CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

CHINH PHỤC

CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ MŨ - LOGARIT

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

LỜI GIỚI THIỆU

Trong đề thi THPT Quốc Gia thì các bài toán về cực trị nói chung luôn là các bài toán ở mức độ vận dụng và vận dụng cao và đa phần các đều cảm thấy khó vì không nắm được những phương pháp, những kiến thức cơ bản về bất đẳng thức hay các đánh giá thuần túy. Chính vì lí do đó mà mình đã nảy ra ý tưởng viết một số bài viết có thể giúp được các bạn hiểu được và giải quyết các dạng toán bất đẳng thức và cực trị trong các đề thi thử và đề thi THPT Quốc Gia. Ở bài viết này mình sẽ giới thiệu cho các bạn dạng toán về cực trị của hàm số mũ – logarit với mong muốn những ai đọc đều có thể hiểu và áp dụng cho những bài toán khác phức tạp hơn hoặc có thể phát triển thêm nhiều vấn đề khác. Để có thể viết nên được bài viết này không thể không có sự tham khảo từ các nguồn tài liệu của các các group, các khóa học, tài liệu của các thầy cô mà tiêu biểu là

1. Group Nhóm toán: https://www.facebook.com/groups/nhomtoan/
2. Group Hs Vted.vn: https://www.facebook.com/groups/vted.vn/
3. Group Nhóm Toán và Latex: https://www.facebook.com/groups/toanvalatex/
4. Website Toán học Bắc – Trung – Nam: http://toanhocbactrungnam.vn/
5. Website Toanmath: https://toanmath.com/
6. Anh Phạm Minh Tuấn: https://www.facebook.com/phamminhtuan.2810
7. Thầy Lã Duy Tiến – Giáo viên trường THPT Bình Minh
8. Thầy Lê Phúc Lữ - Công tác tại phòng R&D Công ty Fsoft thuộc tập đoàn FPT.
9. Thầy Đặng Thành Nam – Giảng viên Vted
10. Thầy Đặng Việt Đông – Giáo viên trường Nho Quan A

Trong bài viết mình có sáng tác và tự sưu tầm nên có thể sẽ có những câu hỏi chưa hay hoặc chưa phù hợp mong bạn đọc bỏ qua. Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc có thể góp ý trực tiếp với mình qua địa chỉ sau:

Nguyễn Minh Tuấn

Sinh viên K14 – Khoa học máy tính – Đại học FPT

Facebook: https://www.facebook.com/tuankhmt.fpt

Email: tuangenk@gmail.com

Blog: https://lovetoan.wordpress.com/

I. MỞ ĐẦU

Như ta đã biết trong đề thi môn toán của kì thi THPT Quốc Gia 2018 vừa qua có xuất hiện một câu cực trị logarit tuy không phải là bài toán khó nhưng khá là lạ và đã gây lúng túng cho nhiều học sinh, thực chất mấu chốt của bài toán là việc sử dụng bất đẳng thức AM – GM cơ bản để đánh giá. Trong bài viết này tôi và các bạn sẽ cùng tìm hiểu và phát triển bài toán đó cao hơn và cùng nhau ôn lại những dạng toán cực trị đã xuất hiện nhiều trước đây!

Bài toán mở đầu

Cho 2 số thực $a>0, b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của biểu thức $a+2b$ bằng?

A. 9 B. $\frac{20}{3}$ C. 6 D. $\frac{27}{4}$

Câu 43 mã đề 105 – Đề thi THPT Quốc Gia môn toán 2018

Nhận xét. Với những ai chưa có kiến thức nhiều về bất đẳng thức thì khả năng cao sẽ bỏ hoặc một số khác sẽ sử dụng CASIO tìm mối liên hệ giữa x,y bằng cách cho $Y=1000$, tuy nhiên chắc chắn rằng phương trình sẽ vô nghiệm. Nếu tinh ý ta có thể nhận thấy đề yêu cầu tìm giá trị của biểu thức $a+2b$ có nghĩa là a,b đều là một số xác định rồi, do đó ta phải nghĩ ngay tới phương pháp đánh giá! Chú ý thêm là các cơ số đều lớn hơn 1 do giả thiết và theo bất đẳng thức AM – GM ta lại có thêm $16a^2+b^2\ge 8ab$. Đến đây bài toán gần như đã coi như được giải quyết!

Lời giải. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $16a^2+b^2\ge 8ab$. Từ đây suy ra:

$$VT\ge \log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)\ge 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a,b>0 \\ 16a^2=b^2 \\ \log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow a+2b=\frac{27}{4}$

Vậy chọn đáp án **D.**

Chú ý. Ngoài phép đánh giá đầu ta còn sử dụng thêm đánh giá sau:

$$\log_a b+\log_b a=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}\ge 2\sqrt{\log_a b\cdot\frac{1}{\log_a b}}=2$$

Ta đã cùng tìm hiểu bài toán trong đề thi THPT Quốc Gia, trong chuyên đề này sẽ chủ yếu nhắc tới dạng toán kiểu như vậy, tuy nhiên trước tiên ta sẽ cùng nhắc lại một số dạng toán và kiến thức lý thuyết cần phải nắm rõ.

II. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để có thể làm tốt các bài toán ở chuyên đề này chúng ta cần phải nắm chắc được các kiến thức lý thuyết cơ bản về bất đẳng thức, điều kiện có nghiệm và biến đổi logarit sau.

Đây chính là nội dung chính của chuyên đề mà mình muốn nhắc tới, một dạng toán lấy ý tưởng từ đề thi THPT Quốc Gia 2018. Trước tiên để làm tốt ta sẽ cần có một số kiến thức về bất đẳng thức và nhắc lại các kiến thức đã học sau:

Bất đẳng thức AM – GM.

+ Cho 2 số thực dương a,b khi đó $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $a=b$

+ Cho 3 số thực dương a,b,c khi đó $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $a=b=c$

+ Tổng quát với các số thực dương $\sum_{i=1}^{n}x_i\ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$

+ Dạng cộng mẫu số $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\ge\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$

Khi cho $n=2,n=3$ thì ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc $\begin{cases}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ge\frac{4}{x_1+x_2}\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\ge\frac{9}{x_1+x_2+x_3}\end{cases}$

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

+ Cho 2 bộ số $(x_1,x_2,...,x_n)$ và $(y_1,y_2,...,y_n)$ khi đó ta có $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2$

Dấu "=" khi và chỉ khi các số lập thành các bộ số tỉ lệ.

Chú ý khi cho $n=2,n=3$ ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc

+ $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)\ge(x_1y_1+x_2y_2)^2$

+ $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\ge(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$

+ Dạng cộng mẫu Engel tổng quát $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\ge\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i}$. Trong đó dạng $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}$ là dạng ta hay gặp nhất

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svacxơ.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$. Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiện là $b_1,b_2,...,b_n>0$

Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát: Cho số thực $r\ge 1$ và mọi số dương $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ thì ta có:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \le \left[\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Khi đó ta có:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i} \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Dạng mà ta hay gặp nhất $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$. Bất đẳng thức này còn gọi là bất đẳng thức Vector.

Bất đẳng thức Holder.

Cho các số dương $x_{i,j}\left(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right)$.

Khi đó với mọi số $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n \ge 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$ ta có: $\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{i,j}\right)^{\omega_j} \ge \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i,j}^{\omega_j}\right)$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp đơn giản nhất cho 3 dãy số gồm $(a,b,c);(m,n,p);(x,y,z)$. Ta có:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right) \ge (axm+byn+czp)^3$$

Dấu "=" xảy ra khi 3 dãy tương ứng tỷ lệ.

Một bất đẳng thức ở dạng này mà ta hay gặp: $(1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$

Bất đẳng thức trị tuyệt đối.

Cho 2 số thực a,b khi đó ta có $|a|+|b| \ge |a+b| \ge |a|-|b|$

Dấu "=" thứ nhất khi a,b cùng dấu, dấu "=" thứ 2 khi a,b trái dấu.

Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a \ne 0)$. Khi đó nếu:

+ $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm , đồng nghĩa vế trái luôn không âm hoặc không dương

+ $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Ứng dụng của kiến thức này sẽ áp dụng cho những bài tìm điều kiện có nghiệm để suy ra min, max. Ngoài ra phải chú ý tới một số phép biến đổi logarit mà ta đã học.

Tính chất hàm đơn điệu

1. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa một nghiệm

2. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không lien tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa $n+1$ nghiệm

III. CÁC DẠNG TOÁN CỰC TRỊ MŨ – LOGARIT

1. KỸ THUẬT RÚT THẾ - ĐÁNH GIÁ ĐIỀU KIỆN ĐƯA VỀ HÀM 1 BIẾN SỐ.

Đây là một kỹ thuật cơ bản nhất mà khi gặp các bài toán về cực trị mà ta sẽ luôn nghĩ tới, hầu hết chúng sẽ được giải quyết bằng cách thế một biểu thức từ giả thiết xuống yêu cầu từ đó sử dụng các công cụ như đạo hàm, bất đẳng thức để giải quyết. Sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ minh họa.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các số thực x,y thỏa mãn $2^x+2^y=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(2x^2+y\right)\left(2y^2+x\right)+9xy$

A. $\frac{27}{2}$ **B.** 18 **C.** 27 **D.** 12

THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $4=2^x+2^y\ge 2^{x+y}\Rightarrow x+y\le 2\Rightarrow y\le 2-x$

$$\Rightarrow P\le\left(2x^2-x+2\right)\left(2(2-x)^2+x\right)+9x(2-x)=f(x)\le f(1)=18$$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 2: Cho 2 số thực $a,b>1$ thỏa mãn $\log_2 a+\log_3 b=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}$ bằng?

A. $\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$ **B.** $\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}$ **C.** $\frac{1}{2}(\log_2 3+\log_3 2)$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}}$

Chuyên KHTN Hà Nội – Lần 1 – 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$$P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}=\sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}}+\sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}}=\sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}}+\sqrt{\frac{1-\log_2 a}{\log_3 2}}$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}}+\sqrt{\log_2 3}\sqrt{1-t}\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\log_2 3}}-\frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}\left(t=\log_2 a\right)$

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-t}=\log_2 3\sqrt{t}\Leftrightarrow 1-t=t.\log_2^2 3\Leftrightarrow t=\frac{1}{1+\log_2^2 3}$

$$\Rightarrow f(t)\ge f\left(\frac{1}{1+\log_2^2 3}\right)=\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}\Rightarrow \min P=\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 3: Cho 2 số thực dương a,b thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2\left(4a^3 + b^3\right)$ được viết dưới dạng $x - y\log_2 z$ với x,y,z đều là các số thực dương lớn hơn 2. Khi đó tổng $x + y + z$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Cris Tuấn

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow \log_2 a = \log_2 \frac{4}{b^2} \Leftrightarrow a = \frac{4}{b^2}$.

Đặt $t = 4a^3 + b^3$, theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$t = 4a^3 + b^3 = \frac{256}{b^6} + b^3 = \frac{256}{b^6} + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{256}{b^6}.\frac{b^3}{2}.\frac{b^3}{2}} = 12$$

Khi đó $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2\left(4a^3 + b^3\right) = f(t) = t - 4\log_2 t$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{4}{t\ln 2} \ge 1 - \frac{4}{12\ln 2} > 0 \forall t \ge 12$. Vậy hàm $f(t)$ đồng biến trên $[12;+\infty)$

$$\Rightarrow P = f(t) \ge f(12) = 4 - 4\log_2 3 \Rightarrow x = y = -4, z = 3 \Rightarrow x + y + z = 3$$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 4: Cho 2 số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2}\log_2(a+2)(b+2) + 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + \frac{45}{a+b}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

A. 62 **B.** 63 **C.** 64 **D.** 65

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có: $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2}\log_2(a+2)(b+2) + 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(12 - a - b) = \log_2 2\sqrt{(a+2)(b+2)}$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{(a+2)(b+2)} = 12$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $(12 - a - b)^2 = 4(a+2)(b+2) \le (a+b+4)^2 \Rightarrow a + b \ge 4$.

Biến đổi tiếp biểu thức $P = \frac{a^3(a+2) + b^3(a+2)}{(a+2)(b+2)} + \frac{45}{a+b} = \frac{a^4 + b^4 + 2\left(a^3 + b^3\right)}{(a+2)(b+2)} + \frac{45}{a+b}$

Chú ý tới 2 bất đẳng thức quen thuộc $\begin{cases} a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8}(a+b)^4 \\ a^3 + b^3 \ge \frac{1}{4}(a+b)^3 \end{cases}$

Từ đó suy ra $P \ge \dfrac{\frac{1}{8}(a+b)^4 + 2.\frac{1}{4}(a+b)^3}{(a+2)(b+2)} + \dfrac{45}{a+b} = \dfrac{(a+b)^4 + 4(a+b)^3}{2(12-a-b)^2} + \dfrac{45}{a+b} = \dfrac{t^4+4t^3}{2(12-t)^2} + \dfrac{45}{t}$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t^4+4t^3}{2(12-t)^2} + \frac{45}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{(t+4)t^3}{(12-t)^3} + \frac{2(t+3)t^2}{(12-t)^2} - \frac{45}{t^2} \ge \frac{(4+4).4^3}{(12-4)^3} + \frac{2(4+3)4^2}{(12-4)^2} - \frac{45}{4^2} > 0$$

$$\Rightarrow P \ge f(t) \ge f(4) = \frac{61}{4} \Rightarrow \min P = \frac{61}{4} \Rightarrow m+n = 65$$

Chọn ý **D.**

Ví dụ 5: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log(x+2y) = \log x + \log y$, khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}} e^{\frac{y^2}{x+1}}}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của m^2+n^2 bằng bao nhiêu?

A. 62 **B.** 78 **C.** 89 **D.** 91

Sở giáo dục và đào tạo tỉnh Hải Phòng

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\log(x+2y) = \log x + \log y \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log xy \Leftrightarrow x+2y = xy \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y = \frac{x}{2}.y$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x}{2} + y = \frac{x}{2}.y \le \frac{\left(\frac{x}{2}+y\right)^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}+y\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2}+y\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y \ge 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu số Engel ta có:

$$P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}} e^{\frac{y^2}{x+1}}} \Rightarrow \ln P = \frac{x^2}{4(1+2y)} + \frac{y^2}{x+1} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2y+1} + \frac{y^2}{1+2.\frac{x}{2}} \ge \frac{\left(\frac{x}{2}+y\right)^2}{2\left(\frac{x}{2}+y+1\right)}$$

Đặt $t = \frac{x}{2} + y\ (t \ge 4) \Rightarrow \ln P = \dfrac{t^2}{2(t+1)} = f(t) \ge f(4) = \dfrac{8}{5} \Rightarrow P \ge e^{\frac{8}{5}}$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 6: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $0<x,y\le 1$ đồng thời $2^{\frac{x}{y}}+4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}}=5.2^{\frac{x}{y}}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y)=e^{\frac{x+y}{2}}-2^{x-y}-x-\frac{y^2}{2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=M+m$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $e-\frac{1}{2}$ **B.** $e-1$ **C.** $e-\frac{3}{2}$ **D.** Không tồn tại

Lời giải

Từ giả thiết ta có $2^{\frac{x}{y}}+4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}}=5.2^{\frac{x}{y}}\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{y}}+4.2^{\frac{2x}{y}-\frac{y}{x}}=5.2^{\frac{y}{x}}$

Đặt $a=2^{\frac{x}{y}},b=2^{\frac{y}{x}}\,(a,b>0)$ ta được: $a+\frac{4a^2}{b}=5b\Leftrightarrow (a-b)(4a+5b)=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow x=y$

Khi đó $f(x,y)=e^{\frac{x+y}{2}}-2^{x-y}-x-\frac{y^2}{2}=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1=g(x)$

Ta có $g'(x)=e^x-x-1,g''(x)=e^x-1>0$ vậy khi đó $g(x)>g(0)=0$, vậy không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Chọn ý **D.**

Ví dụ 7 : Gọi S là tập hợp các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $x\in[-1;1]$ đồng thời $\ln(x-y)^x-2017x=\ln(x-y)^y-2017y+e^{2018}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P=e^{2018x}(y+1)-2018x^2$ với $x,y\in S$ đạt tại $(x_0;y_0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x_0\in(-1;0)$ **B.** $x_0=-1$ **C.** $x_0=1$ **D.** $x_0\in[0;1)$

THPT Chuyên Quốc Học – Huế năm 2017-2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\ln(x-y)^x-2017x=\ln(x-y)^y-2017y+e^{2018}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\ln(x-y)-2017(x-y)=e^{2018}\Leftrightarrow \ln(x-y)-2017-\frac{e^{2018}}{x-y}=0\,(*)$$

Xét $f(t)=\ln t-2017-\frac{e^{2018}}{t}\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t}+\frac{e^{2018}}{t^2}>0,\forall t>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow x-y=e^{2018}\Rightarrow y=x-e^{2018}$

$\Rightarrow P=e^{2018x}\left(1+x-e^{2018}\right)-2018x^2=g(x)$

$\Rightarrow g'(x)=e^{2018x}\left(2019+2018x-2018e^{2018}\right)-4036x$

$\Rightarrow g''(x)=e^{2018x}\left(2018.2020+2018^2x-2018^2e^{2018}\right)-4036$

$\le e^{2018x}\left(2018.2020+2018^2-2018^2e^{2018}\right)-4036<0,\forall x\in[-1;1]$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$. Mà $g'(1)=e^{-2018}+2018>0, g'(0)=2019-2018e^{2018}$ nên tồn tại $x_0\in(-1;0)$ sao cho $g'(x_0)=0\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x)=g(x_0)$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 8: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $3^{x^2+y^2-2}\log_2(x-y)=\frac{1}{2}\left(1+\log_2(1-xy)\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}$ **B.** $\frac{17}{2}$ **C.** 3 **D.** 7

Lời giải

Điều kiện $x>y;1>xy$. Biến đổi giả thiết ta có

$$3^{x^2+y^2-2}\log_2(x-y)^2=\log_2(2-2xy)$$
$$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2}\log_2\left(x^2+y^2-2+2-2xy\right)=\log_2(2-2xy)$$

- Nếu $x^2+y^2>2\Rightarrow VT>\log_2(2-2xy)=VP$
- Nếu $x^2+y^2<2\Rightarrow VT<\log_2(2-2xy)=VP$

Vậy $x^2+y^2=2\Rightarrow(x+y)^2=2-2xy\Rightarrow xy=\frac{2-(x+y)^2}{2}$. Do $xy<1\Rightarrow(x+y)\in(-2;2)$

Khi đó ta có:

$$P=2(x+y)^3-6xy(x+y)-3xy=2a^3-3a\left(a^2-2\right)-\frac{3\left(a^2-2\right)}{2}=f(a)(a=x+y)\le f(1)=\frac{13}{2}$$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 9: Cho các số thực dương a,x,y,z thỏa mãn $4z\ge y^2, a>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a^2(xy)+\log_a\left(x^3y^3+x^2z\right)+\sqrt{4z-y^2}$

A. -4 **B.** $-\frac{25}{16}$ **C.** -2 **D.** $-\frac{21}{16}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $z\ge\frac{y^2}{4}\Rightarrow x^3y^3+x^2z\ge x^3y^3+\frac{x^2y^2}{4}\ge 2\sqrt{x^3y^3.\frac{x^2y^2}{4}}=(xy)^{\frac{5}{2}}$

Khi đó $S\ge\log_a^2(xy)+\log_2(xy)^{\frac{5}{2}}=\left(\log_a xy+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\ge-\frac{25}{16}$

Chọn ý **B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+1}(2x-4y)=1$. Tính $P=\frac{x}{y}$ khi biểu thức $S=4x+3y-5$ đạt giá trị lớn nhất

A. $P=\frac{8}{5}$ **B.** $P=\frac{9}{5}$ **C.** $P=-\frac{13}{4}$ **D.** $P=\frac{17}{44}$

Câu 2: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $xy\le 4y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\frac{6y}{x}+\ln\left(\frac{x+2y}{y}\right)$.

A. $24+\ln 6$ **B.** $12+\ln 4$ **C.** $\frac{3}{2}+\ln 6$ **D.** $3+\ln 4$

Câu 3: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+\log_3\left(x^2+y^2+1\right)=3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=|x-y|+|x^3-y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+2b$

A. 25 **B.** 34 **C.** 32 **D.** 41

Câu 4: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x+\log y\ge \log\left(x^3+y\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2x+y$ là?

A. $2\sqrt{2}-2$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $4+4\sqrt{2}$ **D.** $3+2\sqrt{2}$

Câu 5: Cho 2 số thực a,b thỏa mãn $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$ là?

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 6: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $xy=4, x\ge\frac{1}{2}, y\ge 1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_2^2 x+\left(\log_2 y-1\right)^2$. Tính $S=M+2m$

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 7: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2(x+3y)\le 2+2\log_2 y$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}}-\frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a}-\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. 30 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 10

Câu 8: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1$. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{y}{x}$. Tính $a+b$?

A. $\sqrt{10}$ **B.** $2\sqrt{14}$ **C.** $\frac{11}{6}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 9: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log(x+3y)+\log(x-3y)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x-|y|$

A. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Câu 10: : Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log(x+3y)+\log(x-3y)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x-2|y|+1$

A. $\sqrt{10}+1$ **B.** $\frac{5\sqrt{2}-3}{2}$ **C.** $\frac{3+5\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{3+2\sqrt{5}}{3}$

Câu 11: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(x+y+3)\geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3x+4y-6$

A. $\frac{5\sqrt{6}-9}{2}$ **B.** $\frac{5\sqrt{6}-3}{2}$ **C.** $\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$ **D.** $\frac{5\sqrt{6}-5}{2}$

Câu 12: : Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x+\log y\geq \log(x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+3y$

A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 9 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 13: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2 x+\log_2 y=\log_2(x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x^2+y^2$

A. $2\sqrt[3]{4}$ **B.** 3 **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một cặp số thực (x,y) thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\geq 1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2=m$

A. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ **B.** $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$ **C.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

Câu 15: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $4+3^{x^2-2y+2}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+2y$.

A. $-\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $-\frac{33}{8}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Câu 16: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $x^2+2y^2>1$ và $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Biết giá trị lớn nhất của $P=x+y$ là $\frac{a+b\sqrt{6}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. 17 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 16

Câu 17[THTT]: Cho 2 số thực dương thay đổi a,b thỏa mãn điều kiện:

$$\ln a(1-\ln b)=\ln b\sqrt{4-\ln^2 a}$$

Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\log_b a$. Giá trị của $M+m$ bằng?

A. $2(\sqrt{2}-1)$ **B.** $2(\sqrt{2}+1)$ **C.** $2(1-\sqrt{2})$ **D.** $-1+\sqrt{2}$

Câu 18: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $y\ge 4x$, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\ln\frac{2x+5y}{y}-\frac{2y+5x}{x}$ có dạng $\ln\frac{m}{2}-n$. Tính tổng $m+n$

A. 25 **B.** 24 **C.** 29 **D.** 4

Câu 19: Cho 2 số thực dương thay đổi a,b thỏa mãn $\log_2(a+1)+\log_2(b+1)\ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b$

A. 12 **B.** 14 **C.** 8 **D.** 16

Câu 20: Cho số thực x thỏa mãn $x\in[0;16]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x)=8.3^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}-9^{\sqrt{x}}$ đạt được khi $x=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

A. 17 **B.** 18 **C.** 19 **D.** 20

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn ý **C.**

Ta có $2x-y=x^2+y^2+1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4$

Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$S=4(x-1)+3(y+2)-7\le\sqrt{(4^2+3^2)\left((x-1)^2+(y+2)^2\right)}-7=3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}\\4x+3y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{13}{5}\\y=-\frac{4}{5}\end{cases}$

Câu 2. Chọn ý **C.**

Theo giả thiết ta có $t = \frac{x}{y} \le \frac{4y-1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y}-2\right)^2 + 4 \le 4$

Khi đó $S = \frac{6y}{x} + \ln\left(\frac{x}{y}+2\right) = \frac{6}{t} + \ln(t+2) = f(t)$

Đến đây xét tính đơn điệu của hàm số ta sẽ chỉ ra $f(t) \ge f(4) = \frac{3}{2} + \ln 6$

Câu 3. Chọn ý **B.**

Ta sẽ chuyển bài toán về giải phương trình logarit để tìm mối liên hệ giữa x,y.

Xét hàm số $f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1) - 3$ đây là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$

Do đó $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow |xy| \in [-1;1]$. Khi đó ta được

$$S^2 = (x-y)^2\left(1+\left(x^2+xy+y^2\right)\right)^2 = (2-2xy)(3+xy)^2 \le \frac{512}{27} \Rightarrow S \le \frac{16\sqrt{6}}{9}$$

Câu 4. Chọn ý **C.**

Áp dụng các tính chất của logarit thì từ giả thiết ta suy ra được:

$$xy \ge x^3 + y \Rightarrow y(x-1) \ge x^3 \Rightarrow y \ge \frac{x^3}{x-1}$$

Vì do x,y dương nên từ điều kiện ta suy ra $x > 1$

Khi đó ta được $2x + y \ge 2x + \frac{x^3}{x-1} = f(x) \ge f\left(\sqrt{2}\right) = 4 + 4\sqrt{2}$

Câu 5. Chọn ý **B.**

Theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 > 1 \Rightarrow a + b \ge a^2 + b^2 \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}$

Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$P = 2\left(a-\frac{1}{2}\right) + 4\left(b-\frac{1}{2}\right) \le \sqrt{\left(2^2+4^2\right)\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right]} \le \sqrt{10}$$

Câu 6. Chọn ý **A.**

Theo giả thiết ta có $y = \frac{4}{x} \ge 1 \Rightarrow x \le 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 4 \Rightarrow \log_2 x \in [-1;2]$

Khi đó $P = \log_2^2 x + (1-\log_2 x)^2 \in \left[\frac{1}{2};5\right] \Rightarrow S = 5 + 2.\frac{1}{2} = 6$

Câu 7. Chọn ý **D.**

Theo giả thiết ta có $\log_2\left(x^2+3xy\right) \le \log_2 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + 3xy \le 4y^2 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \le 1$

Khi đó chia cả tử và mẫu cho y ta chuyển về bài toán xét tính đơn điệu của hàm

$$f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+2}} - \frac{2t+3}{t+2} \Rightarrow f'(t) = \frac{5-3t}{2\sqrt{\left(t^2-t+2\right)^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} \ge \frac{2}{2\sqrt{2^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} > 0$$

$\Rightarrow f(t) \le f(1) = \sqrt{2} - \frac{5}{3} \Rightarrow P = 10$

Câu 8. Chọn ý **C.**

Từ giả thiết ta suy ra $2x^2 + xy + 3y^2 - 11x - 20y + 40 = 0$

Thế $Sx = y$ vào giả thiết trên ta được $\left(4S^2 + 2\right)x^2 - \left(20S + 11\right)x + 40 = 0$

Sử dụng điều kiện có nghiệm ta có

$$\Delta_x \ge 0 \Leftrightarrow 240S^2 - 440S + 199 \le 0 \Rightarrow S \in \left[\frac{55 - 2\sqrt{10}}{60}; \frac{55 + 2\sqrt{10}}{60}\right] \Rightarrow a + b = \frac{11}{6}$$

Câu 9. Chọn ý **A.**

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x + 3y > 0 \\ x - 3y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0; \log\left(x^2 - 9y^2\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9y^2 = 10$

Khi đó $|y| = x - S \Rightarrow 8x^2 - 18xS + 9S^2 + 10 = 0$

Phương trình trên phải có nghiệm dương nên ta có $\begin{cases} \Delta_x \ge 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow S \ge \frac{4\sqrt{5}}{3}$

Câu 10. Chọn ý **C.**

Tương tự như câu trên

Câu 11. Chọn ý **D.**

Làm tương tự câu 5 ta có

$$x + y + 3 \ge x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S = 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \le \sqrt{\left(3^2 + 4^2\right)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]} - \frac{5}{2} \le \frac{5\sqrt{6} - 5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{6} - 1}{10} \\ y = \dfrac{4\sqrt{6} - 3}{10} \end{cases}$

Câu 12. Chọn ý **C.**

Tương tự câu 4

Câu 13. Chọn ý **A.**

Từ giả thiết ta có $x + y = xy \le \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \Rightarrow x + y \ge 4 \Rightarrow S \ge \frac{1}{2}(x + y)^2 \ge 8$

Câu 14. Chọn ý **A.**

Từ giả thiết thứ nhất ta suy ra $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \le 2$. Đây là một hình tròn $\left(C_1\right)$ có tâm là $I_1(2;2)$ và $R_1 = \sqrt{2}$. Từ giả thiết thứ 2 ta suy ra $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = m \Rightarrow m \ge 0$, đây là đường tròn $\left(C_2\right)$ có tâm là $I_2(1;1), R = \sqrt{m}$.

Do yêu cầu của bài toán nên $(C_1),(C_2)$ phải tiếp xúc ngoài với nhau, suy ra

$$I_1I_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow m = \left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$$

Câu 15. Chọn ý **A.**

Ta sẽ đưa về việc giải phương trình từ đó tìm ra mối liên hệ giữa x,y

Từ giả thiết ta có $\dfrac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}} = \dfrac{4+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}} \Leftrightarrow f\left(x^2-2y+2\right) = f\left(2\left(x^2-2y\right)\right) \Leftrightarrow x^2-2y=2$

$\Rightarrow S = x^2+x-2 \ge -\dfrac{9}{4}$

Chú ý. *Ngoài ra ta có thể đặt $t = x^2-2y$ sau đó dùng máy tính để giải phương trình mũ!*

Câu 16. Chọn ý **C.**

Tương tự câu 5.

Câu 17. Chọn ý **A.**

Đặt $x = \ln a, y = \ln b \Rightarrow x(1-y) = y\sqrt{4-x^2}\left(x \in [-2;2]\right)$

Do $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = x + \sqrt{4-x^2} \in \left[-2;2\sqrt{2}\right]$

Câu 18. Chọn ý **B.**

Theo giả thiết ta có $t = \dfrac{y}{x} \ge 4$. Khi đó ta được

$$P = \ln\frac{2x+5y}{y} - \frac{2y+5x}{x} = \ln\left(\frac{2x}{y}+5\right) - \frac{2y}{x} - 5 = \ln\left(\frac{2}{t}+5\right) - 2t - 5 \le \ln\frac{11}{2} - 13$$

Câu 19. Chọn ý **A.**

Theo giả thiết ta có $(a+1)(b+1) \ge 64$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$64 \le (a+1)(b+1) \le \left(\frac{a+b+2}{2}\right)^2 \Rightarrow a+b+2 \ge 14 \Rightarrow a+b \ge 12$$

Câu 20. Chọn ý **A.**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0 đạt được khi $x = \dfrac{1}{16}$

2. HÀM ĐẶC TRƯNG.

Dạng toán này đề bài sẽ cho phương trình hàm đặc trưng từ đó ta sẽ đi tìm mối liên hệ giữa các biến và rút thế vào giả thiết thứ 2 để giải quyết yêu cầu bài toán. Nhìn chung dạng toán này ta chỉ cần nắm chắc được kỹ năng biến đổi làm xuất hiện được hàm đặc trưng kết hợp với kiến thức về đạo hàm là sẽ giải quyết được trọn vẹn!

VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho 2 số thực không âm x,y thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$

A. $m=-1$ **B.** $m=-\frac{1}{2}$ **C.** $m=\frac{1}{e}$ **D.** $m=e-3$

Thầy Đặng Thành Nam – Vted.vn

Lời giải

Mấu chốt của bài toán này sẽ phải làm xuất hiện hàm đặc trưng từ đó rút ra mối liên hệ giữa x và y. Biến đổi giả thiết ta có:

$$x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}\Leftrightarrow x^2+2x-y+1=\frac{1}{2}\log_2(2y+1)-\log_2(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2+2\log_2(x+1)=\log_2(2y+1)+2y$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2+\log_2 2(x+1)^2=\log_2(2y+1)+2y+1\Leftrightarrow f\left(2(x+1)^2\right)=f(2y+1)(1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên đoạn $(0;+\infty)$ ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Vậy phương trình $(1)\Leftrightarrow 2y+1=2(x+1)^2$

Thế vào biểu thức cần tìm ta được $P=e^{2x-1}+4x^2-2(x+1)^2+2\geq-\frac{1}{2}$.

Chọn ý **B.**

Chú ý:

- *Phần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm 1 biến xin nhường cho bạn đọc!*
- *Để tìm hàm đặc trưng ta phải luôn dựa vào biểu thức mũ hoặc biểu thức trong hàm logarit*
- *Với bài thi trắc nghiệm ta có thể lược bỏ bước xét hàm số đơn điệu để suy ra luôn mối liên hệ*

Câu 2: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn $x\geq y\geq z>0$ đồng thời $\log_2\left(\frac{x-y}{y-z}\right)=(x+z)(z-x-2y)$.

Khi đó GTNN của biểu thức $P=\frac{z^2+4y^2}{4z^2+2xz+4y^2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{3}{7}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ý tưởng bài toán không mới, vấn đề là ta phải tìm được mối liên hệ giữa các biến với nhau, và bám sát vào các biểu thức trong dấu logarit để xây dựng hàm đặc trưng. Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned}
&\log_2\left(\frac{x-y}{y-z}\right)=(x+z)(z-x-2y)\\
&\Leftrightarrow \log_2(x-y)-\log_2(y-z)=z^2-x^2-2y(x+z)\\
&\Leftrightarrow \log_2(x-y)+(x-y)^2=\log_2(y-z)+(y-z)^2\\
&\Leftrightarrow x-y=y-z\Leftrightarrow x+z=2y
\end{aligned}$$

Thế vào giả thiết ta được:

$$P=\frac{z^2+4y^2}{4z^2+2xz+4y^2}=\frac{x^2+2xz+2z^2}{x^2+4xz+5z^2}=\frac{t^2+2t+2}{t^2+4t+5}\left(t=\frac{x}{z}\ge 1\right)$$

Từ đây dễ dàng tìm được $\min P=\frac{1}{2}$.

Chọn ý **A.**

Câu 3: Cho 2 số $x,y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2\ge 1$ và đồng thời $x^2+2y^2-1=\ln\left(\frac{1-y^2}{x^2+y^2}\right)$

Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y^2}+\frac{4y}{x^2+y^2}=m\sqrt{n}$ với m,n là 2 số nguyên dương.

Hỏi có bao nhiêu bộ số (m,n) thỏa mãn?

