t^2 - 3t + 2} = 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t \geq 0 \\ t^3 - 3t^2 - 3t + 2 = (1 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t \geq 0 \\ t^3 - 4t^2 - t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx -0,58836 \\ t \approx 0,40642 \end{cases}$$

N.C.Đ

$$\text{Với } t = -0,58836, \text{ ta có: } x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \approx -0,58836 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -1,21627 \\ x \approx 0,586256 \\ x \approx 3,63001 \end{cases}$$

$$\text{Với } t \approx -0,40642, \text{ ta có: } x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \approx -0,40642 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -1,1951 \\ x \approx 0,552834 \\ x \approx 3,64227 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = \frac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 10.

B. 6.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x + \sqrt{4 - x^2} = \frac{m}{2}$ (*) điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 2$.

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2; 2]$.

$$\text{Có } f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in [-2; 2] \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ liên tục trên $[-2; 2]$; có đạo hàm trên $(-2; 2)$.

$f(-2) = -2$; $f(2) = 2$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Suy ra $\min_{[-2; 2]} f(x) = -2$; $\max_{[-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq \frac{m}{2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4\sqrt{2}$.

Mặt khác m nguyên âm nên $S = \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'(x)	$-$	0	$+$	0	$-$

Xét hàm số $g(x) = e^{f(1+x-x^2)}$, tập nghiệm của bất phương trình $g'(x) > 0$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (1 - 2x) \cdot f'(1 + x - x^2) \cdot e^{f(1+x-x^2)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Yêu cầu của bài toán $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (1 - 2x) f'(1 + x - x^2) e^{f(1+x-x^2)} > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ f'(1 + x - x^2) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(1 + x - x^2) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

N.C.Đ

$$\text{Xét trường hợp 1: } \begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ f'(1 + x - x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -1 < 1 + x - x^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 < 0 \\ x^2 - x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét trường hợp 2: } \begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(1 + x - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -x^2 + x + 1 < -1 \\ -x^2 + x + 1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 > 0 \\ -x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < -1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Câu 25. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xy + yz + xz = -3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = m \end{cases}$ với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số. Số giá trị

nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm là

A. 25.

B. 24.

C. 12.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 6 + 2(-3) = 0$.

Vậy $x + y + z = 0$. Suy ra: $z = -(x + y) \Rightarrow z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2(x^2 + y^2 + xy)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + xy$ (1). Thay $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ vào (1) ta được $x^2 + y^2 + xy = 3$.

$\Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 3 + xy \geq 0 \\ (x - y)^2 = 3 - 3xy \geq 0 \end{cases}$. Vậy $-3 \leq xy \leq 1$.

Ta có: $m = x^6 + y^6 + z^6 = x^6 + y^6 + (x + y)^6$ (thay $z = -(x + y)$)

$= (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3 + (x + y)^6 = [(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)]^2 - 2x^3y^3 + (x + y)^6$

$= (x + y)^2 \cdot [(x^2 + y^2 + xy) - 2xy]^2 - 2(xy)^3 + (x + y)^6$ (2)

Thay $\begin{cases} (x + y)^2 = 3 + xy \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$ vào (2) ta được: $x^6 + y^6 + z^6 = (3 + xy) \cdot (3 - 2xy)^2 - 2(xy)^3 + (3 + xy)^3$

Đặt $t = xy$ ($-3 \leq t \leq 1$). Khi đó $x^6 + y^6 + z^6 = (3 + t) \cdot (3 - 2t)^2 - 2t^3 + (3 + t)^3 = 3t^3 + 9t^2 + 54$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 9t^2 + 54$ trên $[-3; 1]$. Ta có: $f'(t) = 9t^2 + 18t$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-3; 1] \\ t = -2 \in [-3; 1] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	-3	-2	0	1	
f'(t)	+	0	-	0	+
f(t)					

Từ bảng biến thiên ta thấy: $54 \leq f(t) \leq 66$ với $\forall t \in [-3; 1]$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in [-3; 1]$

$\Leftrightarrow 54 \leq m \leq 66$. Vậy có 13 giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm.

