

CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ THAM SỐ

Trong chủ đề này có một số bài toán bắt buộc phải sử dụng đến kiến thức đạo hàm (cuối chương trình toán 11, và khảo sát hàm số của lớp 12 để giải quyết).

Phương pháp giải toán này tác giả xin trình bày chi tiết thông qua hệ thống ví dụ cụ thể.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc tập $E = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ để phương trình $2m \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = m + 5$ có nghiệm?

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.

Lời giải:

Phương trình tương đương với $m \sin 2x + 2 \cos 2x = m + 3$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 2^2 \geq (m+3)^2 \Leftrightarrow 6m+5 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{6}$

Mà $m \in E \longrightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho phương trình $m \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3m \cos^2 x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm.

- a) $m \in \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$.
b) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$.
c) $m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$.
d) $m \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$.

Lời giải:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow m \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + 3m \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin 2x + m \cos 2x = 1 - 2m$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1 + m^2 \geq 1 - 4m + 4m^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

Chọn C.

Ví dụ 3. Cho phương trình $\frac{5+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin x}=\frac{6\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của α thuộc đoạn $[0;2\pi]$ để phương trình có nghiệm. Tổng các phần tử của tập S bằng

- a) π .
b) 2π .
c) 4π .
d) 6π .

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$

Phương trình tương đương với $\frac{5-4\cos x}{\sin x} = 3\sin 2\alpha \Leftrightarrow 3\sin 2\alpha \sin x + 4\cos x = 5$ (1)

Nếu $\sin x = 0 \longrightarrow \cos x = \pm 1$: không thỏa (1). Do đó phương trình nếu có nghiệm thì luôn thỏa mãn điều kiện $\sin x \neq 0$

$$\text{Để phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ (3 \sin 2\alpha)^2 + 16 \leq 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin^2 2\alpha \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin^2 2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} : \text{thỏa điều kiện.}$$

$$\longrightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \longrightarrow \text{tổng } \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi.$$

Chọn C.

Ví dụ 4. Cho phương trình $4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = m^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$. Gọi $S = [a; b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm. Tính $a + b$.

- a) $a + b = -2$.
b) $a + b = -\frac{1}{2}$.
c) $a + b = 0$.
d) $a + b = 4$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x + 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + 1 \right] \\ PT &\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 2 = m^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{m^2 - 2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m^2 - 2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

$$\longrightarrow S = [-2; 2] \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \longrightarrow a + b = 0.$$

Chọn C.

Ví dụ 5. Cho phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

- a) 7.
b) 9.
c) 13.
d) 15.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x + 3 \sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 \sin^2 2x - 6 \sin 2x = 12 - m$$

Đặt $t = \sin 2x \xrightarrow{t \in [-1;1]} 3t^2 - 6t = 12 - m \Leftrightarrow 3(t-1)^2 = 15 - m$

Vì $-1 \leq t \leq 1 \longrightarrow 0 \leq 3(t-1)^2 \leq 12$ Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq 15 - m \leq 12$

$\Leftrightarrow 3 \leq m \leq 15 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{3; 4; 5; \dots; 15\}$

Chọn C.

Ví dụ 6. Cho phương trình $3 \tan^2 x + \tan x + \cot x + \frac{3}{\sin^2 x} = m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m nhỏ hơn 2018 để phương trình có nghiệm?

- a) 2004. b) 2008.
c) 2011. d) 2012.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Phương trình viết lại $3 \left(\tan^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) + \tan x + \cot x = m$

$\Leftrightarrow 3(\tan^2 x + \cot^2 x + 1) + \tan x + \cot x = m$

Đặt $t = \tan x + \cot x$. Điều kiện: $|t| \geq 2$.

Phương trình trở thành $3(t^2 - 1) + t = m \Rightarrow 3t^2 + t = m + 3$

Xét hàm $f(t) = 3t^2 + t$ trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Bảng biến thiên

T	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(t)$	-			+
$f(t)$	$+\infty$ ↘ 10		14 ↗ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m + 3 \geq 10 \Leftrightarrow m \geq 7$

$\xrightarrow[m < 2018]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{7; 8; 9; \dots; 2017\} \longrightarrow$ có 2011 giá trị.

Chọn C.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 4x = m \cdot \tan x$ có nghiệm $x \neq k\pi$.