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn thấy biểu thức logarit viết dưới dạng phân thức là ta nghĩ ngay tới hàm đặc trưng. Biến đổi gải thiết ta được.

$$\begin{aligned}
&x^2+2y^2-1=\ln\left(\frac{1-y^2}{x^2+y^2}\right)\\
&\Leftrightarrow \ln(1-y^2)+1-y^2=\ln(x^2+y^2)+x^2+y^2\Leftrightarrow x^2+2y^2=1
\end{aligned}$$

Tuy nhiên vấn đề khó không nằm ở việc biến đổi mà nằm ở phần sau.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

- $\frac{x^4}{x^2.y^2.y^2}\ge\frac{x^4}{\frac{(x^2+y^2+y^2)^3}{27}}=\frac{x^4}{\frac{1}{27}}\Rightarrow\frac{x^2}{y^4}\ge 27x^4\Rightarrow\frac{x}{y^2}\ge 3\sqrt{3}x^2$
- $\frac{16y^4}{2y^2(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\ge\frac{16y^4}{\frac{(2y^2+x^2+x^2+y^2+y^2)^3}{27}}\Rightarrow\frac{16y^2}{(x^2+y^2)^2}\ge 108y^4\Rightarrow\frac{4y}{x^2+y^2}\ge 3\sqrt{3}.2y^2$

Cộng vế theo vế ta được $P\ge 3\sqrt{3}=1.\sqrt{27}$

Vậy có 2 bộ số (m,n) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý **D.**

Câu 4: Cho phương trình $\log_2\left(2x^2+2x+2\right)=2^{y^2}+y^2-x^2-x$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $\left(x,y\right),\left(0<x<500\right)$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\log_2\left(2x^2+2x+2\right)=2^{y^2}+y^2-x^2-x\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+1\right)+x^2+x+1=2^{y^2}+y^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_2\left(x^2+x+1\right)}+\log_2\left(x^2+x+1\right)=2^{y^2}+y^2\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+1\right)=y^2$$

Do $0<x<500\Rightarrow y^2=\log_2\left(x^2+x+1\right)\in\left(0;18\right)\Rightarrow 0<y<5$. Vậy ta có 4 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài đồng nghĩa có 4 cặp số $\left(x,y\right)$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Chọn ý **A.**

Câu 5: Cho 3 số thực a,b,c thỏa mãn $\log_2\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2}=a\left(a-4\right)+b\left(b-4\right)+c\left(c-4\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+2b+3c}{a+b+c}$

A. $\dfrac{12+\sqrt{30}}{3}$ **B.** $\dfrac{4+\sqrt{30}}{3}$ **C.** $\dfrac{8+\sqrt{30}}{3}$ **D.** $\dfrac{6+\sqrt{30}}{3}$

Thầy Đặng Thành Nam – Vted.vn

Lời giải

Một bài toán phát biểu đơn giản nhưng khá là khó. Trước tiên biến đổi giả thiết ta được

$$\log_2\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2}=a\left(a-4\right)+b\left(b-4\right)+c\left(c-4\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4\left(a+b+c\right)+4\left(a+b+c\right)=\log_2\left(a^2+b^2+c^2+2\right)+a^2+b^2+c^2+2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2-4\left(a+b+c\right)=0\Leftrightarrow \left(a-2\right)^2+\left(b-2\right)^2+\left(c-2\right)^2=10\left(C\right)$$

Đến đây sử dụng đại số thì khá là khó, và ý tưởng sử dụng yếu tố hình học của tác giả bài toán rất hay đó là sử dụng điều kiện tương giao giữa mặt phẳng và mặt cầu trong hình phẳng Oxyz. Quy đồng giả thiết ta được:

$$P=\frac{a+2b+3c}{a+b+c}\Leftrightarrow a\left(P-1\right)+b\left(P-2\right)+c\left(P-3\right)=0\left(P\right)$$

Điều kiện tương giao của mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt cầu $\left(C\right)$ là:

$$d\left(I;\left(P\right)\right)\le R\left(I\left(2;2;2\right),R=\sqrt{10}\right)\Leftrightarrow\frac{\left|6P-12\right|}{\sqrt{3P^2-12P+14}}\le\sqrt{10}\Leftrightarrow P\le\frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

Chọn ý **D.**

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị thực dương của tham số a thỏa mãn bất đẳng thức

$$\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)^a$$

A. $0<a<1$ **B.** $1<a<2017$ **C.** $a\ge 2017$ **D.** $0<a\le 2017$

THPT Kiến An – Hải Phòng 2017 – 2018

Lời giải

Lấy logarit cơ số 2 cả 2 vế ta được

$$\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)^a\Rightarrow 2017\log_2\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)\le a\log_2\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\log_2\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)}{a}\le\frac{\log_2\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)}{2017}$$

Xét hàm số :

$$f(x)=\frac{\log_2\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)}{x}=\frac{\log_2\left(4^x+1\right)-x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{4^x.x.\ln 4-\left(4^x+1\right)\ln\left(4^x+1\right)}{x^2\left(4^x+1\right)}\right]<0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm giảm trên $(0;+\infty)\Rightarrow f(a)\le f(2017)$ khi $0<a\le 2017$

Chọn ý **D.**

Qua các ví dụ trên ta phần nào đã hiểu được ý tưởng và phương pháp làm dạng toán này. Sau đây là các bài tập luyện tập cho các bạn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_3\frac{2-ab}{a+b}=3ab+a+b-7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+5b$

A. $\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$ **B.** $\frac{4\sqrt{95}+15}{12}$ **C.** $\frac{3\sqrt{95}-16}{3}$ **D.** $\frac{5\sqrt{95}-21}{6}$

Câu 2: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $2017^{1-x-y}=\frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$.

A. $T=27$ **B.** $T=17$ **C.** $T=195$ **D.** $T=207$

Câu 3: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2\frac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+2b$.

A. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$ **B.** $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$ **D.** $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$

Câu 4: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}}-e^{y^2+\sqrt{1-x^2}}=y+\dfrac{y^2-x}{4}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^3+2y^2-2x^2+8y-x+2$ là $\dfrac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$.

A. $T=85$ **B.** $T=31$ **C.** $T=75$ **D.** $T=41$

Câu 5: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $3^{xy-1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2y}=2-2xy-2x-4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+3y$

A. $6\sqrt{2}-7$ **B.** $\dfrac{10\sqrt{2}+1}{10}$ **C.** $15\sqrt{2}-20$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$

Câu 6: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $(x+y)^3+x+y+\log_2\dfrac{x+y}{1-xy}=8(1-xy)^3-2xy+3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+3y$.

A. $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$ **B.** $\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}$ **C.** $\sqrt{15}-2$ **D.** $\dfrac{3+2\sqrt{15}}{6}$

Câu 7: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2\dfrac{y}{2\sqrt{x+1}}=-y^2+3y+x-3\sqrt{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x-100y$.

A. -2499 **B.** -2501 **C.** -2500 **D.** -2490

Câu 8: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$ **B.** $\dfrac{43+3\sqrt{249}}{94}$ **C.** $\dfrac{37-\sqrt{249}}{21}$ **D.** $\dfrac{69-\sqrt{249}}{94}$

Câu 9: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$ **B.** $\dfrac{43+3\sqrt{249}}{94}$ **C.** $\dfrac{37-\sqrt{249}}{21}$ **D.** $\dfrac{69-\sqrt{249}}{94}$

Câu 10: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. 6 **B.** $3+2\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** $3+\sqrt{3}$

Câu 11: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log_2 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-4)+y(y-4)+xy$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+1}{x+y+2} = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản . Tính $S = a+b+c$.

A. 221 **B.** 231 **C.** 195 **D.** 196

Câu 12: Cho 2 số x,y thỏa mãn $(x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 2\ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} + xy$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 13: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $2018^{2xy-4x-2y-2} = \frac{2x+y}{xy-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x+4y$

A. $6+4\sqrt{3}$ **B.** $1+2\sqrt{3}$ **C.** $6-4\sqrt{3}$ **D.** $9+4\sqrt{3}$

Câu 14: Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{x+1}} = 3\left(y-\sqrt{x+1}\right) - y^2 + x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x-y$

A. $-\frac{3}{4}$ **B.** $-\frac{5}{4}$ **C.** -2 **D.** -1

Câu 15: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3 \frac{6x-6y+23}{x^2+y^2} = 9x^2+9y^2-6x+6y-21$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+y)(50-9xy)-39x^2-6y^2$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a+b$.

A. 188 **B.** 191 **C.** 202 **D.** 179

Câu 16: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $x,y \geq 1$ và $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9-(x-1)(y+1)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3+y^3-57(x+y)$ là số thực có dạng $a+b\sqrt{7}$ với a,b là các số nguyên. Tính $T = a+b$.

A. -28 **B.** -29 **C.** -30 **D.** -31

Câu 17: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + x^2+2y^2+1 \leq 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2-xy+2y^2}{2xy-y^2}$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 18: Cho 2 số thực a,b thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 19: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2\left(\frac{x+4y}{x+y}\right)=2x-4y+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x^4-2x^2y^2+6x^2}{(x+y)^3}$

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{16}{9}$ **C.** 4 **D.** $\frac{25}{9}$

Câu 20: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{3}+3^{-x-2y}+y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y$

A. $6-2\sqrt{3}$ **B.** $4+2\sqrt{6}$ **C.** $4-2\sqrt{6}$ **D.** $6+2\sqrt{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn ý **A**

Biến đổi giả thiết ta được

$$\log_3(2-ab)-\log_3(a+b)=3(ab-2)+(a+b)-1$$
$$\Leftrightarrow \log_3(3(2-ab))+3(2-ab)=\log_3(a+b)+(a+b)$$
$$\Leftrightarrow 3(2-ab)=a+b \Leftrightarrow b(3a+1)=6-a \Rightarrow b=\frac{6-a}{3a+1}(0<a<6)$$

$$\Rightarrow S=f(a)\ge f\left(\frac{-1+\sqrt{95}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$$

Câu 2. Chọn ý **D**

Biến đổi giả thiết ta được

$$(x^2+2018)2017^x=\left((1-y)^2+2018\right)2017^{1-y}\Leftrightarrow x=1-y$$
$$\Rightarrow S=16(x^2-x)^2+2(x^2-x)+12\ge\frac{191}{16}$$

Câu 3. Chọn ý **A**

Tương tự câu 1.

Câu 4. Chọn ý **A**

Biến đổi giả thiết ta được

$$4e^{x-4y+\sqrt{x^2+1}}-4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}}=y^2-(x-4y)$$
$$\Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2}+4e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}}=y^2+\sqrt{1-x^2}+4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2}=y^2+\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow x=y^2+4y$$

Đến đây thế vào giả thiết còn lại và khảo sát hàm số trên đoạn $\left[-1;1\right]$ ta sẽ tìm được giá trị lớn nhất của $P=\frac{58}{27}$

Câu 5. Chọn ý **A**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-xy}-2\left(1-xy\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y}-2\left(x+2y\right)\Leftrightarrow 1-xy=x+2y$$
$$\Rightarrow P=f\left(x\right)=2x+3\left(\frac{1-x}{x+2}\right)\ge f\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)=6\sqrt{2}-7$$

Câu 6. Chọn ý **C**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\left(x+y\right)^3+x+y+\log_2\left(x+y\right)=\left(2\left(1-xy\right)\right)^3+2\left(1-xy\right)+\log_2\left(2\left(1-xy\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow x+y=2\left(1-xy\right)\Leftrightarrow y=\frac{2-x}{2x+1}\left(x\in\left(0;2\right)\right)\Rightarrow P=x+\frac{3\left(2-x\right)}{2x+1}\ge -2+\sqrt{15}$$

Câu 7. Chọn ý **B**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_2 y+y^2-3y=\log_2\sqrt{x+1}+\left(x+1\right)-3\sqrt{x+1}\Rightarrow y=\sqrt{x+1}$$
$$\Rightarrow P=x-100\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}-50\right)^2-2501\ge -2501$$

Câu 8. Chọn ý **A**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_{\sqrt{3}}\left(x+y\right)-\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)=x^2+y^2+xy-3\left(x+y\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(3\left(x+y\right)\right)+3\left(x+y\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy+2$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x+y\right)=x^2+y^2+xy+2\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}-3\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{3y}{2}+2$$
$$\Leftrightarrow\underbrace{\left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)}_{a}^2+\underbrace{\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{b}^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2=1\left(1\right)$$

Khi đó ta được

$$x=a-\frac{b}{\sqrt{3}},y=\frac{2b}{\sqrt{3}}+1\Rightarrow P\left(x+y+6\right)=x+2y+3$$
$$\Leftrightarrow P\left(a+\frac{b}{\sqrt{3}}+8\right)=a+\frac{3b}{\sqrt{3}}+6\Leftrightarrow\left(P-1\right)a+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(P-3\right)b+8P-6=0\left(2\right)$$

Coi $\left(1\right)$ là phương trình đường tròn $\left(C\right)$ có tâm là gốc tọa độ và $R=1$ và $\left(2\right)$ là phương trình đường thẳng $\left(d\right)$. Để $\left(C\right)$ và $\left(d\right)$ có điểm chung thì ta có điều kiện:

$$d(O;d)\le R\Leftrightarrow \frac{|8P-6|}{\sqrt{(P-1)^2+\frac{1}{3}(P-3)^2}}\le 1\Leftrightarrow \frac{69-\sqrt{249}}{94}\le P\le \frac{69+\sqrt{249}}{94}$$

Câu 9. Chọn ý **D**

Tương tự câu 8.

Câu 10. Chọn ý **A**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=x+2y$$
$$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)+(2x+y+1)=\log_3(3(x+y))+3(x+y)$$
$$\Leftrightarrow x+2y=1\Rightarrow S=f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=6$$

Câu 11. Chọn ý **A**

Tương tự câu 8.

Câu 12. Chọn ý **C**

Biến đổi giả thiết ta có

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-2)=2\ln\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$\Leftrightarrow x^3-y^3-2(x-y)=2\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^3-2x=2\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)+y^3-2y$$
$$\Leftrightarrow x=y\Rightarrow P=\frac{1}{x^2}+x^2\ge 2$$

Câu 13. Chọn ý **D**

Câu 14. Chọn ý **B**

Đề thi HKI – Chuyên Amsterdam – Hà Nội – 2017 – 2018

Câu 15. Chọn ý **A**

Câu 16. Chọn ý **B**

Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh – Lần 2 – 2017 – 2018

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_3\left((x+1)(y+1)\right)^{y+1}=9-(x-1)(y+1)\Leftrightarrow (y+1)\log_3\left((x+1)(y+1)\right)=9-(x-1)(y+1)$$
$$\Leftrightarrow \log_3\left((x+1)(y+1)\right)=\frac{9}{y+1}-(x-1)\Leftrightarrow \log_3(x+1)+\log_3(y+1)=\frac{9}{y+1}-(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=\log_3\frac{9}{y+1}+\frac{9}{y+1}\Leftrightarrow x+1=\frac{9}{y+1}\Rightarrow x+y=8-xy\ge 2\Rightarrow 1\le xy\le 6$$

Khi đó $P=(8-xy)^3-3xy(8-xy)-57(8-xy)=f(xy)\ge f\left(9-2\sqrt{7}\right)\Rightarrow \begin{cases}a=83\\ b=-112\end{cases}$

Câu 17. Chọn ý **B**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2}+2x^2+2y^2+1\le 3xy+x^2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2+2y^2}{3xy+x^2}+2x^2+2y^2\le 3xy+x^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2+2y^2\right)+2x^2+2y^2\le \log_2\left(3xy+x^2\right)+3xy+x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2\le 3xy+x^2 \Leftrightarrow x^2-3xy+2y^2\le 0 \Leftrightarrow 1\le \frac{x}{y}\le 2$$

$$\Rightarrow P=\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+2}{\frac{2x}{y}-1}=f\left(\frac{x}{y}\right)\ge f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

Câu 18. Chọn ý **C**

Câu 19. Chọn ý **B**

Câu 20. Chọn ý **B**

Biến đổi giả thiết ta được

$$5^{x+2y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{3}+3^{-x-2y}+y\left(x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+2y}-3^{-x-2y}+x+2y=5^{xy-1}-3^{1-xy}+xy-1$$

$$\Leftrightarrow 1-xy+x+y=0 \Leftrightarrow y\left(x-2\right)=x+1>0 \Rightarrow y=\frac{x+1}{x-2}\left(x>2\right)$$

$$\Rightarrow S=f\left(x\right)=x+\frac{2\left(x+1\right)}{x-2}\ge f\left(2+\sqrt{6}\right)=4+2\sqrt{6}$$

3. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI ĐỊNH LÝ VIET.

Phương pháp chung của các bài toán ở dạng này hầu hết sẽ là đưa giả thiết phương trình logarit về dạng một tam thức, sau đó sử dụng định lý viet và các phép biến đổi logarit để giải quyết bài toán. Để hiểu rõ hơn ta cùng đi vào các ví dụ.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các số nguyên dương $a,b>1$ thỏa mãn phương trình:

$$11\log_a x\log_b x-8\log_a x-20\log_b x-11=0$$

Biết rằng phương trình trên có tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S=2a+3b$

A. 28 **B.** 10 **C.** 22 **D.** 15

Đề minh họa học sinh giỏi tỉnh cấp THPT tỉnh Phú Thọ

Lời giải

Ta đưa phương trình về phương trình bậc 2 theo ẩn là $\log_a x$ ta được:

$$11\log_b a\left(\log_a x\right)^2-4\left(2+5\log_b a\right)\log_a x-11=0$$

Để phương trình có 2 nghiệm thì $\Delta>0\Leftrightarrow 400\left(\log_b a\right)^2-164\log_b a+64>0$ luôn đúng

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình thì khi đó theo định lý Viet thì ta có

$$\log_a x_1+\log_a x_2=\frac{4\left(2+5\log_b a\right)}{11\log_b a}=\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}$$

$$\Leftrightarrow \log_a\left(x_1x_2\right)=\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}\Leftrightarrow x_1x_2=b^{\frac{8}{11}}a^{\frac{20}{11}}$$

Do a,b là các số nguyên dương đồng thời tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất nên ta sẽ có 1 đánh giá sau $x_1x_2=b^{\frac{8}{11}}a^{\frac{20}{11}}=\left(a^{20}b^{18}\right)^{\frac{1}{11}}\ge\left(2^{20}.b^8\right)^{\frac{1}{11}}=2\left(2^9b^8\right)^{\frac{1}{11}}$

Để $x_1x_2\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 2^9.b^8=n^{11}\ge 2^9.2^8\Rightarrow n\ge 3$, mặt khác $n^{11}\vdots 2\Rightarrow n\vdots 2$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Nếu $n=4\Rightarrow b^8=8192\Rightarrow b\notin\mathbb{N}$
- Nếu $n=6\Rightarrow b^8=708588\Rightarrow b\notin\mathbb{N}$
- Nếu $n=8\Rightarrow b^8=708588\Rightarrow b=8$

Vậy $a=2,b=8$.

Chọn ý **A.**

Ví dụ 2: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a\ln^2x+b\ln x+5=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $5\log^2x+b\log x+a=0$ có 2 nghiệm x_3,x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$ bằng

A. 30 **B.** 25 **C.** 3 **D.** 17

Câu 46 mã đề 104, đề thi THPT Quốc Gia môn toán 2017

Lời giải

Điều kiện để cả hai phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x>0,b^2-20a>0$ và a,b đồng thời là các số tự nhiên lớn hơn 0.

Xét phương trình $a\ln^2x+b\ln x+5=0$, đặt $t=\ln x$ phương trình trở thành $at^2+bt+5=0$, giả sử $t_1=\ln x_1,t_2=\ln x_2$ là 2 nghiệm của phương trình thì theo Viet ta có:

$$t_1+t_2=\ln x_1+\ln x_2=\ln\left(x_1x_2\right)=-\frac{b}{a}\Leftrightarrow x_1x_2=e^{-\frac{b}{a}}$$

Tương tự đối với phương trình $5\log^2x+b\log x+a=0$ ta có $x_3x_4=10^{-\frac{b}{5}}$

Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}\Leftrightarrow -\frac{b}{a}>\ln 10^{-\frac{b}{5}}\Leftrightarrow \frac{b}{a}<\frac{b}{5}\ln 10\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{\ln 10}{5}\Leftrightarrow a>\frac{5}{\ln 10}>2$$

Đồng thời ta lại có a là số nguyên dương nên suy ra $a\ge 3$ và $b^2-20a>0,b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow b\ge 8$

Vậy $S=2a+3b\ge 2.3+3.8=30$.

Chọn ý **A.**

Ví dụ 3: Cho các số thực $a,b>1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx)=2018$ có 2 nghiệm phân biệt m,n. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(4a^2+9b^2\right)\left(36m^2n^2+1\right)$

A. 144 **B.** 72 **C.** 68 **D.** 216

Lời giải

Ta đưa phương trình về phương trình bậc 2 theo ẩn là $\log_a x$ ta được:

$$\log_a(ax)\log_b(bx)=2018\Leftrightarrow(1+\log_a x)(1+\log_b x)=2018$$

$$\Leftrightarrow\log_a x\log_b x+\log_a x+\log_b x+1=2018\Leftrightarrow\log_b a(\log_a x)^2+(1+\log_b a)\log_a x=2017$$

Theo định lý viet ta có

$$\log_a m+\log_a n=-\frac{1+\log_b a}{\log_b a}=-\log_a b-1=\log_a\frac{1}{ab}=\log_a(mn)\Leftrightarrow mn=\frac{1}{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P=\left(4a^2+9b^2\right)\left(\frac{36}{a^2b^2}+1\right)\ge2\sqrt{4a^2.9b^2}.2\sqrt{\frac{36}{a^2b^2}}=144$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}4a^2=9b^2\\ \dfrac{36}{a^2b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=3,b=2$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 4: Cho 3 số thực a,b,c thay đổi lớn hơn 1, thỏa mãn $a+b+c=100$. Gọi m,n lần lượt là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2-(1+2\log_a b+3\log_a c)\log_a x-1=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+2b+3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{500}{3}$ **B.** $\frac{700}{3}$ **C.** 200 **D.** $\frac{600}{3}$

Lời giải

Với bài toán này giả thiết đã được đưa về một tam thức bậc 2 sẵn rồi nên ta chỉ cần sử dụng tới định lý viet, ta được

$$\log_a m+\log_a n=1+2\log_a b+3\log_a c=\log_a\left(ab^2c^3\right)\Leftrightarrow mn=ab^2c^3$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$mn=ab^2c^3=ab^2(100-a-b)^3=\frac{4}{27}\left(3a.\frac{3b}{2}.\frac{3b}{2}(100-a-b)(100-a-b)(100-a-b)\right)$$

$$\le\frac{4}{27}\left(\frac{3a+2+\frac{3b}{2}+3(100-a-b)}{6}\right)^6=\frac{625.10^8}{27}$$

Dấu "=" xảy ra tại $3a=\frac{3b}{2}=100-a-b\Leftrightarrow a=\frac{50}{3},b=\frac{100}{3},c=\frac{150}{3}\Rightarrow S=\frac{700}{3}$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 5: Cho 2 phương trình $\ln^2 x-(m-1)\ln x+n=0(1),\ln^2 x-(n-1)\ln x+m=0(2)$. Biết phương trình $(1),(2)$ có 2 nghiệm phân biệt đồng thời có chung một nghiệm và x_1 là nghiệm của phương trình (1), x_2 là nghiệm của phương trình (2). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S={x_1}^2+{x_2}^2$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Điều kiện $m\ne n$

Gọi x_0 là nghiệm chung của 2 phương trình khi đó ta có

$$\begin{cases}\ln^2 x_0-(m-1)\ln x_0+n=0\\ \ln^2 x_0-(n-1)\ln x_0+m=0\end{cases}\Rightarrow(n-1)\ln x_0-(m-1)\ln x_0+n-m$$

$$\Leftrightarrow(n-m)\ln x_0=m-n\Rightarrow\ln x_0=-1\Rightarrow m+n=0$$

Áp dụng định lý viet cho 2 phương trình ta có

- $\begin{cases}\ln x_0+\ln x_1=m-1\\ \ln x_0+\ln x_2=n-1\end{cases}\Rightarrow\ln x_1-\ln x_2=m-n$
- $\begin{cases}\ln x_1.\ln x_0=n\\ \ln x_2\ln x_0=m\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}=\dfrac{n}{m}\Rightarrow m\ln x_1=n\ln x_2$

$$\Rightarrow\frac{n}{m}\ln x_2-\ln x_2=m-n\Leftrightarrow\ln x_2\left(\frac{n}{m}-1\right)=m-n\Rightarrow\begin{cases}\ln x_2=-m\\ \ln x_1=-n\end{cases}$$

Khi đó $S={x_1}^2+{x_2}^2=e^{-2m}+e^{2m}$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$S={x_1}^2+{x_2}^2=e^{-2m}+e^{2m}\ge2\sqrt{e^{-2m}.e^{2m}}=2$$

Chọn ý **B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho 2 số thực $a,b>1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1}=1$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4(x_1+x_2)$.

A. 4 **B.** $3\sqrt[3]{2}$ **C.** $3\sqrt[3]{4}$ **D.** $\sqrt[3]{4}$

Câu 2: Cho 2 số nguyên dương $a,b>1$. Biết phương trình $a^{x+1}=b^x$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $b^{x^2-1}=(9a)^x$ có 2 nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn điều kiện $(x_1+x_2)(x_3+x_4)<3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=3a+2b$

A. 12 **B.** 46 **C.** 44 **D.** 22

Câu 3: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a.4^x-b.2^x+50=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $9^x-b.3^x+50a=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3+x_4>x_1+x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$

A. 49 **B.** 51 **C.** 78 **D.** 81

Câu 4: Cho 2 số thực $a,b>1$ thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m,n là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=mn+9a$

A. $\frac{279}{4}$ **B.** 90 **C.** $\frac{81}{4}$ **D.** $\frac{45}{2}$

Câu 5: : Cho 2 số thực $a,b>1$ thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m,n là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-3\log_b x-1=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=mn$

A. $\frac{16875}{16}$ **B.** $\frac{4000}{27}$ **C.** 15625 **D.** 3456

Câu 6: Biết rằng khi m,n là các số nguyên dương thay đổi và lớn hơn 1 thì phương trình $8\log_m x\log_n x-7\log_m x-6\log_n x=2017$ luôn có 2 nghiệm phân biệt a,b. Tính $S=m+n$ để tích ab là một số nguyên dương nhỏ nhất

A. 20 **B.** 12 **C.** 24 **D.** 48

Câu 7: Biết rằng khi m,n là các số dương thay đổi khác 1 thỏa mãn $m+n=2017$ thì phương trình $8\log_m x\log_n x-7\log_m x-6\log_n x-2017=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt a,b. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $\ln(ab)$ là $\frac{3}{4}\ln\left(\frac{c}{13}\right)+\frac{7}{18}\ln\left(\frac{d}{13}\right)$ với c,d là các số nguyên dương. Tính $S=2c+3d$

A. 2017 **B.** 66561 **C.** 64544 **D.** 26221

Câu 8: Cho 2 số thực $a,b>1$. Biết phương trình $a^{x^2}b^{x+1}=1$ có nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a(ab)+\frac{4}{\log_a b}$

A. 2017 **B.** 66561 **C.** 64544 **D.** 26221

Câu 9: Cho các số nguyên dương $a,b>1$ thỏa mãn phương trình:

$$13\log_a x\log_b x-8\log_a x-20\log_b x-11=0$$

Biết rằng phương trình trên có tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S=3a+4b$

A. 52 **B.** 34 **C.** 70 **D.** 56

Câu 10[Minh Tuấn]: Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=6$. Gọi m,n lần lượt là 2 nghiệm của phương trình $\log_b x.\log_b(xabc)=712$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_4\left(3mn-10mn\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+108\right)$ được viết dưới dạng $i+\log_4 j$ với i,j là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của biểu thức $T=i+j$ bằng?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn ý **C.**

Biến đổi giả thiết đồng thời áp dụng định lý viet ta được

$$x^2-1+x\log_b a=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\log_b a\\ x_1x_2=-1\end{cases}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$S=\left(\frac{1}{\log_b a}\right)^2+4\log_b a=\left(\frac{1}{\log_b a}\right)^2+2\log_b a+2\log_b a\ge 3\sqrt[3]{4}$$

Câu 2. Chọn ý **B.**

Với phương trình đầu ta lấy logarit 2 vế ta được $x^2-x\log_a b+1=0$

Phương trình này có 2 nghiệm thì $\Delta=(\log_a b)^2-4>0\Leftrightarrow b>a^2$

Tương tự với phương trình 2 ta cũng có $x^2-x\log_b(9a)-1\Rightarrow\Delta=(\log_b(9a))^2+4>0$

Theo viet ta được $\begin{cases}x_1+x_2=\log_a b\\ x_3+x_4=\log_b(9a)\end{cases}\Rightarrow\log_a b.\log_b(9a)<3\Leftrightarrow\log_a(9a)<3\Rightarrow a\ge 4$

Khi đó ta được $b>16\Rightarrow b\ge 17\Rightarrow S\ge 46$

Câu 3. Chọn ý **D.**

Điều kiện để 2 phương trình đều có 2 nghiệm dương là $\begin{cases}\Delta_1>0;S_1>0;P_1>0\\ \Delta_2>0;S_2>0;P_2>0\end{cases}\Rightarrow b^2>200a$

Theo viet ta có $\begin{cases}2^{x_1}.2^{x_2}=\dfrac{50}{a}\Rightarrow x_1+x_2=\log_2\dfrac{50}{a}\\ 3^{x_3}.3^{x_4}=50a\Rightarrow x_3+x_4=\log_3(50a)\end{cases}$

Theo giả thiết ta có $x_3+x_4>x_1+x_2\Rightarrow\log_3(50a)>\log_2\left(\frac{50}{a}\right)\Rightarrow a\ge 3\Rightarrow b\ge 25\Rightarrow S\ge 81$

Câu 4. Chọn ý **A.**

Biến đổi phương trình đầu ta được phương trình tương đương

$$\log_b a(\log_a x)^2-2\log_a x-3=0$$

Theo viet ta có $\log_a n+\log_a n=\dfrac{2}{\log_b a}=\log_a b^2\Rightarrow mn=b^2\Rightarrow P=b^2-9b+90\ge\dfrac{279}{4}$

Câu 5. Chọn ý **D.**

Biến đổi phương trình đầu ta được phương trình tương đương

$$\log_b a(\log_a x)^2-(2+3\log_b a)\log_a x-1=0$$

Theo Viet ta có $\log_a m+\log_a n=\dfrac{2+3\log_b a}{\log_b a}=2\log_a b+3\Rightarrow mn=a^3b^2$

$\Rightarrow S=a^3(10-a)^2=f(a)\le f(6)=3456$

Câu 6. Chọn ý **B.**

Làm tương tự ví dụ minh họa 1

Câu 7. Chọn ý **B.**

Biến đổi phương trình tương đương

$$8\log_n m\left(\log_m x\right)^2-\left(6\log_n m+7\right)\log_m x-2017=0$$

Theo viet ta có

$$\log_m a+\log_m b=\frac{6\log_n m+7}{8\log_n m}\Rightarrow ab=m^{\frac{6}{7}}.n^{\frac{7}{8}}\Rightarrow \ln(ab)=\frac{3}{4}\ln m+\frac{7}{8}\ln(2017-m)=f(m)$$

$$\Rightarrow f(m)\le f\left(\frac{12102}{13}\right)=\frac{3}{4}\ln\frac{12102}{13}+\frac{7}{8}\ln\frac{14119}{13}\Rightarrow S=66561$$

Câu 8. Chọn ý **C.**

Ta có $\log_a b>0$

Lấy logarit 2 vế ta được $x^2+x\log_a b+\log_a b=0$

Điều kiện có nghiệm của phương trình trên là $\Delta=\left(\log_a b\right)^2-4\log_a b\ge 0\Leftrightarrow \log_a b\ge 4$

$$\Rightarrow P=\log_a b+\frac{4}{\log_a b}+1=f\left(\log_a b\right)\ge f(4)=6$$

Câu 9. Chọn ý **C.**

Tương tự ví dụ minh họa 1

Câu 10. Chọn ý **A.**

Nguyễn Minh Tuấn

Biến đổi giả thiết tương đương với

$$\log_b x.\log_b(xabc)=712\Leftrightarrow \log_b x\left(\log_b x+\log_b a+\log_b c+1\right)=712$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_b x\right)^2+\left(1+\log_b a+\log_b c\right)\log_b x-712=0$$

Theo định lý viet ta có $\log_b m+\log_b n=\log_b abc\Rightarrow mn=abc$

Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\log_4\left(3mn-10mn\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+108\right)=\log_4\left(3abc-10(ab+bc+ca)+108\right)$$

Theo bất đẳng thức *Schur* bậc 3 ta có

$$3abc\ge\frac{3(a+b+c)\left(4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2\right)}{9}=2\left(4(ab+bc+ca)-36\right)$$

$$\Rightarrow 3abc-10(ab+bc+ca)\ge -2(ab+bc+ca)-72$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=12\Rightarrow -2(ab+bc+ca)-72\ge -96$$

$$\Rightarrow P\ge\log_4(-96+108)=\log_4 12=1+\log_4 3$$

4. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI BIỂU THỨC $\mathrm{LOG_B A}$

Vấn đề được đề cập tới ở đây thực chất chỉ là những bài toán biến đổi giả thiết theo ẩn $\log_b a$ và đưa về khảo sát hàm số 1 biến đơn giản. Sau đây là các ví dụ minh họa.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho a,b là các số thực thay đổi thỏa mãn $1<a<\sqrt{b}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\log_a b^2\right)^2+6\left[\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right]^2$ là $m+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{p}$ là các số nguyên . Tính giá trị của $T=m+n+p$?

A. -1 **B.** 0 **C.** -14 **D.** 10

Vted.vn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$P=4\left(\log_a b\right)^2+6\left[\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt{b}}{a}.\sqrt{a}\right]^2=4\left(\log_a b\right)^2+6\left[1+\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{a}\right]^2$$

$$=4\left(\log_a b\right)^2+6\left[1+\frac{1}{\log_{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{b}}{a}}\right]^2=4\left(\log_a b\right)^2+6\left(1+\frac{1}{\log_a b-2}\right)^2$$

Đặt $t=\log_a b(0<t<1)\Rightarrow S=f(t)=4t^2+6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2\ge\min_{(0;1)}f(t)=f\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=2\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 2: Cho các số thực $x_1,x_2,...,x_n$ thuộc khoảng $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+...+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$

A. 2n **B.** 1 **C.** n **D.** 2

Lời giải

Trước tiên ta sẽ xét tới bất đẳng thức phụ $x_k-\frac{1}{4}\le x_k^{\,2}\Leftrightarrow\left(x_k-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng, áp dụng vào bài toán ta có:

$$P\ge\log_{x_1}x_2^2+\log_{x_2}x_3^2+...+\log_{x_n}x_1^2=2\left(\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_3+...+\log_{x_n}x_1\right)$$

Théo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2\left(\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_3+...+\log_{x_n}x_1\right)\ge 2n\log_{x_1}x_2.\log_{x_2}x_3...\log_{x_n}x_1=2n$$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 3: Cho 2 số thực a,b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3}<b<a<1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\frac{3b-1}{4a^3}\right)+12\log_{\frac{b}{a}}^2 a$ là M đạt được khi $a=b^m$. Tính $M+m$?

