

Câu 1. Cho hai số thực dương a, b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 2. Một chiếc hộp hình trụ được dùng để chứa 1 lít dầu. Kích thước hình trụ thỏa điều kiện gì để chi phí về kim loại dùng để sản xuất vỏ hộp là tối thiểu.

A. Chiều cao gấp hai lần đường kính đáy.

B. Chiều cao gấp ba lần đường kính đáy.

C. Chiều cao gấp hai lần bán kính đáy.

D. Chiều cao gấp ba lần bán kính đáy.

Câu 3. Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Câu 4. Với m là tham số thực dương khác 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m (2x^2 + x + 3) \leq \log_m (3x^2 - x)$. Biết $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

B. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right]$.

C. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

D. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$.

B. $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$.

C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$.

D. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 - 2016$ có 3 cực trị

- A.** $m \leq 2015$. **B.** $m < 2017$. **C.** $m \geq 2016$. **D.** $m \geq -2017$.
- Câu 7.** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x; y = 0; x = k (k > 1)$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) bằng 1 (đvdt).
- A.** $k = e$. **B.** $k = e^2$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = e^3$.
- Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị thực k để phương trình $\left| -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{k}{2} - 1 \right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.
- A.** $k \in \left(\frac{19}{4}; 5 \right)$. **B.** $k \in \emptyset$.
- C.** $k \in (-2; -1) \cup \left(1; \frac{19}{4} \right)$. **D.** $k \in \left(-2; -\frac{3}{4} \right) \cup \left(\frac{19}{4}; 6 \right)$.
- Câu 9.** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của lăng trụ.
- A.** $V = 2a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = 3a^3$.
- Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- A.** $0 < m \leq 1$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $m > 1$. **D.** $0 \leq m < 1$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ có đồ thị hàm số (C) . Biết rằng a, b là các giá trị thực sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a+b$ bằng
- A.** 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 12.** Tìm số phức z sao cho $|z - (3+4i)| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.
- A.** $z = 2+i$. **B.** $z = 5+5i$. **C.** $z = 2+2i$. **D.** $z = 4+3i$.
- Câu 13.** Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.
- A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; -6; -2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 3. D. 2.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$ và $D(1; 1; 1)$ với $m, n > 0; m + n = 1$. Biết khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với (ABC) và đi qua điểm D . Tính bán kính R của mặt cầu đó.

- A. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 17. Cho hai số thực không âm a, b . Đặt $X = 3^{\frac{a+b}{2}}$, $Y = \frac{3^a + 3^b}{2}$. Khẳng định sau đây đúng?

- A. $X \leq Y$. B. $X < Y$. C. $X \geq Y$. D. $X > Y$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2.

- A. $(P): 3y - 2z = 0$. B. $(P): 2y - 3z = 0$.
C. $(P): 2y + 3z = 0$. D. $(P): 3y + 2z = 0$.

Câu 19. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{e^x}{x}$ trên $(0; +\infty)$ và $I = \int_1^3 \frac{e^{3x}}{x} dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = F(4) - F(2)$. B. $I = F(6) - F(3)$.
C. $I = F(9) - F(3)$. D. $I = F(3) - F(1)$.

Câu 20. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- A.** $S = \ln 2 - 1(\dot{d}vdt)$. **B.** $S = \ln 4 - 1(\dot{d}vdt)$.
- C.** $S = \ln 4 + 1(\dot{d}vdt)$. **D.** $S = \ln 2 + 1(\dot{d}vdt)$.
- Câu 21.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.** d vuông góc với (P) . **B.** d nằm trong (P) .
- C.** d cắt và không vuông góc với (P) . **D.** d song song với (P) .
- Câu 22.** Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = (1 + i)^2$, $z_3 = a - i$. Để tam giác ABC vuông tại B thì a bằng:
- A.** $a = -4$. **B.** $a = -2$.
- C.** $a = -3$. **D.** $a = 3$.
- Câu 23.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C (khác gốc tọa độ) sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị lớn nhất.
- A.** $(P): x + 2y + z - 14 = 0$. **B.** $(P): x + 2y + 3z - 11 = 0$.
- C.** $(P): x + y + 3z - 12 = 0$. **D.** $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.
- Câu 24.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh bằng nhau và bằng $2a$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho
- A.** $S = \frac{28\pi a^2}{9}$. **B.** $S = \frac{7\pi a^2}{9}$. **C.** $S = \frac{28\pi a^2}{3}$. **D.** $S = \frac{7\pi a^2}{3}$.
- Câu 25.** Giải bất phương trình $\log_3 x + \log_3 (x - 2) > 1$ được nghiệm
- A.** $x > 2$. **B.** $x > 3$. **C.** $x < -1$. **D.** $2 < x < 3$.
- Câu 26.** Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (USD). Khẳng định nào sau đây đúng
- A.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160 (USD).
- B.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135 (USD).

C. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.

D. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.

Câu 27: Cho $a, b > 0$; $a, b \neq 1$ thỏa $\log_a^2 b - 8 \log_b (a \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính $P = \log_a (a \sqrt[3]{ab}) + 2017$.