Câu 26. Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3} + (2m-1)\sqrt{1-x} + m = 1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Giá trị của biểu thức $5a+3b$ bằng

A. 13.

B. 7.

C. 19.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Tập xác định : $D = [-3; 1]$.

Từ phương trình suy ra : $m = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$ trên đoạn $[-3; 1]$.

Ta có : $g'(x) = \frac{\frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{1-x}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{1-x}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)}{(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1)^2} > 0, \forall x \in [-3; 1]$.

Suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $[-3; 1]$.

Do đó, $\min_{[-3; 1]} g(x) = \frac{3}{5}; \max_{[-3; 1]} g(x) = \frac{5}{3}$.

N.C.Đ

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3} \right]$.

Vậy $5a+3b=8$. Đáp án D.

Cách 2:

Tập xác định : $D = [-3; 1]$.

Từ phương trình suy ra : $m = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$ trên đoạn $[-3; 1]$.

Dùng máy tính ta dự đoán $\frac{3}{5} \leq g(x) \leq \frac{5}{3}$.

Ta chứng minh: $\frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1} \geq \frac{3}{5}$. (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 10\sqrt{x+3} + 5\sqrt{1-x} + 5 \geq 3\sqrt{x+3} + 6\sqrt{1-x} + 3$

$\Leftrightarrow 7\sqrt{x+3} + 2 - \sqrt{1-x} \geq 0$.

Xét trên đoạn $[-3; 1]$ thì $7\sqrt{x+3} \geq 0; 2 - \sqrt{1-x} \geq 0$. Suy ra (1) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = -3$.

Ta lại chứng minh: $\frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1} \leq \frac{5}{3}$. (2)

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 6\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 3 \leq 5\sqrt{x+3} + 10\sqrt{1-x} + 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \leq 7\sqrt{1-x} + 2.$$

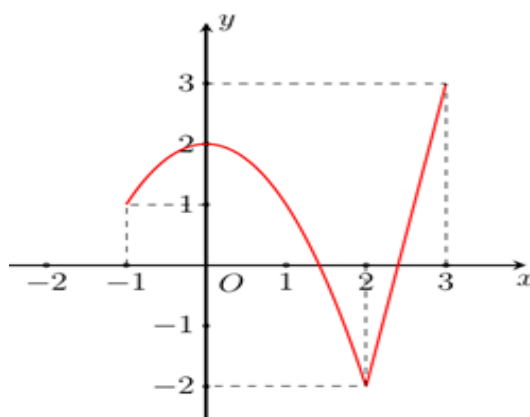
Xét trên đoạn $[-3;1]$ thì $\sqrt{x+3} \leq 2$; $7\sqrt{1-x} + 2 \geq 2$. Suy ra (2) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Do đó, $\frac{3}{5} \leq m \leq \frac{5}{3}$.

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right]$.

Vậy $5a+3b=8$. Đáp án D.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m \leq 7$.

B. $m \geq 7$.

C. $m \leq 2\sqrt{2} - 2$.

D. $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$ liên tục trên $[-1;3]$ ta có:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{7-x}}, x \in (-1;3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{7-x} \Leftrightarrow x+1 = 7-x \Leftrightarrow x=3 \text{ (nhận)}$$

$$g(-1) = 2, g(3) = 4 \Rightarrow \max_{[-1;3]} g(x) = \max\{g(-1), g(3)\} = g(3) = 4. \quad (1)$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có: $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 3. \quad (2)$

Đặt $h(x) = f(x) + g(x)$ trên $[-1;3]$, kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

$$h(x) \leq \max_{[-1;3]} f(x) + \max_{[-1;3]} g(x) = f(3) + g(3) = 7, \text{ đẳng thức xảy ra khi } x=3.$$

Vậy bất phương trình $m \leq h(x)$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m \leq \max_{[-1;3]} h(x) = 7$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018;2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2;4]$.