A. 15 **B.** 12 **C.** $\frac{37}{3}$ **D.** $\frac{28}{3}$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức phụ sau $3b-1\le 4b^3 \Leftrightarrow (2b-1)^2(b+1)\ge 0 \Rightarrow \frac{3b-1}{4a^3}\le \frac{b^3}{a^3}$

Mặt khác Khi đó ta được $\frac{1}{3}<b<a<1$ nên ta được

$$P\ge \log_a \frac{b^3}{a^3}+12\left(\frac{1}{\log_a \frac{b}{a}}\right)^2=3\log_a b-3+\frac{12}{(\log_a b-1)^2}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3\log_a b-3+\frac{12}{(\log_a b-1)^2}=\frac{3}{2}(\log_a b-1)+\frac{3}{2}(\log_a b-1)+\frac{12}{(\log_a b-1)^2}\ge 3.3=9$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{2}(\log_a b-1)=\frac{12}{(\log_a b-1)^2}\Leftrightarrow \log_a b=3\Rightarrow b=a^3\Rightarrow a=b^{\frac{1}{3}}$

Chọn ý **D.**

Ví dụ 4: Cho 2 số thực a,b thỏa mãn 2 điều kiện $3a-4>b>0$ và đồng thời biểu thức $P=\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{b+4}} a\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=3a+b$

A. 8 **B.** $\frac{13}{2}$ **C.** $\frac{25}{2}$ **D.** 14

Đề thi thử trường THPT Kim Sơn A – Ninh Bình lần 2

Lời giải

Ý tưởng của bài toán này không còn như bài toán trước vì dồn về $\log_a b$ là một điều rất khó, thay vào đó nếu tinh ý thì ta sẽ dồn biến về theo ẩn $\log_a \frac{a^3}{4b}$ bằng bất đẳng thức AM – GM.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$P=\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{b+4}} a\right)^2=\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{3}{16}\left(\frac{1}{\log_a \frac{3a}{b+2+2}}\right)^2$$

$$\ge \log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{3}{16}\left(\frac{1}{\log_a \frac{a}{\sqrt[3]{4b}}}\right)^2=\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{3}{16}\left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}}\right)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM lần nữa ta được

$$\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{3}{16}\left(\frac{3}{\log_a\frac{a^3}{4b}}\right)^2=\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right)+\frac{3}{16}\left(\frac{3}{\log_a\frac{a^3}{4b}}\right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right).\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right).\frac{3}{16}\left(\frac{3}{\log_a\frac{a^3}{4b}}\right)^2}=\frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=2$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 5: Cho 3 số thực $a,b,c\in(1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\log_{bc}\left(2a^2+8a-8\right)+\log_{ca}\left(4b^2+16b-16\right)+\log_{ab}\left(c^2+4c-4\right)$$

A. $\log_3\frac{289}{2}+\log_{\frac{9}{4}}8$ **B.** $\frac{11}{2}$ **C.** 4 **D.** 6

Đề thi thử chuyên Lê Hồng Phong

Lời giải

Xét bất đẳng thức phụ $x^2+4x-4\geq x^3\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-4\right)\leq 0$ luôn đúng khi $x\in(1;2]$.

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$P=\log_{bc}\left(2a^2+8a-8\right)+\log_{ca}\left(4b^2+16b-16\right)+\log_{ab}\left(c^2+4c-4\right)$$
$$\geq\log_{bc}2a^3+\log_{ac}4b^3+\log_{ab}c^3=\log_{bc}2+\log_{ca}4+3\left(\log_{bc}a+\log_{ac}b+\log_{ab}c\right)$$

Mặt khác do $a,b,c\in(1;2]$ nên ta có

$$\log_{bc}2+\log_{ca}4=\frac{1}{\log_2 bc}+\frac{1}{\log_4 ca}\geq\frac{1}{\log_2(2.2)}+\frac{1}{\log_4(2.2)}=\frac{3}{2}$$

Lại theo bất đẳng thức Nesbit ta có:

$$3\left(\log_{bc}a+\log_{ac}b+\log_{ab}c\right)=3.\sum_{cyc}^{a,b,c}\frac{\ln a}{\ln b+\ln c}\geq 3.\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6

Chọn ý **D.**

Chú ý: *Cách chứng minh bất đẳng thức Nesbit*

Đây là một bất đẳng thức rất nổi tiếng, hiện đã có hơn 20 cách chứng minh cho bất đẳng thức này, sau đây mình xin trình bày một cách xét hiệu nhanh nhất cho mọi người tham khảo.

Xét 3 số thực dương a,b,c thay đổi, khi đó ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

Chứng minh: Ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}\geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho 2 số thực $a>1,b>1$. Tính giá trị của biểu thức $S=\log_a\sqrt{ab}$ khi biểu thức $P=\log_a^2 b+8\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $6\sqrt[3]{2}$ **B.** $\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$ **C.** $\sqrt[3]{4}$ **D.** $2\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$

Câu 2: Cho 2 số thực $b>a>1$. Tính giá trị của biểu thức $S=\log_a\sqrt[3]{ab}$ khi biểu thức $P=\frac{\log_a b}{\log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)}+\log_a\sqrt{ab}$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

A. $S=4$ **B.** $S=\frac{11}{4}$ **C.** $S=\frac{4}{3}$ **D.** $S=3$

Câu 3: Cho 2 số thực $a>1,b>1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{1}{\log_{ab}a}+\frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}}b}$ là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P=2m+3n$

A. 30 **B.** 42 **C.** 24 **D.** 35

Câu 4: Cho 2 số thực $a,b\in(1;2]$ thỏa mãn $a<b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b^2+4b-4\right)+\log_{\frac{b}{a}}^2 a$ là $m+3\sqrt[3]{n}$ với m,n là các số nguyên dương. Tính $S=m+n$

A. 9 **B.** 18 **C.** 54 **D.** 15

Câu 5: : Cho 2 số thực $a>b>1$, biết rằng $P=\log_b^2\left(\frac{a^4}{b^4}\right)+\log_b\sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $b=a^m$. Tính $m+M$?

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{37}{10}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{35}{2}$

Câu 6: Cho 2 số thực $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số thực k sao cho $b=a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<k<\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}<k<1$ **C.** $-1<k<-\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}<k<0$

Câu 7: Cho 2 số thực $b>a>1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\log_a^3\left(\frac{a^2}{b^2}\right)+\log_{\sqrt[3]{b^2}}\left(\frac{b}{a}\right)$?

A. $\frac{23+16\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{23+8\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{23-8\sqrt{2}}{2}$

Câu 8: Cho 2 số thực $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\frac{2}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b=a^m$. Tính $M+m$

A. $\frac{81}{16}$ **B.** $\frac{23}{8}$ **C.** $\frac{19}{8}$ **D.** $\frac{49}{16}$

Câu 9: Cho 2 số thực a,b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{4}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$?

A. 0,5 **B.** 1,5 **C.** 4,5 **D.** 3,5

Câu 10: Cho 2 số thực a,b thỏa mãn điều kiện $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$?

A. 19 **B.** 13 **C.** 14 **D.** 15

Câu 11: Cho 2 số thực thay đổi a,b thỏa mãn $\frac{1}{6}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{8}\log_a^3\left(\frac{6b-1}{9}\right)+4\log_{\frac{b}{a}}^3 a$

A. 9 **B.** 12 **C.** $\frac{23}{2}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Câu 12: Cho 2 số thực a,b thay đổi thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\log_b\left(\frac{b}{a}\right)$?

A. 5 **B.** $5-\sqrt{6}$ **C.** $5-2\sqrt{6}$ **D.** $4-\sqrt{6}$

Câu 13: Cho 2 số thực a,b thay đổi thỏa mãn $a^3>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\log_{\frac{a^3}{b}}(ab).\log_b a}{3\left(\log_a b-1\right)^2+8}$?

A. $e^{\frac{1}{8}}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $e^{\frac{1}{4}}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 14: Cho 2 số thực a,b lớn hơn 1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)+\frac{1}{4\log_{ab}b}$

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{13}{4}$ **D.** $\frac{7}{4}$

Câu 15: Cho 2 số thực $a>1>b>0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\log_{a^2}\left(a^2b\right)+\log_{\sqrt{b}}a^3$

A. $1-2\sqrt{3}$ **B.** $1-2\sqrt{2}$ **C.** $1+2\sqrt{3}$ **D.** $1+2\sqrt{2}$

Câu 16: Cho 2 số thực dương a,b nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\frac{4ab}{a+4b}\right)+\log_b(ab)$

A. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

5. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ BẤT ĐẲNG THỨC

Đây chính là nội dung chính của chuyên đề mà mình muốn nhắc tới, một dạng toán lấy ý tưởng từ đề thi THPT Quốc Gia 2018. Ví dụ minh họa đã được đưa ra ở phần mở đầu của chuyên đề, sau đây sẽ là các bài toán của dạng này mà mình muốn đề cập tới.

CÁC BÀI TOÁN

Câu 1[Minh Tuấn]: Cho $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $4\log_2 2x.\log_2 2y=\log_2^2 4xy$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2^{|\sin x|}+2^{|\cos y|}$. Biết $M.n=a.2^{1+\frac{1}{\sqrt{b}}}$ với $a,b>0$. Tính giá trị của biểu thức a^3+b^3

A. 31 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 35

Câu 2[Minh Tuấn]: Cho $x\ge 2, y\ge 1$ thỏa mãn $\log_2\frac{8}{x}.\log_2\frac{x}{y}.\log_2^2 2y=4$. Đặt $P=2^x+2^y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P<19$ **B.** $P>19$ **C.** $P=19$ **D.** Không tồn tại

Câu 3[Minh Tuấn]: Cho $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện:

$$1+\log_2 3y+6\log_2 3y-2\log_2 3y\log_2 3xy=\frac{9}{2}\log_x 2.$$

Đặt $P=x^2+xy+y^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P\in[11;12]$ **B.** $P\in[12;13]$ **C.** $P\in[10;11]$ **D.** $\min P=10$

Câu 4[Minh Tuấn]: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x\ge 2, y\ge\frac{2}{3}$ đồng thời:

$$\left(\log_2 x^5+\log_2 3y\right)\left(\log_2^2 3y+12\log_2 x-4\log_2 x\log_2 3xy\right)=80$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $x+3y$?

A. 7 **B.** 8 **C.** 5 **D.** 11

Câu 5[Minh Tuấn]: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x,y\ge 1$ đồng thời:

$$\left(\log_2 x+\log_2 y^2+\log_2\frac{8}{x^3y^3}\right)\left(\log_2 x^6+\log_2 y^3+\log_2\frac{4}{x^2y^2}\right)=8$$

Hỏi BCNN của a^2b và 4 bằng bao nhiêu?

A. 4 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16

Câu 6[Minh Tuấn]: Cho hai số thực $x,y\ge 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left|\log_2 2(x+y)\right|+\left|\log_2\frac{2(x+y)}{x^2+4y^2+1}\right|=\log_2(4xy+1)$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x,y)=2xy+\sqrt{x+2y}-x^2-4y^2$ bằng?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{3}{7}$

Câu 7[Minh Tuấn]: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $\begin{cases}3\le x\le 27\\2\le y\le 16\end{cases}$ đồng thời

$$\log_3\frac{27}{x+y}\log_2\frac{16}{y-2x+1}=\frac{36}{\log_3(x+y)^2+\log_2(y-2x+1)^3}$$

Đặt $P=\sqrt{x^2+1}+2^y+\log(1-xy)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P>4$ **B.** $P=4$ **C.** $P<4$ **D.** $P=3$

Câu 8[Minh Tuấn]: Cho hai số thực $x\ge\frac{3}{2}\ge y\ge 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\log_2(3x-y)}{4^{2x-3y-1}}\sqrt{4^{2x-3y-1}-1}+\sqrt{\log_2\frac{3x-y}{2}}=\log_2(3x-y)$$

Khi đó biểu thức $P=4xy$ có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 8

Câu 9[Minh Tuấn]: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x\ne 2y$ đồng thời

$$2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}}\left(e^{x+y}-e^2(x+y-2)\right)=4e^2$$

Đặt $P=a+b$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P>5$ **B.** $\min P=1$ **C.** $P<3$ **D.** $\max P=4$

Câu 10[Minh Tuấn]: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn

$$\frac{2}{2^{x-2y}+1}=2-\log_{y^2+y-x^2-x}(x+y+1)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{x+y+1}(y-x).2^{2x-4y}$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{16}$

Câu 11: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{5}{2}\ln xy=\frac{5}{2}$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $a+b$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 12[Minh Tuấn]: Cho 2 số x,y thỏa mãn $\begin{cases}0\le x^2-y^2\le\frac{\pi}{2}\\ x,y>0\end{cases}$ và

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^{\sin(x^2-y^2)}+2^{\tan(x^2-y^2)}\right)=\frac{2.2^x+4^y}{\sqrt{4.4^x+16^y}}$$

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\sin(x-y)+\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y-1)\right)\right)^{2018}$

A. 1 **B.** 0 **C.** π **D.** 2

Câu 13: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $4^x-2^{x+1}+2(2^x-1)\sin(2^x+y-1)+2=0$

Đặt $P=\sin^{2018}(y+1)+x^{2018}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P\in[4;5]$

Câu 14[Minh Tuấn]: Cho hai số thực $x,y\ge 1$ thỏa mãn $\log_2^2 2x=2\log_2^2\left(y^2+1\right)\left(\log_2^2 x+1\right)$

Tính giá trị của biểu thức $P=\log_2\left(x+y\right)$

A. $\log_2 3$ **B.** $\log_2 5$ **C.** 1 **D.** 2

Câu 15[Minh Tuấn]: Cho hai số thực dương $x\ge y\ge 1$ thỏa mãn

$$4\log_2\left(x+y\right)+12=\left(2^{x-y}+1\right)\left(\log_2\left(x+y\right)+5+\sqrt{2\log_2^2\left(x+y\right)+2}\right)$$

Đặt $P=a^3+b^3$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=2$ **B.** $P=3$ **C.** $P=1$ **D.** $P<1$

Câu 16[Minh Tuấn]: Cho 2 số thực x,y dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_2^2 2x+\log_2^2 4y+\left(1-\log_2 xy\right)^3=\frac{11}{2}$$

Đặt $P=x^3+y^3$. Hỏi P có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 0

Câu 17[Minh Tuấn]: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\begin{cases}x,y\ge 0\\ x\ge y+1\end{cases}$ đồng thời

$$2^{x-y}+2^{2y-2x}=9.2^{-2x+y}$$

Đặt $P=x+y$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá P?

A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 0

Câu 18[Minh Tuấn]: Cho 2 số x,y thỏa mãn $\begin{cases}x\ge 1-y\\ y\le 0\end{cases}$ thoả mãn

$$\sqrt{\ln\left(x+y\right)}+\sqrt{\ln\left(1-y\right)}=2\sqrt{\ln\frac{x+1}{2}}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+y^2$ là?

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 19[Minh Tuấn]: Cho 2 số $x,y>0$ thỏa mãn $\sqrt{\log_2 x+\log_4^2 y^2}+\sqrt{\log_2^2 x+2}=\sqrt{\log_2\frac{y^2}{x}}$

Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $8xy$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Câu 20[Minh Tuấn]: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\left(1+2^{x+y}\right)\left(1+2^{x+2y}\right)\left(1+2^{x-3y}\right)=\left(1+2^x\right)^3$.

Đặt $P=e^{x^2+y^2}+x^2+\frac{y^2}{4}-\left(x-2y\right)^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=e-1$ **B.** $P=e$ **C.** $\max P=e^2$ **D.** $P=e-2$

Câu 21[Minh Tuấn]: Cho 2 số $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện

$$\left(2^{x+y-1}+2^{x+2y-1}\right)\left(2^{3x+4y-3}+2^{1-x-y}\right)=2^{2x+3y}$$

Biết rằng biểu thức $\frac{x^2+y^2}{4}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b$ bằng?

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 7

Câu 22[Minh Tuấn]: Cho 2 số $x,y>0$ thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{2^{2x}+3.4^y}}+\frac{1}{\sqrt{4^y+3.2^{2x}}}=\frac{x-y-e^{x-y-3}}{2\left(2^{x-1}+2^{y-1}\right)}$

Khi đó x^3+y^4 được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T=m+n$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 149 **B.** 147 **C.** 160 **D.** 151

Câu 23[Minh Tuấn]: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\log_a b+\log_b c+\frac{1}{4}\log_c^2 a$

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{9}{4}$

Câu 24[Minh Tuấn]: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{4x}}+2^{\frac{y}{4}+\frac{1}{y}}=4$. Đặt $P=x+y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=1$ **B.** 2 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Câu 25[Minh Tuấn]: Cho 2 số a,b thỏa mãn $b\ge a>1$ và $2^{\log_b a}+16^{\log_a \frac{b}{\sqrt[4]{a^3}}}=4$. Giá trị của biểu thức $P=\log_2\left(\frac{a}{b}\right)$?

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 26[Minh Tuấn] Cho 2 số thực $x,y>0$ thỏa mãn $\frac{1}{x}\le y\le 2x$ và đồng thời điều kiện $\log_2\frac{2}{x}\sqrt{\log_2\frac{2x}{y}\log_2 xy}=\frac{9}{16}$. Đặt $P=2^x.2^y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P\in[4;5]$ **B.** $P\in[1;2]$ **C.** $P\in[2;3]$ **D.** $P\in[6;7]$

Câu 27: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\begin{cases}2\le x\le 3\\2<y<5\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu bộ số (x,y) thỏa mãn phương trình $\log_2(3-|\sin xy|)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 28: Tìm tổng các số $\alpha\in(5;16)$ để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $[1;2]$

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}$$

A. $\frac{17\pi}{5}$ **B.** $\frac{34\pi}{5}$ **C.** $\frac{63\pi}{5}$ **D.** $\frac{51\pi}{5}$

Câu 29: Tìm tổng các số $\alpha \in (2;7)$ để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $[1;2]$

$$\log_3\left(1+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{5\pi}{2}\right)\right)=|\cos\alpha x|-1$$

A. $\frac{17\pi}{7}$ **B.** $\frac{18\pi}{7}$ **C.** $\frac{19\pi}{7}$ **D.** $\frac{20\pi}{7}$

Câu 30: Biết rằng tồn tại duy nhất một a để phương trình $2^{|\sin x|}+|\sin x|=\cos x+\sin^2 x+a$ có nghiệm duy nhất, hỏi a có tất cả bao nhiêu ước số nguyên

A. 2 số **B.** 8 số **C.** Không có **D.** Vô số

Câu 31[Minh Tuấn]: Cho 2 số thực dương x,y thõa mãn điều kiện

$$\left[1+\left(\frac{2^{xy}}{4}+1\right)^2\log_{xy}^2 x\right]\left[\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1\right]=\left(\frac{2^{xy}}{4}+1\right)^2$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá a^4b^4

A. 13 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 16

Câu 32: Cho 2 số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P=a+b$

A. $P=8$ **B.** $P=141$ **C.** $P=148$ **D.** $P=151$

Câu 33: Cho x,y là 2 số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|36^x-5^y\right|$

A. $P=8$ **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Câu 34: Cho các số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\frac{c}{b}-2\log_b\frac{c}{b}-3$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a b-\log_b c$. Tính $S=2m+3M$

A. $S=\frac{2}{3}$ **B.** $S=\frac{1}{3}$ **C.** $S=3$ **D.** $S=2$

Câu 35: Cho các số thực a,b,c khác 0 thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$ là?

A. $-3-\log_5 3$ **B.** -4 **C.** $-2-\sqrt{3}$ **D.** $-2-\log_3 5$

Câu 36: Cho a,b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $b>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{(a-b)^2+\left(10^a-\log b\right)^2}$

A. $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}+\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$ **B.** $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$

C. $\sqrt{2}\log(\ln 10)$ **D.** $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\ln\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$

Câu 37: Cho các số thực a,b,c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a \geq (1-\log_2 b\log_2 c)\log_{bc} 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=10\log_2^2 a+10\log_2^2 b+\log_2^2 c$

A. $-3-\log_5 3$ **B.** -4 **C.** $-2-\sqrt{3}$ **D.** $-2-\log_3 5$

Câu 38: Với a,b,c lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a bc+\log_b ca+4\log_c ab$

A. 6 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 10

Câu 39: Với a,b,c lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a bc+3\log_b ca+4\log_c ab$

A. 16 **B.** $6+4\sqrt{3}$ **C.** $4+6\sqrt{3}$ **D.** $8+4\sqrt{3}$

Câu 40 [Lê Phúc Lữ]: Xét các số thực dương x,y,z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a,b,c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc}=a^x=b^y=c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y+2z^2$

A. $4\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** 6 **D.** 10

Câu 41: Xét các số thực dương x,y,z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a,b,c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc}=a^x=b^y=c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{16}{x}+\frac{16}{y}-z^2$

A. 20 **B.** $20-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **C.** 24 **D.** $24-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Câu 42: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a b+\log_b c+\sqrt{\log_c a}$

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 3 **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 43: Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $\log^2 a+2\log^2 b+3\log^2 c=6$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức là $T=\log a\log b+\log b\log c+\log c\log a$ là $\frac{3}{k}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k=1$ **B.** $k^3+3k^2=3$ **C.** $k^3+3k=3$ **D.** $k=\frac{1}{2}$

Câu 44: Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $\log a\log b+\log b\log c+3\log c\log a=1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log^2 a+\log^2 b+\log^2 c$ là $\frac{-m+\sqrt{n}}{p}$ với m,n,p lần lượt là các số nguyên dương và $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m+n+p$?

A. 64 **B.** 16 **C.** 102 **D.** 22

Câu 45: Với n là số nguyên dương, biết rằng $-\log_2\left(\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2018}}}}\right)\right) > 2017$ mà biểu thức trong dấu ngoặc có tất cả n dấu căn. Tìm giá trị nhỏ nhất của n?

A. 2021 **B.** 2014 **C.** 2013 **D.** 2020

Câu 46: Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b}\left(2^{1000}\right)\right)\right)=0$. Giá trị lớn nhất của ab là?

A. 500 **B.** 375 **C.** 125 **D.** 250

Câu 47: Cho số thực dương $a>1$, biết khi $a=a_0$ thì bất đẳng thức $x^a \le a^x$ đúng với mọi số thực x lớn hơn 1. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<a_0<2$ **B.** $e<a_0<e^2$ **C.** $2<a_0<3$ **D.** $e^2<a_0<e^3$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)$ với a,b là các số thực thay đổi và phương trình $f'(x)+f''(x)=10e^x$ có nghiệm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=a^2-2ab+3b^2$

A. $10+10\sqrt{2}$ **B.** $20+10\sqrt{2}$ **C.** $10+20\sqrt{2}$ **D.** $20+\sqrt{2}$

Câu 49: Cho 2 số thực a,b thỏa mãn $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b+n}$ với mọi số n nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a-b|$?

A. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{3}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{\ln 2}-1$ **D.** $\frac{1}{\ln 2}-3$

Câu 50: Cho các số thực dương x,y,z bất kì thỏa mãn $xyz=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{\log^2 y+4}+\sqrt{\log^2 z+4}$

A. $\sqrt{29}$ **B.** $\sqrt{23}$ **C.** $\sqrt{26}$ **D.** $\sqrt{27}$

Câu 51[Minh Tuấn]: Cho 2 số thực x,y sao cho tổng của chúng không âm và đồng thời

$$\left(2^{2x-2y}+4\right)\left(\frac{1+2^{x+y}}{1+4^x}+\frac{1+2^{x+y}}{1+4^y}\right)=2^{2x-2y}+2^{x-y+2}+4$$

Biết rằng giá trị của biểu thức $P=x^3+y^4=\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi biểu thức m^2+n có tất cả bao nhiêu ước số nguyên?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 D. 8

Câu 52: Cho các số thực $a,b,c\in[2;3]$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4^a+4^b+4^c-\dfrac{1}{4}(a+b+c)^3$ là $\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P=m+2n$

A. $P=257$ **B.** $P=258$ **C.** $P=17$ D. $P=18$

Câu 53: Có tất cả bao nhiêu bộ số thực $(x;y;z)$ thỏa mãn $\begin{cases}2^{\sqrt[3]{x^2}}.4^{\sqrt[3]{y^2}}.16^{\sqrt[3]{z^2}}=128\\(xy^2+z^4)^2=4+(xy^2-z^4)^2\end{cases}$

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

THPT Chuyên Quốc học Huế - Năm học 2017 – 2018

Câu 54: Cho hàm số $f(x)=\log_3\dfrac{m^2x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao $f(a)+f(b)=3$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e(a+b)$. Tính tích các phần tử của tập hợp S

A. 27 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $-3\sqrt{3}$ **D.** -27

Câu 55: Cho hệ phương trình $\begin{cases}9x^2-4y^2=5\\\log_m(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $3x+2y\le5$. Tìm giá trị lớn nhất của m?

A. -5 **B.** $\log_3 5$ **C.** 5 **D.** $\log_5 3$

THPT Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình lần 1 năm 2017 – 2018

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a)+f(b)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S

A. 81 **B.** -3 **C.** 3 **D.** -9

Câu 57: Cho phương trình $3^x=\sqrt{a.3^x\cos(\pi x)-9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

A. 1 **B.** 2018 **C.** 0 **D.** 2

Câu 58 : Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2\le2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4^x+4^y+4^z+\ln(x^4+y^4+z^4)-\dfrac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\dfrac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=2a+3b$

A. 13 **B.** 42 **C.** 54 **D.** 71

Câu 59: Cho 2 hàm số $f(x)=(m-1)6^x-\frac{2}{6^x}+2m+1, h(x)=(x-6^{1-x})$. Tìm tham số m để hàm số $g(x)=h(x).f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 với mọi $x\in[0;1]$

A. $m=1$ **B.** $m\le\frac{1}{2}$ **C.** $m\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ **D.** $m\ge1$

Câu 60 : Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1)\ge x-ax^2$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T=2m+3n$

A. $T=5$ **B.** $T=8$ **C.** $T=7$ **D.** $T=11$

Câu 61: Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le1$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$ khi biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 5 **B.** $3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$ **C.** 6 **D.** 4

THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 62: Cho 2 số thực x,y phân biệt thỏa mãn $x,y\in(0;2018)$.

Đặt $S=\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{2018-y}-\ln\frac{x}{2018-x}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S\ge\frac{2}{1009}$ **B.** $S\le\frac{2}{1009}$ **C.** $S\ge\frac{4}{1009}$ **D.** $S\le\frac{4}{1009}$

Câu 63: Cho 3 số a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a}+\frac{1}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\frac{8}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$$

A. 20 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 12

THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018

Câu 64: Cho a,b,c,d là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(1+a^2+b^2+a^2b^2)(1+c^2+d^2+c^2d^2)$

A. 2 **B.** $4\ln\frac{17}{16}$ **C.** $\left(\frac{17}{16}\right)^4$ **D.** $\ln\frac{17}{16}$

Câu 65: Cho 3 số thực x,y,z không âm thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $1-\log_4 3$

Câu 66: Cho các số thực $a,b,c\ge 1$ thỏa mãn $a+b+c=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_3 a+2\log_9 b+3\log_{27} c$

A. $\log_3 5$ **B.** 1 **C.** $\log_3 15$ **D.** $\log_3 \frac{5}{3}$

Câu 67: Biết a là số thực dương bất kì để bất đẳng thức $a^x\ge 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in\left(10^3;10^4\right]$ **B.** $a\in\left(10^2;10^3\right]$ **C.** $a\in\left(0;10^2\right]$ **D.** $a\in\left(10^4;+\infty\right)$

THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018

Câu 68: Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\dfrac{\prod_{i=2}^{n}\log_3 i}{9^n}$ với $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$. Có bao nhiêu số tự nhiên n để $f(n)=a$?

A. 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 4

Câu 69: Cho 2 số thực x,y không âm thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left(14-(y-2)\sqrt{y+1}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$?

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

THPT Quãng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 70: Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x+9^y+16^z=2^x+3^y+4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2^{x+1}+3^{y+1}+4^{z+1}$

A. $\frac{9+\sqrt{87}}{2}$ **B.** $\frac{7+\sqrt{87}}{2}$ **C.** $\frac{5+\sqrt{87}}{2}$ **D.** $\frac{3+\sqrt{87}}{2}$

Câu 71: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{\ln x+1}{\sqrt{\ln^2 x+1}}+m\right|$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{-1+\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

Câu 72: Biết α là số thực lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\le e, \forall n\in\mathbb{Z}^+$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\alpha\in(0;1)$ **B.** $\alpha\in(1;2)$ **C.** $\alpha\in(-1;0)$ **D.** $\alpha\in(2;3)$

Câu 73: Cho 2 số thực a,b không âm thỏa mãn $\log_2 ab\in(0;1)$ đồng thời

$$(\log_2 ab)^{\log_2 ab}+(1-\log_2 ab)^{1-\log_2 ab}=\sqrt{1+\frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b}+1}}$$

Biết rằng x^4y^{10} được viết dưới dạng $m\sqrt{n}$ với a,b là các số nguyên dương. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(m;n)$ như vậy?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Nguyễn Minh Tuấn

Câu 74: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $0<a,b\le 100$ sao cho đồ thị của 2 hàm số $y=\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b}$ và $y=\frac{1}{b^x}+\frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng 2 điểm phân biệt?

A. 9704 **B.** 9702 **C.** 9698 **D. 9700**

Câu 75: Cho 2 số thực x,y không âm thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\log_2\left(\log_3\left(-x^2-9y^2+6xy-2x+6y+2\right)\right)=\log_3\left(\log_2\left(9x^2+y^2-6xy-6x+2y+3\right)\right)$$

Biết rằng xy^2 được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Nguyễn Minh Tuấn

Câu 76: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $0<x-y<\frac{\pi}{2}$ và đồng thời

$$\left(\tan(x-y)\right)^{\sin(x-y)}+\left(\cot(x-y)\right)^{\cos(x-y)}=\log_2\left(4-x^2y^2\right)$$

Tính giá trị của biểu thức $\sin\left(x^2y^2+x-y+\frac{\pi}{4}\right)$?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 0 **C.** 1 **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Câu 77: Cho các số thực a,b,c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P=\sqrt{4^a+9^b+16^c}+\sqrt{9^a+16^b+4^c}+\sqrt{16^a+4^b+9^c}$$

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** $6\sqrt{3}$

Câu 78: Cho các số thực $x,y,z\in[0;1]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(2^x+2^y+2^z\right)\left(2^{-x}+2^{-y}+2^{-z}\right)$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 86 **B.** 87 **C.** 88 **D.** 89

Câu 79: Cho các số thực x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P=\sqrt{3+2011^{x+y-2z}}+\sqrt{3+2011^{y+z-2x}}+\sqrt{3+2011^{z+x-2y}}$$

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 80: Cho hai các số thực a, b, c, d, e dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=1000$ và

$$\begin{cases} a-b+c-d+e>0 \\ a+b-c+d-e>0 \\ -a+b+c-d+e>0 \\ a-b+c+d-e>0 \\ -a+b-c+d+e>0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=(a+c)^{b+d}$

A. 499^{499} **B.** 500^{500} **C.** 500^{499} **D.** 499^{500}

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho 2 số $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $4\log_2 2x.\log_2 2y=\log_2^2 4xy$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2^{|\sin x|}+2^{|\cos y|}$. Biết $M.n=a.2^{1+\frac{1}{\sqrt{b}}}$ với a,b là các số nguyên dương và $a,b>0$. Tính giá trị của biểu thức a^3+b^3

A. 31 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 35

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$4\log_2 2x.\log_2 2y=\log_2^2 4xy \Leftrightarrow 4\log_2 2x.\log_2 2y=(\log_2 2x+\log_2 2y)^2$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 2x-\log_2 2y)^2=0 \Leftrightarrow \log_2 2x=\log_2 2y \Leftrightarrow x=y$$

Thế vào giả thiết ta được $P=h(x)=2^{|\sin x|}+2^{|\cos x|}\left(t\in[0;1]\right)$. Đặt $t=|\sin x|$ khi đó ta được

$$f(t)=2^t+2^{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}2^{\sqrt{1-t^2}}\ln 2$$

Ta có $f'(t)=0 \Leftrightarrow 2^t\ln 2=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}2^{\sqrt{1-t^2}}\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t\in(0;1) \\ \frac{2^t}{t}=\frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$.

Xét hàm số $g(a)=\frac{2^a}{a}$ trên khoảng $(0;1)$ ta có $g'(a)=\frac{2^a(a\ln 2-1)}{a^2}<0\forall a\in(0;1)$.

Do đó $g(a)$ nghịch biến trên $(0;1)$ vì vậy ta được $t=\sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Mặt khác ta lại có $f(0)=f(1)=3;y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \begin{cases} \min P=3 \\ \max P=2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases}$

Chọn ý **D.**

Câu 2: Cho $x \ge 2, y \ge 1$ thỏa mãn $\log_2 \frac{8}{x}.\log_2 \frac{x}{y}.\log_2^2 2y = 4$. Đặt $P = 2^x + 2^y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P < 19$ **B.** $P > 19$ **C.** $P = 19$ **D.** Không tồn tại

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn thoáng qua thì nhiều bạn sẽ cho rằng đây là dạng toán rút thế để tìm min, max, tuy nhiên ở bài này ta phải sử dụng đến kiến thức của bất đẳng thức. Biến đổi giả thiết ta có:

$$\log_2 \frac{8}{x}.\log_2 \frac{x}{y}.\log_2^2 2y = 4 \Leftrightarrow (3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y + 1)^2 = 4$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$(3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y + 1)^2 = 4(3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y)\frac{\log_2 y + 1}{2}\cdot\frac{\log_2 y + 1}{2}$$

$$\overset{AM-GM}{\le} 4\left(\frac{3 - \log_2 x + \log_2 x - \log_2 y + \frac{\log_2 y + 1}{2} + \frac{\log_2 y + 1}{2}}{4}\right)^4 = 4 = VP$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3 - \log_2 x = \log_2 x - \log_2 y \\ 3 - \log_2 x = \frac{\log_2 y + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Từ đó suy ra $P = 18 < 19$

Chọn ý **A.**

Câu 3: Cho 2 số thực $x, y > 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$1 + \log_2 3y + 2\log_2 3y(3 - \log_2 3xy) = \frac{9}{2}\log_x 2.$$

Đặt $P = x^2 + xy + y^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P \in [11;12]$ **B.** $P \in [12;13]$ **C.** $P \in [10;11]$ **D.** $\min P = 10$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ý tưởng của mình ở bài này là sẽ kiếm một điều kiện ràng buộc giữa x,y rồi sau đó chỉ ra giả thiết chỉ nhận duy nhất 1 bộ nghiệm. Vậy làm sao để tìm được mối liên hệ này? Dưới đây là cách giải quyết của mình.

Biến đổi giả thiết ta được:

$$1 + \log_2 3y + 2\log_2 3y(3 - \log_2 3xy) = \frac{9}{2}\log_x 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x\log_2 3y + 2\log_2 3y\log_2 x\log_2 \frac{8}{3xy} = \frac{9}{2}$$

Ta nhận thấy rằng $\log_2 x+\log_2 3y+\log_2 \frac{8}{3xy}=3$.

Để đơn giản ta đặt $\begin{cases}\log_2 x=a\\ \log_2 3y=b\\ \log_2 \frac{8}{3xy}=c\end{cases}$ Lúc này ta có 2 giả thiết $\begin{cases}a+b+c=3\\ a+ab+2abc=\frac{9}{2}\end{cases}$.