A. $P = 2020$.

B. $P = 2019$.

C. $P = 2017$.

D. $P = 2016$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Câu 29: Cho số nguyên dương n , đặt $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$ và $J_n = \int_0^1 x (1-x^2)^n dx$. Xét các khẳng định.

$$(1) I_n \leq \frac{1}{2(n+1)} \quad (2) J_n > \frac{1}{2(n+1)} \quad (3) I_n \leq J_n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Các khẳng định đúng trong 3 khẳng định trên là

A. Chỉ (1) và (3) đúng.

B. Chỉ (1), (2) đúng.

C. Chỉ (2), (3) đúng.

D. Cả (1), (2) và (3) đều đúng.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = AC = a$; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E, F là hai điểm lần lượt nằm trên các đoạn thẳng BC và AC sao cho $\frac{EC}{EB} = \frac{1}{3}$; $\frac{CF}{CA} = \frac{1}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABEF$ và khoảng cách d giữa SA và EF .

A. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

B. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

Câu 31. Cắt hình nón đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng đi qua trục SO của nó ta được một tam giác vuông cân có cạnh bên độ dài bằng a . Tính diện tích của mặt cầu nội tiếp hình nón đã cho.

A. $2\pi(3-2\sqrt{2})a^2$.

B. $2\pi a^2$.

C. $\frac{4}{3}\pi a^2$.

D. $2\pi(3+2\sqrt{2})a^2$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực m để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. **B.** $m \leq -\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. **D.** $m \geq \sqrt{2}$.

Câu 33. Gọi D là miền phẳng có diện tích nhỏ nhất giới hạn bởi các đường $y = -3x + 10$, $y = 1$, $y = x^2$ sao cho điểm $A(2; 2)$ nằm trong D . Khi cho D quay quanh trục Ox ta được vật thể tròn xoay có thể tích là

A. $\frac{56}{5}\pi$ (đvtt). **B.** 12π (đvtt). **C.** 11π (đvtt). **D.** $\frac{25}{3}\pi$ (đvtt).

Câu 34. Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 9$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = -3$. **D.** $S = 5$.

Câu 35. Tìm tất cả các số thực dương m để $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m > 3$. **D.** $m = 3$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$. Biết $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $h = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $h = 2a\sqrt{2}$. **C.** $h = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $h = a\sqrt{3}$.

Câu 37. Cho một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R), (O'; R)$ với $OO' = R\sqrt{3}$ và một hình nón có đỉnh O' và đáy là hình tròn $(O; R)$. Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón. Tính $k = \frac{S_1}{S_2}$.

A. $k = \frac{1}{3}$. **B.** $k = \sqrt{2}$. **C.** $k = \sqrt{3}$. **D.** $k = \frac{1}{2}$.

Câu 38. Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a(a^3 b^2) = \frac{3}{2} + \log_a b$. **B.** $\log_a(a^3 b^2) = 3 + \log_a b$.

C. $\log_a(a^3 b^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log_a b$. **D.** $\log_a(a^3 b^2) = 3 + 2 \log_a b$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **D.** $D = (-1; 1)$.

Câu 41. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = z(1+i)^2 - \bar{z}$.

- A.** $w = -7 + 8i$. **B.** $w = 7 - 8i$. **C.** $w = 3 + 5i$. **D.** $w = -3 + 5i$.

Câu 42. Cho tứ diện đều $ABCD$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng 6. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

- A.** $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = 5\sqrt{3}$. **C.** $V = 27\sqrt{3}$. **D.** $V = \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D'(3; 5; 4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

- A.** $A'(-3; 3; 1)$. **B.** $A'(-3; -3; 3)$. **C.** $A'(-3; -3; -3)$. **D.** $A'(-3; 3; 3)$.

Câu 44. Đặt $a = \log_3 5$, $b = \log_2 5$. Giá trị $\log_{15} 20$ theo a, b

- A.** $\frac{b+ab}{2a+ab}$. **B.** $\frac{2a+ab}{b+ab}$. **C.** $\frac{b^2+a}{b^2+2b}$. **D.** $\frac{b^2+2b}{b^2+a}$.

Câu 45. Biết đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại ba điểm phân biệt. Tất cả các giá trị thực của tham số m là.

- A.** $m > -3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m < -3$. **D.** $m < 3$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

- A.** $m > 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $m > 1$.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - m}{x - 1}$ ($m \neq 1$). Chọn câu trả lời đúng

- A.** Hàm số luôn giảm trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ với $m < 1$.
B. Hàm số luôn giảm trên tập xác định.
C. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ với $m > 1$.
D. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực m để $f(x) = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m-3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1.

- A.** $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $-\frac{5}{4} < m < 0$. **D.** $m > -\frac{5}{4}$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và

cách đều 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

- A.** $(P): 2y - 2z - 1 = 0$. **B.** $(P): 2x - 2y + 1 = 0$.
C. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$. **D.** $(P): 2y - 2z + 1 = 0$.

Câu 50. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M + m$ bằng

- A.** 44. **B.** 41. **C.** 43. **D.** 42.

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	D	A	D	B	A	D	D	A	D	B	B	A	B	B	A	A	C	B	C	C	D	C	B

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	B	B	A	D	A	D	A	D	B	A	C	D	B	D	A	A	D	B	A	A	C	D	D	C

Câu 1. Cho hai số thực dương a, b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = \log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ a+b = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4^t}{6^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 2. Một chiếc hộp hình trụ được dùng để chứa 1 lít dầu. Kích thước hình trụ thỏa điều kiện gì để chi phí về kim loại dùng để sản xuất vỏ hộp là tối thiểu.

- A. Chiều cao gấp hai lần đường kính đáy. B. Chiều cao gấp ba lần đường kính đáy.
C. Chiều cao gấp hai lần bán kính đáy. D. Chiều cao gấp ba lần bán kính đáy.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của chiếc hộp hình trụ lần lượt là R, h điều kiện $R, h > 0$.

