

Đề chính thức
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)z + (3+2i)\bar{z} = 4+10i$. Tìm môđun của số phức $w = z + 2\bar{z}$.

b) Giải phương trình $27^x - 5 \cdot 3^{2-3x} = 4$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 e^x (2e^{-x} + x) dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(7; 2; 1)$, $B(-5; -4; -3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y - 6z + 38 = 0$.

a) Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB.

b) Chứng minh (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho góc α thỏa $\cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha + 2 \sin^3 \alpha}$.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $A(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11}$ ($x \neq 0$).

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a ; $\angle BCD = 60^\circ$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) theo a .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, $A(2; 2)$, $BC = 3BA$,

trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(0; \frac{10}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$ biết rằng đỉnh B có hoành độ dương, đường trung tuyến kẻ từ B của tam giác ABD có hệ số góc nhỏ hơn 1.

Câu 9 (1,0 điểm). Tìm m để hệ sau có hai nghiệm phân biệt:
$$\begin{cases} \log_4(x+1) - \log_4(x-1) > \frac{1}{2} \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) + 2m \log_{(x^2 - 2x + 5)} 2 = 5 \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2(1 - xy)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + \sqrt{2}z)^2 - \sqrt{\frac{(x+y)^2 + 2z^2}{2}}$.

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

I) HƯỚNG DẪN CHUNG.

1) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng vẫn đúng thì cho đủ số điểm từng phần như thang điểm quy định.

2) Điểm toàn bài tính đến 0,25 điểm. (sau khi cộng điểm toàn bài, giữ nguyên kết quả)

II) Đáp án và thang điểm:

Câu 1	Đáp án	Điểm																				
1 điểm	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$.																					
	□ Tập xác định □ . □ Chiều biến thiên: - Ta có $y' = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$. - Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. - Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.	0.25																				
	□ Cực trị: - Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = y(\pm 1) = 3$. - Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CN} = y(0) = 4$. □ Các giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0.25																				
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>4</td><td></td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$+$	y	$+\infty$		4		3	$+\infty$	0.25
	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$																
y'		$-$	0	$+$	0	$+$																
y	$+\infty$		4		3	$+\infty$																
Đồ thị hàm số : Đồ thị qua các điểm $A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{31}{9}\right)$, $B(-2; 12)$, $C(2; 12)$.	0.25																					
Câu 2	Đáp án	Điểm																				
1 điểm	Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1.																					
	Hoành độ x_0 của tiếp điểm M là nghiệm của PT $x_0^3 - 3x_0^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 = 0$ $\Leftrightarrow x_0 = 0$; $x_0 = 3$.	0.25																				
	Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(0) = 0$, $y'(3) = 9$ (với $y' = 3x^2 - 6x$)	0.25																				

	PT tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(0; 1)$ là $y=1$.	0.25
	PT tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(3; 1)$ là $y=9x-26$.	0.25
Câu 3	Đáp án	Điểm
1 điểm	a) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)z+(3+2i)\bar{z}=4+10i$. Tìm môđun của số phức $w=z+2\bar{z}$.	
	Đặt $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z}=a-bi$. Ta có $(1+2i)z+(3+2i)\bar{z}=4+10i \Leftrightarrow (1+2i)(a+bi)+(3+2i)(a-bi)=4+10i$ $\Leftrightarrow 4a+(4a-2b)i=4+10i \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=4 \\ 4a-2b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$. Do đó $z=1-3i$.	0.25
	Ta có $w=z+2\bar{z}=1-3i+2(1+3i)=3+3i$. Suy ra môđun của w là $ w =\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.	0.25
	b) Giải phương trình $27^x-5 \cdot 3^{2-3x}=4$.	
	Ta có $27^x-5 \cdot 3^{2-3x}=4 \Leftrightarrow 27^x-\frac{45}{27^x}=4 \Leftrightarrow (27^x)^2-4 \cdot 27^x-45=0$ Đặt $t=27^x$ ($t>0$) ta được $t^2-4t-45=0$ $\Leftrightarrow t=9$ hoặc $t=-5$ (loại) $\Rightarrow 3^{3x}=3^2 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Vậy PT đã cho có nghiệm là $x=\frac{2}{3}$.	0.25
		0.25
Câu 4	Đáp án	Điểm
1 điểm	Tính tích phân $I=\int_1^2 e^x(2e^{-x}+x)dx$	
	Ta có $I=2\int_1^2 dx+\int_1^2 xe^x dx=J+K$.	0.25
	$\square J=2\int_1^2 dx=(2x)\Big _1^2=2$.	0.25
	$\square K=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big _1^2-\int_1^2 e^x dx=(2e^2-e)-e^x\Big _1^2=(2e^2-e)-(e^2-e)=e^2$.	0.25
	Vậy $I=J+K=2+e^2$.	0.25
Câu 5	Đáp án	Điểm
1 điểm	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(7; 2; 1)$, $B(-5; -4; -3)$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y-6z+38=0$. a) Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB . b) Chứng minh (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .	
	a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; -1)$, bán kính $R=IA=7$.	0.25
	Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=49$.	0.25
	b) Ta có khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là $d(I;(P))=\frac{ 3 \cdot 1 - 2(-1) - 6(-1) + 38 }{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}}=7$.	0.25
	Vì $d(I;(P))=R$ nên suy ra (P) tiếp xúc (S) .	0.25
Câu 6	Đáp án	Điểm
1 điểm	a) Cho góc α thỏa $\cot \alpha=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha+2\sin^3 \alpha}$.	