- a) $m \in \left[-\frac{1}{2}; 4\right)$. b) $m \in \left[-\frac{1}{2}; 4\right]$.
c) $m \in \left(-\frac{1}{2}; 4\right)$. d) $m \in (-1; 4)$.

Lời giải:

Điều kiện $\cos x \neq 0$.

- Xét $t = 1$: (1) trở thành $2 = 0$ (không thỏa mãn).

- Xét $t \neq 1$: (1) $\Leftrightarrow \frac{t^2 + 2t - 1}{t - 1} = 2m$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t - 1}$ với $t \in [-1; 1)$, ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t - 1)^2} < 0 \forall t \in (-1; 1)$

Bảng biến thiên

t	-1	1
$f'(t)$	-	
$f(t)$	1	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2m \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$

$\frac{m \in \mathbb{Z}}{m \in [-10; 10]} \rightarrow m \in \{-10; -9; -8; \dots; 0\} \rightarrow$ có 11 giá trị.

Chọn D.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x + m \sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{12}\right)$.

a) $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

b) $m \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

c) $m \in (0; 1)$.

d) $m \in \left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải:

Ta có: $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x}{2}$ và $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = \frac{1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2}m$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 2 = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + (1 - \cos 2x)m$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)m = 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos 2x + 3 \quad (*)$$

Đặt $t = \cos 2x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right) \rightarrow t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow m = \frac{4t^3 - 4t^2 - 3t + 3}{t - 1} = 4t^2 - 3$.

Xét hàm $f(t) = 4t^2 - 3$ trên đoạn $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$, ta được $\begin{cases} \min_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]} f(t) = 0 \\ \max_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]} f(t) = 1 \end{cases}$

Vậy để phương trình $m = f(t)$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (0; 1)$.

Chọn C.

Ví dụ 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2 \sin x + m \cos x = 1 - m$ có nghiệm x thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

a) $m \geq -\frac{3}{2}$.

b) $m > -\frac{3}{2}$.

c) $-1 \leq m \leq 3$.

d) $-1 < m < 3$.

Lời giải:

Nếu dùng điều kiện có nghiệm: $4 + m^2 \geq (1 - m)^2 \Leftrightarrow 4 \geq 1 - 2m \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}$ (đáp án A) thì sai hoàn toàn bởi vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $\sin x$ quét hết tập giá trị $[-1; 1]$ nhưng với $\cos x$ thì không.

Lời giải đúng. Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow t \in [-1; 1]$

Phương trình trở thành $2 \frac{2t}{1+t^2} + m \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 - m \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 2m$

Xét hàm $f(t) = t^2 - 4t + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tìm được $\begin{cases} \max_{[-1; 1]} f(t) = 6 \\ \min_{[-1; 1]} f(t) = -2 \end{cases}$

Do đó yêu cầu bài toán $-2 \leq 2m \leq 6 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

Chọn C.

Ví dụ 12. Cho phương trình $mx^2 + 4\pi^2 = 4\pi^2 \cos x$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng

a) -54.

b) -35.

c) 35.

d) 51.

Lời giải:

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình $\Leftrightarrow \frac{4\pi^2(\cos x - 1)}{x^2}$

Xét hàm $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $f'(x) = \frac{2(1 - \cos x) - x \sin x}{x^3} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) < f(x) < \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \longleftrightarrow -\frac{1}{2} < f(x) < -\frac{4}{\pi^2}$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-19; -18; -17\}.$$

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f[3\cos(x+1)+1] = -\frac{m}{2}$ có nghiệm?

- a) 2.
- b) 3.
- c) 9.
- d) 13.

Đặt $t = 3 \cos x(x+1) + 1 \longrightarrow -2 \leq t \leq 4$.

Do đó đề phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{m}{2} \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 2$.

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-6; -5; -4; \dots; -2\} \longrightarrow \text{có 9 giá trị.}$$

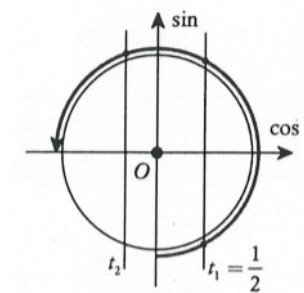
Ví dụ 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f(2 \sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm?