Chi phí sản xuất hộp phụ thuộc vào diện tích bề mặt của vỏ hộp phải sử dụng. Chi phí nhỏ nhất khi diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi R h + 2\pi R^2$$

Theo giả thiết thể tích chiếc hộp hình trụ bằng 1 lít nên ta có: $\pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$

$$\Rightarrow S_{tp} = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$$

$$S_{tp}' = -\frac{2}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2}{R^2}, \text{ Cho } S_{tp}' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

R	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
S_{tp}'	-	0	+
S_{tp}	0	$S_{tp \min}$	

$$\text{Vậy } S_p \text{ nhỏ nhất khi } R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{1}{\pi R^3} = \frac{1}{\pi \cdot \frac{1}{2\pi}} = 2 \Rightarrow h = 2R$$

Câu 3. Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau t tháng, a là số tiền ban đầu

$$\text{Tháng 1 } (t=1): T_1 = a(1+r)$$

$$\text{Tháng 2 } (t=2): T_2 = a(1+r)^2$$

.....

$$\text{Tháng } n(t=n): T_n = a(1+r)^t$$

$$T_n = a(1+r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)} = \frac{\ln \frac{140}{100}}{\ln(1+1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}$$

$$\text{Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì } n > \frac{t}{12} \approx 2,818$$

Vậy $n = 3$.

Câu 4. Với m là tham số thực dương khác 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$. Biết $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

$$\text{A. } S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

$$\text{B. } S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right].$$

$$\text{C. } S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

$$\text{D. } S = (-1; 0) \cup (1; 3].$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$$

$$\text{Với } x=1, \text{ bpt: } \log_m 6 \leq \log_m 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 + x + 3 > 0 \\ 3x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow 2x^2 + x + 3 \geq 3x^2 - x \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 3]$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } x \in [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng Δ có phương trình

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}. \text{ Viết phương trình đường thẳng } d \text{ đi qua } M, \text{ cắt và vuông góc với đường thẳng } \Delta.$$

$$\text{A. } d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}.$$

$$\text{B. } d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}.$$

C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$.

D. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi H là hình chiếu của M lên Δ

Nên $H(1+2t; -1+t; -t) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (2t-1; -2+t; -t)$

Và $\vec{a} = (2; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương của Δ

Do đó: $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) - 2 + t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$

Khi đó: $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \vec{u} = (1; -4; -2)$ là véc tơ chỉ phương của d

Vậy $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 - 2016$ có 3 cực trị

A. $m \leq 2015$.

B. $m < 2017$.

C. $m \geq 2016$.

D. $m \geq -2017$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$D = \mathbb{R}, y' = \frac{9}{2}x^3 + 6(m-2017)x = 3x\left(\frac{3}{2}x^2 + 2(m-2017)\right), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{4}{3}(2017-m), (*) \end{cases}$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(*) có 2 nghiệm phân biệt khác ($x=0$)
 $\Leftrightarrow 2017-m > 0 \Leftrightarrow m < 2017$.

Câu 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x; y = 0; x = k (k > 1)$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) bằng 1 (dvd).

A. $k = e$.

B. $k = e^2$.

C. $k = 2$.

D. $k = e^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

PT hđđ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Diện tích $S = \int_1^k |\ln x| dx = \int_1^k \ln x dx$ (vì $x \in [1; k]$ thì $\ln x \geq 0$)

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$. Do đó $S = x \ln x \Big|_1^k - \int_1^k dx = k \ln k - k + 1$

$S = 1 \Leftrightarrow k \ln k = k \Leftrightarrow k = e$

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực k để phương trình $\left| -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{k}{2} - 1 \right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

A. $k \in \left(\frac{19}{4}; 5\right)$.

B. $k \in \emptyset$.

C. $k \in (-2; -1) \cup \left(1; \frac{19}{4}\right)$.

D. $k \in \left(-2; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{19}{4}; 6\right)$.

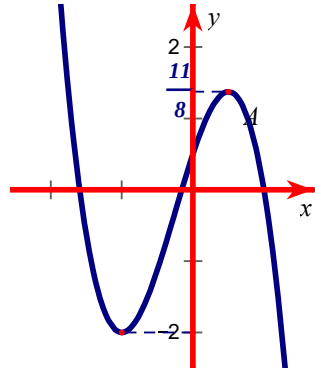
Hướng dẫn giải

Chọn D.

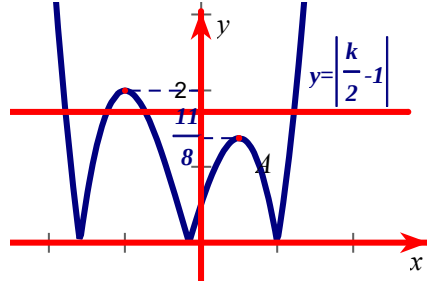
Đặt $f(x) = -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

$$f'(x) = -6x^2 - 3x + 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

	x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
BBT	$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
	$f(x)$	$+\infty$				$\frac{11}{8}$		$-\infty$
			$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
				-2				



Suy ra đồ thị của hàm trị tuyệt đối $y = \left| -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right|$ bằng cách lấy đối xứng qua trục Ox



Vậy để PT có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{11}{8} < \left| \frac{k}{2} - 1 \right| < 2 \Leftrightarrow \frac{121}{64} < \frac{k^2}{4} - k + 1 < 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k^2}{4} - k - \frac{57}{64} > 0 \\ \frac{k^2}{4} - k - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -\frac{3}{4} \\ k > \frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < k < -\frac{3}{4} \\ \frac{19}{4} < k < 6 \end{cases}$$

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của lăng trụ.