Thế $b=3-a-c$ vào giả thiết dưới ta được:

$$(2c+1)a^2+\left(2c^2-5c-4\right)a+\frac{9}{2}=0$$

Coi vế trái là tam thức bậc 2 theo biến a với c là tham số ta có:

$$\Delta=\left(2c^2-5c-4\right)^2-18(2c+1)=(2c-1)^2\left(c^2-4c-2\right)$$

Chú ý với điều kiện $x,y>1$ ta sẽ có $a,b,c>0$. Mặt khác $a+b+c=3\Rightarrow c<3$

Suy ra $\Delta\le 0$, điều này đồng nghĩa $VT\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=1\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2 x=\frac{3}{2}\\ \log_2 3y=1\\ \log_2 \frac{8}{3xy}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$

Từ đây suy ra $P=\frac{76+12\sqrt{2}}{9}$.

Chọn ý **C.**

Câu 4: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x\ge 2, y\ge \frac{2}{3}$ đồng thời:

$$\left(\log_2 x^5+\log_2 3y\right)\left(\log_2^2 3y+12\log_2 x-4\log_2 x\log_2 3xy\right)=80$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $x+3y$?

A. 7 **B.** 8 **C.** 5 **D.** 11

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Giống với bài trên ý tưởng vẫn sẽ là đi tìm mối liên hệ giữa x,y tuy nhiên nếu không tinh ý thì sẽ khá vất vả. Chú ý như với bài trước ta sẽ cần làm xuất hiện một biểu thức có dạng như $\log_2 \frac{a}{b.xy}$.

Dễ thấy ở bên trong biểu thức thứ 2 nếu đặt nhân tử chung ta sẽ tìm được 1 biểu thức như vậy. Lời giải của bài toán như sau.

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\left(\log_2 x^5+\log_2 3y\right)\left(\log_2^2 3y+12\log_2 x-4\log_2 x\log_2 3xy\right)=80$$
$$\Leftrightarrow\left(5\log_2 x+\log_2 3y\right)\left(\log_2^2 3y+4\log_2 x\left(3-\log_2 3xy\right)\right)=80$$
$$\Leftrightarrow\left(5\log_2 x+\log_2 3y\right)\left(\log_2^2 3y+4\log_2 x\log_2\frac{8}{3xy}\right)=80$$

Đặt $\left(\log_2 x,\log_2 3y,\log_2\frac{8}{3xy}\right)\to(a,b,c)\Rightarrow a+b+c=3.$

Giả thiết lúc này trở thành $(5a+b)\left(b^2+4ac\right)=80$

Với điều kiện $x\ge 2,y\ge\frac{2}{3}\Rightarrow a,b,c\ge 0$ từ đó ta có $5a+b\le 5\left(a+\frac{b}{2}\right)$ và đồng thời

$$b^2+4ac\le b^2+2(ab+bc)+4ac=4\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(c+\frac{b}{2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $P\le 10\left(a+\frac{b}{2}\right)^2(2c+b)\le 10\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^3=80$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=2\\ b=0\\ c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2 x=2\\ \log_2 3y=0\\ \log_2\frac{8}{3xy}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$

Do đó $x+3y=5$. Vậy có tất cả 5 số nguyên dương không vượt quá $x+3y$

Chọn ý **C.**

Câu 5: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x,y\ge 1$ đồng thời:

$$\left(\log_2 x+\log_2 y^2+\log_2\frac{8}{x^3y^3}\right)\left(\log_2 x^6+\log_2 y^3+\log_2\frac{4}{x^2y^2}\right)=8$$

Hỏi BCNN của x^2y và 4 bằng bao nhiêu?

A. 4 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Sau khi đã tìm hiểu ý tưởng ở 2 bài toán trên thì bài toán này chắc hẳn đã đơn giản hơn với các bạn rồi. Biến đổi giả thiết ta được:

$$\left(\log_2 x+\log_2 y^2+\log_2\frac{8}{x^3y^3}\right)\left(\log_2 x^6+\log_2 y^3+\log_2\frac{4}{x^2y^2}\right)=8$$
$$\Leftrightarrow\left(\log_2 x+2\log_2 y+3\log_2\frac{2}{xy}\right)\left(6\log_2 x+3\log_2 y+2\log_2\frac{2}{xy}\right)=8$$

Đặt chú ý rằng $\log_2 x+\log_2 y+\log_2\frac{2}{xy}=1\Rightarrow\log_2\frac{2}{xy}=1-\log_2 x-\log_2 y$

Thế vào giả thiết ta được:

$$(3-2\log_2 x-\log_2 y)(2+4\log_2 x+\log_2 y)=2(3-2\log_2 x-\log_2 y)\left(1+2\log_2 x+\frac{\log_2 y}{2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2(3-2\log_2 x-\log_2 y)\left(1+2\log_2 x+\frac{\log_2 y}{2}\right)\le 2\left(\frac{4-\frac{\log_2 y}{2}}{2}\right)^2\le 8\left(\log_2 y\ge 0\right)$$

Dấu "=" khi và chỉ khi $\begin{cases}\log_2 x=\frac{1}{2}\\ \log_2 y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$

Chọn ý **A.**

Câu 6: Cho hai số thực $x,y\ge 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left|\log_2 2(x+y)\right|+\left|\log_2\frac{2(x+y)}{x^2+4y^2+1}\right|=\log_2(4xy+1)$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x,y)=2xy+\sqrt{x+2y}-x^2-4y^2$ bằng?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{3}{7}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn hình thức bài toán khá cồng kềnh, thấy rằng bài toán có chứa dấu trị tuyệt đối nên ta sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức liên quan tới nó.

Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có:

$$\left|\log_2 2(x+y)\right|+\left|\log_2\frac{2(x+y)}{x^2+4y^2+1}\right|=\left|\log_2(x+y)+1\right|+\left|1-\log_2\frac{x^2+4y^2+1}{x+y}\right|$$

$$=\left|\log_2(x+y)+1\right|+\left|\log_2\frac{x^2+4y^2+1}{x+y}-1\right|\ge\left|\log_2\left(x^2+4y^2+1\right)\right|=\log_2\left(x^2+4y^2+1\right)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM – GM ta lại có $\log_2\left(x^2+4y^2+1\right)\ge\log_2(4xy+1)=VP$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\left(1-\log_2\frac{x^2+4y^2+1}{x+y}\right)\left(\log_2(x+y)+1\right)\\ x=2y\end{cases}$

Thế vào $f(x,y)$ ta được $f(x,y)=g(x)=\sqrt{2x}-x^2$

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2x}}=2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow\max\limits_{[1;+\infty)}g(x)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

Chọn ý **C.**

Câu 7: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $\begin{cases} 3 \le x \le 27 \\ 2 \le y \le 16 \end{cases}$ đồng thời

$$\log_3 \frac{27}{x+y} \log_2 \frac{16}{y-2x+1} = \frac{36}{\log_3 (x+y)^2 + \log_2 (y-2x+1)^3}$$

Đặt $P = \sqrt{x^2+1} + 2^y + \log(1-xy)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P > 4$ **B.** $P = 4$ **C.** $P < 4$ **D.** $P = 3$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Sau khi đã làm quen với hướng giải thì bài này có lẽ khá là đơn giản với các bạn rồi, chỉ cần sử dụng bất đẳng thức AM – GM để triệt tiêu các biểu thức chứa biến là sẽ ra.

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\log_3 \frac{27}{x+y} \log_2 \frac{16}{y-2x+1} = \frac{36}{\log_3 (x+y)^2 + \log_2 (y-2x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(3 - \log_3 (x+y)\right)\left(4 - \log_2 (y-2x+1)\right)\left(2\log_3 (x+y) + 3\log_2 (y-2x+1)\right) = 36$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\left(3 - \log_3 (x+y)\right)\left(4 - \log_2 (y-2x+1)\right)\left(2\log_3 (x+y) + 3\log_2 (y-2x+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(6 - 2\log_3 (x+y)\right)\left(12 - 3\log_2 (y-2x+1)\right)\left(2\log_3 (x+y) + 3\log_2 (y-2x+1)\right)$$

$$\overset{AM-GM}{\le} \frac{1}{6}\left(\frac{6 - 2\log_3 (x+y) + 12 - 3\log_2 (y-2x+1) + 2\log_3 (x+y) + 3\log_2 (y-2x+1)}{3}\right)^3 = 36$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \log_3 (x+y) = 0 \\ \log_2 (y-2x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ y-2x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Từ đó suy ra $P > 4$.

Chọn ý **A.**

Câu 8: Cho hai số thực $x \ge \frac{3}{2} \ge y \ge 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\log_2 (3x-y)}{4^{2x-3y-1}} \sqrt{4^{2x-3y-1} - 1} + \sqrt{\log_2 \frac{3x-y}{2}} = \log_2 (3x-y)$$

Khi đó biểu thức $P = 4xy$ có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 8

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\frac{\log_2(3x-y)}{4^{2x-3y-1}}\sqrt{4^{2x-3y-1}-1}+\sqrt{\log_2\frac{3x-y}{2}}=\log_2(3x-y)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x-y)\sqrt{4^{2x-3y-1}-1}+4^{2x-3y-1}\sqrt{\log_2(3x-y)-1}=\log_2(3x-y).4^{2x-3y-1}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

- $\log_2(3x-y)\sqrt{4^{2x-3y-1}-1}\le\log_2(3x-y).\dfrac{4^{2x-3y-1}-1+1}{2}=\dfrac{4^{2x-3y-1}\log_2(3x-y)}{2}$
- $4^{2x-3y-1}\sqrt{\log_2(3x-y)-1}\le 4^{2x-3y-1}.\dfrac{\log_2(3x-y)-1+1}{2}=\dfrac{4^{2x-3y-1}\log_2(3x-y)}{2}$

Cộng 2 vế bất đẳng thức ta được $VT\le VP$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}4^{2x-3y-1}=2\\ \log_2(3x-y)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=\dfrac{3}{2}\\ 3x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy $P=4xy=3$ có tất cả 4 ước số nguyên là $\pm1,\pm3$

Chọn ý **B.**

Câu 9: Cho hai số $x,y>\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn $x\ne 2y$ đồng thời $2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}}\left(e^{x+y}-e^2(x+y-2)\right)=4e^2$

Đặt $P=x+y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P>5$ **B.** $\min P=1$ **C.** $P<3$ **D.** $\max P=4$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đây là một câu khá là hay chắc hẳn nhiều bạn sẽ nghĩ tới phương pháp đánh giá đầu tiên, ý tưởng đó là đúng nhưng trước tiên ta cần phải biết tới 1 bất đẳng thức phụ sau.

Bất đẳng thức phụ hay gặp: $e^x\ge x+1$

Chứng minh: Xét hàm số $f(x)=e^x-x-1\Rightarrow f'(x)=e^x-1$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$$\Rightarrow \min f(x)=f(0)=0\Rightarrow e^x\ge x+1\,\forall x$$

Biến đổi giả thiết ta được:

$$2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}}\left(e^{x+y}-e^2(x+y-2)\right)=4e^2\Leftrightarrow 2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}}\left(e^{x+y-2}-(x+y-2)\right)=4$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta có: $e^{x+y-2}-(x+y-2)\ge1$

Mặt khác cũng theo AM – GM ta có $2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}}=2^{(x-2y)^2+\frac{1}{(x-2y)^2}}\ge 2^2=4$

Vậy $VT\ge4$. Dấu "=" khi và chỉ khi $\begin{cases}(x-2y)^2=1\\ x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$

Chọn ý **C.**

Câu 10: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2}{2^{x-2y}+1}=2-\log_{y^2+y-x^2-x}(x+y+1)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{x+y+1}(y-x).2^{2x-4y}$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{16}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đến bài này sẽ không còn dễ như những bài toán trước nữa, ta cần một chút kỹ năng biến đổi để có thể có thêm định hướng giải bài toán này.

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\frac{2}{2^{x-2y}+1}=2-\log_{y^2+y-x^2-x}(x+y+1)\Leftrightarrow\frac{2}{2^{x-2y}+1}=2-\frac{1}{\log_{x+y+1}(x+y+1)(y-x)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{2^{x-2y}+1}=2-\frac{1}{\log_{x+y+1}(y-x)+1}\Leftrightarrow\frac{2}{2^{x-2y}+1}+\frac{1}{\log_{x+y+1}(y-x)+1}=2$$

Khi đó P viết lại thành $P=\log_{x+y+1}(y-x).\left(2^{x-2y}\right)^2$

Để đơn giản ta đặt $\begin{cases}a=\log_{x+y+1}(y-x)\\ b=2^{x-2y}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{b+1}+\frac{1}{a+1}=2\Rightarrow a=\frac{b+1}{2b}-1$

Thế vào ta được $P=\frac{b^2(1-b)}{2b}=\frac{b(1-b)}{2}\le\frac{1}{8}$

Chọn ý **C.**

Câu 11: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{5}{2}\ln xy=\frac{5}{2}$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $x+y$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Với bài này ta sẽ sử dụng cách dồn biến về đại lượng xy. Có thể thấy là vế trái là đa thức đối xứng nên ta cho $x=y\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{5}{2x^2}=\frac{5}{2xy}$. *Vậy bài toán sẽ thêm bớt như sau:*

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{5}{2}\ln xy=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{5}{2xy}+\frac{5}{2}\ln xy+\frac{5}{2xy}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{2xy}+\frac{5}{2}\ln xy+\frac{5}{2xy}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}-\frac{(x-y)^2}{2xy(x^2+y^2)}+\frac{5}{2}\ln xy+\frac{5}{2xy}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2\left(2x^2-xy+2y^2\right)}{2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{xy}-\ln\left(\frac{1}{xy}\right)\right)=\frac{5}{2}$$

Xét hàm số $f(t)=t-\ln t\,(t>0)\Rightarrow f'(t)=\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right), f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow f(t)\ge f(1)=\frac{5}{2}$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$

Chọn ý **C.**

Câu 12: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $0\le x^2-y^2\le\frac{\pi}{2}, x,y>0$ và

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2^{\sin\left(x^2-y^2\right)}+2^{\tan\left(x^2-y^2\right)}\right)=\frac{2.2^x+4^y}{\sqrt{4.4^x+16^y}}$$

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\sin(x-y)+\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y-1)\right)\right)^{2018}$

A. 1 **B.** 0 **C.** π **D.** 2

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $2^{\sin\left(x^2-y^2\right)}+2^{\tan\left(x^2-y^2\right)}\ge 2\sqrt{2^{\sin\left(x^2-y^2\right)+\tan\left(x^2-y^2\right)}}$

Xét hàm số $f(t)=\sin t+\tan t\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f'(t)=\cos t+\frac{1}{\cos^2 t}\ge 0\,\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow f(t)\ge f(0)=0\Rightarrow 2\sqrt{2^{\sin\left(x^2-y^2\right)+\tan\left(x^2-y^2\right)}}\ge 2$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{2.2^x+4^y}{\sqrt{4.4^x+16^y}}=\frac{2.2^x+4^y}{\sqrt{4.\left(2^x\right)^2+\left(4^y\right)^2}}\le\frac{\sqrt{2\left(4.\left(2^x\right)^2+\left(4^y\right)^2\right)}}{\sqrt{4.\left(2^x\right)^2+\left(4^y\right)^2}}=\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra $VT\ge\sqrt{2}\ge VP$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-y^2=0\\2.2^x=4^y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x+1=2y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1\Rightarrow P=0$

Chọn ý **B.**

Câu 13: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $4^x-2^{x+1}+2\left(2^x-1\right)\sin\left(2^x+y-1\right)+2=0$

Đặt $P=\sin^{2018}(y+1)+x^{2018}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P\in[4;5]$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$4^x-2^{x+1}+2\left(2^x-1\right)\sin\left(2^x+y-1\right)+2=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2^{2x}-2.2^x+1\right)+2\left(2^x-1\right)\sin\left(2^x+y-1\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{2x} - 2.2^x + 1\right) + 2\left(2^x - 1\right)\sin\left(2^x + y - 1\right) + \sin^2\left(2^x + y - 1\right) + \cos^2\left(2^x + y - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x - 1 + \sin\left(2^x + y - 1\right)\right)^2 + \cos^2\left(2^x + y - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + \sin\left(2^x + y - 1\right) = 1 \\ \cos^2\left(2^x + y - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Vì $\cos^2\left(2^x + y - 1\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(2^x + y - 1\right) = \pm 1$.

- Nếu $\sin\left(2^x + y - 1\right) = 1 \Rightarrow 2^x = 0$ - Phương trình vô nghiệm
- Nếu $\sin\left(2^x + y - 1\right) = -1 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \sin\left(y + 1\right) = -1$

Vậy giá trị của biểu thức $P = 2$.

Chọn ý **B.**

Câu 14: Cho hai số thực $x, y \ge 1$ thỏa mãn $\log_2^2 2x = 2\log_2^2\left(y^2 + 1\right)\left(\log_2^2 x + 1\right)$

Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2\left(x + y\right)$

A. $\log_2 3$ **B.** $\log_2 5$ **C.** 1 **D.** 2

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ý tưởng bài này giống với bài 12, nhưng hình thức đã đơn giản hơn rất nhiều.

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\log_2^2 2x = 2\log_2^2\left(y^2 + 1\right)\left(\log_2^2 x + 1\right) \Leftrightarrow \frac{\left(\log_2\left(x\right) + 1\right)^2}{\log_2^2 x + 1} = 2\log_2^2\left(y^2 + 1\right)$$

Xét hàm $f\left(t\right) = \dfrac{\left(t + 1\right)^2}{t^2 + 1}\left(t \ge 0\right) \Rightarrow f'\left(t\right) = \dfrac{-2t^2 + 2}{\left(t^2 + 1\right)^2}, f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f\left(t\right) \le f\left(1\right) = 2$

Từ đó suy ra $\dfrac{\left(\log_2\left(x\right) + 1\right)^2}{\log_2^2 x + 1} \le 2$. Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$2\log_2^2\left(y^2 + 1\right) \ge 2\log_2\left(1 + 1\right) = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Chọn ý **C.**

Câu 15: Cho hai số thực dương $x \ge y \ge 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$4\log_2\left(x + y\right) + 12 = \left(2^{x-y} + 1\right)\left(\log_2\left(x + y\right) + 5 + \sqrt{2\log_2^2\left(x + y\right) + 2}\right)$$

Đặt $P = a^3 + b^3$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = 2$ **B.** $P = 3$ **C.** $P = 1$ **D.** $P < 1$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Vẫn là ý tưởng của bài toán 12 và 14 tuy nhiên với bài này cần một chút kiến thức về bất đẳng thức thì sẽ giải nhanh hơn rất nhiều thay vì cách đạo hàm truyền thống.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\log_2(x+y)+3=\frac{\log_2(x+y)+5+\log_2(x+y)+1}{2}\le\frac{\log_2(x+y)+5+\sqrt{2\left(\log_2^2(x+y)+1\right)}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{4\log_2(x+y)+12}{\log_2(x+y)+5+\sqrt{2\left(\log_2^2(x+y)+1\right)}}\le 2$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có $2^{x-y}+1\ge 2^0+1=2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$

Chọn ý **A.**

Câu 16: Cho 2 số thực x,y dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_2^2 2x+\log_2^2 4y+\left(1-\log_2 xy\right)^3=\frac{11}{2}$$

Đặt $P=x^3+y^3$. Hỏi P có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 0

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đây là dạng toán quen thuộc mà ta đã có hướng giải ở các bài toán trước.

Đặt $\left(\log_2 2x,\log_2 4y,\log_2\frac{2}{xy}\right)\to(a,b,c)\Rightarrow a+b+c=4$

Giả thiết trở thành $\frac{11}{2}$. Nhận thấy 2 giả thiết đều là đa thức đối xứng theo 2 biến a,b nên dấu "=" sẽ xảy ra tại $a=b=x,c=y$ đến đây ta sẽ tham số hóa để tìm điểm rơi.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases}a^2+x^2\ge 2ax\\ b^2+x^2\ge 2bx\\ c^3+y^3+y^3\ge 3y^2c\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^3\ge 2x(a+b)+3y^2c-2y^3-2x^2$$

Đến đây ta cần tìm x,y thỏa mãn $\begin{cases}2x=3y^2\\ 2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Vậy P không phải là số nguyên nên không có ước nguyên dương.

Chọn ý **D.**

Câu 17: Cho 2 số thực x,y không âm thỏa mãn điều kiện $x\ge y+1$ đồng thời

$$2^{x-y}+2^{2y-2x}=9.2^{-2x+y}$$

Đặt $P=x+y$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá P?

A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 0

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đây là một bài toán với cách phát biểu đơn giản nhưng tuy nhiên một số bạn sẽ rất dễ bị nhầm khi áp dụng bất đẳng thức AM – GM. Sau đây mình sẽ chỉ ra một lỗi có thể một vài bạn mắc phải.

Với ý tưởng của các bài toán cũ thì chúng ta thường sẽ có đánh giá sau:

$$2^{x-y}+2^{2y-2x}=2^{x-y}+\frac{1}{\left(2^{x-y}\right)^2}=\frac{1}{2}.2^{x-y}+\frac{1}{2}.2^{x-y}+\frac{1}{\left(2^{x-y}\right)^2}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Sau khi có đánh giá trên thì tiếp theo ta sẽ đánh giá vế trái để chỉ ra dấu "=", nhưng tuy nhiên điều này là không thể do điểm rơi của bài toán không phải như thế. Để giải quyết được ta phải chú ý thêm tới điều kiện mà đề bài đã cho là $x\ge y+1$ từ đây ta sẽ suy ra $2^{x-y}\ge 2$. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$2^{x-y}+2^{2y-2x}=2^{x-y}+\frac{1}{\left(2^{x-y}\right)^2}=\frac{2^{x-y}}{8}+\frac{2^{x-y}}{8}+\frac{1}{\left(2^{x-y}\right)^2}+\frac{3.2^{x-y}}{4}\ge\frac{3}{4}+\frac{3.2^{x-y}}{4}\ge\frac{9}{4}$$

Mặt khác ta lại có $x\ge y+1\Rightarrow 2^{-2x+y}\le 2^{-2y+y-2}=2^{-y-2}\le 2^{-2}=\frac{1}{4}$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

Chọn ý **A.**

Nhận xét. *Ngoài mắc phải lỗi như trên thì một số ít khi lần đầu gặp sẽ bị nhầm rằng đây là dạng toán tìm mối liên hệ x,y, nhưng ta phải tinh ý nhận ra yêu cầu của đề bài là hỏi có bao nhiêu số nguyên dương để nhận ra phải sử dụng tới phương pháp đánh giá!*

Câu 18: Cho 2 số x,y thỏa mãn $\begin{cases}x\ge 1-y\\y\le 0\end{cases}$ thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{\ln(x+y)}+\sqrt{\ln(1-y)}=2\sqrt{\ln\frac{x+1}{2}}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+y^2$ là?

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Thực chất đây là một bài toán khá là đơn giản, để ý tới yêu cầu của bài toán là tìm giá trị nhỏ nhất nên chắc chắn từ giả thiết ta sẽ phải tìm được mối liên hệ giữa x và y.

Đặt $\begin{cases}x+y=a\\1-y=b\end{cases}\Rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{a+b}{2}$. Giả thiết trở thành $\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}=2\sqrt{\ln\frac{a+b}{2}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\ln a+\ln b\ge 2\sqrt{\ln a.\ln b}\Rightarrow 2(\ln a+\ln b)\ge\left(\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}\right)^2$$

Mặt khác $\ln\frac{a+b}{2}\ge\ln\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\ge\frac{1}{4}\left(\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{\ln a}+\sqrt{\ln b}\right)\le\sqrt{\ln\frac{a+b}{2}}$

Vậy $VT \le VP$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Rightarrow x + y = 1 - y \Rightarrow x = 1 - 2y$

Khi đó $P_{min} = \frac{1}{4}$.

Chọn ý **D.**

Câu 19: Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{\log_2 x + \log_4^2 y^2} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{\log_2 \frac{y^2}{x}}$$

Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $8xy$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\sqrt{\log_2 x + \log_4^2 y^2} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{\log_2 \frac{y^2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{2\log_2 y - \log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2^2 y - 2\log_2 y + \log_2^2 x + 2 + \log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y}\sqrt{\log_2^2 x + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x + 1)^2 + (\log_2 y - 1)^2 + 2\sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y}\sqrt{\log_2^2 x + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 y = 1 \\ \log_2 x + \log_2^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Khi đó $8xy = 8$, vậy có tất cả 8 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn ý **D.**

Câu 20: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\left(1+2^{x+y}\right)\left(1+2^{x+2y}\right)\left(1+2^{x-3y}\right) = \left(1+2^x\right)^3$.

Đặt $P = e^{x^2+y^2} + x^2 + \frac{y^2}{4} - (x-2y)^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = e - 1$ **B.** $P = e$ **C.** $\max P = e^2$ **D.** $P = e - 2$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Thực chất câu này chỉ để giới thiệu cho các bạn một bất đẳng thức quen thuộc, chứ đề thi chắc sẽ không ra dạng kiểu này. Chú ý tới bất đẳng thức Holder mà mình đã giới thiệu ở đầu.

Một bất đẳng thức mà ta hay gặp: $(1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$

Có bổ đề sau: Cho các số thực dương $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ khi đó ta luôn có:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right) \ge (axm+byn+czp)^3$$

Chứng minh: Theo $AM-GM$ ta có:

1. $\dfrac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{m^3}{m^3+n^3+p^3}+\dfrac{x^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\dfrac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)(x^3+y^3+z^3)}}$

2. $\dfrac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{n^3}{m^3+n^3+p^3}+\dfrac{y^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\dfrac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)(x^3+y^3+z^3)}}$

3. $\dfrac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{p^3}{m^3+n^3+p^3}+\dfrac{z^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\dfrac{3cpz}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)(x^3+y^3+z^3)}}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên có điều phải chứng minh.

Quay lại bài khi đó phương trình trở thành: $(a+1)(b+1)(c+1)=\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\prod_{cyc}\left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$

Với bài toán này nếu đặt $2^{x+y}=a,2^{x+2y}=b,2^{x-3y}=c\Rightarrow\sqrt[3]{abc}=2^x$, đây chính là dạng trên.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2^{x+y}=2^{x+2y}=2^{x-3y}\Leftrightarrow x=y=0$

Vậy khi đó $P=e$.

Chọn ý **B.**

Câu 21: Cho 2 số thực $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện

$$\left(2^{x+y-1}+2^{x+2y-1}\right)\left(2^{3x+4y-3}+2^{1-x-y}\right)=2^{2x+3y}$$

Biết rằng biểu thức $\dfrac{x^2+y^2}{4}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b$ bằng?

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 7

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn chung bài toán nhìn rất cồng kềnh, ta sẽ tư duy theo hướng mà ta hay nghĩ tới nhất đó là quy đồng. Biến đổi giả thiết ta được:

$$\left(2^{x+y-1}+2^{x+2y-1}\right)\left(2^{3x+4y-3}+2^{1-x-y}\right)=2^{2x+3y}$$
$$\Leftrightarrow 2^{4x+5y-4}+2^{4x+6y-4}+2^y+1=2^{2x+3y}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x+2y-4}+2^{2x+3y-4}+2^{-2x-2y}+2^{-2x-3y}=1$$

Đến đây mọi việc trở nên rất đơn giản phải không nào? Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2^{2x+2y-4}+2^{-2x-2y}+2^{-2x-3y}+2^{2x+3y-4}\ge2\sqrt{2^{2x+2y-4}.2^{-2x-2y}}+2\sqrt{2^{-2x-3y}.2^{2x+3y-4}}=1=VP$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x^2+y^2}{4}=\dfrac{1}{4}$

Chọn ý **A.**

Câu 22: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{2^{2x}+3.4^y}}+\frac{1}{\sqrt{4^y+3.2^{2x}}}=\frac{x+y-e^{x+y-3}}{2\left(2^{x-1}+2^{y-1}\right)}$

Khi đó x^3+y^4 được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T=m+n$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 149 **B.** 147 **C.** 160 **D.** 151

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn hình thức rất cồng kềnh, nhưng hãy chú ý tới đại lượng $x+y-e^{x+y-3}$, điều này làm ta liên tưởng tới bất đẳng thức phụ $e^x \ge x+1$, đến đây hướng đi của bài toán sẽ như sau:

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{2x}+3.4^y}}+\frac{1}{\sqrt{4^y+3.2^{2x}}}=\frac{x-y-e^{x+y-3}}{2\left(2^{x-1}+2^{y-1}\right)}\Leftrightarrow\frac{2^x+2^y}{\sqrt{2^{2x}+3.2^{2y}}}+\frac{2^x+2^y}{\sqrt{2^{2y}+3.2^{2x}}}=x-y-e^{x+y-3}$$

Đặt $2^x=a,2^y=b$ thì theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+3b};\ \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{1}{2}+\frac{2b}{a+3b}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{3}{4}+\frac{a}{2(a+b)}$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\le\frac{b}{a+b}+\frac{a+b}{b+3a};\ \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b+3a}}\le\frac{1}{2}+\frac{2a}{b+3a}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\le\frac{3}{4}+\frac{b}{2(a+b)}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên với nhau ta có $\frac{2^x+2^y}{\sqrt{2^{2x}+3.2^{2y}}}+\frac{2^x+2^y}{\sqrt{2^{2y}+3.2^{2x}}}\le 2$

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ quen thuộc ta có:

$$x+y-e^{x+y-3}=x+y-3-e^{x+y-3}+3\le 3-1=2$$

Vậy $VT\ge 2\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2^x=2^y\\x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{3}{2}$

Khi đó $x^3+y^4=\frac{135}{16}$.

Chọn ý **D.**

Câu 23 Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<1$. Khi đó trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a b+\log_b c+\frac{1}{4}\log_c^2 a$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$, với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T=m^3+n^3$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 171 **B.** 189 **C.** 195 **D.** 163

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

- $P=\log_a b+\log_b c+\frac{1}{4}\log_c^2 a\ge 2\sqrt{\log_a b\log_b c}+\frac{1}{4}\log_c^2 a=2\sqrt{\log_a c}+\frac{1}{4}\log_c^2 a$
- $2\sqrt{\log_a c}+\frac{1}{4}\log_c^2 a=\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}+\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}+\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}+\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}+\frac{1}{4}\log_c^2 a$

$$\ge 5\sqrt[5]{\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}.\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}.\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}.\frac{1}{4}\sqrt{\log_a c}.\frac{1}{4}\log_c^2 a}=\frac{5}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{5}{4}$, khi đó $T=189$

Chọn ý **B.**

Câu 24: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{4x}}+2^{\frac{y}{4}+\frac{1}{y}}=4$. Đặt $P=x+y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=1$ **B.** 2 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2^{x+\frac{1}{4x}}+2^{\frac{y}{4}+\frac{1}{y}}\ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{4x}}}+2^{2\sqrt{\frac{y}{4}.\frac{1}{y}}}=4=VP$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}\Rightarrow P=\frac{5}{2}$.

Chọn ý **D.**

Câu 25: Cho 2 số a,b thực a,b thỏa mãn $b\ge a>1$ và $2^{\log_b a}+16^{\log_a\frac{b}{\sqrt[4]{a^3}}}=4$. Giá trị của biểu thức $P=\log_2\left(\frac{a}{b}\right)$?

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$2^{\log_b a}+16^{\log_a\frac{b}{\sqrt[4]{a^3}}}=2^{\log_b a}+2^{4\left(\log_a b-\frac{3}{4}\right)}=f(t)=2^t+2^{4\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)}\left(t=\log_b a\in(0;1]\right)$$

Suy ra $f'(t)=2^t\ln 2-\frac{4}{t^2}.2^{4\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)}\ln 2\le\left(2^t-4.2^{\frac{4}{t}-3}\right)\ln 2\le\left(2-4.2^{4-3}\right)\ln 2<0$

$$\Rightarrow f(t)=2^t+2^{4\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)}\ge f(1)=4\Rightarrow VT\ge VP$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b\Rightarrow P=\log_2\left(\frac{a}{b}\right)=0$

Chọn ý **A.**

Câu 26: Cho 2 số thực $x,y>0$ thỏa mãn $\frac{1}{x}\le y\le 2x$ và $\log_2\frac{2}{x}\sqrt{\log_2\frac{2x}{y}\log_2 xy}=\frac{9}{16}$. Đặt $P=2^x.2^y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P\in[4;5]$ **B.** $P\in[1;2]$ **C.** $P\in[2;3]$ **D.** $P\in[6;7]$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\log_2\frac{2}{x}\sqrt{\log_2\frac{2x}{y}\log_2 xy}=\frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow(1-\log_2 x)\sqrt{(\log_2 x-\log_2 y+1)(\log_2+\log_2 y)}=\frac{9}{16}$$

Để đơn giản ta đặt $\begin{cases}a=\log_2 x\\ b=\log_2 y\end{cases}\Rightarrow(1-a)\sqrt{(a-b+1)(a+b)}=\frac{9}{16}$

Nếu $a\ge 1\Rightarrow VT\le 0$, vô lý

Để ý thấy $\frac{1}{x}\le y\le 2x\Rightarrow\log_2 2x\ge\log_2\frac{1}{x}\Rightarrow a+1\ge -a\Rightarrow a\ge-\frac{1}{2}$.

Nếu $-\frac{1}{2}\le a<1$ thì ta có:

$$(1-a)\sqrt{(a-b+1)(a+b)}\le\frac{1}{2}(1-a)(a-b+1+a+b)=(1-a)\left(a+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left(1-a+a+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2 x=\frac{1}{4}\\ \log_2 y=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2^{\frac{1}{4}}\\ y=2^{\frac{1}{2}}\end{cases}\Rightarrow P\approx 6,07725$

Chọn ý **D.**

Câu 27: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $\begin{cases}2\le x\le 3\\ 2<y<5\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu bộ số (x,y) thỏa mãn phương trình $\log_2(3-|\sin xy|)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Thực chất đây là một câu khá đơn giản nếu như ta đã làm quen với phương pháp đánh giá rồi, các câu 28, 29 sẽ làm tương tự nên mình sẽ chỉ trình bày mỗi lời giải câu 27.

Ta có $3-|\sin xy|\ge 2\Rightarrow\log_2(3-|\sin xy|)\ge 1$, mặt khác $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$. Do đó phương trình thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=1\\ |\sin xy|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{6}+2k\\ xy=\frac{\pi}{2}+n\pi\end{cases}\quad(k,n\in\mathbb{Z})$$

Với giả thiết $2\le x\le 3$ nên $k=1$. Với $k=1\Rightarrow x=\frac{13}{6}\Rightarrow y=\frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$

Do $2<y<5\Rightarrow 2<\frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)<5\Rightarrow n\in\{1;2\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{9\pi}{13}\\ y=\frac{15\pi}{13}\end{array}\right.$

Vậy có 2 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn ý **B.**

Câu 28. $\alpha\in\left\{5\pi;\frac{9\pi}{5};\frac{17\pi}{5}\right\}$

Câu 29. $\alpha\in\left\{\frac{6\pi}{7};\frac{12\pi}{7}\right\}$

Câu 30: Biết rằng tồn tại duy nhất một a để phương trình $2^{|\sin x|}+|\sin x|=\cos x+\sin^2 x+a$ có nghiệm duy nhất, hỏi a có tất cả bao nhiêu ước số nguyên

A. 2 số **B.** 8 số **C.** Không có **D.** Vô số

Lời giải

Do $|\sin x|=|\sin(-x)|,(\sin(-x))^2=(\sin x)^2$ nên nếu phương trình có 1 nghiệm là x thì cũng có nghiệm là $-x$. Nên để phương trình có nghiệm duy nhất thì đồng nghĩa với $x=0$. Thế ngược lại ta giải ra được $a=0$.