	Do $\cot \alpha = 2 \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$, ta có $P = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} + \frac{2 \sin^3 \alpha}{\sin^3 \alpha}} = \frac{\cot \alpha (1 + \cot^2 \alpha)}{\cot^3 \alpha + 2}$	0.25
	Thay $\cot \alpha = 2$ vào P được $P = 1$.	0.25
	b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $A(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11} (x \neq 0)$.	
	Ta có $A(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (x^2)^{11-k} (-2x^{-1})^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot (-2)^k \cdot x^{22-3k}$.	0.25
	Tìm k sao cho $22 - 3k = 7 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 là $C_{11}^5 \cdot (-2)^5 = -14784$.	0.25
Câu 7	Đáp án	Điểm
1 điểm	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a; $BCD = 60^\circ$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) theo a.	
	Theo giả thiết $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $BCD = 60^\circ \Rightarrow \triangle BCD$ đều và diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.	0.25
	Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Gọi $O = AC \cap BD$, trong (SAC) kẻ $OM \perp SC, M \in SC$ $\Rightarrow SC \perp (MBD)$. Do đó BMD là góc giữa (SCB) và (SCD) $\Rightarrow BMD = 90^\circ \Rightarrow OM = \frac{1}{2} BD = \frac{a}{2}$. Ta thấy $\triangle SAC \sim \triangle OMC \Rightarrow \frac{SA}{OM} = \frac{AC}{MC}$ $\Rightarrow SA = \frac{AC \cdot OM}{\sqrt{OC^2 - OM^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$	0.25
	Thể tích khối chóp cần tìm là $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$.	
	Ta có O là trung điểm của AC nên $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$ Trong (SAC), kẻ $AH \perp SO, H \in SO$ mà $AH \perp BD$ nên $AH \perp (SBD)$ $\Rightarrow AH = d(A, (SBD))$	0.25
	Trong tam giác SAO vuông tại A có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2}$ $\Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{a}{\sqrt{2}}$.	0.25
Câu 8	Đáp án	Điểm
1 điểm	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, $A(2; 2)$, $BC = 3BA$,	

trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(0; \frac{10}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$ biết rằng đỉnh B có hoành độ dương, đường trung tuyến kẻ từ B của tam giác ABD có hệ số góc nhỏ hơn 1.

Cách 1.

▮ Gọi N là trung điểm của BC . Ta có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN} \Rightarrow N(-1; 4)$.

▮ Gọi M là trung điểm của AD , I là trung điểm của BM . Khi đó

I là trung điểm của AN . Suy ra $I\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

▮ Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác (ABN) .

PT đường tròn

$$(C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = AI^2 = \frac{13}{4}.$$

▮ Gọi $B(a; b)$, ta có

$$\begin{cases} B \in (C) \\ BC = 3BA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \in (C) \\ 2BN = 3BA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (b - 3)^2 = \frac{13}{4} \\ 4((a+1)^2 + (b-4)^2) = 9((a-2)^2 + (b-2)^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a - 6b + 6 = 0 \\ a = \frac{2b-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2b-2}{3} \\ 13b^2 - 68b + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ a = \frac{2}{13} \\ b = \frac{16}{13} \end{cases}$$

Theo giả thiết đường thẳng BM có hệ số góc nhỏ hơn 1 nên chọn $B(2; 4)$.

▮ Với $B(2; 4)$ và trung điểm $N(-1; 4)$ ta suy ra $C(-4; 4)$.

Từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D(-4; 2)$.

Vậy các đỉnh còn lại cần tìm của hình chữ nhật $ABCD$ là $B(2; 4)$, $C(-4; 4)$, $D(-4; 2)$.

Cách 2.

▮ Gọi N là trung điểm của BC . Ta có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN} \Rightarrow N(-1; 4)$.

Suy ra PT $AN: 2x + 3y - 10 = 0$.