A. $V = 2a^3\sqrt{3}$.

B. $V = a^3\sqrt{3}$.

C. $V = 2a^3$.

D. $V = 3a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Diện tích đáy tam giác đều $S = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

Thể tích lăng trụ $V = S.h = a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3} = 3a^3$

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. $0 < m \leq 1$.

B. $0 < m < 1$.

C. $m > 1$.

D. $0 \leq m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{m\}, y' = \frac{-m}{(x-m)^2}$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1.$$

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ có đồ thị hàm số (C) . Biết rằng a, b là các giá trị thực sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a+b$ bằng

A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{a} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a} \neq 1 \Leftrightarrow a \neq 2; y' = \frac{-2-ab}{(ax-2)^2}$$

$$d: 3x + y - 4 = 0 \Rightarrow d: y = -3x + 4$$

$$\text{Ta có: } M(1; -2) \in (C) \Leftrightarrow -2 = \frac{1+b}{a-2} \Leftrightarrow -2a+4 = 1+b \Leftrightarrow b = -2a+3(1)$$

$$\text{Tiếp tuyến tại } M \text{ song song với } (d) \Rightarrow y'(1) = \frac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3 \Leftrightarrow 2+ab = 3(a-2)^2(2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được: } 2+a(-2a+3) = 3(a-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{So điều kiện } \Rightarrow a = 1$$

Câu 12. Tìm số phức z sao cho $|z - (3+4i)| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z = 2+i$.

B. $z = 5+5i$.

C. $z = 2+2i$.

D. $z = 4+3i$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$$

$$|z - (3+4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x-3 = \sqrt{5} \sin t \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{5} \sin t \\ y-4 = \sqrt{5} \cos t \Leftrightarrow y = 4 + \sqrt{5} \cos t \end{cases}$$

$$P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = 4x+2y+3 = 4(3+\sqrt{5} \sin t) + 2(4+\sqrt{5} \cos t) + 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t = P - 23$$

Theo điều kiện có nghiệm phương trình lượng giác

$$\Rightarrow (4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 \geq (P-23)^2 \Leftrightarrow P^2 - 46P + 429 \leq 0 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$$

$$\text{Vậy GTLN của } P \text{ là } 33 \Rightarrow z = 5+5i.$$

Câu 13. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$M \in (C) \Rightarrow M \left(m; \frac{m+2}{m-1} \right) (m \neq 1)$$

$$\text{Theo bài ra } d(M, Oy) = 2d(M, Ox) \Leftrightarrow |m| = 2 \left| \frac{m+2}{m-1} \right|$$

$$\Leftrightarrow |m^2 - m| = 2|m+2| \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = 2m + 4 \\ m^2 - m = -2m - 4 \end{cases} (VN) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm M

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; -6; -2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$M = AB \cap (Oxz): y = 0 \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{d(A, (Oxz))}{d(B, (Oxz))} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$ và $D(1; 1; 1)$ với $m, n > 0; m + n = 1$. Biết khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với (ABC) và đi qua điểm D . Tính bán kính R của mặt cầu đó.

A. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$(P): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow nx + my + mnz - mn = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m)x + my + m(1-m)z - m(1-m) = 0$$

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu cố định

$$\Rightarrow d(I, (P)) = k \text{ (hằng số)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|(1-m)a + mb + m(1-m)c - m(1-m)|}{\sqrt{(1-m)^2 + m^2 + m^2(1-m)^2}} = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m^2(1-c) + m(-a + b + c - 1) + a|}{\sqrt{(m^2 - m + 1)^2}} = k$$

$$\text{Do } k \text{ là hằng số } \forall m \in \mathbb{R} \text{ nên } \frac{1-c}{1} = \frac{-a+b+c-1}{-1} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-c \\ b = 1-c \end{cases}$$

$$\text{Ta lại có } R = d(I, (P)) = ID = k$$

$$\Leftrightarrow |a| = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2} \Leftrightarrow c = 9 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = 1.$$

Câu 16. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta chọn: $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Khi đó: $|z_1| = |z_2| = 1$, $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$.

$|z_1 - z_2| = |-1 + 0i| = 1$.

Câu 17. Cho hai số thực không âm a, b . Đặt $X = 3^{\frac{a+b}{2}}$, $Y = \frac{3^a + 3^b}{2}$. Khẳng định sau đây đúng?

A. $X \leq Y$.

B. $X < Y$.

C. $X \geq Y$.

D. $X > Y$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $Y = \frac{3^a}{2} + \frac{3^b}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{3^a}{2} \cdot \frac{3^b}{2}} = \sqrt{3^{a+b}} = 3^{\frac{a+b}{2}} = X$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2.

A. $(P): 3y - 2z = 0$.

B. $(P): 2y - 3z = 0$.

C. $(P): 2y + 3z = 0$.

D. $(P): 3y + 2z = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox có dạng: $Bx + Cz = 0$ ($B^2 + C^2 \neq 0$).

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 2$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 nên mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(1; 2; 3)$.

Nên ta có: $2B + 3C = 0$. Chọn $B = 3$ suy ra $C = -2$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 3y - 2z = 0$.

Câu 19. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{e^x}{x}$ trên $(0; +\infty)$ và $I = \int_1^3 \frac{e^{3x}}{x} dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = F(4) - F(2)$.