Chọn ý **D.**

Câu 31: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện

$$\left[1+\left(\frac{2^{xy}}{4}+1\right)^2\log_{xy}^2 x\right]\left[\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1\right]=\left(\frac{2^{xy}}{4}+1\right)^2$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá a^4b^4

A. 13 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 16

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\left[1+\left(\frac{2^{xy}}{4}+1\right)^2\log_{xy}^2 x\right]\left[\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1\right]=\left(\frac{2^{xy}}{4}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\left(2^{xy-2}+1\right)^2\log_{xy}^2 x\right)\left[\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1\right]=\left(2^{xy-2}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\left(2^{xy-2}+1\right)^2\log_{xy}^2 x}{\left(2^{xy-2}+1\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(2^{xy-2}+1\right)^2}+\log_{xy}^2 x = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(2^{xy-2}+1\right)^2}+\frac{1}{\left(\log_x y+1\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1}$$

Đến đây ta có một bổ đề khá quen thuộc cần phải nhớ.

Bổ đề. Với 2 số thực không âm a,b ta luôn có $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{1}{1+ab}$.

Ta có đẳng thức sau đây: $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}-\frac{1}{1+ab}=\frac{ab(a-b)^2+(1-ab)^2}{(a+1)^2(b+1)^2(1+ab)}\ge 0$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ta cũng có thể dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz chứng minh được. Ta có:

$$\begin{cases}(ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right)\ge(a+1)^2\\(ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right)\ge(b+1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{(a+1)^2}\ge\frac{b}{(a+b)(ab+1)}\\\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{a}{(a+b)(ab+1)}\end{cases}$$

Cộng lại có điều cần chứng minh!

Áp dụng vào bài toán ta được $\frac{1}{\left(2^{xy-2}+1\right)^2}+\frac{1}{\left(\log_x y+1\right)^2}\ge\frac{1}{2^{xy-2}\log_x y+1}$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+y^2-4}\log_x y+1}\le\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2xy-4}\log_x y+1}=\frac{1}{2^{xy-2}\log_x y+1}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\sqrt{2}$. Khi đó có tất cả 16 số nguyên dương không vượt quá a^4b^4.

Chọn ý **D.**

Câu 32: Cho 2 số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P=a+b$

A. $P=8$ **B.** $P=141$ **C.** $P=148$ **D.** $P=151$

Lời giải

Đây chính là đề thi THPT Quốc Gia 2016 đã được biến tấu để trở thành 1 câu hỏi trắc nghiệm!

Từ giả thiết ta có $(x+y+1)^2=4\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số thực không âm ta có:

$$2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\le x+y+1\Rightarrow(x+y+1)^2\le 8(x+y+1)\Rightarrow -1\le x+y\le 7$$

Mặt khác ta lại có:

$$(x+y+1)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)\ge 4(x+y+1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y\ge 3\\x+y\le -1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3\le x+y\le 7\\x+y=-1\end{array}\right.$$

Nếu $x+y=-1\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}=0\\x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\Rightarrow S=-\dfrac{9746}{243}$

Nếu $3\le x+y\le 7$. Đặt $t=x+y\left(t\in[3;7]\right)$

Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1).2^{7-t}\left(t\in[3;7]\right)$

$\Rightarrow f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2$

$\Rightarrow f''(t)=3^{t-4}\ln^2 3-2^{7-t}\ln 2-\ln 2\left(2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2\right)$

$\qquad =3^{t-4}\ln^2 3+\left((t+1)\ln^2 2-2\ln 2\right)2^{7-t}>0\forall t\in[3;7]$

Vì $f'(3)<0,f'(7)>0$ nên tồn tại số $a\in(3;7)$ sao cho $f'(a)=0$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(3;a)$ và đồng biến trên $(a;7)$. Mặt khác $f(3)=\dfrac{193}{3};f(7)=35\Rightarrow f(t)\le f(3)=\dfrac{193}{3}\forall t\in[3;7]$

Ta sẽ đi chứng minh $x^2+y^2\ge 5$ với $x+y\ge 3,x\ge 2$.

Nhận thấy rằng khi:

+ $x\in[2;3]\Rightarrow y\ge 3-x\ge 0\Rightarrow y^2\ge x^2-6x+9\Rightarrow x^2+y^2\ge 2x^2-6x+9=2(x-2)(x-1)+5\ge 5$

+ $x>3\Rightarrow x^2+y^2>9$

Vậy $x^2+y^2\ge 5\Rightarrow S\le\dfrac{148}{3}$.

Chọn ý **D.**

Câu 33: Cho x,y là 2 số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|36^x-5^y\right|$

A. $P=8$ **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Lời giải

Đây là một câu phát biểu vô cùng đơn giản, nhưng thực chất là một bài toán nếu làm tự luận sẽ rất khó đòi hỏi tới kiến thức số học.

Ta có 36^m tận cùng bằng 6, 5^n tận cùng bằng 5. Nếu $36^m>5^n$ thì P có tận cùng bằng 1, nếu $36^m<5^n$ thì P có tận cùng bằng 9

Xét $P=1$ ta có $36^m-5^n=1\Leftrightarrow 36^m-1=5^n$. Đẳng thức này không thể xảy ra vì vế trái chia hết cho 35 nên chia hết cho 7, còn vế phải không chia hết cho 7

Xét $P=9$ ta có $5^n-36^m=9\ \Rightarrow 5^n$ chia hết cho 9, vô lí.

Xét $A=11$, xảy ra khả năng này chẳng hạn khi $m=1,n=2$. Vậy $\min P=11$.

Chọn ý **D.**

Câu 34: Cho các số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a \frac{c}{b}-2\log_b \frac{c}{b}-3$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a b-\log_b c$. Tính $S=2m+3M$

A. $S=\frac{2}{3}$ **B.** $S=\frac{1}{3}$ **C.** $S=3$ **D.** $S=2$

Thầy Đặng Thành Nam – Vted.vn

Lời giải

Đặt $x=\log_a b, y=\log_b c \Rightarrow P=x-y$, khi đó giả thiết viết lại thành $x^2+y^2=xy-x-2y-1$

Thế $y=x-P$ vào giả thiết trên ta được $x^2+y^2=xy-x-2y-1 \Leftrightarrow x^2+(3-P)x+(P-1)^2=0$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=(3-P)^2-4(P-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le P\le \frac{5}{3}$

Chọn ý **C.**

Câu 35: Cho các số thực a,b,c khác 0 thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$ là?

A. $-3-\log_5 3$ **B.** -4 **C.** $-2-\sqrt{3}$ **D.** $-2-\log_3 5$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $3^a=5^b=15^{-c}=t \Leftrightarrow a=\log_3 t, b=\log_5 t, -c=\log_{15} t$

$$\Rightarrow -c=\frac{1}{\log_t 15}=\frac{1}{\log_t 3+\log_t 5}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow ab+bc+ca=0$$

Khi đó ta có $P=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-4(a+b+c)=(a+b+c)^2-4(a+b+c)\ge -4$

Chọn ý **B.**

Câu 36: Cho a,b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $b>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{(a-b)^2+(10^a-\log b)^2}$

A. $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}+\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$ **B.** $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$

C. $\sqrt{2}\log(\ln 10)$ **D.** $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\ln\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$

Lời giải

Xét 2 điểm $A(a;10^a), B(b;\log b)$, do đồ thị của 2 hàm số $y=10^x, y=\log x$ đối xứng qua đường thẳng $y=x$ do đó khoảng cách giữa 2 điểm A và B chính là P và đạt giá trị nhỏ nhất khi A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$, do đó 2 điểm A,B cùng nằm trên đường thẳng $y=-x+m$.

Vì vậy ta có

$$A\left(a;10^a\right),B\left(a;10^a\right)\Rightarrow AB=P=\sqrt{2}\left|10^a-a\right|=f\left(a\right)\ge f\left(\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\ln 10}-\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)\right)$$

Chọn ý **B.**

Câu 37: Cho các số thực a,b,c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a\ge\left(1-\log_2 b\log_2 c\right)\log_{bc}2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=10\log_2^2 a+10\log_2^2 b+\log_2^2 c$

A. $-3-\log_5 3$ **B.** -4 **C.** $-2-\sqrt{3}$ **D.** $-2-\log_3 5$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}&\log_2 a\ge\left(1-\log_2 b\log_2 c\right)\log_{bc}2\\&\Leftrightarrow \log_2 a.\left(\log_2 b+\log_2 c\right)\ge 1-\log_2 b\log_2 c\\&\Leftrightarrow \log_2 a\log_2 b+\log_2 a\log_2 c+\log_2 b\log_2 c\ge 1\end{aligned}$$

Đặt $\left(\log_2 a;\log_2 b;\log_2 c\right)\to\left(x,y,z\right)$ ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $S=10x^2+10y^2+z^2$

Bây giờ ta cần tìm số k dương sao cho

$$\begin{aligned}&10x^2+10y^2+z^2\ge 2k\left(xy+yz+xz\right)\\&\Leftrightarrow 10x^2+10y^2+z^2+k\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge k\left(x^2+y^2+z^2\right)+2k\left(xy+yz+xz\right)\\&\Leftrightarrow \left(k+10\right)x^2+\left(k+10\right)y^2+\left(k+1\right)z^2\ge k\left(x+y+z\right)^2\\&\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{y^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{z^2}{\frac{1}{k+1}}\ge k\left(x+y+z\right)^2\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dạng cộng mẫu Engel ta có

$$\frac{x^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{y^2}{\frac{1}{k+10}}+\frac{z^2}{\frac{1}{k+1}}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+1}}$$

Đến đây sử dụng được giả thiết ta sẽ chọn k sao cho $\dfrac{1}{\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+1}}=k\Leftrightarrow k=2$

Chọn ý **B.**

Câu 38: Với a,b,c lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a bc+\log_b ca+4\log_c ab$

A. 6 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 10

Lời giải

Đây là một câu sử dụng bất đẳng thức AM – GM khá là cơ bản

Biến đổi giả thiết và áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned}&P=\log_a bc+\log_b ca+4\log_c ab=\log_a b+\log_b a+\log_a c+4\log_c a+\log_b c+4\log_c b\\&\ge 2\sqrt{\log_a b.\log_b a}+2\sqrt{4\log_a c.\log_c a}+2\sqrt{4\log_b c.\log_c b}=10\end{aligned}$$

Chọn ý **D.**

Tương tự với câu 39. Chọn ý **C.**

Câu 40: Xét các số thực dương x,y,z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a,b,c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc}=a^x=b^y=c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y+2z^2$

A. $4\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** 6 **D.** 10

Lê Phúc Lữ

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a^x=\sqrt{abc}\Leftrightarrow 2\log_{abc}a=\frac{1}{x}$ tương tự $\frac{1}{y}=2\log_{abc}b,\frac{1}{z}=2\log_{abc}c$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\left(\log_{abc}a+\log_{abc}b+\log_{abc}c\right)=2.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có :

$$\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2-\frac{1}{z}\Rightarrow x+y\ge\frac{4z}{2z-1}\Rightarrow T\ge\frac{4z}{2z-1}+2z^2=f(z)\ge f(1)=6$$

Chọn ý **C.**

Câu 41: Xét các số thực dương x,y,z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a,b,c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc}=a^x=b^y=c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{16}{x}+\frac{16}{y}-z^2$

A. 20 **B.** $20-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **C.** 24 **D.** $24-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Lời giải

Tương tự với câu 40 ta có $\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\left(\log_{abc}a+\log_{abc}b+\log_{abc}c\right)=2.$

$$\Rightarrow P=16\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-z^2=16\left(2-\frac{1}{z}\right)-z^2=32-\frac{16}{z}-z^2=f(z)\le f(2)=20$$

Chọn ý **A.**

Câu 42: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a b+\log_b c+\sqrt{\log_c a}$

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 3 **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Lời giải

Đây là một câu tương tự câu 23 ta sẽ phải dùng tới bất đẳng thức AM – GM để triệt tiêu các biến

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$S=\log_a b+\log_b c+\sqrt{\log_c a}\ge 2\sqrt{\log_a b.\log_b c}+\sqrt{\log_c a}=2\sqrt{\log_a c}+\sqrt{\log_c a}$$

$$\ge 2\sqrt{2\sqrt{\log_a c}.\sqrt{\log_c a}}=2\sqrt{2\sqrt{\log_a c.\log_c a}}=2\sqrt{2}$$

Chọn ý **A.**

Câu 43: Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $\log^2 a + 2\log^2 b + 3\log^2 c = 6$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức là $T = \log a \log b + \log b \log c + \log c \log a$ là $\frac{3}{k}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k = 1$ **B.** $k^3 + 3k^2 = 3$ **C.** $k^3 + 3k = 3$ **D.** $k = \frac{1}{2}$

Lời giải

Một câu hoàn toàn tương tự với câu 37, ta sẽ dùng phương pháp tham số hóa kết hợp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Đặt $(\log a;\log b;\log c) \to (x,y,z) \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

Ta có đánh giá $6 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \ge 2k(xy + yz + xz) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{k+1}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{k+2}} + \dfrac{z^2}{\frac{1}{k+3}} \ge k(x+y+z)^2$

Khi đó cần tìm k sao cho $k = \dfrac{1}{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3}} \Leftrightarrow k^3 + 3k^2 = 3$

Chọn ý **C.**

Câu 44: Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $\log a \log b + \log b \log c + 3\log c \log a = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log^2 a + \log^2 b + \log^2 c$ là $\dfrac{-m + \sqrt{n}}{p}$ với m,n,p lần lượt là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m + n + p$?

A. 64 **B.** 16 **C.** 102 **D.** 22

Lời giải

Với bài toán này nếu đặt $(\log a;\log b;\log c) \to (x,y,z) \Rightarrow xy + yz + 3xz = 1$ *thì ta sẽ không thể áp dụng phương pháp làm của bài trên, khi đó ta sẽ cần phải nghĩ ra cách đặt khác.*

Đặt $(\log a;\log b;\log c) \to (ix, jy, kz) \Rightarrow ijxy + jkyz + 3kixz = 1$

Tìm i,j,k thỏa mãn $ij = kj = 3ki \Rightarrow i = k = \frac{j}{3}$. Chọn $j = 3 \Rightarrow i = k = 1$

Khi đó ta được $3xy + 3yz + 3xz = 1 \Rightarrow xy + yz + xz = \frac{1}{3}$. Bài toán lại quay trở về các bài toán trên.

Với cách làm tương tự các bài toán trên ta tìm được $\min P = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$

Chọn ý **D.**

Cách 2. *Chú ý rằng ở giả thiết và yêu cầu của bài toán vai trò của 2 biến a,c là như nhau nên dấu "=" sẽ xảy ra tại* $a = c$. *Khi đó ta có:*

$$\begin{cases} P = 2x^2 + y^2 \\ 3x^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow P\left(3x^2 + 2xy\right) = 2x^2 + y^2 \Leftrightarrow (3P-2)x^2 + 2Pyx - y^2 = 0$$

Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ta sẽ tìm được đáp án của bài toán.

Câu 45: Với n là số nguyên dương, biết rằng $-\log_2\left(\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2018}}}}\right)\right) > 2017$ mà biểu thức trong dấu ngoặc có tất cả n dấu căn. Tìm giá trị nhỏ nhất của n?

A. 2021 **B.** 2014 **C.** 2013 **D.** 2020

Lê Phúc Lữ

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2018}}}} = (2018)^{\frac{1}{2^n}} = (2018)^{2^{-n}} \Rightarrow \log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2018}}}}\right) = 2^{-n}\log_2 2018$

$$\Rightarrow -\log_2\left(\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2018}}}}\right)\right) > 2017 \Leftrightarrow -\log_2 2^{-n} - \log_2\left(\log_2 2018\right) > 2017$$

$$\Rightarrow n\log_2 2 > 2020,4 \Rightarrow n > 2020,4 \Rightarrow n \geq 2021$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 2021

Chọn ý **A.**

Câu 46: Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b}\left(2^{1000}\right)\right)\right) = 0$. Giá trị lớn nhất của ab là?

A. 500 **B.** 375 **C.** 125 **D.** 250

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\log_2\left(\log_{2^a}\left(\log_{2^b}\left(2^{1000}\right)\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \log_{2^a}\left(\log_{2^b}\left(2^{1000}\right)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{2^b}\left(2^{1000}\right) = 2^a \Leftrightarrow 2^{1000} = 2^{2^a.b} \Leftrightarrow 2^a b = 1000$$

Do a,b là các số nguyên dương nên ta có $1000 \vdots 2^a$. Mặt khác ta lại có $1000 = 2^3.5^3 \Rightarrow a \leq 3$

- Nếu $a = 3 \Rightarrow b = 125 \Rightarrow ab = 375$
- Nếu $a = 2 \Rightarrow b = 250 \Rightarrow ab = 500$
- Nếu $a = 1 \Rightarrow b = 500 \Rightarrow ab = 500$

Vậy giá trị lớn nhất của ab bằng 500

Chọn ý **A.**

Câu 47: Cho số thực dương $a>1$, biết khi $a=a_0$ thì bất đẳng thức $x^a \le a^x$ đúng với mọi số thực x lớn hơn 1. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<a_0<2$ **B.** $e<a_0<e^2$ **C.** $2<a_0<3$ **D.** $e^2<a_0<e^3$

Lời giải

Lấy logarit tự nhiên 2 vế ta được $\ln\left(x^a\right)\le \ln\left(a^x\right) \Leftrightarrow a\ln x \le x\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \ge \frac{\ln x}{x}$

Ta xét $f(x)=\frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e \Rightarrow f(x)\le f(e)=\frac{\ln e}{e}$

Từ đó ta suy ra $a=e$.

Chọn ý **C.**

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)$ với a,b là các số thực thay đổi và phương trình $f'(x)+f''(x)=10e^x$ có nghiệm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=a^2-2ab+3b^2$

A. $10+10\sqrt{2}$ **B.** $20+10\sqrt{2}$ **C.** $10+20\sqrt{2}$ **D.** $20+\sqrt{2}$

Lời giải

Do $f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)$ nên phương trình $f'(x)+f''(x)=10e^x$ tương đương

$$e^x\left((a-b)\sin x+(a+b)\cos x-2b\sin x+2a\cos x\right)=10e^x$$
$$\Leftrightarrow (a-3b)\sin x+(3a+b)\cos x=10$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $(a-3b)^2+(3a+b)^2\ge 100 \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 10$

Khi đó ta có:

$$S=a^2-2ab+3b^2=\frac{10\left(a^2-2ab+3b^2\right)}{10}\le\frac{10\left(a^2-2ab+3b^2\right)}{a^2+b^2}=\frac{10\left(t^2-2t+3\right)}{t^2+1}=f(t)\left(t=\frac{a}{b}\right)$$

Khảo sát hàm số $f(t)\Rightarrow f(t)\le f\left(1-\sqrt{2}\right)=20+10\sqrt{2}$

Chọn ý **B.**

Câu 49: Cho 2 số thực a,b thỏa mãn $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b+n}$ với mọi số n nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a-b|$?

A. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{3}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{\ln 2}-1$ **D.** $\frac{1}{\ln 2}-3$

Lời giải

Đây là một câu rất khó không phù hợp với kì thi THPT Quốc Gia nên chúng ta chỉ tham khảo.

Lấy logarit tự nhiên 2 vế ta có $a<\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n<b, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-x, x\ge 1$ khi đó ta có $\min|a-b|=\max\limits_{x\ge1} f(x)-\min\limits_{x\ge1} f(x)$

Mặt khác $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}-1<0,\forall x\ge 1$, do đó ta được

$$\max_{x\ge1} f(x)-\min_{x\ge1} f(x)=f(1)-\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\ln 2}-1-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)$$

$$=\frac{1}{\ln 2}-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{\ln 2}-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x(x+1)}}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}}=\frac{1}{\ln 2}-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1)-x^2}{2x+1}=\frac{1}{\ln 2}-\frac{3}{2}$$

Vậy $\min|a-b|=\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{3}{2}$

Chọn ý **A.**

Chú ý: *Ở đây ta dùng tới quy tắc. Trong giải tích, Quy tắc l'Hôpital (phát âm như Lô-pi-tan) (cũng được gọi là quy tắc Bernoulli) là quy tắc sử dụng đạo hàm để tính toán các giới hạn có dạng vô định. Ứng dụng của quy tắc này là đưa dạng vô định trở thành dạng hữu hạn, cho phép tính toán giới hạn một cách dễ dàng.*

Dạng đơn giản nhất của quy tắc l'Hôpital được phát biểu như sau:

Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ hoặc $\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tồn tại thì ta luôn có $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Việc lấy đạo hàm của tử số và mẫu số thường làm đơn giản thương số, hoặc làm khử dạng vô định.

Câu 50: Cho các số thực dương x,y,z bất kì thỏa mãn $xyz=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{\log^2 y+4}+\sqrt{\log^2 z+4}$

A. $\sqrt{29}$ **B.** $\sqrt{23}$ **C.** $\sqrt{26}$ **D.** $\sqrt{27}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức *Mincowsky* ta có

$$P=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{\log^2 y+4}+\sqrt{\log^2 z+4}\ge\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{(\log y+\log z)^2+16}$$
$$=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{(\log yz)^2+16}=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{\left(\log\frac{10}{x}\right)^2+16}$$
$$=\sqrt{\log^2 x+1}+\sqrt{(1-\log x)^2+16}\ge\sqrt{(\log x+1-\log x)^2+(1+4)^2}=\sqrt{26}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\sqrt[5]{10}, y=z=\sqrt[5]{100}$

Chọn ý **C.**

Câu 51: Cho 2 số thực x,y sao cho tổng của chúng không âm và đồng thời

$$\left(2^{2x-2y}+4\right)\left(\frac{1+2^{x+y}}{1+4^x}+\frac{1+2^{x+y}}{1+4^y}\right)=2^{2x-2y}+2^{x-y+2}+4$$

Biết rằng giá trị của biểu thức $P=x^3+y^4=\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi biểu thức m^2+n có tất cả bao nhiêu ước số nguyên?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ta có $T=\frac{a}{b}-\frac{a-m}{b-m}=\frac{m(b-a)}{b(b-m)}\ge 0$ khi $0<m<a\le b$. Nên $\frac{a}{b}\ge\frac{a-m}{b-m}(1)$

Theo giả thiết ta có $x+y\ge 0\Rightarrow 4^{x+y}\ge 1$. Ta có đánh giá sau:

$$0<4^x+4^y-2^{x+y+1}<1+4^x+4^y+1\le 1+4^x+4^y+4^{x+y}$$

Khi đó sử dụng kết quả (1) ta có:

$$\frac{1}{1+4^x}+\frac{1}{1+4^y}=\frac{1+4^x+4^y+1}{1+4^x+4^y+4^{x+y}}\ge\frac{2+4^x+4^y-\left(4^x+4^y-2^{x+y+1}\right)}{1+4^x+4^y+4^{x+y}-\left(4^x+4^y-2^{x+y+1}\right)}$$
$$=\frac{2\left(1+2^{x+y}\right)}{\left(1+2^{x+y}\right)^2}=\frac{2}{1+2^{x+y}}\Rightarrow\left(1+2^{x+y}\right)\left(\frac{1}{1+4^x}+\frac{1}{1+4^y}\right)\ge 2$$

Mặt khác $\frac{2^{2x-2y}+2^{x-y+2}+4}{2^{2x-2y}+4}=\frac{\left(2^{x-y}\right)^2+4.2^{x-y}+4}{\left(2^{x-y}\right)^2+4}=1+\frac{4.2^{x-y}}{\left(2^{x-y}\right)^2+4}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $1+\frac{4.2^{x-y}}{\left(2^{x-y}\right)^2+4}\le 1+\frac{4.2^{x-y}}{2\sqrt{4.\left(2^{x-y}\right)^2}}=2$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=0\\x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\frac{3}{16}\Rightarrow m^2+n=25$

Chọn ý **C.**

Câu 52 : Cho các số thực $a,b,c\in[2;3]$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4^a+4^b+4^c-\frac{1}{4}(a+b+c)^3$ là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P=m+2n$

A. $P=257$ **B.** $P=258$ **C.** $P=17$ **D.** $P=18$

Lời giải

Với dạng toán này ta sẽ xét tới bất đẳng thức phụ $4^t\le mt+n,\forall t\in[2;3]$

Thay $t=2,t=3$ ta được hệ phương trình $\begin{cases}16=2m+n\\64=3m+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=48\\n=-80\end{cases}$

Giờ ta cần chỉ ra bất đẳng thức $4^t\le 48t-80$ đúng với mọi $t\in[2;3]$ là bài toán sẽ được giải quyết. Ta xét $f(t)=4^t-48t+80\Rightarrow f'(t)=4^t\ln4-48;f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_4\frac{48}{\ln4}$.

Nhận thấy rằng $f(2)=f(3)=0;f\left(\log_4\frac{48}{\ln4}\right)<0$ nên bất đẳng thức luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t\in\{2;3\}$. Khi đó ta được

$$S=4^a+4^b+4^c-\frac{1}{4}(a+b+c)^3\le 48\sum a-\frac{1}{4}\left(\sum a\right)^3-240\le 16$$

Chọn ý **D.**

Bài tập tương tự

Cho 3 số thực $x,y,z\in[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $S=3^x+3^y+3^z-\frac{3}{5}(x+y+z)^2$

A. 5 **B.** 15 **C.** 8 **D.** 12

Ta xét bất đẳng thức phụ $3^t\le 6t-3$

Chọn ý **D.**

Câu 53: Có tất cả bao nhiêu bộ số thực $(x;y;z)$ thỏa mãn $\begin{cases}2^{\sqrt[3]{x^2}}.4^{\sqrt[3]{y^2}}.16^{\sqrt[3]{z^2}}=128\\\left(xy^2+z^4\right)^2=4+\left(xy^2-z^4\right)^2\end{cases}$

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

THPT Chuyên Quốc học Huế - Năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

- $2^{\sqrt[3]{x^2}}.4^{\sqrt[3]{y^2}}.16^{\sqrt[3]{z^2}}=128\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{x^2}}.4^{\sqrt[3]{y^2}}.16^{\sqrt[3]{z^2}}=2^7\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+4\sqrt[3]{z^2}=7(1)$
- $\left(xy^2+z^4\right)^2=4+\left(xy^2-z^4\right)^2\Leftrightarrow xy^2z^4=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{z^4}=1(2)$

Đặt $\left(\sqrt[3]{x};\sqrt[3]{y};\sqrt[3]{z}\right)\to(a,b,c)$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$7=a^2+2b^2+4c^2=a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+c^2+c^2\ge 7\sqrt[7]{a^2b^4c^8}=7$$

Dấu "=" xảy ra khi $a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2} = 1$

Vì $x > 0$ nên có tất cả 4 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý **B.**

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2 x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b} \le e(a+b)$. Tính tích các phần tử của tập hợp S

A. 27 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $-3\sqrt{3}$ **D.** -27

Lời giải

Theo giả thiết ta có $e^{a+b-1} \le a + b \Leftrightarrow e^{a+b-1} \le 1 + a + b - 1$

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ mà ta đã chứng minh được ở các bài tập trước thì ta luôn có $e^{a+b-2} \ge 1 + (a + b - 1)$. Do đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a + b = 1$

Khi đó ta có

$$f(a) + f(b) = 3 \Leftrightarrow f(a) + f(1-a) = \log_3 \frac{m^2 a}{1-a} + \log_3 \frac{m^2(1-a)}{1-(1-a)} = 3 \Leftrightarrow m^4 = 27$$

Do đó tích các phần tử của S bằng $-3\sqrt{3}$

Chọn ý **C.**

Câu 55: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $3x + 2y \le 5$. Tìm giá trị lớn nhất của m?

A. -5 **B.** $\log_3 5$ **C.** 5 **D.** $\log_5 3$

THPT Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Từ phương trình 1 của hệ ta có $(3x-2y)(3x+2y) = 5 \ne 0 \Rightarrow 3x - 2y = \frac{5}{3x+2y}$

Từ phương trình 2 của hệ ta có

$$\log_m 3 \log_3(3x+2y) - \log_3\left(\frac{5}{2x+2y}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3x+2y)(\log_m 3 + 1) = \log_3 5 + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3x+2y) = \frac{1+\log_3 5}{1+\log_m 3} \le \log_3 5(3x+2y \le 5) \Rightarrow \frac{1-\log_m 5}{1+\log_m 3} \le 0$$

Giải bất phương trình trên ta được $m \in \left(\frac{1}{3};5\right] \setminus \{1\}$

Khi đó hệ phương trình đầu có dạng $\begin{cases}(3x+2y)(3x-2y)=5\\ 3x+2y=3^{\frac{1+\log_3 5}{1+\log_m 3}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y=\dfrac{5}{M}\\ 3x+2y=M\end{cases}$ nên luôn có nghiệm. Vậy giá trị lớn nhất của m để hệ có nghiệm là 5

Chọn ý **C.**

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a)+f(b)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S

A. 81 **B.** -3 **C.** 3 **D.** -9

Lời giải

Theo giả thiết ta có $e^{a+b-2}\le a+b-1 \Leftrightarrow e^{a+b-2}\le 1+(a+b-2)$.

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ mà ta đã chứng minh được ở các bài tập trước thì ta luôn có $e^{a+b-2}\ge 1+(a+b-2)$. Do đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a+b=2$

Khi đó ta có:

$$f(a)+f(b)=\frac{9^a}{9^a+m^2}+\frac{9^{2-a}}{9^{2-a}+m^2}=\frac{162+m^2\left(9^a+9^{2-a}\right)}{81+m^2\left(9^{2-a}+9^a\right)+m^4}=1$$

$$\Leftrightarrow m^4+81=162 \Leftrightarrow m^4=81 \Leftrightarrow m=\pm 3$$

Chọn ý **D.**

Bài tập tương tự

1. Cho hàm số $f(t)=\dfrac{4^t}{4^t+m}$ với $m>0$ là tham số thực. Biết rằng $f(x)+f(y)=1$ với mọi x,y thỏa mãn $(x+y)^{\frac{1}{2}}\ge \dfrac{1}{2}(x+y)+\dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị của $f(t)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{5}{4}$

Hướng dẫn.

Chú ý từ giả thiết áp dụng bất đẳng thức AM – GM $\Rightarrow (x+y)^{\frac{1}{2}}\ge \dfrac{1}{2}(x+y)+\dfrac{1}{2}\Rightarrow x+y=1$

Đến đây bài toán sẽ quay về bài toán ở trên

Chọn ý **B.**

2. Cho hàm số $f(t)=\dfrac{16^t}{16^t+m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a)+f(b)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e^2(a+b-1)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 8 **B.** 20 **C.** 11 **D.** 34

Chọn ý **B.**

Câu 57: Cho phương trình $3^x = \sqrt{a.3^x\cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

A. 1 **B.** 2018 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có :

$$3^x = \sqrt{a.3^x\cos(\pi x) - 9} \Leftrightarrow 9^x = a.3^x\cos(\pi x) - 9\left(3^x > 0\right) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a.\cos(\pi x)\ (*)$$

Điều kiện cần: Nếu phương trình (*) có nghiệm duy nhất x_0 thì ta thấy rằng $2 - x_0$ cũng là nghiệm của $(*)$ do đó $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Thay vào $(*)$ ta được $a = -6$.

Điều kiện đủ: Ngược lại nếu $a = -6$ thì phương trình $(*)$ trở thành $3^x + 3^{2-x} = -6.\cos(\pi x)$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $3^x + 3^{2-x} \ge 2.\sqrt{3^x.3^{2-x}} = 6$ mà $-6.\cos(\pi x) \le 6$ do đó

$$3^x + 3^{2-x} = -6.\cos(\pi x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6 \\ -6\cos(\pi x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^{2-x} \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Chọn ý **A.**

Câu 58 : Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \le 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^x + 4^y + 4^z + \ln\left(x^4 + y^4 + z^4\right) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 2a + 3b$

A. 13 **B.** 42 **C.** 54 **D.** 71

Lời giải

Theo giả thiết $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \le 2 \Rightarrow 2x^2 \le 2 \Rightarrow x \le 1$. Tương tự ta cũng sẽ được $0 \le x, y, z \le 1$. Khi đó ta có:

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \le 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2(xy + yz + xz) \le 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$

Đồng thời $x^4 + y^4 + z^4 \le x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \ln\left(x^4 + y^4 + z^4\right) \le \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \le 0$

Xét bất đẳng thức phụ $4^t \le mt + n$. Khi đó ta cần bất đẳng thức trên đúng với mọi $t \in [0;1]$ nên thay $t = 0, t = 1$ vào giải hệ ta sẽ tìm được $m = 3, n = 1$. Xét hàm số $f(t) = 4^t - 3t - 1$ trên $[0;1]$ ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4^t\ln 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \log_4\frac{3}{\ln 4}$. Lập bảng biến thiên ta dễ chỉ ra được bất đẳng thức trên luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $t = 0 \vee t = 1$. Áp dụng vào bài toán ta có

$$P \le 3(x+y+z) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4 + 3 \le \frac{21}{4}$$

Chọn ý **C.**

Bài tập tương tự.

Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2\le 18$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4^{\frac{x}{3}}+4^{\frac{y}{3}}+4^{\frac{z}{3}}-\frac{1}{108}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=2a+3b$

A. 13 **B.** 42 **C.** 54 **D.** 71

Ta giả thiết ta cũng tìm điều kiện của 3 biến x,y,z và áp dụng y nguyên cách làm của câu trên để giải quyết bài toán này

Chọn ý **C.**

Câu 59: Cho 2 hàm số $f(x)=(m-1)6^x-\frac{2}{6^x}+2m+1, h(x)=(x-6^{1-x})$. Tìm tham số m để hàm số $g(x)=h(x).f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 với mọi $x\in[0;1]$

A. $m=1$ **B.** $m\le\frac{1}{2}$ **C.** $m\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ **D.** $m\ge 1$

Lời giải

Ta thấy rằng với mọi m, ta luôn có $h(1)f(1)=0$ nên bài toán trở thành tìm m để cho hàm số $g(x)=h(x).f(x)\ge 0\forall x\in[0;1]$. Dễ thấy với $x=1$ thì bất đẳng thức luôn đúng, do đó ta sẽ xét trên $[0;1)$.

Ta dễ thấy $h(x)$ là hàm đồng biến trên $[0;1)$, $h(1)=0\Rightarrow h(x)<0\forall x\in[0;1)$. Đến đây lại rút gọn bài toán trở thành tìm m để $f(x)\le 0\forall x\in[0;1)$. Đặt $t=6^x\left(t\in[1;6)\right)$ ta có

$$f(x)\le 0\Leftrightarrow(m-1)6^x-\frac{2}{6^x}+2m+1\le 0\Rightarrow(m-1)t^2+2mt-2+t\le 0\Rightarrow m\le\frac{t^2-t+2}{t^2+2t}$$

Đến đây bài toán trở thành bài toán rất đơn giản, ta cần $m\le\min\limits_{[1;6]}\frac{t^2-t+2}{t^2+2t}=\frac{1}{2}$

Chọn ý **B.**

Câu 60 : Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1)\ge x-ax^2$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T=2m+3n$

A. $T=5$ **B.** $T=8$ **C.** $T=7$ **D.** $T=11$

Lời giải

Đây là một câu khá cơ bản trong việc ứng dụng đạo hàm tìm điều kiện có nghiệm.