▮ Gọi M là trung điểm của AD , I là trung điểm của BM . Khi đó

I là trung điểm của AN . Suy ra $I\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

$$\text{▮ Đặt } BA = 2m \Rightarrow BC = 6m \Rightarrow IA = IB = \frac{AN}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BN^2}}{2} = \frac{m\sqrt{13}}{2}.$$

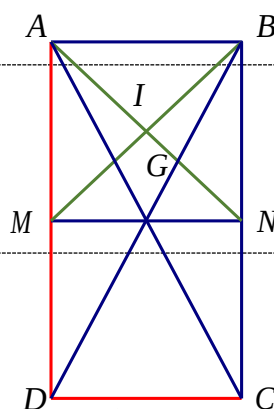
$$\text{Ta có } \cos(BM, AN) = |\cos BIA| = \frac{|IB^2 + IA^2 - AB^2|}{2IB \cdot IA} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{▮ Gọi } BM: a\left(x - \frac{1}{2}\right) + b(y - 3) = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

$$\text{Ta có } \cos(BM, AN) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow 27a^2 + 156ab + 92b^2 = 0 \quad (*)$$

Với $b = 0 \Rightarrow 27a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ (loại)

Với $b \neq 0$, chia hai vế của PT (*) cho b^2 ta được



	$27\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 156\left(\frac{a}{b}\right) + 92 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{2}{3} \\ \frac{a}{b} = -\frac{46}{9} \end{cases}$ Theo giả thiết đường thẳng BM có hệ số góc $k = -\frac{a}{b} < 1$ nên $BM : 2x - 3y + 8 = 0$. Do $B \in BM \Rightarrow B\left(t; \frac{2t+8}{3}\right)$. Ta có $IB = IA \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2t+8}{3} - 3\right)^2 = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 13t^2 - 13t - 26 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2; 4) \\ B(-1; 2) \text{ (loại)} \end{cases}$ □ Với $B(2; 4)$ và trung điểm $N(-1; 4)$ ta suy ra $C(-4; 4)$. □ Từ $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow D(-4; 2)$. Vậy các đỉnh còn lại cần tìm của hình chữ nhật $ABCD$ là $B(2; 4)$, $C(-4; 4)$, $D(-4; 2)$.																	
Câu 9	Đáp án	Điểm																
1 điểm	Tìm m để hệ sau có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} \log_4(x+1) - \log_4(x-1) > \frac{1}{2} & (1) \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) + 2m \log_{(x^2 - 2x + 5)} 2 = 5 & (2) \end{cases}$																	
	Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_4\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \log_4 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x+1}{x-1} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$.	0.25																
	Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa $1 < x < 3$. Đặt $t = \log_2(x^2 - 2x + 5) = \log_2((x-1)^2 + 4)$ Với $x \in (1; 3)$ thì $t \in (2; 3)$. PT(2) trở thành $t + \frac{2m}{t} = 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t = -2m$ (*)	0.25																
	Xét hàm số $f(t) = t^2 - 5t$ trên khoảng $(2; 3)$; có $f'(t) = 2t - 5$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$. Lập bảng biến thiên <table><tr><td>t</td><td>2</td><td>$\frac{5}{2}$</td><td>3</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>-6</td><td>$-\frac{25}{4}$</td><td>-6</td></tr></table>	t	2	$\frac{5}{2}$	3	$f'(t)$		0				-	+	$f(t)$	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0.25
	t	2	$\frac{5}{2}$	3														
$f'(t)$		0																
		-	+															
$f(t)$	-6	$-\frac{25}{4}$	-6															
Dựa vào bảng biến thiên và cách đặt t ở trên ta thấy: Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $t \in (2; 3)$ $\Leftrightarrow -\frac{25}{4} < -2m < -6 \Leftrightarrow 3 < m < \frac{25}{8}$.	0.25																	
Câu 10	Đáp án	Điểm																
1 điểm	Cho là các số dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2(1 - xy)$ (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + \sqrt{2}z)^2 - \sqrt{\frac{(x+y)^2 + 2z^2}{2}}$																	
	Từ $(x - y)^2 + (\sqrt{2}x - z)^2 + (\sqrt{2}y - z)^2 \geq 0$ suy ra $(x + y + \sqrt{2}z)^2 \leq 4(x^2 + y^2 + z^2)$ (1)	0.25																

	Mặt khác $\sqrt{\frac{(x+y)^2 + 2z^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) + 2z^2}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $P \geq x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.	0.25
	Lại đặt $t = x^2 + y^2 + z^2$, $t \geq \frac{(x+y)^2 + 2z^2}{2} \geq 1$ (do (*)) Ta được $P \geq t - \sqrt{t}$. Xét hàm số $f(t) = t - \sqrt{t}$ với $t \geq 1$. Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0$ với mọi $t \geq 1$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Suy ra $f(t) \geq f(1) = 0 \Rightarrow P \geq 0$.	0.25
	Do đó GTNN của P là 0, đạt được khi $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = y = \frac{z}{\sqrt{2}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	0.25