B. $I = F(6) - F(3)$.

C. $I = F(9) - F(3)$.

D. $I = F(3) - F(1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$I = \int_1^3 \frac{e^{3x}}{x} dx = \int_1^3 \frac{e^{3x}}{3x} d(3x)$. Đặt $t = 3x \Leftrightarrow dt = 3dx$, đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 3$, $x = 3 \Rightarrow t = 9$.

Vậy $I = \int_3^9 \frac{e^t}{t} dt = \int_3^9 \frac{e^x}{x} dx = F(9) - F(3)$.

- Câu 20.** Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng
- A. $S = \ln 2 - 1 (\text{đvdt})$. B. $S = \ln 4 - 1 (\text{đvdt})$.
C. $S = \ln 4 + 1 (\text{đvdt})$. D. $S = \ln 2 + 1 (\text{đvdt})$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

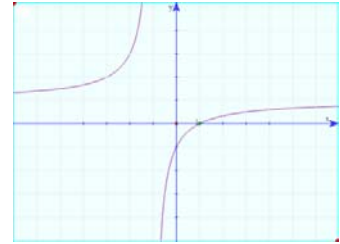
Phương trình hoành độ giao điểm (H) và trục Ox là:

$$\frac{x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Giao điểm (H) và trục Oy là: $(0; -1)$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ là:

$$S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \left| \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| (x - 2 \ln(x+1)) \Big|_0^1 \right| = 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - 1.$$



- Câu 21.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. d vuông góc với (P) . B. d nằm trong (P) .
C. d cắt và không vuông góc với (P) . D. d song song với (P) .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\vec{u}_d = (1; -3; -1), \vec{n}_{(P)} = (3; -3; 2)$, điểm $A(-1; 0; 5)$ thuộc d

Vì $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_{(P)}$ không cùng phương nên d không vuông góc với (P) .

Vì $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} \neq 0$ nên d không song song với (P) .

Vì $A \in d$ nhưng không nằm trên (P) nên d không nằm trong (P) .

Gọi $I = d \cap (P), I(-1-t; -3t; 5-t) \in d$

$$I \in (P) \Leftrightarrow 3(-1-t) - 3(-3t) + 2(5-t) + 6 = 0 \Leftrightarrow 4t + 13 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{13}{4}$$

$$\text{Nên } I\left(\frac{9}{4}; \frac{39}{4}; \frac{33}{4}\right).$$

- Câu 22.** Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1+i$, $z_2 = (1+i)^2$, $z_3 = a-i$. Để tam giác ABC vuông tại B thì a bằng:
- A. $a = -4$. B. $a = -2$.
C. $a = -3$. D. $a = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $A(1; 1), B(0; 2), C(a; -1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1+i$, $z_2 = (1+i)^2$, $z_3 = a-i$.

Để ΔABC vuông tại $B \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (1; -1) \cdot (a; -3) = 0 \Leftrightarrow a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -3$.

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C (khác gốc tọa độ) sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị lớn nhất.

A. $(P): x + 2y + z - 14 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 3z - 11 = 0$.

C. $(P): x + y + 3z - 12 = 0$.

D. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có $M(1; 2; 3) \in P \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$. Ta có $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Theo BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(1^2 + 2^2 + 3^2) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{3c} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = \frac{14}{2} \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } (P): x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Câu 24. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh bằng nhau và bằng $2a$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho

A. $S = \frac{28\pi a^2}{9}$.

B. $S = \frac{7\pi a^2}{9}$.

C. $S = \frac{28\pi a^2}{3}$.

D. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của 2 tam giác đều ABC và $A'B'C'$.

Gọi I là trung điểm GG' . Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp

hình lăng trụ. Ta có $R = AI = \sqrt{AG^2 + GI^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

$$\text{Vậy } S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{28\pi a^2}{3}.$$

Câu 25. Giải bất phương trình $\log_3 x + \log_3 (x-2) > 1$ được nghiệm

A. $x > 2$.

B. $x > 3$.

C. $x < -1$.

D. $2 < x < 3$.

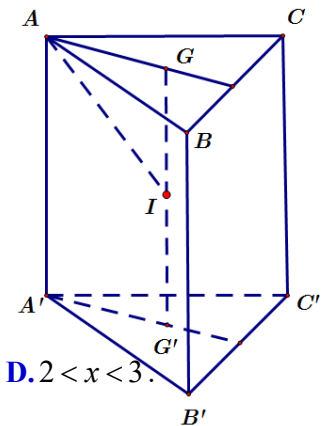
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $x > 2$.

$$BPT \Leftrightarrow x(x-2) > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3$$

Kết hợp điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình là $x > 3$.



- Câu 26.** Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (USD). Khẳng định nào sau đây đúng
- A.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160 (USD).
B. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135 (USD).
C. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.
D. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Số tiền thu được là: } y = x \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 \Rightarrow y' = 9 - \frac{3}{10}x + \frac{3x^2}{1600} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 120 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 60$$

$$\Rightarrow y_{\max} = 160 \Leftrightarrow x = 40$$

- Câu 27.** Cho $a, b > 0$; $a, b \neq 1$ thỏa $\log_a^2 b - 8 \log_b(a \cdot \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính $P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{ab}) + 2017$.
- A.** $P = 2020$. **B.** $P = 2019$. **C.** $P = 2017$. **D.** $P = 2016$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{ab}) + 2017 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \log_a b + 2017$$

$$\text{Lại có } \log_a^2 b - 8 \log_b(a \cdot \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \log_a b = 2 \Rightarrow P = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2 + 2017 = 2019$$