Biến đổi giả thiết ta có $a\ge\frac{x-\ln(x+1)}{x^2},\forall x>0$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2\ln(x+1)-x-\frac{x}{x+1}}{x^3}$

Xét $h(x)=2\ln(x+1)-x-\frac{x}{x+1}\Rightarrow h'(x)=-\frac{x^2}{(x+1)^2}<0,\forall x>0\Rightarrow h(x)<h(0)=0$

Vậy $f'(x)<0\Rightarrow f(x)<\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow a\ge\frac{1}{2}$.

Chọn ý **B.**

Bài tập tương tự.

Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+ax^3$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T=2m+3n$

A. 8 **B.** 20 **C.** 11 **D.** 34

Tương tự như câu trên thì đây cũng là một câu khá cơ bản trong việc ứng dụng đạo hàm tìm điều kiện có nghiệm.

Chọn ý **C.**

Câu 61: Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 1$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$ khi biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 5 **B.** $3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$ **C.** 6 **D.** 4

THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ý tưởng vẫn sẽ như bài trước ta phải sử dụng tới bất đẳng thức phụ.

Ta sẽ có đánh giá $t^3-3t\log_2 t\le\log_2^3 t+1$. Để chứng minh đơn giản ta sẽ đặt $\log_2 t=x$. Khi đó ta cần chứng minh $t^3-3tx\le x^3+1$. Xét hàm số

$$f(t)=t-\log_2 t,\forall t\in[1;2]\Rightarrow f'(t)=1-\frac{1}{t\ln 2};f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow f(t)\le 1$$

Khi đó $t-x\le 1\Leftrightarrow t-x-1\le 0\Rightarrow t^3-3tx-x^3-1=(t-x-1)\left(t^2+t(x+1)+x^2-x+1\right)\le 0$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng.

Áp dụng vào bài toán ta có $P=\sum a^3-3\left(\sum a\log_2 a\right)\le\sum\log_2^3 a+3\le 1+3=4$

Chọn ý **D.**

Bài tập tương tự.

Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$?

A. 3 **B.** 6 **C.** $3\sqrt[3]{4}$ **D.** 5

Chọn ý **D.**

Câu 62: Cho 2 số thực x,y phân biệt thỏa mãn $x,y\in(0;2018)$.

Đặt $S=\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{2018-y}-\ln\frac{x}{2018-x}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S\ge\frac{2}{1009}$ **B.** $S\le\frac{2}{1009}$ **C.** $S\ge\frac{4}{1009}$ **D.** $S\le\frac{4}{1009}$

Lời giải

Một bài toán chỉ nên tham khảo vì có sử dụng tới kiến thức không trong chương trình phổ thông cơ bản.

Xét hàm số $f(t)=\ln\left(\frac{t}{2018-t}\right)$ và tham số u nằm giữa x và y. Theo định lý *Lagrange* ta có

$$S=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(u)=\frac{2018}{u(2018-u)}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{2018}{\left(\frac{u+2018-u}{2}\right)^2}=\frac{2}{1009}$$

Chọn ý **A.**

Định lí Lagrange - Lagrange's Mean Value Theorem.

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và đồng thời có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ thì tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Chứng minh: Xét hàm số $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Ta có $F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và $F(a)=F(b)$. Theo định lí *Rolle* tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $F'(c)=0$. Mà $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Định lí *Rolle* là một hệ quả của định lí *Lagrange* trong trường hợp $f(a)=f(b)$

Câu 63: Cho 3 số a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\log_{\sqrt{bc}}a}+\frac{1}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\frac{8}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$$

A. 20 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 12

THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$P=\frac{4}{2\log_{bc}a}+\frac{1}{\frac{1}{2}\log_{ac}b}+\frac{8}{\log_{ab}c}=2\log_a bc+2\log_b ac+8\log_c ab$$

$$=2\log_a b+2\log_a c+2\log_b a+2\log_b c+8\log_c a+8\log_c b$$
$$=\left(2\log_a b+2\log_b a\right)+\left(2\log_a c+8\log_c a\right)+\left(2\log_b c+8\log_c b\right).$$

Vì a, b, c là các số thực lớn hơn 1 nên: $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b>0$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM , ta có:

$$P\ge 2\sqrt{2\log_a b.2\log_b a}+2\sqrt{2\log_a c.8\log_c a}+2\sqrt{2\log_b c.8\log_c b}=4+8+8=20.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\log_a b=\log_b a\\ \log_a c=4\log_c a\\ \log_b c=4\log_c b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=a^2\\ c=b^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{c}>1$

Chọn ý **A.**

Câu 64: Cho a,b,c,d là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)$

A. 2 **B.** $4\ln\dfrac{17}{16}$ **C.** $\left(\dfrac{17}{16}\right)^4$ **D.** $\ln\dfrac{17}{16}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$P=\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)=\prod\left(a^2+1\right)\Rightarrow \ln P=\sum\ln\left(a^2+1\right)$$

Ta có đánh giá sau $\ln\left(t^2+1\right)\ge mt+n$, để tìm được hai số m,n ta sẽ sử dụng tới bất đẳng thức tiếp tuyến, đây là một phương pháp rất hay để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng với các biến độc lập nhau.

Cơ sở của phương pháp

- Nếu đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $A\left(x_0;y_0\right)$, A không phải điểm uốn thì khi đó tồn tại một khoảng **D** chứa x_0 sao cho $f(x)\ge ax+b$ hoặc $f(x)\le ax+b$. Đẳng thức xảy ra khi $x=x_0$
- Nếu đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $A\left(x_0;y_0\right)$ thì ta luôn phân tích được $f(x)-(ax+b)=\left(x-x_0\right)^k g(x), k\ge 2$

Sau đây ta áp dụng lý thuyết trên vào bài toán trên. Chú ý ta có $\sum\ln\left(a^2+1\right)$ là một biểu thức đối xứng theo bốn biến a,b,c,d đồng thời giả thiết cũng là đối xứng nên ta sẽ dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$. Quay lại bất đẳng thức phụ mà ta đang đi tìm hệ số $\ln\left(t^2+1\right)\ge mt+n$, ta sẽ tìm m,n sao cho hai đồ thị hàm số $y=\ln\left(t^2+1\right), y=mt+n$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $t=\dfrac{1}{4}$ ta được $\begin{cases}m=\dfrac{8}{17}\\ n=-\dfrac{2}{17}+\ln\dfrac{17}{16}\end{cases}$. Vậy ta có bất đẳng thức phụ là $\ln\left(t^2+1\right)\geq\frac{8}{17}t-\frac{2}{17}+\ln\frac{17}{16}$, dễ thấy bất đẳng thức này luôn đúng, khi đó áp dụng vào bài toán ta có:

$$\ln P=\sum\ln\left(a^2+1\right)\geq\frac{8}{17}\sum a+4\left(-\frac{2}{17}+\ln\frac{17}{16}\right)=4\ln\frac{17}{16}\Rightarrow P\geq\left(\frac{17}{16}\right)^4$$

Chọn ý **C.**

Câu 65: Cho 3 số thực x,y,z không âm thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $1-\log_4 3$

Lời giải

Chú ý với điều kiện x,y,z không âm thì ta luôn có $2^x,4^y,8^z\geq 1$.

Theo nguyên lý *Dirichlet* ta có

$$\left(2^x-1\right)\left(4^y-1\right)\geq 0\Rightarrow 2^x.4^y\geq 2^x+4^y-1$$
$$\Rightarrow 2^x.4^y.8^z\geq\left(2^x+4^y-1\right).8^z=2^x.8^z+4^y.8^z-8^z$$
$$\geq 2^x+8^z-1+4^y+8^z-1-8^z=2^x+4^y+8^z-2$$

Chú ý rằng khi $2^x,4^y,8^z\geq 1$ thì $8^z\leq 2$

$$\Rightarrow 2^x.4^y.8^z\geq 2^x+4^y+8^z-2=2\Rightarrow x+2y+3z\geq 1\Rightarrow S\geq\frac{1}{6}$$

Chọn ý **C.**

Nguyên lí Dirichlet

Nguyên lý những cái lồng và các chú thỏ đã được biết đến từ rất lâu. Ngay trong chương trình phổ thông cơ sở chúng ta cũng đã làm quen với phương pháp giải toán này. Thực ra nguyên lý này mang tên nhà bác học người Đức Pête Gutxtap Legien Đirichlê (1805-1859). Nguyên lý phát biểu rất đơn giản: *Nếu chúng ta nhốt thỏ vào các lồng mà số lồng ít hơn số thỏ, thì thế nào cũng có một lồng nhốt ít nhất hai con thỏ*. Nguyên lí Dirichlet có rất nhiều ứng dụng trong Toán Học, điển hình là bất đẳng thức. Chúng thường được áp dụng để giải một số bài toán bất đẳng thức không thuần nhất. Hôm nay tôi sẽ đưa ra một số ví dụ để các bạn hiểu hơn về vấn đề này. Trong 3 số a,b,c luôn có 2 số nằm cùng phía với số m bất kỳ (Hay lớn hơn bằng m hoặc bé hơn bằng m). Đây chính là cơ sở lời giải của bài toán trên.

Câu 66: Cho các số thực $a,b,c\geq 1$ thỏa mãn $a+b+c=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_3 a+2\log_9 b+3\log_{27} c$

A. $\log_3 5$ **B.** 1 **C.** $\log_3 15$ **D.** $\log_3\frac{5}{3}$

Lời giải

Giả thiết tương đương $P=\log_3 a+2\log_9 b+3\log_{27} c=\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c=\log_3(abc)$

Theo nguyên lý *Dirichlet* ta có

$$(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow ab\ge a+b-1 \Rightarrow abc\ge c(a+b-1)=ac+bc-c$$
$$\ge a+c-1+b+c-1-c=a+b+c-2=3$$
$$\Rightarrow P=\log_3(abc)\ge \log_3 3=1$$

Chọn ý **B.**

Câu 67: Biết a là số thực dương bất kì để bất đẳng thức $a^x\ge 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in\left(10^3;10^4\right]$ **B.** $a\in\left(10^2;10^3\right]$ **C.** $a\in\left(0;10^2\right]$ **D.** $a\in\left(10^4;+\infty\right)$

THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018

Lời giải

Bất đẳng thức $a^x\ge 9x+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì nó phải đúng với $x=1\Rightarrow a>10$.

Do $a>1$ nên hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $\mathbb{R}$ có bề lõm quay lên trên.

Hay hàm số là hàm số lõm trên $\mathbb{R}$

Do hai đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=9x+1$ luôn đi qua điểm $A(0;1)$ nên bất đẳng thức $a^x\ge 9x+1$ nghiệm đúng với mọi x khi đường thẳng $y=9x+1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(0;1)\Leftrightarrow y'(0)=9\left(y'=a^x\ln a\right)\Leftrightarrow \ln a=9\Leftrightarrow a=e^9$

Chọn ý **A.**

Câu 68: Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\dfrac{\prod\limits_{i=2}^{n}\log_3 i}{9^n}$ với $n\in\mathbb{N},n\ge 2$. Có bao nhiêu số tự nhiên n để $f(n)=a$?

A. 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 4

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(n+1)=\dfrac{f(n)\log_3(n+1)}{9}, f(n)=\dfrac{f(n-1)\log_3 n}{9}$

Để $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta có $\begin{cases} f(n)\le f(n+1)\\ f(n)\le f(n-1)\end{cases}$

$$\begin{cases} f(n)\le \dfrac{f(n)\log_3(n+1)}{9}\\ \dfrac{f(n-1)\log_3 n}{9}\le f(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3(n+1)\ge 9\\ \log_3 n\le 9\end{cases}\Leftrightarrow 3^9-1\le n\le 3^9$$

Vậy có 2 giá trị của n thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý **A.**

Câu 69: Cho 2 số thực x,y không âm thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left(14-(y-2)\sqrt{y+1}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$?

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

THPT Quãng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Khi đã làm quen với các dạng toán ở dạng 5 này thì bài toán này trở nên vô cùng bình thường.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $2^{x+\frac{1}{x}}\ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{x}}}=4$

Mặt khác ta có $14-(y-2)\sqrt{y+1}=14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}$. Đặt $t=\sqrt{y+1}>0$.

Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t+14, f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow f(t)\le 16\Rightarrow \log_2\left(14-(y-2)\sqrt{y+1}\right)\le 4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow P=2$

Chọn ý **C.**

Bài tập tương tự

Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$ biết rằng:

$$4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\left(x\ne 0,-1\le y\le\frac{13}{2}\right)$$

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

THPT Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên năm học 2017 – 2018

Chọn ý **D.**

Câu 70: Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x+9^y+16^z=2^x+3^y+4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2^{x+1}+3^{y+1}+4^{z+1}$

A. $\frac{9+\sqrt{87}}{2}$ **B.** $\frac{7+\sqrt{87}}{2}$ **C.** $\frac{5+\sqrt{87}}{2}$ **D.** $\frac{3+\sqrt{87}}{2}$

Lời giải

Đặt $(2^x,3^y,4^z)\to(a,b,c)\Rightarrow\begin{cases}a,b,c>0\\a^2+b^2+c^2=a+b+c\end{cases}$

Khi đó ta có $P=2a+3b+4c=2\left(a-\frac{1}{2}\right)+3\left(b-\frac{1}{2}\right)+4\left(c-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$P\le\sqrt{\left(2^2+3^2+4^2\right)\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\right]}+\frac{9}{2}=\frac{9+\sqrt{87}}{2}$$

Chọn ý **A.**

Câu 71: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{\ln x+1}{\sqrt{\ln^2 x+1}}+m\right|$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$

Lời giải

Ta có $\max\limits_{\left[1;e^2\right]} y=\max\limits_{[0;2]}\left|\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}+m\right|$. Xét $f(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}+m, f'(t)=\dfrac{1-t}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2}=0\Leftrightarrow t=1$

Mặt khác ta có

$$f(0)=m+1, f(1)=m+\sqrt{2}, f(2)=m+\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \min\limits_{\left[1;e^2\right]} y=\min\left\{|m+1|;\left|m+\sqrt{2}\right|\right\}\ge\frac{1}{2}\left(|m+1|+\left|m+\sqrt{2}\right|\right)\ge\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

Chọn ý **C.**

Câu 72: Biết α là số thực lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\le e,\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\alpha\in(0;1)$ **B.** $\alpha\in(1;2)$ **C.** $\alpha\in(-1;0)$ **D.** $\alpha\in(2;3)$

Lời giải

Gọi $f(n)$ là số thực thỏa mãn đẳng thức

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+f(n)}=e\Leftrightarrow(n+f(n))\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\Leftrightarrow f(n)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n$$

Trên khoảng $(1;+\infty)$ ta xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$ ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1$

Mặt khác $\ln(t+1)<\dfrac{t}{\sqrt{t+1}}\forall t>0$. Thật vậy ta có:

$$g(t)=\ln(t+1)-\frac{t}{\sqrt{t+1}}\Rightarrow g'(t)=\frac{2+t}{2\sqrt{t+1}(t+1)}-\frac{1}{t+1}=\frac{\left(\sqrt{1+t}-1\right)^2}{2\sqrt{t+1}(t+1)}>0$$

Nên suy ra $g(t)>g(0)=0\Rightarrow\ln(1+t)<\dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$. Do đó ta được

$$\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\Leftrightarrow x(x+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)<1\Rightarrow f'(x)\forall x>0$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Do đó ta suy ra $\alpha\le f(n)\Rightarrow\alpha=f(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$

Chọn ý **C.**

Câu 73: Cho 2 số thực a,b không âm thỏa mãn $\log_2 ab \in (0;1)$ đồng thời

$$(\log_2 ab)^{\log_2 ab} + (1-\log_2 ab)^{1-\log_2 ab} = \sqrt{1+\frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b}+1}}$$

Biết rằng x^4y^{10} được viết dưới dạng $m\sqrt{n}$ với a,b là các số nguyên dương. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(m;n)$ như vậy?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Một bài toán rất khó nên mình chỉ đưa ra để các bạn tham khảo thôi nhé, trong đề thi sẽ không gặp những bài toán loại này.

Trước tiên ta sẽ đặt $\log_2 ab = x, 1-\log_2 ab = y \Rightarrow x+y=1$. Vế trái viết lại là x^x+y^y.

Ta có bất đẳng thức $\frac{f(x)+f(y)}{2} \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)(*)$ - *Bất đẳng thức Jensen*

Thật vậy ta có thể giả thiết $0<a<b<1$ và viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(x)\right]-\left[f(y)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] \le 0$$

Vế trái của bất đẳng thức này có dạng $f'(\alpha)\frac{y-x}{2}-f'(\beta)\frac{y-x}{2}=f''(\gamma)(\alpha-\beta)\frac{y-x}{2}$

Trong đó $x<\alpha<\frac{x+y}{2}<\beta<y, \alpha<\gamma<\beta$. Vì $\ln f(x) = x\ln x$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)(1+\ln x) \Rightarrow f''(x)=f(x)\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0, \forall x\in(0;1)$$

Suy ra $f''(\gamma)(\alpha-\beta)\frac{y-x}{2}<0$. Vậy bất đẳng thức $(*)$ đúng. Khi đó áp dụng ta có

$$x^x+y^y=x^x+(1-x)^{1-x}=f(x)+f(1-x)\ge 2f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{1+\frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b}+1}} \le \sqrt{1+\frac{2.2^{a-b}}{2\sqrt{2^{2a-2b}}}}=\sqrt{2}$.

Vậy $VT \ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\sqrt[4]{2} \Rightarrow x^4y^{10}=\sqrt{128}=2\sqrt{32}=4\sqrt{8}=8\sqrt{2}$

Chọn ý **D.**

Bất đẳng thức Jensen và tính chất của hàm lồi

Ở bài toán trên ta đã sử dụng tới một tính chất có lẽ là ít gặp cũng như một bất đẳng thức khá lạ, ở phần này mình sẽ giới thiệu cho bạn nào có quan tâm tới nó.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và n điểm tùy ý nên $[a;b]$. Ta có

- Nếu $f''(x)>0$ thì $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$
- Nếu $f''(x)<0$ thì $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$

Ngoài ra cần chú ý thêm

- Nếu hàm số $f(x)$ có $f''(x)>0, \forall x \in [a;b]$ thì $f(x)$ làm hàm lồi trên $[a;b]$
- Nếu hàm số $f(x)$ có $f''(x)<0, \forall x \in [a;b]$ thì $f(x)$ làm hàm lõm trên $[a;b]$

Câu 74: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $0<a,b\le 100$ sao cho đồ thị của 2 hàm số $y=\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b}$ và $y=\frac{1}{b^x}+\frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng 2 điểm phân biệt?

A. 9704 **B.** 9702 **C.** 9698 **D.** 9700

Lời giải

Ta thấy $a>1;b>1$, nếu $a=b$ 2 đường cong trùng nhau nên có vô số điểm chung, loại.

Vì vai trò của a,b như nhau nên ta chỉ cần tìm cặp số nguyên $(a;b)$ với $a>b>1$ sao cho phương trình $\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b}=\frac{1}{b^x}+\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a^x}-\frac{1}{b^x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{a^x}-\frac{1}{b^x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow f'(x)=-\left(\frac{1}{a}\right)^x \ln a+\left(\frac{1}{b}\right)^x, f(1)=0$

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0=\log_{\frac{b}{a}}\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)$, $f'(x)>0$ khi $x>x_0$, $f'(x)<0$ khi $x<x_0$.

Nếu $x_0=1 \Leftrightarrow \log_{\frac{b}{a}}\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow (a;b)=(4;2)$.

Chú ý xét hàm số $f(t)=\frac{\ln t}{t} \Rightarrow \frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}>\frac{\ln 5}{5}>...>\frac{\ln 100}{100}$

Khi đó $f(x)\ge f(x_0)=f(1)=0 \Rightarrow f(x)$ có đúng 1 nghiệm $x_0=1$

Nếu $x_0\ne 1$, khi đó vẽ bảng biến thiên cho hàm số ta thấy phương trình $f(x)=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Với mỗi $b=k\in\{2,3,...,99\} \Rightarrow a\in\{k+1,...,100\}$ tức có $100-k$ cách chọn a.

Vậy có $\sum_{k=2}^{99}(100-k)=4851$ cặp $(a;b)(a>b>1)$ và loại đi cặp $(4;2)$ ta có 4850 cặp.

Xét tương tự với trường hợp $b>a>1$ ta có tất cả 9700 cách chọn.

Chọn ý **D.**

Câu 75: Cho 2 số thực x,y không âm thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\log_2\left(\log_3\left(-x^2-9y^2+6xy-2x+6y+2\right)\right)=\log_3\left(\log_2\left(9x^2+y^2-6xy-6x+2y+3\right)\right)$$

Biết rằng xy^2 được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\log_2\left(\log_3\left(-x^2-9y^2+6xy-2x+6y+1\right)\right)=\log_3\left(\log_2\left(9x^2+y^2-6xy-6x+2y+3\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\log_3\left(3-(x-3y+1)^2\right)\right)=\log_3\left(\log_2\left((3x-y-1)^2+2\right)\right)$$

Ta thấy rằng $\begin{cases}\log_2\left(\log_3\left(3-(x-3y+1)^2\right)\right)\le\log_2(\log_3 3)=0\\ \log_3\left(\log_2\left((3x-y-1)^2+2\right)\right)\ge\log_3(\log_2 2)=0\end{cases}$. Do đó $VT\le VP$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-3y+1=0\\3x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}\Rightarrow xy^2=\frac{1}{8}$

Chọn ý **A.**

Câu 76: Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $0<x-y<\frac{\pi}{2}$ và đồng thời

$$\left(\tan(x-y)\right)^{\sin(x-y)}+\left(\cot(x-y)\right)^{\cos(x-y)}=\log_2\left(4-x^2y^2\right)$$

Tính giá trị của biểu thức $\sin\left(x^2y^2+x-y+\frac{\pi}{4}\right)$?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 0 **C.** 1 **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

+ Nếu $0<x-y\le\frac{\pi}{4}$, áp dụng tính chất của lượng giác và bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\left(\tan(x-y)\right)^{\sin(x-y)}+\left(\cot(x-y)\right)^{\cos(x-y)}\ge\left(\tan(x-y)\right)^{\sin(x-y)}+\left(\cot(x-y)\right)^{\sin(x-y)}\ge 2$$

+ Nếu $\frac{\pi}{4}\le x-y<\frac{\pi}{2}$, , áp dụng tính chất của lượng giác và bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\left(\tan(x-y)\right)^{\sin(x-y)}+\left(\cot(x-y)\right)^{\cos(x-y)}\ge\left(\tan(x-y)\right)^{\cos(x-y)}+\left(\cot(x-y)\right)^{\cos(x-y)}\ge 2$$

Vậy $\left(\tan(x-y)\right)^{\sin(x-y)}+\left(\cot(x-y)\right)^{\cos(x-y)}\ge 2$. Mặt khác $\log_2\left(4-x^2y^2\right)\le\log_2(4)=2$.

Nên dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy = 0 \\ x - y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x^2y^2 + x - y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

Chọn ý **C.**

Câu 77: Cho các số thực a,b,c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{4^a + 9^b + 16^c} + \sqrt{9^a + 16^b + 4^c} + \sqrt{16^a + 4^b + 9^c}$$

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** $6\sqrt{3}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P \ge 3\sqrt[6]{\left(4^a + 9^b + 16^c\right)\left(9^a + 16^b + 4^c\right)\left(16^a + 4^b + 9^c\right)}$$

Theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(4^a + 9^b + 16^c\right)\left(9^a + 16^b + 4^c\right)\left(16^a + 4^b + 9^c\right) \ge \left(\sqrt[3]{4^{a+b+c}} + \sqrt[3]{9^{a+b+c}} + \sqrt[3]{16^{a+b+c}}\right)^3$$

$$= (4 + 9 + 16)^3 = 3^9 \Rightarrow P \ge 3\sqrt[6]{3^9} = 3\sqrt{3}$$

Chọn ý **B.**

Câu 78: Cho các số thực $x, y, z \in [0;1]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(2^x + 2^y + 2^z\right)\left(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}\right)$ được viết dưới dạng $\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên không âm và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m + n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 86 **B.** 87 **C.** 88 **D.** 89

Lời giải

Đặt $\left(2^x; 2^y; 2^z\right) \to (a, b, c)(1 \le a, b, c \le 2)$.

Ta có $1 \le a \le 2 \Rightarrow (a-1)(a-2) \le 0 \Leftrightarrow a + \dfrac{2}{a} \le 3$. Chứng minh tương tự $b + \dfrac{2}{b} \le 3, c + \dfrac{2}{c} \le 3$

Cộng 3 bất đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$9 \ge (a+b+c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 2\sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{81}{8} \ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P_{max} = \dfrac{81}{8}$.

Chọn ý **D.**

Tổng quát cho dạng này

Cho n số $x_1; x_2; ...; x_n \in [a;b], c > 1$. Khi đó ta luôn có

$$\left(c^{x_1}+c^{x_2}+....+c^{x_n}\right)\left(c^{-x_1}+c^{-x_2}+....+c^{-x_n}\right)\le\frac{\left[n\left(c^a+c^b\right)\right]^2}{4c^{a+b}}$$

Câu 79: Cho các số thực x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P=\sqrt{3+2011^{x+y-2z}}+\sqrt{3+2011^{y+z-2x}}+\sqrt{3+2011^{z+x-2y}}$$

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Mincowsky và bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sum\sqrt{3+2011^{x+y-2z}}\ge\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2+\left(2011^{\frac{x+y-2z}{2}}+2011^{\frac{y+z-2x}{2}}+2011^{\frac{z+x-2y}{2}}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{27+\left[3.\sqrt[3]{2011^{\frac{x+y-2z}{2}+\frac{y+z-2x}{2}+\frac{z+x-2y}{2}}}\right]^2}=6$$

Chọn ý **C.**

Câu 80: Cho hai các số thực a, b, c, d, e dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=1000$ và

$$\begin{cases}a-b+c-d+e>0\\a+b-c+d-e>0\\-a+b+c-d+e>0\\a-b+c+d-e>0\\-a+b-c+d+e>0\end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=(a+c)^{b+d}$

A. 499^{499} **B.** 500^{500} **C.** 500^{499} **D.** 499^{500}

Lời giải

Một câu chỉ mang tính tham khảo cho những bạn có tìm tòi thôi nhé.

Đặt $\begin{cases}a-b+c-d+e=h\\a+b-c+d-e=k\\-a+b+c-d+e=l\\a-b+c+d-e=m\\-a+b-c+d+e=n\end{cases}$ ta thấy rằng $h+k+n+m+l=a+b+c+d+e=1000$ và đồng thời

$2a=h+k,2b=k+l,2c=l+m,2d=m+n,2e=n+h$. Từ đó suy ra h, k, l, m, n đều là các số chẵn. Bên cạnh đó ta suy ra được $a+c=\frac{1}{2}(h+k+l+m)=\frac{1}{2}(1000-n),b+d=\frac{1}{2}(1000-h)$.

Để $M=(a+c)^{b+d}$ đạt giá trị lớn nhất thì n và h có giá trị nhỏ nhất, mà n,h chia hết cho 2

nên $h=n=2\Rightarrow\max M=499^{499}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}k=9974-2t\\l=2,4,...,2t\\l+m=2+2t\\k+l+m=996\end{cases}\left(t=\overline{1,496}\right)$

Chọn ý **A.**

6. CÁC BÀI TOÁN CÓ THAM SỐ

CÁC BÀI TOÁN

Câu 1: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3

THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 1 năm 2017-2018

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases}3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x\le 2017\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\end{cases}$.

A. $m\ge -3$ **B.** $m>-3$ **C.** $m\ge -2$ **D.** $m\le -2$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc – lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$\left(3a^2+12a+15\right)\log_{27}\left(2x-x^2\right)+\left(\frac{9}{2}a^2-3a+1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=2\log_9\left(2x-x^2\right)+\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)$$

A. 2 **B.** 0 **C.** Vô số **D.** 1

THPT Cổ Loa – Hà Nội lần 1 năm 2017 – 2018

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m\in\mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 15. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 16.

THTT số 3 – 486 tháng 12 năm 2017

Câu 5: Cho tham số thực a. Biết phương trình $e^x-e^{-x}=2\cos ax$ có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x+e^{-x}=2\cos ax+4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.

A. 5 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 11

THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 năm học 2017 – 2018

Câu 6: Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2).\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

A. $m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m>\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $m\ge\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $m\ge-\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa năm 2017 – 2018

Câu 7: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(a;b)$ đặt $T=b^2-a^2$ thì:

A. $T = 36$ **B.** $T = 48$ **C.** $T = 64$ **D.** $T = 72$

THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 8: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x+m)=\log_4(1009x)$ có nghiệm là?

A. 2020 **B.** 2017 **C.** 2019 **D.** 2018

Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 9: Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

A. 1 **B.** $\log(2^e-1)$ **C.** $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$ **D.** $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Phổ thông năng khiếu – Đại học Quốc Gia TP. HCM lần 1 năm 2017 – 2018

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2\left(\frac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)+\sqrt{2x^2+mx+1}=x+2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|e^{2x}-4e^x+m\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ bằng 6?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

THPT Chuyên Ngoại ngữ - Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x \le 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 11

Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Nam năm học 2017 – 2018

Câu 13: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$$

A. $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$ **C.** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$ **D.** $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 14: Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1;2018)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3

A. 20 **B.** 19 **C.** 18 **D.** 17

Câu 15: Giả sử tồn tại số thực a sao cho phương trình $e^x+e^{-x}=2\cos ax+4$ có 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm phân biệt của phương trình $e^x-e^{-x}=2\cos ax$ là:

A. 5 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 4

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\ln\left(m+2\sin x+\ln\left(m+3\sin x\right)\right)=\sin x$$

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 6

Câu 17: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x-3^{-x}=2\cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx$.

A. 4036 **B.** 2018 **C.** 4035 **D.** 2019

THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-7x+12}+3^{2x-x^2}=9.3^{10-5x}+m$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S.

A. 3 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

THPT Trần Hưng Đạo – TP. HCM năm học 2017 – 2018

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1}-e^{3x+2y}=x+y-1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x+y-1)-(m+4)\log_2 x+m^2+4=0$.

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Sở Giáo dục và đào tạo Bà Rịa Vũng Tàu đề 1 năm 2017 – 2018

Câu 20: Biết $(a;b)$ là khoảng chứa tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt. Tính $M=a+b$.

A. $M=\dfrac{1}{8}$ **B.** $M=\dfrac{1}{16}$ **C.** $M=\dfrac{-7}{16}$ **D.** $M=\dfrac{3}{5}$

THPT Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ có nghiệm thực?

A. 9 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 7

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=(a^2+1)\ln^{2017}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+bx\sin^{2018}x+2$ với a,b là các số thực. Biết rằng $f\left(7^{\log 5}\right)=6$. Tính $f\left(-5^{\log 7}\right)$.

A. $f\left(-5^{\log 7}\right)=2$ **B.** $f\left(-5^{\log 7}\right)=4$ **C.** $f\left(-5^{\log 7}\right)=-2$ **D.** $f\left(-5^{\log 7}\right)=6$

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Câu 23: Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$

A. $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $m\ge\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $m\ge-\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Chuyên Đồng bằng sông Hồng lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\ln(m+\ln(m+x))=x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m\ge0$ **B.** $m>1$ **C.** $m<e$ **D.** $m\ge-1$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 4 – năm học 2017 – 2018

Câu 25: Cho phương trình $e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính $T=10a+20b$.

A. $T=10\sqrt{3}$ **B.** $T=0$ **C.** $T=1$ **D.** $T=3\sqrt{10}$

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2\dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m$ Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3 **B.** Vô số **C.** 2 **D.** 4

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 27: Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_m\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

THPT Chuyên Đại học Vinh – Nghệ An lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 28: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2018)$ để ta luôn có $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}$?

A. 2011 **B.** 2016 **C.** 2019 **D.** 2009

THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp lần 5 năm học 2017 – 2018

Câu 29: Cho phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+8=0$. Biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1)=6$. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là?

A. Không có m **B.** $1<m<3$ **C.** $m>3$ **D.** $m<2$

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 30 : Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt .

$$2^{(x-1)^2}.\log_2(x^2-2x+3)=4^{|x-m|}.\log_2(2|x-m|+2)$$

A. $S=\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$ **B.** $S=\left\{\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right\}$ **C.** $S=\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$ **D.** $S=\left\{\frac{1}{2};1;-\frac{3}{2}\right\}$

THPT Chu Văn Anh – Hà Nội năm học 2017 – 2018

Câu 31 : Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng với mọi $x\in(1;100)$: $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$.

A. 2018 **B.** 4026 **C.** 2013 **D.** 4036

Câu 32 : Gọi S là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^2+\ln(x+m+2)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Biết $S=\left(-\infty;a+\sqrt{b}\right]$. Tính tổng $K=a+b$ là

A. $K=-5$ **B.** $K=5$ **C.** $K=0$ **D.** $K=2$

Câu 33 : Cho hai số thực a, b $(a>1,b>1)$. Phương trình $a^x+b^x=b+ax$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 34: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$27^x-m.3^{2x+1}+(m^2-1)3^{x+1}-(m^2-1)=0$$

Có 3 nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b$

A. 2 **B.** $1+\sqrt{3}$ **C.** $2+\sqrt{2}$ **D.** $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2018;2018]$ để phương trình $\left|2^{|x|+1}-8\right|=\frac{3}{2}x^2+m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2013 **B.** 2012 **C.** 4024 **D.** 2014

Câu 36: Cho bất phương trình $\log_{3a}11+\left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\right)\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right)\ge 0$.

Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(1;2)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(2;+\infty)$

THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3

THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 1 năm 2017-2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m \Leftrightarrow 4\left(4^x+4^{-x}\right)=4(m+1)\left(2^x-2^{-x}\right)+16-8m$$

Đặt $t=u(x)=2^x-2^{-x}, x\in[0;1]\Rightarrow u'(x)=2^x+2^{-x}>0\ \forall x[0;1]$. Suy ra $u(0)\le t\le u(1)$ hay $t\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]\Rightarrow t^2=4^x+4^{-x}-2.2^x.2^{-x}\Rightarrow 4^x+4^{-x}=t^2+2$. Phương trình trở thành :

$$\begin{aligned}&4\left(t^2+2\right)=4t(m+1)+16-8m\\&\Leftrightarrow t^2+2=t(m+1)+4-2m\\&\Leftrightarrow t^2-t(m+1)+2m-2=0\\&\Leftrightarrow m(t-2)=t^2-t-2\\&\Leftrightarrow m(t-2)=(t-2)(t+1)\\&\Leftrightarrow m=t+1\left(t\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]\right)\\&\Leftrightarrow t=m-1\end{aligned}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm trên $[0;1]$ thì phương trình $t=m-1$ phải có nghiệm $t\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$. Suy ra $m-1\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$, hay $m\in\left[1;\ \frac{5}{2}\right]$.

Chọn ý **A.**

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases}3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x\le 2017\\x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\end{cases}$.