- a) 2. b) 3.

c) 4.

d) 5.

Lời giải:Đặt $t = 2 \sin x + 1 \longrightarrow -1 \leq t \leq 3$.Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $t \in [-1; 3]$ thì $-2 \leq f(t) \leq 2$.Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq f(m) \leq 2$. Cũng từ bảng biến thiên suy ra $f(m)$ nhận mọi giá trị từ -2 đến 2 khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 3$. $\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1; 2; 3\} \longrightarrow$ có 3 giá trị.**Chọn B.****Ví dụ 15.** Cho phương trình $2 \cos^2 3x + (3 - 2m) \cos 3x + m - 2 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.a) $-1 \leq m \leq 1$.b) $1 < m \leq 2$.c) $1 \leq m \leq 2$.d) $1 \leq m < 2$.**Lời giải:**Với $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow 3x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ Đặt $t = \cos 3x (-1 \leq t \leq 1)$. Phương trình trở thành $2t^2 + (3 - 2m)t + m - 2 = 0$ Ta có $\Delta = (2m - 5)^2 \longrightarrow$ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = m - 2 \end{cases}$ Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1 = \frac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 \leq t_2 \leq 0$ (tham khảo hình vẽ)

$$\Leftrightarrow -1 < m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 < m \leq 2$$

Chọn B.**Cách khác:**

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $2t^2 + (3-2m)t + m - 2 = 0$ có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn

$$-1 < t_2 \leq 0 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P \leq 0 \\ a.f(1) > 0 \\ a.f(-1) > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$ có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$

a) $-3 < m < -1 + \sqrt{2}$.

b) $-3 < m \leq -1 + \sqrt{2}$.

c) $-1 < m \leq -1 + \sqrt{2}$.

d) $-1 < m < -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải:

Phương trình viết lại $\sin 2x + \sin x + \cos x - 2 = m$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, suy ra $\sin 2x = t^2 - 1$

Với $x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right) \longrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right) \longrightarrow t \in (0; \sqrt{2}]$

Phương trình trở thành $t^2 + t - 3 = m$ (*)

Xét hàm $f(t) = t^2 + t - 3$ trên $(0; \sqrt{2}]$. Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in (0; \sqrt{2})$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; \sqrt{2}]$ và kết luận $f(0) < m \leq f(\sqrt{2}) \longleftrightarrow -3 < m \leq -1 + \sqrt{2}$

Thử lại $m = -1 + \sqrt{2} \longrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \longrightarrow$ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{4}$ duy

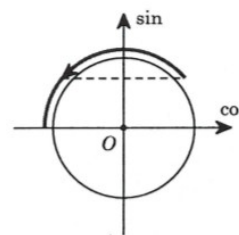
nhất thuộc $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$

Lí do dẫn đến sai lầm là bài toán yêu cầu có hai nghiệm khác với yêu cầu có nghiệm.

Dựa vào đường tròn lượng giác (hình vẽ bên) ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có đúng một nghiệm t thuộc $(1; \sqrt{2})$

$\longrightarrow f(1) < m < f(\sqrt{2}) \longleftrightarrow -1 < m < -1 + \sqrt{2}$

Chọn D.



Ví dụ 17. Cho phương trình $m \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - m - 1 = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của S bằng

a) -15.

b) -14.

c) 0.

d) 15.

Lời giải:

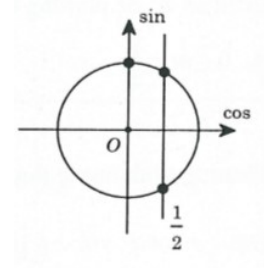
- Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$, mà $x \in [0; 2\pi] \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

- Với $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$, mà $x \in [0; 2\pi] \longrightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $\cos x = m$ có đúng một nghiệm $[0; 2\pi]$ khác $\left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{3} \right\}$ (xem hình vẽ). Từ đường tròn lượng

giác ta suy ra chỉ có hai giá trị m thỏa mãn là $m = -1$ và $m = 0$. Bởi vì:

Với $m = -1$, phương trình $\cos x = -1$ chỉ có nghiệm duy nhất $x = \pi$ thuộc $[0; 2\pi]$.