- Câu 28.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?
- A.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. **D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } d(I(P)) = 3$$

- Câu 29.** Cho số nguyên dương n , đặt $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$ và $J_n = \int_0^1 x (1-x^2)^n dx$. Xét các khẳng định.

$$(1) I_n \leq \frac{1}{2(n+1)} \quad (2) J_n > \frac{1}{2(n+1)} \quad (3) I_n \leq J_n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Các khẳng định đúng trong 3 khẳng định trên là

- A.** Chỉ (1) và (3) đúng. **B.** Chỉ (1), (2) đúng.
C. Chỉ (2), (3) đúng. **D.** Cả (1), (2) và (3) đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Đặt } t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow J_n = \frac{1}{2(n+1)} \Rightarrow \text{chọn đáp án A}$$

- Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = AC = a$; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E, F là hai điểm lần lượt nằm trên các

đoạn thẳng BC và AC sao cho $\frac{EC}{EB} = \frac{1}{3}; \frac{CF}{CA} = \frac{1}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABEF$ và khoảng cách d giữa SA và EF .

A. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

B. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Để thấy $KB = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow EF \perp BC \Rightarrow S_{EFC} = \frac{a^2}{16} \Rightarrow S_{BAFE} = \frac{7a^2}{16}$ lại có

$$SH = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V_{SABEF} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{192}$$

Gọi M là trung điểm của

$$BC \Rightarrow AM \parallel EF \Rightarrow d(SA, EF) = d(EF, (SAM)) = d(F, (SAM)) = (H, (SAM)) = HJ$$

Với H là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$

Ta có $HJ = \frac{a\sqrt{6}}{8}$

Câu 31. Cắt hình nón đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng đi qua trục SO của nó ta được một tam giác vuông cân có cạnh bên độ dài bằng a . Tính diện tích của mặt cầu nội tiếp hình nón đã cho.

A. $2\pi(3-2\sqrt{2})a^2$.

B. $2\pi a^2$.

C. $\frac{4}{3}\pi a^2$.

D. $2\pi(3+2\sqrt{2})a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta thấy $\triangle SIH \sim \triangle SAO$ ($g-g$)

$$\Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{IH}{AO} \Leftrightarrow \frac{SO-IO}{SA} = \frac{IO}{AO} \quad (\text{Vì } IO = IH) \quad (1)$$

Vì $\triangle SAB$ vuông cân tại S và O là trung điểm của

$$AB \Rightarrow SO = AO = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - IO}{a} = \frac{IO}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow IO = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$$

Vậy diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón là $S = 4\pi \cdot IO^2 = 2\pi(3-2\sqrt{2})a^2$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực m để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

B. $m \leq -\sqrt{2}$.

C. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

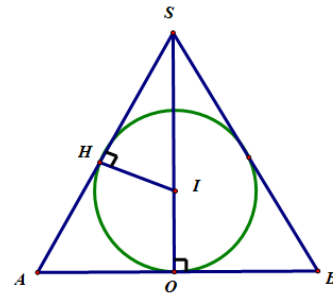
D. $m \geq \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y' = \cos x - \sin x + m = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + m$

$$\text{Vì } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m - \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + m \leq m + \sqrt{2}$$



$$\Leftrightarrow m - \sqrt{2} \leq y' \leq m + \sqrt{2}$$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow m - \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}.$$

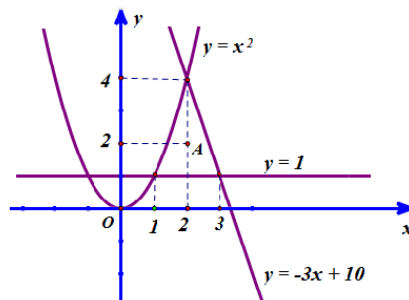
Câu 33. Gọi D là miền phẳng có diện tích nhỏ nhất giới hạn bởi các đường $y = -3x + 10$, $y = 1$, $y = x^2$ sao cho điểm $A(2; 2)$ nằm trong D . Khi cho D quay quanh trục Ox ta được vật thể tròn xoay có thể tích là

- A.** $\frac{56}{5}\pi$ (đvtt). **B.** 12π (đvtt). **C.** 11π (đvtt). **D.** $\frac{25}{3}\pi$ (đvtt).

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V &= \pi \int_1^2 (x^4 - 1) dx + \pi \int_2^3 [(-3x + 10)^2 - 1] dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - x \right) \Big|_1^2 + \pi \left[-\frac{(10 - 3x)^3}{9} - x \right] \Big|_2^3 \\ &= \frac{26\pi}{5} + 6\pi = \frac{56\pi}{5}. \end{aligned}$$



Câu 34. Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

- A.** $S = 9$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = -3$. **D.** $S = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |x-2| &= \begin{cases} x-2, & \text{Khi } x \geq 2 \\ 2-x, & \text{Khi } x \leq 2 \end{cases} \\ \text{Do đó } I &= \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2 \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx \\ &= (5 \ln x - 2x) \Big|_1^2 + (2x - 3 \ln x) \Big|_2^5 \\ &= 4 + 8 \ln 2 - 3 \ln 5 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} &\Rightarrow S = a + b = 5. \end{aligned}$$

Câu 35. Tìm tất cả các số thực dương m để $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m > 3$. **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải

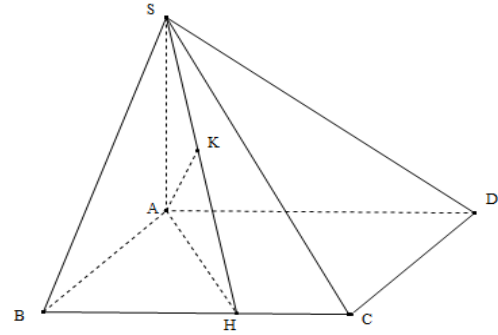
Chọn B.

$$\text{Ta có } I = \int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \int_0^m \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) \Big|_0^m = \frac{m^2}{2} - m + \ln(m+1)$$

$$\text{Theo giả thiết } I = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{2} - m + \ln(m+1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{2} - m = -\frac{1}{2} \\ m+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$. Biết $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC) .