A. 2021.

B. 2019.

C. 2020.

D. 4037.

Lời giải

Chọn C

Ta có:



$$f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 - m^3x^3 - mx$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \geq m^3x^3 + mx \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 \geq m^3x^3 + mx \quad (1).$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}, g'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Bất phương trình (1)} \Leftrightarrow g(x+1) \geq g(mx) \Leftrightarrow x+1 \geq mx$$

$$\text{Xét } x \in [2; 4] \text{ bất phương trình } \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \geq m \quad (2)$$

$$\text{Đặt } h(x) = \frac{x+1}{x}.$$

Bất phương trình (2) luôn đúng với mọi $x \in [2; 4]$ suy ra: $m \leq \min_{[2; 4]} h(x)$.

$$\text{Ta có: } h'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \forall x \in [2; 4] \Rightarrow \min_{[2; 4]} h(x) = h(4) = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Do đó: } m \leq \frac{5}{4}.$$

Mà $m \in [-2018; 2018]$ và m nguyên nên có 2020 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 30. Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$
 $m(|\sin x| + |\cos x| + 1) \leq |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| - 2018.$

A. $-\frac{1}{3}.$

B. $-2018.$

C. $-\frac{2017}{2}.$

D. $-2017.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = |\sin x| + |\cos x| \Rightarrow t^2 = 1 + |\sin 2x| \leq 2 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

$$m(t+1) \leq t^2 + t - 2019 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + t - 2019}{t+1} = f(t) \text{ với mọi } t \in [1; \sqrt{2}].$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2020}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{2}].$$

$$\text{Vậy } m \leq \frac{t^2 + t - 2019}{t+1} = f(t) \text{ với mọi } t \in [1; \sqrt{2}] \Leftrightarrow m \leq \min_{t \in [1; \sqrt{2}]} f(t) = -\frac{2017}{2} = f(1).$$

Câu 31. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương
 $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3; 6].$

A. 28.

B. 20.

C. 4.

D. 19.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1 \quad (1) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-3; 6].$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}, x \in [-3; 6].$$

$$\Rightarrow t' = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{3+x}}{2\sqrt{3+x}\sqrt{6-x}}.$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 3 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	-3	$\frac{3}{2}$	6
t'	$+$	0	$-$
t	3	$3\sqrt{2}$	3

$$\Rightarrow t \in [3; 3\sqrt{2}].$$

$$\text{Ta có } t^2 = 3 + x + 6 - x + 2\sqrt{18 + 3x - x^2} = 9 + 2\sqrt{18 + 3x - x^2} \Rightarrow \sqrt{18 + 3x - x^2} = \frac{t^2 - 9}{2}.$$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-3; 6]$

$$\Leftrightarrow f(t) = t - \frac{t^2 - 9}{2} \leq m^2 - m + 1 \text{ nghiệm đúng } \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 1 \geq \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t). \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t - \frac{t^2 - 9}{2}, \quad t \in [3; 3\sqrt{2}] \quad \text{N.C.Đ}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2t = 1 - t < 0 \quad \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } [3; 3\sqrt{2}].$$

$$\Rightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3 - \frac{3^2 - 9}{2} = 3.$$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow m^2 - m + 1 \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện bài toán: } m \text{ nguyên và } m \in [-10; 10] \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; -1] \cup [2; 10] \end{cases}.$$

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Trên tinh thần thi trắc nghiệm, học sinh hoàn toàn có thể sử dụng tính năng TABLE của máy tính cầm tay để tìm $\max_{[-3; 6]} f(x) = 3$ với

$f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2}$. Từ đó đưa bài toán về dạng giải bất phương trình bậc hai cơ bản: $m^2 - m + 1 \geq 3$ một cách dễ dàng.

Câu 32. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{e + \ln 2}{2}$.

B. $\frac{e - \ln 2}{2}$.

C. $\frac{e \ln 2}{2}$.

D. $\frac{e}{2 \ln 2}$.

Lời giải

Chọn C

Có $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1}) \Leftrightarrow 2^y + y = 2x + \log_2(2x + 2^y) - 1$. (1)

Đặt $t = \log_2(2x + 2^y) \Rightarrow 2x + 2^y = 2^t \Rightarrow 2x = 2^t - 2^y$.

(1) trở thành : $2^y + y = 2^t - 2^y + t - 1 \Leftrightarrow 2^{y+1} + y + 1 = 2^t + t$. (2)

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = 2^x + x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (2) ta có: $t = y + 1 \Leftrightarrow \log_2(2x + 2^y) = y + 1 \Leftrightarrow 2x + 2^y = 2^{y+1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$.