A. $m\ge -3$ **B.** $m>-3$ **C.** $m\ge -2$ **D.** $m\le -2$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc – lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $x \ge -1$.

Xét $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \le 2017 \Leftrightarrow 3^{2x}.3^{\sqrt{x+1}} - 3^2.3^{\sqrt{x+1}} \le 2017 - 2017x$

$\Leftrightarrow (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \le 2017(1-x)$. Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm.

- Nếu $x > 1$ thì $VT = (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} > 0$, $VP = 2017(1-x) < 0$

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \le 2017(1-x)$ vô nghiệm.

- Nếu $-1 \le x < 1$ thì $VT = (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} < 0$, $VP = 2017(1-x) > 0$

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \le 2017(1-x)$ có nghiệm với $-1 \le x < 1$.

Vậy bpt $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \le 2017$ có nghiệm với $-1 \le x \le 1$.

Cách 1

Xét: $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0$. Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 8$, để bpt có nghiệm $-1 \le x \le 1$ thì:

- TH1: $\Delta \le 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} + 2 \le m \le 2\sqrt{3} + 2$, bpt có nghiệm $-1 \le x \le 1$ (1)
- TH2: $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2\sqrt{3} + 2 \\ m < -2\sqrt{3} + 2 \end{array}\right.$, nghiệm của bpt là $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

Ta có $(-1;1) \subset (x_1; x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 6 < 0 \\ m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$

Do đó BPT có nghiệm $-1 \le x \le 1$ khi $m \ge -2$

Kết hợp điều kiện ta được $m > 2\sqrt{3} + 2$ và $-2 \le m < -2\sqrt{3} + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hệ đã cho có nghiệm khi $m \ge -2$.

Cách 2. Bài toán trở thành tìm m để bpt $x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0$ có nghiệm $-1 \le x \le 1$

Bất phương trình tương đương

$$m(x-2) \le x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow m \ge \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} = f(x) \ (*) \ (\text{Do } -1 \le x \le 1)$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \in [-1;1]$

Để bất phương trình $(*)$ có nghiệm thì $m \ge \min\limits_{x \in [-1;1]} f(x)$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$ ta có $m \ge f(1) = f(-1) = -2$. Vậy $m \ge -2$.

Chọn ý **C.**

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$\left(3a^2+12a+15\right)\log_{27}\left(2x-x^2\right)+\left(\frac{9}{2}a^2-3a+1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=2\log_9\left(2x-x^2\right)+\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)$$

A. 2 **B.** 0 **C.** Vô số **D.** 1

THPT Cổ Loa – Hà Nội lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $0<x<\sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình ban đầu tương đương

$$\left(a^2+4a+5\right)\log_3\left(2x-x^2\right)+\left(9a^2-6a+2\right)\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)=\log_3\left(2x-x^2\right)+\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2+4a+4\right)\log_3\left(2x-x^2\right)+\left(9a^2-6a+1\right)\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+2)^2\log_3\left(2x-x^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{3a-1}{a+2}\right)^2=\frac{\log_3\left(2x-x^2\right)}{\log_{11}\left(\frac{2}{2-x^2}\right)}(*)$$

Mà vế trái của $(*)$ luôn dương với mọi a nguyên dương.

Vì $0<x<\sqrt{2}$ nên $2-x^2<2\Rightarrow\frac{2}{2-x^2}>1\Rightarrow\log_{11}\left(\frac{2}{2-x^2}\right)>0$

Do đó từ $(*)$ suy ra $\log_3\left(2x-x^2\right)>0\Leftrightarrow 2x-x^2>1\Leftrightarrow x^2-2x+1<0\Rightarrow$ không tồn tại x.

Vậy không có giá trị của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài

họn ý **B.**

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m\in\mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 15. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 16.

THTT số 3 – 486 tháng 12 năm 2017

Lời giải

Ta có: $2x^2-5x+4>0$ với mọi x nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{cases}mx-5>0\\mx-5\neq 1\\2x^2-5x+4>0\\2x^2-5x+4=x^2+2x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mx>5\\mx\neq 6\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.\end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất tương đương với ta nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$ hoặc nhận nghiệm $x=5$ và loại $x=2$.

- Trường hợp 1: Nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} 2m > 5 \\ 2m \neq 6 \\ \left[\begin{array}{l} 5m \leq 5 \\ 5m = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{5}{2} \\ m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m = \dfrac{6}{5} \end{array}\right. \end{cases}$ (vô lí).

- Trường hợp 2: Nhận nghiệm $x = 5$ và loại $x = 2$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} 5m > 5 \\ 5m \neq 6 \\ \left[\begin{array}{l} 2m \leq 5 \\ 2m = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \dfrac{6}{5} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \dfrac{5}{2} \\ m = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ \begin{cases} 1 < m \leq \dfrac{5}{2} \\ m \neq \dfrac{6}{5} \end{cases} \end{array}\right.$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} 10m = 30 \\ \begin{cases} 10 < 10m \leq 25 \\ m \neq 12 \end{cases} \end{array}\right.$. Vì $10m \in \mathbb{Z}$ nên $10m \in \{11;13;14...;25\} \cup \{30\}$.

Trong tập hợp này có 15 phần tử nên tập hợp S cũng có 15 phần tử.

Chú ý: $m \in \left\{\dfrac{11}{10};\dfrac{13}{10};\dfrac{14}{10}...;\dfrac{25}{10}\right\} \cup \left\{\dfrac{30}{10}\right\}$.

Chọn ý **A.**

Câu 5: Cho tham số thực a. Biết phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.

A. 5 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 11

THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta thấy rằng phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ có đúng 5 nghiệm

Suy ra phương trình $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos a\dfrac{x}{2}$ có đúng 5 nghiệm $(*)$

$$e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2 = 2(\cos ax + 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}\right)^2 = 4\cos^2\frac{ax}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} = 2\cos\dfrac{ax}{2} (1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} = -2\cos\dfrac{ax}{2} (2) \end{array}\right.$$

- Phương trình (1) và phương trình (2) nếu có nghiệm chung x_0 thì $\cos\frac{ax_0}{2}=0$ và $e^{\frac{x_0}{2}}=e^{\frac{-x_0}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ \cos 0=0 \end{cases}$ - vô lý. Vậy $(1),(2)$ có nghiệm khác nhau.
- Phương trình (1) có 5 nghiệm (theo $(*)$).

Nếu x_0 là 1 nghiệm của (1) thì $x_0 \neq 0$ và $e^{\frac{x_0}{2}}-e^{\frac{-x_0}{2}}=2\cos\frac{ax_0}{2} \Rightarrow e^{\frac{-x_0}{2}}-e^{\frac{x_0}{2}}=-2\cos a\left(-\frac{x_0}{2}\right)$

Khi đó $-x_0$ là 1 nghiệm của (2) .

Vậy phương trình (2) có 5 nghiệm phân biệt (và khác 5 nghiệm của phương trình (1)).

Phương trình đã cho có đúng 10 nghiệm.

Chọn ý **C.**

Câu 6: Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2).\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

A. $m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m>\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $m\geq\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $m\geq-\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa năm 2017 – 2018

Lời giải

Bất phương trình tương đương:

$$m.3^{x+1}+(3m+2).\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0 \Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x+(3m+2)\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+3m>0$$

Đặt $t=\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, do $x\leq 0$ nên $0<t\leq 1$

Ta cần tìm tham số m sao cho $t^2+3mt+3m+2>0$, đúng với mọi $0<t\leq 1$

Ta có $m>\frac{-t^2-2}{3t+3} \Leftrightarrow m>\max\limits_{(0;1]}\frac{-t^2-2}{3t+3}$. Ta tìm GTLN của hàm số $f(t)=-\frac{t^2+2}{3t+2}$ trên $0<t\leq 1$

Ta có $f'(t)=-\frac{1}{3}.\frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{3} \\ t=-1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta được $\max\limits_{(0;1]}\frac{-t^2-2}{3t+3}=f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Chọn ý **A.**

Câu 7: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(a;b)$ đặt $T=b^2-a^2$ thì:

A. $T=36$ **B.** $T=48$ **C.** $T=64$ **D.** $T=72$

THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$$
$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+(x-2)^3+8+m-3x=2^3+2^{2-x}$$
$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x=2^{2-x}+(2-x)^3\ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=2^t.\ln 2+3t^2>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (1) suy ra $m-3x=(2-x)^3\Leftrightarrow m=8-9x+6x^2-x^3$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+6x^2-9x+8$ trên $\mathbb{R}$. có $f'(x)=-3x^2+12x-9$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4<m<8$.

Suy ra $a=4;\ b=8\ \Rightarrow T=b^2-a^2=48$.

Chọn ý **B.**

Câu 8: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x+m)=\log_4(1009x)$ có nghiệm là?

A. 2020 **B.** 2017 **C.** 2019 **D.** 2018

Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $\log_6(2018x+m)=\log_4(1009x)=t\Rightarrow\begin{cases}2018x+m=6^t\\1009x=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.4^t+m=6^t\Leftrightarrow m=-2.4^t+6^t$.

Đặt $f(t)=-2.4^t+6^t$. Ta có: $f'(t)=6^t\ln 6-2.4^t.\ln 4$.

Xét $f'(t)=0\Rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{2\ln 4}{\ln 6}=\log_6 16\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Lập bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)\approx-2{,}01$. Mà $\begin{cases}m<2018\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}$ nên ta có: $\begin{cases}-2\le m\le 2017\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý **A.**

Câu 9: Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a x = \log\left(a^x\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

A. 1 **B.** $\log\left(2^e - 1\right)$ **C.** $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$ **D.** $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Phổ thông năng khiếu – Đại học Quốc Gia TP. HCM lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Ta có: $\log_a x = \log\left(a^x\right) \Leftrightarrow \log_a x = x\log a \Leftrightarrow \dfrac{\log x}{\log a} = x\log a \Leftrightarrow \dfrac{\log x}{x} = (\log a)^2$

Giá trị của a lớn nhất khi và chỉ khi $\log a$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2 \ln 10}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng suy ra $(\log a)^2$ lớn nhất là bằng $\dfrac{\log e}{e}$

Khi đó $(\log a)^2 = \dfrac{\log e}{e} \Rightarrow \log a = \sqrt{\dfrac{\log e}{e}} \Rightarrow a = 10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Chọn ý **D.**

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2}\right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}$

Phương trình ban đầu tương đương:

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2}\right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = \log_2(x + 2) + x + 2 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x^2 + mx + 1}\right) = f(x + 2)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0$, $\forall t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$

Từ đó $\begin{cases} x > -2 \\ 2x^2 + mx + 1 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Để có hai nghiệm thực phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 + 12 > 0 \\ (x_1+2)+(x_2+2) > 0 \\ (x_1+2)(x_2+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ x_1+x_2+4>0 \\ x_1x_2+2(x_1+x_2)+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4-m+4>0 \\ -3+2(4-m)+4>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<8 \\ m<\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m<\dfrac{9}{2} \text{ mà } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1;2;3;4\}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \left|e^{2x} - 4e^x + m\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ bằng 6?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

THPT Chuyên Ngoại ngữ - Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét $x \in [0;\ln 4]$. Đặt $t = e^x \Rightarrow t \in [1;4]$. Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1;4]$

Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$. Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Ta có: $g(1) = m-3;\ g(2) = m-4;\ g(4) = m$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \left|e^{2x} - 4e^x + m\right|$ trên $[0;\ln 4]$ sẽ thuộc $A = \{|m-3|;|m-4|;|m|\}$

- Xét $|m-4| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \Rightarrow A = \{7;6;10\} \\ m = -2 \Rightarrow A = \{5;6;2\} \end{array}\right.$

Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$

- Xét $|m-3| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \Rightarrow A = \{5;6;9\} \\ m = -3 \Rightarrow A = \{7;6;3\} \end{array}\right.$ (không thỏa mãn)

- Xét $|m| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \Rightarrow A = \{2;3;6\} \\ m = -6 \Rightarrow A = \{10;9;6\} \end{array}\right.$

Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý **D.**

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x \le 2\log\left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 11

Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Nam năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}0<x<1\\ m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<1\\ m\sqrt{x}-(1-x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<1\\ m>\dfrac{(1-x)}{\sqrt{x}}>0\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương:

$$\log x^3 \le \log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 \le \left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \le \left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow m \ge \frac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có : $\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-x}\right)+\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right) \ge 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$

Vì vậy $m \ge \sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x) \ge \sqrt{2} \approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị $2,3,4,5,6,7,8$.

Chọn ý **B.**

Câu 13: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm $e^{3m}+e^m = 2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$ **C.** $\left(0;\dfrac{1}{e}\right)$ **D.** $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases}-1\le t\le\sqrt{2}\\ t^2-1=2x\sqrt{1-x^2}\end{cases}$. Khi đó: $e^{3m}+e^m = t\left(t^2+1\right) \Leftrightarrow e^{3m}+e^m = t^3+t$.

Xét hàm $f(u)=u^3+u \Rightarrow f'(u)=3u^2+1$. Hàm số luôn đồng biến.

$\Rightarrow e^{3m}+e^m = t^3+t \Leftrightarrow e^m = t$. Phương trình có nghiệm: $e^m \le \sqrt{2} \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{2}\ln 2$

Chọn ý **B.**

Câu 14: Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1;2018)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3

A. 20 **B.** 19 **C.** 18 **D.** 17

Lời giải

Nhận thấy với $x>3$ thì $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}=x \Rightarrow x-\sqrt{x^2-1}>0$ và $x+\sqrt{x^2-1}>0$

Biến đổi phương trình tương dương :

$$\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a 2.\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{2017}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a 2\ \ (1)\ \ (\text{vì } \log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)>0,\forall x>3)$$

Xét hàm số $f(x)=\log_{2017}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}.\ln 2017} \Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x>3$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 3 $\Leftrightarrow \log_2 a > f(3)$

$$\Leftrightarrow \log_2 a > \log_{2017}\left(3+2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \log_2 a < \log_{3+2\sqrt{2}} 2017\,(a>1) \Leftrightarrow a < 2^{\log_{3+2\sqrt{2}} 2017} \approx 19,9.$$

Lại do a nguyên thuộc khoảng $(1;2018)$ nên $a\in\{2;3;...;19\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài

Chọn ý **C.**

Câu 15: Giả sử tồn tại số thực a sao cho phương trình $e^x+e^{-x}=2\cos ax+4$ có 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm phân biệt của phương trình $e^x-e^{-x}=2\cos ax$ là:

A. 5 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 4

Lời giải

Đây là một câu tương tự với câu trong đề thi thử Chuyên Thái Bình lần 3.

Phương trình đầu tương đương

$$e^x+e^{-x}=2\cos ax+4 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2=2\cos ax+2$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2=\left(2\cos\frac{ax}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}=2\cos\dfrac{ax}{2} & (1)\\ e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}=-2\cos\dfrac{ax}{2} & (2)\end{array}\right.$$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $x=x_0$ là nghiệm của (1) thì $x=-x_0$ là nghiệm của (2).

Do đó số nghiệm của (1) và (2) bằng nhau và đồng thời khác nhau đôi một. Suy ra phương trình (1) có đúng 5 nghiệm $x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5$.

Vậy phương trình $e^x-e^{-x}=2\cos ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt là $\dfrac{x_1}{2},\ \dfrac{x_2}{2};\ \dfrac{x_3}{2};\ \dfrac{x_4}{2};\ \dfrac{x_5}{2}$.

Chọn ý **A.**

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\ln\left(m+2\sin x+\ln\left(m+3\sin x\right)\right)=\sin x$$

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)>0 \\ m+3\sin x>0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương:

$$m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)=e^{\sin x}$$
$$\Leftrightarrow m+3\sin x+\ln(m+3\sin x)=e^{\sin x}+\sin x$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(m+3\sin x)}+\ln(m+3\sin x)=e^{\sin x}+\sin x,\ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t,\ t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $(1)\Leftrightarrow f[\ln(m+3\sin x)]=f(\sin x)\Leftrightarrow \ln(m+3\sin x)=\sin x$.

Đặt $a=\sin x$, $a\in[-1;1]$. Phương trình trở thành: $\ln(m+3a)=a\Leftrightarrow m=e^a-3a$.

Xét $g(a)=e^a-3a,\ a\in[-1;1],\ g'(a)=e^a-3<0,\ \forall a\in[-1;1]$.

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $g(1)\le m\le g(-1)\Leftrightarrow e-3\le m\le \frac{1}{e}+3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m là: $0;1;2;3$.

Chọn ý **B.**

Câu 17: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x-3^{-x}=2\cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx$.

A. 4036 **B.** 2018 **C.** 4035 **D.** 2019

THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương:

$$9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx\Leftrightarrow 9^x+9^{-x}-2.3^x.3^{-x}=2+2\cos 2nx$$
$$\Leftrightarrow \left(3^x-3^{-x}\right)^2=4\cos^2 nx\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x-3^{-x}=2\cos nx\ (1) \\ 3^x-3^{-x}=-2\cos nx\ (2) \end{array}\right.$$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $3^x-3^{-x}=3^{-x}-3^x\Leftrightarrow 3^x=3^{-x}\Leftrightarrow x=0$

Thay $x=0$ vào (1) ta được $3^0-3^0=2\cos 0\Leftrightarrow 0=2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung. Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2). Mà (1) có 2018 nghiệm nên (2) cũng có 2018 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4036 nghiệm.

Chọn ý **A.**

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-7x+12}+3^{2x-x^2}=9.3^{10-5x}+m$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S.

A. 3 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

THPT Trần Hưng Đạo – TP. HCM năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$m.3^{x^2-7x+12}+3^{2x-x^2}=9.3^{10-5x}+m \Leftrightarrow m\left(3^{x^2-7x+12}-1\right)-3^{2x-x^2}\left(3^{x^2-7x+12}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{x^2-7x+12}-1\right)\left(m-3^{2x-x^2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2-7x+12}-1=0 \\ m-3^{2x-x^2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \\ 2x-x^2-\log_3 m=0(*) \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt, ta có các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** $(*)$ có một nghiệm $x=3$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4

Thay $x=3$ vào $(*)$ ta được $\log_3 m=-3 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{27}$

Khi đó $(*)$ trở thành $-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$ (Thỏa yêu cầu)

- **Trường hợp 2:** $(*)$ có một nghiệm $x=4$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4

Thay $x=4$ vào $(*)$ ta được $\log_3 m=-8 \Leftrightarrow m=3^{-8}$

Khi đó $(*)$ trở thành $-x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right.$ (Thỏa yêu cầu)

- **Trường hợp 3:** $(*)$ có nghiệm kép khác 3 và $4 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1-\log_3 m=0 \\ \log_3 m\neq -3 \\ \log_3 m\neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

Vậy có 3 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn ý **A.**

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1}-e^{3x+2y}=x+y-1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x+y-1)-(m+4)\log_2 x+m^2+4=0$.

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Sở Giáo dục và đào tạo Bà Rịa Vũng Tàu đề 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $e^{2x+y+1}-e^{3x+2y}=x+y-1 \Leftrightarrow e^{2x+y+1}+(2x+y+1)=e^{3x+2y}+(3x+2y)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng $f(2x+y+1)=f(3x+2y) \Leftrightarrow 2x+y+1=3x+2y \Leftrightarrow y=1-x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_2^2 x-(m+4)\log_2 x+m^2+4=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, phương trình có dạng $t^2-(m+4)t+m^2+4=0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow -3m^2+8m\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq \dfrac{8}{3}$.

Do đó có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn ý **A.**

Câu 20: Biết $(a;b)$ là khoảng chứa tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt. Tính $M=a+b$.

A. $M=\frac{1}{8}$ **B.** $M=\frac{1}{16}$ **C.** $M=\frac{-7}{16}$ **D.** $M=\frac{3}{5}$

THPT Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}\Leftrightarrow\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}+m\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=\frac{1}{2}$$

Vì $\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}.\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=1$ nên đặt $t=\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}$, $0<t\le 1$ phương trình trở thành

$$t+\frac{m}{t}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2t^2-t+2m=0\ \Leftrightarrow 2m=-2t^2+t\,(*)$$

Xét hàm số $f(t)=-2t^2+t,\ 0<t\le 1\ \Rightarrow f'(t)=-4t+1,\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$. Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng để phương trình đã cho có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0<t<1$.

Từ đó ta được $0<2m<\frac{1}{8}\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{16}\Rightarrow M=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$

Chọn ý **B.**

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ có nghiệm thực?

A. 9 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 7

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}m+e^x\ge 0\\ m+\sqrt{m+e^x}\ge 0\end{cases}$. Đặt $t=\sqrt{m+e^x}\ (t\ge 0)$ ta suy ra: $\begin{cases}m+t=e^{2x}\\ t^2=m+e^x\end{cases}$

$$\Rightarrow e^{2x}-t^2=t-e^x\Leftrightarrow\left(e^x-t\right)\left(e^x+t+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}e^x-t=0 & (1)\\ e^x+t+1=0 & (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $e^x+t+1>0$

Phương trình (1) tương đương với $e^x=t\Leftrightarrow e^x=\sqrt{m+e^x}\Leftrightarrow m=e^{2x}-e^x\ (3)$

Phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ (*) có nghiệm thực khi phương trình (3) có nghiệm thực. Xét hàm số $f(x)=e^{2x}-e^x$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có: $f'(x)=2e^{2x}-e^x=0\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)=e^{2x}-e^x$ ta suy ra phương trình (3) có nghiệm khi $m\ge-\dfrac{1}{4}$.

Kết hợp với giả thiết m là số nguyên nhỏ hơn 10 ta suy ra $m\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn ý **C.**

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=(a^2+1)\ln^{2017}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+bx\sin^{2018}x+2$ với a,b là các số thực. Biết rằng $f\left(7^{\log 5}\right)=6$. Tính $f\left(-5^{\log 7}\right)$.

A. $f\left(-5^{\log 7}\right)=2$ **B.** $f\left(-5^{\log 7}\right)=4$ **C.** $f\left(-5^{\log 7}\right)=-2$ **D.** $f\left(-5^{\log 7}\right)=6$

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $g(x)=(a^2+1)\ln^{2017}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+bx\sin^{2018}x$ có tập xác định $\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có với mọi $x\in\mathbb{R}$, $g(-x)=(a^2+1)\ln^{2017}\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)-bx\sin^{2018}(-x)$

$$=(a^2+1)\ln^{2017}\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)-bx\sin^{2018}(x)$$

$$=-(a^2+1)\ln^{2017}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-bx\sin^{2018}(x)=-g(x)$$

Suy ra $g(x)$ là hàm số lẻ, mặt khác $7^{\log 5}=5^{\log 7}$ nên $g\left(-5^{\log 7}\right)=-g\left(5^{\log 7}\right)=-g\left(7^{\log 5}\right)$

Theo giả thiết ta có $f\left(7^{\log 5}\right)=g\left(7^{\log 5}\right)+2\Rightarrow g\left(7^{\log 5}\right)=4$.

Do đó $f\left(-5^{\log 7}\right)=g\left(-5^{\log 7}\right)+2=-g\left(7^{\log 5}\right)+2=-4+2=-2$

Chọn ý **C.**

Câu 23: Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$

A. $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $m\ge\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $m\ge-\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Chuyên Đồng bằng sông Hồng lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0\Leftrightarrow 3m+(3m+2).\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x>0$$

Đặt $t=\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$. Khi $x<0$ thì $0<t<1$. BPT trở thành:

$$3m+\frac{3m+2}{t}+t>0,\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow 3m>\frac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1)$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1)\ \Rightarrow f'(t)=\frac{-t^2-2t+2}{t+1}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{3}-1$

Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng để để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$ thì $3m>2-2\sqrt{3}\Leftrightarrow m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Chọn ý **B.**

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\ln(m+\ln(m+x))=x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m\ge 0$ **B.** $m>1$ **C.** $m<e$ **D.** $m\ge -1$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 4 – năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $x>e^{-m}-m$

Đặt $\ln(m+x)=y$ ta được $e^y-m=x$. Thay vào (1) ta được $\ln(m+y)=x\Leftrightarrow e^x-m=y$

Ta có hệ $\begin{cases}e^x-m=y\\ e^y-m=x\end{cases}\Rightarrow e^x-e^y=y-x\Rightarrow e^x+x=e^y+y$

Do hàm số $f(t)=e^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $x=y\Rightarrow x=\ln(x+m)\Leftrightarrow e^x-x=m$

Xét hàm số $g(x)=e^x-x$; $g'(x)=e^x-1$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Vẽ bảng biến thiên cho hàm $g(x)$ ta suy ra phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm khi và chỉ khi $m>1$.

Chọn ý **B.**

Câu 25: Cho phương trình $e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính $T=10a+20b$.

A. $T=10\sqrt{3}$ **B.** $T=0$ **C.** $T=1$ **D.** $T=3\sqrt{10}$

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$$

$$\Leftrightarrow e^{m\cos x-\sin x}+m\cos x-\sin x=e^{2(1-\sin x)}+2(1-\sin x)$$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t\ (t\in\mathbb{R})$, $f'(t)=e^t+1>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{m\cos x-\sin x}+m\cos x-\sin x=e^{2(1-\sin x)}+2(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow m\cos x-\sin x=2(1-\sin x)\Leftrightarrow m\cos x+\sin x=2$$

Phương trình có nghiệm khi $m^2+1\ge 4\Leftrightarrow m^2\ge 3\Rightarrow S=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Vậy $T=10a+20b=10\sqrt{3}$

Chọn ý **A.**

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2\dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m$

Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3 **B.** Vô số **C.** 2 **D.** 4

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện: $3x^2+3x+m+1>0$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}\right)-1=x^2-5x+1-m\ \Leftrightarrow \log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{4x^2-2x+2}=x^2-5x+1-m$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2+3x+m+1)-\log_2(4x^2-2x+2)=(4x^2-2x+2)-(3x^2+3x+m+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2+3x+m+1)+(3x^2+3x+m+1)=\log_2(4x^2-2x+2)+(4x^2-2x+2)\ (1)$$

Xét hàm số: $f(t)=t+\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó phương trình $(1)\Leftrightarrow f(4x^2-2x+2)=f(3x^2+3x+m+1)$

$$\Leftrightarrow 4x^2-2x+2=3x^2+3x+m+1\Leftrightarrow x^2-5x=m-1\ (2)$$

Điều này đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số: $g(x)=x^2-5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=2x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-\dfrac{25}{4}<m-1<-4\Leftrightarrow -\dfrac{21}{4}<m<-3$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4\}$.

Chọn ý **C.**

Câu 27: Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_m\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

THPT Chuyên Đại học Vinh – Nghệ An lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện xác định: $x>\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x\ge 1$

Đặt $t=\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\Rightarrow t'=\dfrac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}}.\dfrac{1}{\ln 2}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\ln 2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}\ln 2}<0$

Mặt khác ta có $x>2\Rightarrow t<\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)$

Phương trình trở thành

$$t.\log_5 2^t=\log_m\frac{1}{2^t}\Leftrightarrow t.\log_5 2=-\log_m 2\Leftrightarrow \log_5 m=-\frac{1}{t}$$

Để cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2 thì ta cần có

$$\log_5 m<-\frac{1}{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}\Leftrightarrow m<5^{-\frac{1}{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}}$$

Do $m\in\mathbb{N}^*$ và $m\ne 1$ nên $m=2$

Chọn ý **D.**

Câu 28: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2018)$ để ta luôn có $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}$?

A. 2011 **B.** 2016 **C.** 2019 **D.** 2009

THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp lần 5 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta luôn có $\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}>0,\forall n$. Từ đó suy ra

$$\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\sqrt{\lim\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\sqrt{\lim\frac{1+3.\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+9^a}}=\sqrt{\frac{1}{9^a}}=\frac{1}{3^a}.$$

Theo đề bài ta có $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3^a}\le\dfrac{1}{2187}\Leftrightarrow a\ge 7$.

Do a là số nguyên thuộc khoảng $(0;2018)$ nên có $a \in \{7;8;9;...;2017\}$ nên ta có tất cả 2011 giá trị của a.

Chọn ý **A.**

Câu 29: Cho phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + 8 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1) = 6$. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là?

A. Không có m **B.** $1 < m < 3$ **C.** $m > 3$ **D.** $m < 2$

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 8 = 0$ (1).

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 7 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 - 2\sqrt{2} \\ m > -1 + 2\sqrt{2} \end{array}\right. \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 + 2\sqrt{2}$.

Khi đó $t_1 = m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2^{x_1}$, $t_2 = m + 1 - \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2^{x_2}$

Ta có $t_1.t_2 = 2^{x_1 + x_2} = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$, $(x_1+1)(x_2+1) = 6 \Leftrightarrow x_1x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}\right).\log_2\left(m + 1 - \sqrt{m^2 + 2m - 7}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}\right)\log_2 \frac{8}{m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}\right)\left[3 - \log_2\left(m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}\right)\right] = 2 \quad (2)$$

Đặt $u = \log_2\left(m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}\right)$ thì (2) trở thành $3u - u^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 2 \end{array}\right.$

- Nếu $u = 1 \Rightarrow m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 1 - m$ thì phương trình vô nghiệm do $m > -1 + 2\sqrt{2}$
- Nếu $u = 2 \Rightarrow m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 3 - m \Leftrightarrow m = 2$ (nhận).

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán

Chọn ý **B.**

Câu 30 : Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt .

$$2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2 - 2x + 3\right) = 4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m| + 2\right)$$

A. $S = \left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$ **B.** $S = \left\{\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right\}$ **C.** $S = \left\{-\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$ **D.** $S = \left\{\frac{1}{2};1;-\frac{3}{2}\right\}$

THPT Chu Văn Anh – Hà Nội năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét hàm số $f(t)=2^t.\log_2(t+2)$, $f'(t)=2^t.\ln 2.\log_2(t+2)+2^t.\frac{1}{(t+2)\ln 2}>0$, $\forall t\geq 0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$2^{(x-1)^2}.\log_2(x^2-2x+3)=4^{|x-m|}.\log_2(2|x-m|+2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.\log_2\left((x-1)^2+2\right)=2^{2|x-m|}.\log_2(2|x-m|+2)$$

$$\Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right]=f\left[2|x-m|\right] \Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m| \ (1)$$

Khi $x\geq m$, (1) $\Leftrightarrow x^2-4x+1+2m=0$ (2)

Khi $x<m$, (1) $\Leftrightarrow x^2=2m-1$ (3)

- **Trường hợp 1:** (2) có nghiệm kép x_0, (3) có hai nghiệm phân biệt khác x_0.

Khi đó $m=\frac{3}{2}$ thì (2) có nghiệm $x=2\geq\frac{3}{2}$, (3) có hai nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2}<\frac{3}{2}$.

- **Trường hợp 2:** (3) có nghiệm kép x_0, (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0.

Khi đó $m=\frac{1}{2}$ thì (3) có nghiệm $x=0<\frac{1}{2}$, (2) có hai nghiệm $x=2\pm\sqrt{2}\geq\frac{1}{2}$.

- **Trường hợp 3:** (2) và (3) có chung một nghiệm x_0

Khi đó $x_0=m\Rightarrow m=1$, thử lại $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $S=\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$.

Chọn ý **B.**

Câu 31 : Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng với mọi $x\in(1;100)$: $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$.

A. 2018 **B.** 4026 **C.** 2013 **D.** 4036

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\left(m+\frac{\log x}{10}\right)(\log x+1)\geq\frac{11}{10}\log x\Leftrightarrow(\log x+10m)(\log x+1)-11\log x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10m(\log x+1)+\log^2 x-10\log x\geq 0.$$

Do $x\in(1;100)\Rightarrow\log x\in(0;2)$. Do đó ta có

$$10m(\log x+1)+\log^2 x-10\log x\geq 0\Leftrightarrow 10m\geq\frac{10\log x-\log^2 x}{\log x+1}$$

Đặt $t=\log x$, $t\in(0;2)$, xét hàm số $f(t)=\frac{10t-t^2}{t+1}$

Ta có: $f'(t)=\frac{10-2t-t^2}{(t+1)^2}>0\ \forall t\in(0;2)$. Do đó $f(0)<f(t)<f(2)\Leftrightarrow 0<f(t)<\frac{16}{3}$

Để $10m \ge \dfrac{10\log x - \log^2 x}{\log x + 1}$ đúng với mọi $x \in (1;100)$ thì $10m \ge \dfrac{16}{3} \Rightarrow m \ge \dfrac{8}{15}$

Do đó $m \in \left[\dfrac{8}{15};2018\right]$ hay có 2018 số thỏa mãn.

Chọn ý **A.**

Câu 32 : Gọi S là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^2 + \ln(x+m+2)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Biết $S = \left(-\infty; a+\sqrt{b}\right]$. Tính tổng $K = a+b$ là

A. $K=-5$ **B.** $K=5$ **C.** $K=0$ **D.** $K=2$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > -m-2$.

Cách 1. Ta có $y' = 2x + \dfrac{1}{x+m+2} = \dfrac{2x^2+2(m+2)x+1}{x+m+2}$, $y'=0 \Leftrightarrow 2x^2+2(m+2)x+1=0$

- Trường hợp 1. $\Delta' = m^2+4m+2 \le 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{2} \le m \le -2+\sqrt{2}$
  Khi đó $y' \ge 0\ \forall x \in (-m-2;+\infty)$.
- Trường hợp 2. $\left[\begin{array}{l} m < -2-\sqrt{2} \\ m > -2+\sqrt{2} \end{array}\right.$, khi đó $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1 = \frac{-(m+2)-\sqrt{m^2+4m+2}}{2},\ x_2 = \frac{-(m+2)+\sqrt{m^2+4m+2}}{2}$$

Vẽ bảng biến thiên ta suy ra được:

$$y' \ge 0\ \forall x \in (-m-2;+\infty) \Leftrightarrow x_2 \le -m-2 \Leftrightarrow \frac{-(m+2)+\sqrt{m^2+4m+2}}{2} \le -m-2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2+4m+2} \le -m-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m+2 \le m^2+4m+4 \\ m \le -2 \\ m^2+4m+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -2-\sqrt{2} \\ m \ge -2+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le -2-\sqrt{2}.$$

Vậy $S = \left(-\infty;-2+\sqrt{2}\right] \Rightarrow a=-2$, $b=2$ nên $K=a+b=0$.

Cách 2. Ta có $y' = 2x + \dfrac{1}{x+m+2} = \dfrac{2x^2+2(m+2)x+1}{x+m+2}$, $y'=0 \Leftrightarrow 2x^2+2(m+2)x+1=0$

- Trường hợp 1. $\Delta' = m^2+4m+2 \le 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{2} \le m \le -2+\sqrt{2}$, khi đó $y' \ge 0\ \forall x \in (-m-2;+\infty)$.
- Trường hợp 2. $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2-\sqrt{2} \\ m > -2+\sqrt{2} \end{array}\right.$, $(*)$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+2) \\ x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$ khi đó ta cần có $x_1 < x_2 \le -(m+2)$. Suy ra: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2(m+2) < 0 \\ (x_1 + m + 2)(x_2 + m + 2) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow m < -2 - \sqrt{2}$

Kết hợp (*) và (**) có $m < -2 - \sqrt{2}$. Hợp hai trường hợp có các giá trị cần tìm của m là 100. Vậy $S = \left(-\infty; -2+\sqrt{2}\right] \Rightarrow a = -2$, 100 nên $K = a + b = 0$.