A. $h = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

B. $h = 2a\sqrt{2}$.

C. $h = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

D. $h = a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Dựng $AH \perp BC$ và $AK \perp SH$.

Ta có $AK = d(A; (SBC))$.

Vì $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\triangle ACB$ đều,

$$\text{Suy ra } AH = \frac{2a\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 3a$$

Mặt khác, vì góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° nên $\widehat{SAH} = 45^\circ$ nên $AK = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Câu 37. Cho một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R), (O'; R)$ với $OO' = R\sqrt{3}$ và một hình nón có đỉnh O' và đáy là hình tròn $(O; R)$. Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón. Tính $k = \frac{S_1}{S_2}$.

A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = \sqrt{2}$.

C. $k = \sqrt{3}$.

D. $k = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } S_1 = 2\pi R \cdot R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$$

$$S_2 = \pi R \sqrt{3R^2 + R^2} = 2\pi R^2. \text{ Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$$

Câu 38. Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a(a^3b^2) = \frac{3}{2} + \log_a b$.

B. $\log_a(a^3b^2) = 3 + \log_a b$.

C. $\log_a(a^3b^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_a b$.

D. $\log_a(a^3b^2) = 3 + 2\log_a b$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Với $a, b > 0; a \neq 1$ ta có $\log_a(a^3b^2) = 3\log_a a + 2\log_a b = 3 + 2\log_a b$

Câu 39. Số nào sau đây là số đối của số phức z , biết z có phần thực dương thỏa mãn $|z| = 2$ và trong mặt phẳng phức thì z có điểm biểu diễn thuộc đường thẳng $y - \sqrt{3}x = 0$.

A. $-1 + \sqrt{3}i$.

B. $1 + \sqrt{3}i$.

C. $-1 - \sqrt{3}i$.

D. $1 - \sqrt{3}i$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Ta có $|z| = 2$ nên $a^2 + b^2 = 4$

Vì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $y - \sqrt{3}x = 0$ nên $b = a\sqrt{3}$

Và vì $a > 0$ nên $a = 1, b = \sqrt{3}$

Câu 40. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \log_3(-2 \cdot 4^x + 5 \cdot 2^x - 2)$.

A. $D = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $D = (-1; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $-2 \cdot 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2^x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Vậy tập xác định của hàm số là

$D = (-1; 1)$

Câu 41. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = z(1+i)^2 - \bar{z}$.

A. $w = -7 + 8i$.

B. $w = 7 - 8i$.

C. $w = 3 + 5i$.

D. $w = -3 + 5i$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $z = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 2i$.

Khi đó $w = z(1+i)^2 - \bar{z} = (3+2i)(1+i)^2 - (3-2i) = -7 + 8i$.

Câu 42. Cho tứ diện đều $ABCD$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng 6. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

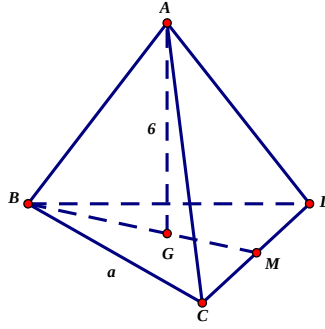
B. $V = 5\sqrt{3}$.

C. $V = 27\sqrt{3}$.

D. $V = \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là a .

Gọi M là trung điểm cạnh CD và G là trọng tâm tam giác BCD .

$$\text{Ta có } AG^2 + BG^2 = AB^2 \Leftrightarrow 6^2 + \left(\frac{2}{3}BM^2\right) = a^2 \Leftrightarrow 36 + \left(\frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow a = 3.$$

$$\text{Khi đó } S_{\triangle BCD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích của tứ diện } ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot AG = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$, $B'(-2;1;1)$, $D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

- A.** $A'(-3;3;1)$. **B.** $A'(-3;-3;3)$. **C.** $A'(-3;-3;-3)$. **D.** $A'(-3;3;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

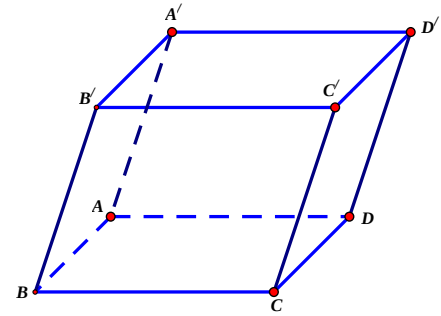
Gọi $A'(x_1; y_1; z_1)$, $C'(x_2; y_2; z_2)$.

Tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$ là $I\left(1; 3; \frac{5}{2}\right)$.

$$\text{Do } I \text{ là trung điểm của } A'C' \text{ nên } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 6 \\ z_1 + z_2 = 5 \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (7; 0; -1)$ và $\overrightarrow{A'C'} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

$$\text{Do } ACC'A' \text{ là hình bình hành nên } \begin{cases} x_2 - x_1 = 7 \\ y_2 - y_1 = 0 \\ z_2 - z_1 = -1 \end{cases}.$$



Xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 6 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ z_2 - z_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases}.$$

Vậy $A'(-3;3;3)$.