Khi đó $P = \frac{x}{y} = \frac{2^{y-1}}{y} \Rightarrow P' = \frac{2^{y-1} y \ln 2 - 2^{y-1}}{y^2}$.

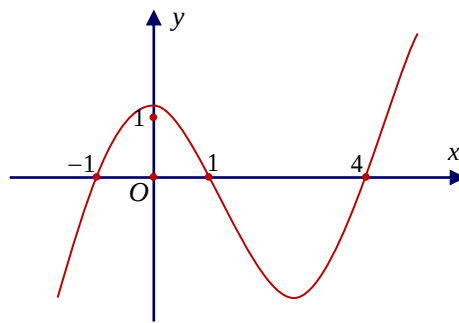
Cho $P' = 0 \Leftrightarrow y \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln 2}$.

Bảng biến thiên:

y	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
P'		0	
P	$+\infty$	$\frac{e \ln 2}{2}$	$+\infty$

Vậy $P_{\min} = \frac{e \ln 2}{2}$ khi $x = \frac{e}{2}$ và $y = \frac{1}{\ln 2}$. **N.C.Đ**

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2019f(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}) - m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2]$

A. 1513.

B. 1512.

C. 1515.

D. 1514.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{15x^2 - 30x + 16} \Leftrightarrow t = \sqrt{15(x-1)^2 + 1}$ do $x \in [0; 2]$ nên $t \in [1; 4]$.

Nhận xét : Ứng với mỗi $t \in (1; 4]$ thì có 2 nghiệm phân biệt $x \in [0; 2]$.

Phương trình: $2019f(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}) - m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} - m = 0$ (1)

trở thành : $2019f(t) - mt - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2019f(t)}{t+1}$ với $t \in [1; 4]$.

$$\Leftrightarrow m = 2019 \left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{4}{3} \right) \Leftrightarrow m = 673(t^2 - 5t + 4) \text{ với } t \in [1; 4]. \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm x phân biệt thuộc đoạn $[0; 2]$ tương đương phương trình (2) có 2 nghiệm t phân biệt thuộc nửa khoảng $(1; 4]$.

Xét $h(t) = 673(t^2 - 5t + 4)$ với $t \in (1; 4]$.

Bảng biến thiên $h(t)$

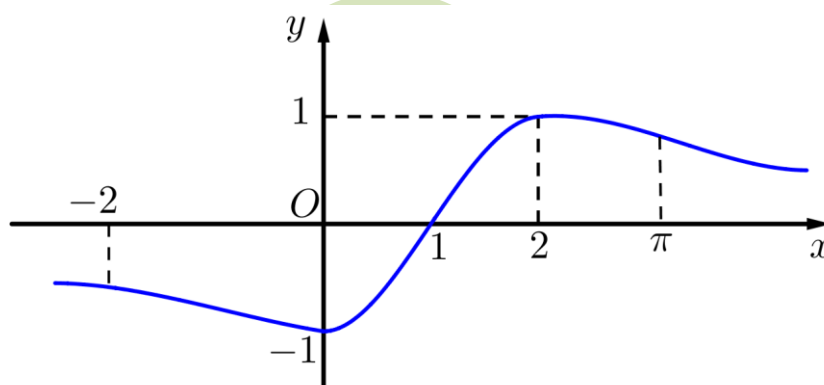
t	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$h'(t)$		–	0	+	
$h(t)$		0	$-\frac{6057}{4}$	0	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $-\frac{6057}{4} < m < 0$ và m nguyên suy ra $-1514 \leq m \leq -1$.

Vậy có 1514 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Nhận xét: Đề bài cho thừa giả thiết đồ thị $y = f(x)$.

Câu 34. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

A. $m < f(0)$. **B.** $m < f(1) - 1$. **C.** $m < f(-1) + 1$. **D.** $m < f(2)$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$$

$$\Leftrightarrow m < f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}$$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ thì

$$m < \min_{[-1; 3]} \left(f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \right)$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}$

Có $g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$

Nhận xét : Đến đây ta khó có thể giải được phương trình $g'(x) = 0$ để lập bảng xét dấu.

Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=1$ gợi ý cho ta xét dấu của hàm $g'(x)$ trên 2 khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$

Xét khoảng $(-1;1)$

$\forall x \in (-1;1) \Rightarrow f'(x) < 0$ (đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới trục hoành)

$x \in (-1;1) \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) < 0, \forall x \in (-1;1)$

Vậy $g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) < 0, \forall x \in (-1;1)$

Xét $x=1$

$g'(1) = f'(1) - \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi \cdot 1}{2} \right) = 0$

Xét khoảng $(1;3)$

$\forall x \in (1;3) \Rightarrow f'(x) > 0$ (đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành)

$x \in (1;3) \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) > 0, \forall x \in (1;3)$

Vậy $g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) > 0, \forall x \in (1;3)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$f(-1)+1$	$f(1)-1$	$f(3)+1$

Vậy $\min_{[-1;3]} \left(f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \right) = f(1) - 1$

Vậy $m < f(1) - 1$

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2 \geq m^3x^3 + mx$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) \geq f(mx) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq mx$$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $x^2 + 1 \geq mx$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$

$$x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x} = g(x), \forall x \in [1; 3]$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \forall x \in [1; 3] \Rightarrow \min_{x \in [1; 3]} g(x) = g(1) = 2$$

Vậy để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$ thì $m \leq 2$

Vì m nguyên dương nên $S = \{1; 2\}$ có 2 phần tử. Tổng các phần tử bằng 3.

Câu 36. Số giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(0; 2020)$ để phương trình

$$\|x - 1\| - \|2019 - x\| = 2020 - m \text{ có nghiệm là}$$

A. 2020.

B. 2021.

C. 2019.

D. 2018.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \|x - 1\| - \|2019 - x\| = \begin{cases} 2018, & x \notin [1; 2019] \\ |2x - 2020|, & x \in [1; 2019] \end{cases}$$

Vì hàm số $h(x) = 2x - 2020$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2019]$ nên ta có

$$\max_{[1; 2019]} h(x) = \max \{h(1), h(2019)\} = 2018, \min_{[1; 2019]} h(x) = \min \{h(1), h(2019)\} = -2018$$

Suy ra $\min_{[1; 2019]} f(x) = 0$ và $\max_{[1; 2019]} f(x) = 2018$.

Do đó, ta có: $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$ và $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 2018$.

Vì vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

$$0 \leq 2020 - m \leq 2018 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2020.$$

Suy ra có 2018 giá trị nguyên của m nằm trong khoảng $(0; 2020)$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{f(x) + m} \Leftrightarrow t^3 = f(x) + m \Leftrightarrow f(x) = t^3 - m \quad (1).$$

$$\text{Ta có } f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m, \text{ suy ra } f(t) = x^3 - m \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } f(x) - f(t) = t^3 - x^3 \Leftrightarrow f(x) + x^3 = f(t) + t^3 \Leftrightarrow x^5 + 4x^3 = t^5 + 4t^3 \quad (3).$$

Xét hàm số $g(u) = u^5 + 4u^3 \Rightarrow g'(u) = 5u^4 + 12u^2 \geq 0 \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó $(3) \Leftrightarrow g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t$. Thay vào (1) ta được $f(x) = x^3 - m \Rightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$ (4).

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3$ trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0 \forall x \in [1; 2] \Rightarrow h(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Vậy ta có $\min_{[1; 2]} h(x) = h(1) = 3$ và $\max_{[1; 2]} h(x) = h(2) = 48$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[1; 2] \Leftrightarrow$ Phương trình (4) có nghiệm trên $[1; 2]$.

$\Leftrightarrow \min_{[1; 2]} h(x) \leq 3m \leq \max_{[1; 2]} h(x) \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$. Vậy có 16 giá trị nguyên của m .

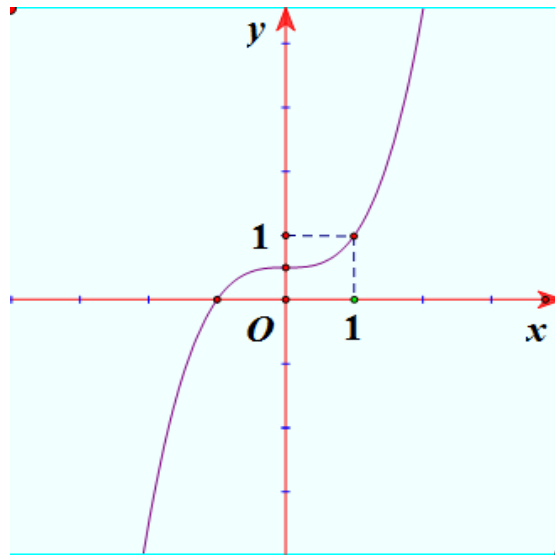
Câu 38. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. gọi S là tập hợp các giá trị của m ($m \in \mathbb{R}$) sao cho $(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là?