Chọn ý **C.**

Câu 33 : Cho hai số thực a, b $(a > 1, b > 1)$. Phương trình $a^x + b^x = b + ax$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = a^x + b^x - b - ax$. Ta có $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b - a$.

Do $f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b > 0$ nên hàm số đã cho có tối đa một cực trị. Do đó phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm. Ta sẽ chọn các số để phương trình trên có 2 nghiệm như sau. Chọn $a = b = e$ ta có $f'(x) = 2e^x - e$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{e}{2}$.

$f\left(\ln\dfrac{e}{2}\right) = -e\ln\dfrac{e}{2} < 0$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Vì vậy phương trình đã cho có tối đa 2 nghiệm.

Chọn ý **C.**

Câu 34: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$27^x - m.3^{2x+1} + (m^2 - 1)3^{x+1} - (m^2 - 1) = 0$$

Có 3 nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b$

A. 2 **B.** $1+\sqrt{3}$ **C.** $2+\sqrt{2}$ **D.** $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Lời giải

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$ phương trình trở thành $t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t - m^2 + 1 = 0$. Ta cần tìm điều kiện để phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.

Xét hàm số $y = t^3 - 3mt^2 + (m^2 - 1)t - m^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = m - 1 = x_{CD} \\ t = m + 1 = x_{CT} \end{array}\right.$. Để phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} y_{CD}.y_{CT} < 0 \\ x_{CD} > 0, x_{CT} > 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m+1>0 \\ (m^2-1)(m^2-3)(m^2-2m-1)<0 \\ -(m^2-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{3} < m < 1+\sqrt{2} \right.$$

Chọn ý **D.**

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018;2018]$ để phương trình $\left|2^{|x|+1}-8\right| = \frac{3}{2}x^2 + m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2013 **B.** 2012 **C.** 4024 **D.** 2014

Lời giải

Phương trình tương đương với $m = \left|2^{|x|+1}-8\right| - \frac{3}{2}x^2$. Hàm số $f(x) = \left|2^{|x|+1}-8\right| - \frac{3}{2}x^2$ là một hàm số chẵn do đó ta chỉ cần xét trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ để suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên cả tập số thực.

Xét hàm số

$$f(x) = \left|2^{|x|+1}-8\right| - \frac{3}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \dfrac{3x^2}{2} (x \geq 2) \\ -2^{x+1} + 8 - \dfrac{3x^2}{2} (0 \leq x < 2) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1}\ln 2 - 3x (x > 2) \\ -2^{x+1}\ln 2 - 3x < 0 (0 < x < 2) \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = 2^{x+1}\ln^2 x - 3 > 8\ln^2 2 - 3 > 0, \forall x > 2, g(2) = 8\ln 2 - 6 < 0, g(3) = 16\ln 2 - 9 > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (2;3)$.

Vẽ bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ ta suy ra được phương trình có đúng 2 nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m = f(x_0) = 2^{x_0+1} - 8 - \dfrac{3{x_0}^2}{2} \notin \mathbb{Z} \end{array} \right. \Rightarrow m \in \{7,8,...,2018\}$

Chọn ý **B.**

Câu 36: Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\right)\log_{3a}(x^2+3ax+12) \geq 0$.

Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(1;2)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(2;+\infty)$

THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện xác định $0 < a \neq \frac{1}{3}$.

Biến đổi bất phương trình tương đương

$$\log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\right)\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{3a} 11 - \log_7\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right).\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_7\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right).\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right) \leq \log_{3a} 11$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+3ax+10} \geq 0 \Rightarrow x^2+3ax+12 = x^2+3ax+10+2 = t^2+2$. Khi đó bất phương trình trở thành $\log_7(t+4)\log_{3a}(t^2+2) \leq \dfrac{1}{\log_{11} 3a}(*)$.

- Nếu $0<a<\dfrac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a < 0$ bất phương trình $(*)$ trở thành

$$\log_7(t+4)\log_{11} 3a\log_{3a}(t^2+2) \geq 1 \Leftrightarrow \log_7(t+4)\log_{11}(t^2+2) \geq 1$$

Xét hàm số $f(t)=\log_7(t+4)\log_{11}(t^2+2)(t\geq 0)$ là hàm đồng biến đồng thời $f(3)=1$ nên $f(t)\geq f(3) \Leftrightarrow t\geq 3 \Leftrightarrow x^2+3ax+1\geq 0$. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì ta có $a=\dfrac{2}{3}$, nghiệm này không thỏa mãn.

- Nếu $a>\dfrac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a > 0$. Đến đây xét tương tự trường hợp 1 ta sẽ tìm được $a=\dfrac{2}{3}$

Chọn ý **C.**

7. CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

CÁC BÀI TOÁN

Câu 1 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2+\log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247 **B.** 248 **C.** 229 **D.** 290

Đề tham khảo kỳ thi THPT Quốc Gia 2018 – Bộ Giáo dục và Đào tạo

Câu 2 : Cho biểu thức $A=\log\left(2017+\log\left(2016+\log\left(2015+\log\left(...+\log\left(3+\log 2\right)...\right)\right)\right)\right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017;\log 2018)$ **B.** $(\log 2019;\log 2020)$

C. $(\log 2018;\log 2019)$ **D.** $(\log 2020;\log 2021)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Ninh Bình năm học 2017 – 2018

Câu 3 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1}=u_n.e\forall n\geq 1$. Tìm u_1

A. e **B.** e^2 **C.** e^{-3} **D.** e^{-4}

THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Câu 4: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=e^{4u_1}$ và $u_{n+1}=u_n+3$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng?

A. 1419 **B.** 1418 **C.** 1420 **D.** 1417

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 5: Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

A. $n = 123$ **B.** $n = 41$ **C.** $n = 39$ **D.** $n = 49$

Câu 6: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của số n để $u_n > 1$?

A. 725 **B.** 682 **C.** 681 **D.** 754

Câu 7: Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 \neq 1$ thỏa mãn đẳng thức sau :
$\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng

A. 11 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2018]$ sao cho ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008 **B.** 2006 **C.** 2018 **D.** 2007

Câu 9: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 230 **B.** 231 **C.** 233 **D.** 234

Câu 10: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n} < \frac{148}{75}$.

A. 18 **B.** 17 **C.** 16 **D.** 19

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết $f(1).f(2).f(3)...f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m - n^2$.

A. -2018 **B.** 2018 **C.** 1 **D.** -1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn đẳng thức $u_1+u_2+...+u_{2018}=4(u_1+u_2+...+u_{1009})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\log_3^2 u_2+\log_3^2 u_5+\log_3^2 u_{14}$$

A. -2 **B.** -3 **C.** 2 **D.** 3

Câu 13: Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2>a_1\ge 0$ và $b_2>b_1\ge 1$; và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(a_2)+2=f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2)+2=f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n>2018a_n$ là

A. 16 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 18

THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 14: Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(\log_2(b_2))+2=f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n>5^{100}$ bằng

A. 234 **B.** 229 **C.** 333 **D.** 292

THPT Phan Châu Trinh – Đăk Lăk lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 15: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\left(u_1^2+u_3+\dfrac{1}{4}u_1-\dfrac{1}{8}\right)=e^{4u_2-7}+e^{6u_1-6}-3\\ u_{n+1}=\dfrac{3}{2}\left(u_n-\dfrac{n+4}{n^2+3n+2}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Giá trị lớn nhất của số n để $u_n>\dfrac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}$

A. 3472 **B.** 3245 **C.** 3665 **D.** 3453

Câu 16: Cho $f(n)=(n^2+n+1)^2+1\ \ \forall n\in N^*$. Đặt $u_n=\dfrac{f(1).f(3)...f(2n-1)}{f(2).f(4)...f(2n)}$.

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n+u_n<\dfrac{-10239}{1024}$.

A. $n=23$ **B.** $n=29$ **C.** $n=21$ **D.** $n=33$

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 17: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=\ln(2n^2+1)-\ln(n^2+n+1),\forall n\ge 1$. Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $u_n-[u_n]<\dfrac{2}{3}$. Biết $[a]$ kí hiệu phần nguyên của số a là số tự nhiên nhỏ nhất không vượt quá a.

A. 37 **B.** 36 **C.** 38 **D.** 40

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 18: Cho dãy số (u_n) có tất cả số hạng đều dương thỏa mãn $u_{n+1}=2u_n$ và đồng thời $\sqrt{u_1^{\ 2}+\sqrt{u_2^2+...+\sqrt{u_n^2+\sqrt{u_{n+1}^2+u_{n+2}+1}}}}=\frac{4}{3}, \forall n\ge 1$. Số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n>5^{100}$ là?

A. 232 **B.** 233 **C.** 234 **D.** 235

Câu 19: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln\left(u_1^2+u_2^2+10\right)=\ln\left(2u_1+6u_2\right)$ và đồng thời $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1, \forall n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$

A. 100 **B.** 99 **C.** 101 **D.** 102

Câu 20: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}\log\left(u_2+\frac{391}{40}\right)+\sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1+\frac{39}{4}\right)}=2\\ u_n=\frac{2(n+1)u_{n+1}}{n}+\frac{2-n}{\left(n^2+n+1\right)^2+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>\frac{5^{100}+n^2+1}{5^{100}\left(n^3+n\right)}$.

A. 235 **B.** 255 **C.** 233 **D.** 241

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n>5^{100}$ bằng

A. 247 **B.** 248 **C.** 229 **D.** 290

Đề tham khảo kỳ thi THPT Quốc Gia 2018 – Bộ Giáo dục và Đào tạo

Lời giải

Vì $u_{n+1}=2u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=2$.

Ta có $u_{10}=u_1.q^9=2^9.u_1$. Xét $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$

$$\Leftrightarrow \log u_1-2\log\left(2^9.u_1\right)+\sqrt{2+\log u_1-2\log\left(2^9.u_1\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \log u_1-18\log 2-2\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-18\log 2-2\log u_1}=0$$

$$\Leftrightarrow -\log u_1-18\log 2+\sqrt{2-\log u_1-18\log 2}=0$$

Đặt $\sqrt{2-\log u_1-18\log 2}=t(t\ge 0)$. Phương trình trên trở thành

$$t^2-2+t=0\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2(L)\end{array}\right.$$

Với $t=1\Leftrightarrow\sqrt{2-\log u_1-18\log 2}=1\Leftrightarrow 2-\log u_1-18\log 2=1\Leftrightarrow u_1=\frac{5}{2^{17}}$

Trong trường hợp này ta có: $u_n=\frac{5}{2^{17}}.2^{n-1}>5^{100}\Leftrightarrow 2^{n-18}>5^{99}\Leftrightarrow n>99\log_2 5+18$

Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 248$.

Chọn ý **B.**

Câu 2 : Cho biểu thức $A = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(... + \log\left(3 + \log 2\right)...\right)\right)\right)\right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017; \log 2018)$ **B.** $(\log 2019; \log 2020)$

C. $(\log 2018; \log 2019)$ **D.** $(\log 2020; \log 2021)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Ninh Bình năm học 2017 - 2018

Lời giải

Đặt $A_n = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(... + \log\left(3 + \log 2\right)...\right)\right)\right)\right) \Rightarrow A_n = (n + A_{n-1})$

Ta có

$0 < \log 2 < 1 \Leftrightarrow 0 < A_2 < 1$

$\Rightarrow 0 < \log 3 < A_3 = \log(3 + A_2) < \log 4 < 1$

...

$\Rightarrow 0 < \log 9 < A_9 = \log(9 + A_8) < \log 10 = 1$

$\Rightarrow 1 = \log 10 < A_{10} = \log(10 + A_9) < \log 11 < 2$

$\Rightarrow 1 < \log 12 < A_{11} = \log(11 + A_{10}) < \log 13 < 2$

...

$\Rightarrow 2 < \log 999 < A_{997} = \log(997 + A_{996}) < \log 1000 = 3$

$\Rightarrow 3 = \log 1000 < A_{998} = \log(998 + A_{997}) < \log 1001 < 4$

$\Rightarrow 3 < \log 1002 < A_{999} = \log(999 + A_{998}) < \log 1003 < 4$

...

$\Rightarrow 3 < \log 2020 < A_{2017} = \log(2017 + A_{2016}) < \log 2021 < 4$

Vậy $A_{2017} \in (\log 2020; \log 2021)$

Chọn ý **D.**

Câu 3 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1} = u_n.e \forall n \ge 1$. Tìm u_1

A. e **B.** e^2 **C.** e^{-3} **D.** e^{-4}

THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết suy ra dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội e và $u_n > 0 \forall n \ge 1$.

Ta có $u_6 = u_1.e^5; u_8 = u_1.e^7; u_4 = u_1.e^3$. Do đó ta có:

$$\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1 \Leftrightarrow \ln^2(u_1.e^5) - \ln(u_1.e^7) = \ln(u_1.e^3) - 1$$

$$\Leftrightarrow (\ln u_1 + 5)^2 - (\ln u_1 + 7) = (\ln u_1 + 3) - 1 \Leftrightarrow (\ln u_1)^2 + 8(\ln u_1) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln u_1 = -4 \Leftrightarrow u_1 = e^{-4}$$

Chọn ý **D.**

Câu 4: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=e^{4u_1}$ và $u_{n+1}=u_n+3$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n<\ln 2018$ bằng?

A. 1419 **B.** 1418 **C.** 1420 **D.** 1417

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta có $u_{n+1}=u_n+3$ với mọi $n\ge 1$ nên (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=3$

$$e^{u_{18}}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=e^{4u_1}\Leftrightarrow 5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=e^{4u_1}-e^{u_{18}}\ (1)$$

Đặt $t=e^{u_{18}}-e^{4u_1}\ (t\ge 0)$ Phương trình (1) trở thành

$$5\sqrt{t}=-t\Leftrightarrow t+5\sqrt{t}=0\Leftrightarrow \sqrt{t}\left(\sqrt{t}+5\right)=0\Leftrightarrow \sqrt{t=0}\Leftrightarrow t=0$$

Với $t=0$ ta có $e^{u_{18}}=e^{4u_1}\Leftrightarrow u_{18}=4u_1\Leftrightarrow u_1+51=4u_1\Leftrightarrow u_1=17$

Vậy $u_n=u_1+(n-1)d=17+(n-1)3=3n+14$

Khi đó ta được $\log_3 u_n<\ln 2018\Leftrightarrow u_n<3^{\ln 2018}\Leftrightarrow 3n+14<3^{\ln 2018}\Leftrightarrow n<\dfrac{3^{\ln 2018}-14}{3}\approx 1419,98$

Vậy giá trị lớn nhất của n là 1419.

Chọn ý **A.**

Câu 5: Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1=1$ và $5^{a_{n+1}-a_n}-1=\dfrac{3}{3n+2}$, với mọi $n\ge 1$. Tìm số nguyên dương $n>1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

A. $n=123$ **B.** $n=41$ **C.** $n=39$ **D.** $n=49$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $5^{a_{n+1}-a_n}-1=\dfrac{3}{3n+2}\Leftrightarrow 5^{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{3n+5}{3n+2}\Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+\log_5\dfrac{3n+5}{3n+2}$

Từ đó suy ra

$$a_n=a_{n-1}+\log_5\frac{3n+2}{3n-1}=a_{n-2}+\log_5\frac{3n-1}{3n-4}+\log_5\frac{3n+2}{3n-1}$$

$$\dots$$

$$=a_1+\log_5\frac{8}{5}+\log_5\frac{11}{8}+\dots+\log_5\frac{3n-1}{3n-4}+\log_5\frac{3n+2}{3n-1}$$

$$=1+\log_5\left(\frac{8}{5}.\frac{11}{8}\dots\frac{3n-1}{3n-4}.\frac{3n+2}{3n-1}\right)=1+\log_5\frac{3n+2}{5}=\log_5(3n+2)$$

Do đó $a_n=\log_5(3n+2)$. Vì $n>1$ nên $a_n=\log_5(3n+2)>\log_5 5=1$, đồng thời dễ thấy (a_n) là dãy tăng. Lại có $a_n=\log_5(3n+2)\Leftrightarrow n=\dfrac{5^{a_n}-2}{3}$.

Lần lượt thử các giá trị $a_n=2;3;4;\dots$ ta có $a_n=3$ là giá trị nguyên, lớn hơn 1, nhỏ nhất, cho giá trị tương ứng $n=41$.

Vậy $n=41$.

Chọn ý **B.**

Câu 6: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 4e^{2u_9}+2e^{u_9}-4e^{u_1+u_9}=e^{u_1}-e^{2u_1}+3 \\ u_{n+1}=u_n+3, \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của số n để $u_n>1$?

A. 725 **B.** 682 **C.** 681 **D.** 754

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra (u_n) là CSC có công sai $d=3\Rightarrow u_9=u_1+24$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$4e^{2u_9}+2e^{u_9}-4e^{u_1+u_9}=e^{u_1}-e^{2u_1}+3$$
$$\Leftrightarrow 4e^{2u_1+48}+2e^{u_1+24}-4e^{2u_1+24}=e^{u_1}-e^{2u_1}-3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(2e^{24}-1\right)e^{2u_1}\right)^2+\left(\left(2e^{24}-1\right)e^{2u_1}\right)-3=0$$
$$\Rightarrow \left(2e^{24}-1\right)e^{2u_1}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow u_1=\ln\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2\left(2e^{24}-1\right)}\right]$$

Ta có $u_n=u_1+3(n-1)>2018\Rightarrow n>681\Rightarrow n\ge 682$

Chọn ý **B.**

Câu 7: Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1\ne 1$ thỏa mãn đẳng thức sau : $\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$ và $u_{n+1}=7u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>1111111$ bằng

A. 11 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

Vì $u_{n+1}=7u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=7$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 5+\log_2 u_1)^2+(\log_2 7+\log_2 u_1)^2=\log_2^2 5+\log_2^2 7$$
$$\Leftrightarrow 2\log_2 5.\log_2 u_1+2\log_2^2 u_1+2\log_2 7.\log_2 u_1=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 u_1=0\\ 2\log_2 5+2\log_2 u_1+2\log_2 7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u_1=1 \quad (L)\\ \log_2 35u_1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow u_1=\frac{1}{35}$$

Ta có $u_n=u_1.7^{n-1}.u_n>1111111\Leftrightarrow \frac{1}{35}.7^{n-1}>1111111\Leftrightarrow 7^{n-1}>35.1111111$

$\Leftrightarrow n>\log_7(35.1111111)+1$. Mà $n\in\mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trương hợp này là $n=10$.

Chọn ý **D.**

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $\left[0;2018\right]$ sao cho ba số $5^{x+1}+5^{1-x};\frac{a}{2};25^x+25^{-x}$ theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008 **B.** 2006 **C.** 2018 **D.** 2007

Lời giải

Ba số $5^{x+1}+5^{1-x}$; $\frac{a}{2}$; 25^x+25^{-x}, theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$a=\left(5^{x+1}+5^{1-x}\right)+\left(25^x+25^{-x}\right)\ge 2\sqrt{5^{x+1}\cdot 5^{1-x}}+2\sqrt{25^x\cdot 25^{-x}}=12.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}5^{x+1}=5^{1-x}\\25^x=25^{-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

Như vậy nếu xét $a\in\left[0;2018\right]$ thì ta nhận $a\in\left[12;2018\right]$. Có 2007 số a thoả đề.

Chọn ý **D.**

Câu 9: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=\dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n=u_1+u_2+...+u_n>5^{100}$ bằng

A. 230 **B.** 231 **C.** 233 **D.** 234

Lời giải

Theo giả thiết ta có $u_{n+1}=2u_n$ nên $\left(u_n\right)$ là một cấp số nhân với công bội $q=2$. Suy ra $u_n=u_1.2^{n-1}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$. Ta lại có :

$$2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}\Leftrightarrow 2.4^{u_1}+\frac{8}{4^{u_1}}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-u_3+4\right)}\quad(1)$$

Mà $2.4^{u_1}+\dfrac{8}{4^{u_1}}\ge 8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-u_3+4\right)}=\dfrac{8}{\log_3\left[\left(\frac{1}{2}u_3-1\right)^2+3\right]}\le 8$

Nên phương trình (1) tương đương $\begin{cases}2.4^{u_1}+\dfrac{8}{4^{u_1}}=8\\ \dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-u_3+4\right)}=8\end{cases}\Leftrightarrow u_1=\dfrac{1}{2}$

Khi đó $S_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1\dfrac{1-2^n}{1-2}=\dfrac{2^n-1}{2}$

Do đó, $S_n>5^{100}\Leftrightarrow\dfrac{2^n-1}{2}>5^{100}\Leftrightarrow\log_5\dfrac{2^n-1}{2}>100\Leftrightarrow n>233$

Chọn ý **D.**

Câu 10: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5-63)=2\log_4(u_n-8n+8)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\dfrac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n}<\dfrac{148}{75}$.

A. 18 **B.** 17 **C.** 16 **D.** 19

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 - 2018

Lời giải

Ta có $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\log_3(2u_5-63)=2\log_4(u_n-8n+8)\Leftrightarrow\log_3(2u_5-63)=\log_2(u_n-8n+8)$.

Đặt $t=\log_3(2u_5-63)$ $\Rightarrow\begin{cases}2u_5-63=3^t\\u_n-8n+8=2^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2u_5-63=3^t\\u_5-32=2^t\end{cases}\Rightarrow 1=3^t-2.2^t\Rightarrow t=2$

$$\Rightarrow u_n=8n-4\Rightarrow S_n=u_1+u_2+...+u_n=4n^2$$

Do đó $\dfrac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n}=\dfrac{(8n-4).16n^2}{(16n-4).4n^2}<\dfrac{148}{75}\Rightarrow n<19$.

Chọn ý **A.**

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{\frac{m}{n}}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P=m-n^2$.

A. -2018 **B.** 2018 **C.** 1 **D.** -1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 - 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}=e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}+1}}=e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+1}}=e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1\right)^2}}=e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1}=e.e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}.$$

Do đó ta được:

$$f(1)=e.e^{1-\frac{1}{2}};f(2)=e.e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}};\ f(3)=e.e^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}};...;f(2016)=e.e^{\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}};f(2017)=e.e^{\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}}.$$

$$\Rightarrow f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{2017}.e^{1-\frac{1}{2018}}=e^{\frac{2017}{2018}+2017}=e^{\frac{2018^2-1}{2018}}$$

$\Rightarrow m=2018^2-1$, $n=2018$. Vậy $P=-1$.

Chọn ý **D.**

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn đẳng thức $u_1+u_2+...+u_{2018}=4(u_1+u_2+...+u_{1009})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\log_3^2u_2+\log_3^2u_5+\log_3^2u_{14}$$

A. -2 **B.** -3 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$u_1+u_2+...+u_{2018}=4\left(u_1+u_2+...+u_{1009}\right)\Leftrightarrow \frac{2018\left(2u_1+2017d\right)}{2}=2.1009\left(2u_1+1008d\right)$$

$$\Leftrightarrow u_1=\frac{d}{2}\Rightarrow\left(u_n\right):\frac{d}{2};\frac{3d}{2};\frac{5d}{2};...\Rightarrow\begin{cases}u_2=\dfrac{3d}{2}\\ u_5=\dfrac{9d}{2}\\ u_{14}=\dfrac{27d}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\log_3^2\frac{3d}{2}+\log_3^2\frac{9d}{2}+\log_3^2\frac{27d}{2}\ge 2$$

Chọn ý **C.**

Câu 13: Cho cấp số cộng $\left(a_n\right)$, cấp số nhân $\left(b_n\right)$ thỏa mãn $a_2>a_1\ge 0$ và $b_2>b_1\ge 1$; và hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ sao cho $f\left(a_2\right)+2=f\left(a_1\right)$ và $f\left(\log_2 b_2\right)+2=f\left(\log_2 b_1\right)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n>2018a_n$ là

A. 16 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 18

THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Theo giả thiết $\begin{cases}f\left(a_2\right)+2=f\left(a_1\right)\\ a_2>a_1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f\left(a_2\right)<f\left(a_1\right)\\ a_2>a_1\ge 0\end{cases}$

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l}0\le a_1<a_2\le 1\\ 0\le a_1\le 1<a_2\end{array}\right.$, hơn nữa $f\left(x\right)+2\ge 0\,\forall x\ge 0$. Ta xét các trường hợp:

- Nếu $0\le a_1<a_2\le 1$ thì $\begin{cases}f\left(a_2\right)+2\ge 0\\ f\left(a_1\right)\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f\left(a_2\right)=-2\\ f\left(a_1\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=1\\ a_1=0\end{cases}$.
- Nếu $0\le a_1\le 1<a_2$ thì $\begin{cases}f\left(a_2\right)+2>0\\ f\left(a_1\right)\le 0\end{cases}$ điều này là không thể.

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $a_1=0;a_2=1$.

Từ đó suy ra $a_n=n-1\left(n\ge 1\right)$. Tương tự vì $b_2>b_1\ge 1$ nên $\log_2 b_2>\log_2 b_1\ge 0$, suy ra

$$\begin{cases}\log_2 b_2=1\\ \log_2 a_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_2=1\\ b_1=1\end{cases}\Rightarrow b_n=2^{n-1}\left(n\ge 1\right).$$

Xét hàm số $g\left(x\right)=2^x-2018x$ trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\log_2\dfrac{2018}{\ln 2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$g\left(\log_2\dfrac{2018}{\ln 2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\begin{cases} g\left(\log_2\dfrac{2018}{\ln 2}\right)<0 \\ \log_2\dfrac{2018}{\ln 2}>11 \\ g(12)=-20120 \\ g(13)=-18042 \\ g(14)=-11868 \\ g(15)=2498>0 \end{cases}$ nên số nguyên dương nhỏ nhất n thỏa $g(n-1)>0$ là $n-1=15 \Leftrightarrow n=16$.

Chọn ý **A.**

Câu 14: Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(\log_2(b_2))+2=f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n>5^{100}$ bằng

A. 234 **B.** 229 **C.** 333 **D.** 292

THPT Phan Châu Trinh – Đăk Lăk lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x$.

Có $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác, ta có $b_1>b_2\ge 1$. Đặt $a=\log_2 b_2>\log_2 b_1=b\ge 0$. Ta có: $a^3-3a+2=b^3-3b$ (1).

- Nếu $b>1 \Rightarrow a>b>1 \Rightarrow a^3-3a>b^3-3b \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
- Nếu $0\le b\le 1 \Rightarrow -2<b^3-3b\le 0 \Rightarrow a^3-3a+2\le 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2)\le 0$.

Suy ra $a=1 \Rightarrow b=0$. Khi đó $\begin{cases} b_1=2^0=1 \\ b_2=2^1=2 \end{cases} \Rightarrow b_n=2^{n-1}>5^{100} \Leftrightarrow n-1>100\log_2 5 \Rightarrow n\ge 234$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 234.

Chọn ý **A.**

Câu 15: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(u_1^2+u_3+\frac{1}{4}u_1-\frac{1}{8}\right)=e^{4u_2-7}+e^{6u_1-6}-3 \\ u_{n+1}=\frac{3}{2}\left(u_n-\frac{n+4}{n^2+3n+2}\right), \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

Giá trị lớn nhất của số n để $u_n>\frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}$

A. 3472 **B.** 3245 **C.** 3665 **D.** 3453

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left(u_n-\frac{3}{n+1}+\frac{2}{n+2}\right)\Leftrightarrow u_{n+1}-\frac{3}{n+2}=\frac{3}{2}\left(u_n-\frac{3}{n+1}\right)$

Đặt $v_n=u_n-\frac{3}{n+1}\Rightarrow v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n\Rightarrow(v_n)$ là CSN với công bội $q=\frac{3}{2}$.

Khi đó $v_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}v_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(u_1-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow u_n=\frac{3}{n+1}-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(u_1-\frac{3}{2}\right)$

Ta có $u_3=\frac{33}{8}-\frac{9}{4}u_1, u_2=\frac{13}{4}-\frac{3}{2}u_1$, thay vào giả thiết ta được

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(u_1^2-2u_1+4\right)=e^{6-6u_1}+e^{6u_1-6}-3$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $e^{6-6u_1}+e^{6u_1-6}-3\ge 2\sqrt{e^{6-6u_1}.e^{6u_1-6}}-3=-1$

Mặt khác ta cũng có $\log_{\frac{1}{3}}\left(u_1^2-2u_1+4\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left((u_1-1)^2+3\right)\le -1$

Do đó $VT\le VP$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u_1=1\Rightarrow u_n=\frac{3}{n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Để $u_n>\frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}\Rightarrow\frac{3}{n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}>\frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}\Leftrightarrow n\le 3453$

Chọn ý **D.**

Câu 16: Cho $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $u_n=\frac{f(1).f(3)...f(2n-1)}{f(2).f(4)...f(2n)}$.

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n+u_n<\frac{-10239}{1024}$.

A. $n=23$ **B.** $n=29$ **C.** $n=21$ **D.** $n=33$

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1=\left(n^2+1\right)\left[(n+1)^2+1\right]$.

Khi đó ta có $u_n = \dfrac{(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)\dots\left[(2n-1)^2+1\right]\left[4n^2+1\right]}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)\dots\left[4n^2+1\right]\left[(2n+1)^2+1\right]}$

$= \dfrac{2}{(2n+1)^2+1} = \dfrac{1}{2n^2+2n+1}$

Theo đề bài ta có $\log_2 u_n + u_n < \dfrac{-10239}{1024} \Leftrightarrow -\log_2\left(2n^2+2n+1\right) + \dfrac{1}{2n^2+2n+1} + \dfrac{10239}{1024} < 0$.

Xét hàm số $g(n) = -\log_2\left(2n^2+2n+1\right) + \dfrac{1}{2n^2+2n+1} + \dfrac{10239}{1024}$ với $n \ge 1$.

Ta có $g'(n) = -\dfrac{4n+2}{\left(2n^2+2n+1\right)\ln 2} - \dfrac{4n+2}{\left(2n^2+2n+1\right)^2} < 0$ với $n \ge 1 \Rightarrow g(n)$ nghịch biến.

Mà $g\left(\dfrac{-1+\sqrt{2047}}{2}\right) = 0$ nên $-\log_2\left(2n^2+2n+1\right) + \dfrac{1}{2n^2+2n+1} + \dfrac{10239}{1024} < 0$

$\Rightarrow n > \dfrac{-1+\sqrt{2047}}{2}$. Do n nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn nên $n = 23$

Chọn ý **A.**

Câu 17: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \ln\left(2n^2+1\right) - \ln\left(n^2+n+1\right), \forall n \ge 1$. Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $u_n - [u_n] < \dfrac{2}{3}$. Biết $[a]$ kí hiệu phần nguyên của số a là số tự nhiên nhỏ nhất không vượt quá a.

A. 37 **B.** 36 **C.** 38 **D.** 40

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta có $u_n = \ln\dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1} \in [0;\ln 2) \Rightarrow [u_n] = 0$

$$\Rightarrow u_n - [u_n] < \frac{2}{3} \Leftrightarrow u_n < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2n^2+1}{n^2+n+1}\right) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} < \sqrt[3]{e^2} \Rightarrow n < 37.462$$

Chọn ý **A.**

Câu 18: Cho dãy số (u_n) có tất cả số hạng đều dương thỏa mãn $u_{n+1} = 2u_n$ và đồng thời $\sqrt{u_1^2 + \sqrt{u_2^2 + \dots + \sqrt{u_n^2 + \sqrt{u_{n+1}^2 + u_{n+2} + 1}}}} = \dfrac{4}{3}, \forall n \ge 1$. Số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ là?

A. 232 **B.** 233 **C.** 234 **D.** 235

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow u_n = 2^{n-1}u_1$, đẳng thức đúng với mọi $n \ge 1$ nên đúng với $n = 1$ nên

$$\sqrt{u_1^2+\sqrt{u_2^2+u_3+1}}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\sqrt{u_1^2+\sqrt{4u_1^2+4u_1+1}}=\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{u_1^2+2u_1+1}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow u_1+1=\frac{4}{3}\Leftrightarrow u_1=\frac{1}{3}$$

Do đó $u_n=\frac{2^{n-1}}{3}>5^{100}\Leftrightarrow 2^{n-1}>3.5^{100}\Leftrightarrow n>\log_2 3+100\log_2 5>233$.

Chọn ý **C.**

Câu 19: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln\left(u_1^2+u_2^2+10\right)=\ln(2u_1+6u_2)$ và đồng thời $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1,\forall n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$

A. 100 **B.** 99 **C.** 101 **D.** 102

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\ln\left(u_1^2+u_2^2+10\right)=\ln(2u_1+6u_2)\Leftrightarrow(u_1-1)^2+(u_2-3)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\u_2=3\end{cases}$$

Mặt khác ta có $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1\Leftrightarrow u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+1$.

Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n\Rightarrow v_{n+1}=v_n+1\Rightarrow(v_n)$ là CSC có công sai $d=1$

Khi đó $\Rightarrow v_n=n+1\Rightarrow u_{n+1}=u_n+n+1\Rightarrow\begin{cases}u_2=u_1+2\\u_3=u_2+3\\\dots\dots\dots\dots\\u_n=u_{n-1}+n\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1+\sum_{i=2}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$

Vậy để $u_n>5050\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}>5050\Rightarrow n>100$

Chọn ý **C.**

Câu 20: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}\log\left(u_2+\frac{391}{40}\right)+\sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1+\frac{39}{4}\right)}=2\\u_n=\frac{2(n+1)u_{n+1}}{n}+\frac{2-n}{\left(n^2+n+1\right)^2+1},\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>\frac{5^{100}+n^2+1}{5^{100}\left(n^3+n\right)}$.

A. 235 **B.** 255 **C.** 233 **D.** 241

Lời giải

Ta có $\left(n^2+n+1\right)^2+1=\left(n^2+1\right)^2+2n\left(n^2+1\right)+n^2+1=\left(n^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right)$

Biến đổi giả thiết tương đương

$$nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{2n-n^2}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{(n+1)^2 - 2(n^2+1)+1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{1}{n^2+1} - \frac{2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2}\left(nu_n - \frac{1}{n^2+1}\right)$$

Đặt $v_n = nu_n - \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow (v_n)$ là CSN có công bội $q = \frac{1}{2}$

Từ đó suy ra $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(u_1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^{n-1}n}\left(u_1 - \frac{1}{2}\right)$

Thay $u_2 = -\frac{1}{40} + \frac{1}{4}u_1$ vào giả thiết ta được

$$\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^n n}$$

Để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3+n)} \Rightarrow n > 100\log_2 5 \Rightarrow n \geq 233$

Chọn ý **C.**

LỜI KẾT

Vậy là chúng ta đã đi đến trang cuối cùng của tuyển tập này, tuy bài viết chưa thực sự là hay nhưng hy vọng những kiến thức mà mình đưa vào trong bài viết có thể giúp ích được các bạn trong quá trình học tập. Dự án của mình sắp tới sẽ gửi tới các bạn một chủ đề rất nhiều bạn yêu cầu cho fanpage của mình đó là vấn đề về các bài toán cực trị, min max của hàm số, mong các bạn chú ý theo dõi fanpage nhé. Một lần nữa gửi lời cảm ơn đến những người có đóng góp cho bài viết này và chúc các bạn một mùa ôn thi thành công nhé!