Câu 44. Đặt $a = \log_3 5$, $b = \log_2 5$. Giá trị $\log_{15} 20$ theo a, b

- A.** $\frac{b+ab}{2a+ab}$. **B.** $\frac{2a+ab}{b+ab}$. **C.** $\frac{b^2+a}{b^2+2b}$. **D.** $\frac{b^2+2b}{b^2+a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\log_{15} 20 = \log_{15} (4.5) = \log_{15} 4 + \log_{15} 5 = 2 \log_{15} 2 + \log_{15} 5$.

$$\checkmark \log_{15} 2 = \frac{1}{\log_2 15} = \frac{1}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{1}{\frac{1}{\log_3 2} + \log_2 5} = \frac{1}{\frac{\log_2 5}{\log_3 5} + \log_2 5} = \frac{1}{\frac{b}{a} + b} = \frac{a}{b(1+a)}.$$

$$\checkmark \log_{15} 5 = \frac{1}{\log_5 15} = \frac{1}{\log_5 3 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\log_3 5} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a}{1+a}.$$

$$\text{Do đó } \log_{15} 20 = \frac{2a}{b(1+a)} + \frac{a}{a+1} = \frac{2a+ab}{b+ab}.$$

Câu 45. Biết đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại ba điểm phân biệt. Tất cả các giá trị thực của tham số m là.

A. $m > -3$.

B. $m > 3$.

C. $m < -3$.

D. $m < 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{PT HĐGD: } x^3 - 3x + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x^3 - (m+3)x = 0 \quad (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+3 \quad (*)' \end{cases}$$

Đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)'$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m+3 > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

A. $m > 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $0 < m < 1$.

D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Gọi tọa độ hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ lần lượt là $A(x; y), B(-x; -y)$

Vì hai điểm cùng thuộc đồ thị nên ta có:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + m \\ -y = -x^3 - 3x^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow m = 3x^2 \quad (1)$$

Với $m < 0$ thì (1) vô nghiệm, không thỏa mãn

Với $m = 0$ thì (1) có nghiệm duy nhất $(0; 0)$, không thỏa mãn

Với $m > 0$ thì (1) có nghiệm là $\left(\sqrt{\frac{m}{3}}; \frac{m\sqrt{m}}{27}\right)$ và $\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}; -\frac{m\sqrt{m}}{27}\right)$ thỏa mãn.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - m}{x - 1} (m \neq 1)$. Chọn câu trả lời đúng

A. Hàm số luôn giảm trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ với $m < 1$.

B. Hàm số luôn giảm trên tập xác định.

C. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ với $m > 1$.

D. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0;$$

$$\text{Xét } g(x) = x^2 - 2x + m; \Delta = 1 - m$$

$$\text{Nếu } \Delta = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1 \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$$

Vậy hàm số luôn tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ với $m > 1$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực m để $f(x) = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1.

- A.** $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $-\frac{5}{4} < m < 0$. **D.** $m > -\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } f'(x) = -3x^2 + 6x + m - 1.$$

Để hàm số đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_2 - x_1| > 1$.

$$\text{Với } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 3m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -2 \text{ theo Viet thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{1-m}{3} \end{cases} \text{ thay vào}$$

$$|x_2 - x_1| > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4} \text{ kết hợp điều kiện chọn D.}$$

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và

$$\text{cách đều 2 đường thẳng } d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

- A.** $(P): 2y - 2z - 1 = 0$. **B.** $(P): 2x - 2y + 1 = 0$.
C. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$. **D.** $(P): 2y - 2z + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do (P) cách đều hai đường thẳng nên $d_1 // (P), d_2 // (P)$.

$$\text{Gọi } \vec{a}_1 = (-1; 1; 1) \text{ là VTCP của } d_1, \vec{a}_2 = (2; -1; -1) \text{ là VTCP của } d_2 \text{ suy ra } [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = (0; 1; -1)$$

là VTPT của mặt phẳng (P) loại đáp án B và C.

Lấy $M(2; 0; 0) \in d_1, N(0; 1; 2) \in d_2$ do $d_{(d_1, (P))} = d_{(d_2, (P))} \Rightarrow d_{(M, (P))} = d_{(N, (P))}$ thay vào ta thấy đáp án D thỏa mãn.

Câu 50. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M + m$ bằng

- A.** 44. **B.** 41. **C.** 43. **D.** 42.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-x-y}.$$

$$\text{Đặt } t = x+y \Rightarrow P = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}.$$

$$\text{Theo giả thiết } x+y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = x+2y+1+2\sqrt{2(x-1)(y+1)} \leq x+2y+1+2(x-1)+y+1 = 3(x+y)$$

$$\Rightarrow t \leq 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 3$$

$$\text{Xét } f(t) = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t} \text{ trên } [0;3]$$

$$f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow (2t+2)\sqrt{4-t} = 4 \Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t} = 2.$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + 2t + 1)(4-t) = 4 \Leftrightarrow -t^3 + 2t^2 + 7t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 + 2\sqrt{2} \notin [0;3] \\ t = 1 - 2\sqrt{2} \notin [0;3] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(0) = 18; f(3) = 25 \Rightarrow \min P = 18, \max(P) = 25.$$

$$\text{Vậy } M + m = 25 + 18 = 43.$$