A. 2.

B. 0.

C. 3

D. 1.



Lời giải

Chọn A

Cách 1

Xét $g(x) = (x-1)h(x) \geq 0$ với $\forall x$, với $h(x) = m^3 f(2x-1) - m.f(x) + f(x) - 1$.

Do $\begin{cases} x-1 > 0 \forall x > 1 \Rightarrow h(x) \geq 0 \forall x > 1 \\ x-1 < 0 \forall x < 1 \Rightarrow h(x) \leq 0 \forall x < 1 \end{cases} (*) \Rightarrow h(x) = 0$ tại $x = 1$

$\Rightarrow m^3 f(1) - mf(1) + f(1) - 1 = 0 \Rightarrow m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$

+ Với $m = 0 \Rightarrow h(x) = f(1) - 1$ thỏa mãn (*) do hàm $f(x)$ đồng biến và $f(1) = 1$.

+ Với $m = 1 \Rightarrow h(x) = f(2x-1) - 1$ thỏa mãn (*)

Do $x > 1$ thì $2x-1 > 1 \Rightarrow f(2x-1) - 1 > 0$ và $x < 1$ thì $2x-1 < 1 \Rightarrow f(2x-1) - 1 < 0$.

+ Với $m = -1 \Rightarrow h(x) = -f(2x-1) + 2f(x) - 1$.

Khi đó $h(x)$ là hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) < 0$ không thỏa mãn (*).

Vậy $m=0$ và $m=1$.

Cách 2

$$\text{Từ đồ thị hàm số ta suy ra } \begin{cases} f(1)=1 \\ f(-1)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ c=0 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$$

$$\text{Theo đề bài } f(1)=1 \Rightarrow m^3-m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

$$\text{Với } m=0, \text{ ta có: } (x-1)(f(x)-1)=(x-1)\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)(x^3-1)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x^2-x+1) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Nhận})$$

$$\text{Với } m=1, \text{ ta có: } (x-1)[f(2x-1)-f(x)+f(x)-1]=(x-1)\left[\frac{1}{2}(2x-1)^3+\frac{1}{2}-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)(8x^3-12x^2+6x-1-1)=(x-1)(4x^3-6x^2+3x-1)$$

$$=(x-1)^2(4x^2-2x+1) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Nhận})$$

$$\text{Với } m=-1, \text{ ta có: } (x-1)[-f(2x-1)+f(x)+f(x)-1]=(x-1)\left[-\frac{1}{2}(2x-1)^3-\frac{1}{2}+x^3\right]$$

$$(x-1)(-x^3+6x^2-3x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

Vậy $m=0$ và $m=1$.

Cách 3

Để $(x-1)[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1]$ nhận $x=1$ là nghiệm bội lẻ duy nhất và khi qua $x=1$ ($[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1]$

đổi dấu từ $-$ sang $+$). Khi đó: $m^3-m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\pm 1 \end{cases}$.

+ Thử lại, ta thấy với $m=0$ thỏa.

+ Với $m=1$, ta có: $[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1]=f(2x-1)-1$ là một hàm số bậc ba có hệ số bậc cao nhất dương.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x-1)-1]=+\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(2x-1)-1]=-\infty$ nên khi qua $x=1$ hàm số sẽ đổi dấu từ $-$ sang $+$ thỏa mãn.

+ Với $m=-1$, ta có: $[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1]=-f(2x-1)+2f(x)-1$ là một hàm số bậc ba có hệ số bậc cao nhất âm.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x-1)-1] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(2x-1)-1] = +\infty$ nên khi qua $x=1$ hàm số sẽ đổi dấu từ + sang – không thỏa mãn.

N.C.Đ