Với $m = 0$, phương trình $\cos x = 0$ có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ (trùng với nghiệm đã tính) và $x = \frac{3\pi}{2}$ thuộc $[0; 2\pi]$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn. **Chọn B.**

Ví dụ 20. Cho phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có 4 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$

- | | |
|-------|-------|
| a) 1. | b) 2. |
| c) 3. | d) 4. |

Lời giải:

Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$

Phương trình $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow 4 \cos^2 4x + \cos 4x = 4m - 3$

Đặt $t = \cos 4x$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right] \longrightarrow 4x \in [-\pi; \pi]$ nên $t \in [-1; 1]$

Khi đó phương trình trở thành $4t^2 + t = 4m - 3$ (*)

- Ứng với mỗi $t \in [-1; 1)$ thì phương trình $\cos 4x = t$ sẽ có hai giá trị của $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$

- Với $t = 1$ thì phương trình $\cos 4x = t$ cho ta đúng một giá trị của $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với (*) có hai nghiệm t phân biệt thuộc $[-1; 1)$.

Xét hàm $f(t) = 4t^2 + t$ trên $[-1; 1)$. Ta có $f'(t) = 8t + 1 \longrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8}$

Bảng biến thiên

t	-1	$\frac{1}{8}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	3	$-\frac{1}{16}$	5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow -\frac{1}{16} < 4m - 3 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1$. Vậy có 1 giá trị nguyên.

Chọn A.

Ví dụ 21. Cho phương trình $(\sin x - 1)(\cos^2 x - \cos x + m) = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$

a) $0 \leq m < \frac{1}{4}$.

b) $-\frac{1}{4} < m \leq 0$.

c) $0 < m < \frac{1}{4}$.

d) $-\frac{1}{4} < m < 0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos^2 x - \cos x + m = 0 \end{cases} \quad (1)$

Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0; 2\pi] \longrightarrow t \in [-1; 1]$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - t = -m \quad (2)$

Phương trình $\sin x = 1$ có đúng 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ thuộc đoạn $[0; 2\pi]$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt (khác $\frac{\pi}{2}$) thuộc đoạn $[0; 2\pi] \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 1] \setminus \{-1; 0\}$

Xét hàm $f(t) = t^2 - t$ trên $(-1; 0) \cup (0; 1]$. Ta có $f'(t) = 2t - 1 \longrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

t	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$	-		- +	0
$f(t)$	2	0		0

$$-\frac{1}{4}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của bài toán $-\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > m > 0$.

Chọn C.

Ví dụ 22. Biết rằng khi $m = m_o$ thì phương trình $2\sin^2 x - (5m+1)\sin x + 2m^2 + 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) $m_o = -3$.

b) $m_o = \frac{1}{2}$.

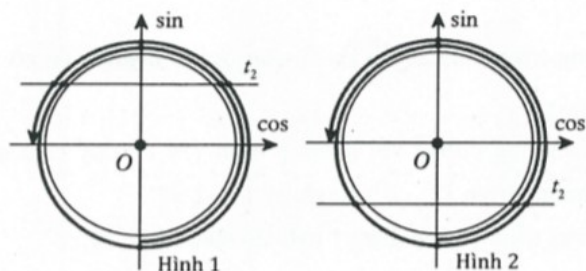
c) $m_o \in \left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right]$.

d) $m_o \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{5}\right)$.

Lời giải:

Đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$)

Phương trình trở thành $2t^2 - (5m+1)t + 2m^2 + 2m = 0$ (*)



Yêu cầu bài toán tương đương với:

- **Trường hợp 1:** Phương trình (*) có một nghiệm $t_1 = -1$ (cho ra một nghiệm x) và một nghiệm $0 < t_2 < 1$ (cho ra bốn nghiệm x) (Hình 1).

✓ Do $t_1 = -1 \longrightarrow t_2 = -\frac{c}{a} = -m^2 - m$

✓ Thay $t_1 = -1$ vào phương trình (*), ta được
$$\begin{cases} m = -3 \longrightarrow t_2 = -6 \notin (0;1) \text{ (loại)} \\ m = -\frac{1}{2} \longrightarrow t_2 = \frac{1}{4} \in (0;1) \text{ (thỏa)} \end{cases}$$

- **Trường hợp 2:** Phương trình (*) có một nghiệm $t_1 = 1$ (cho ra hai nghiệm x) và một nghiệm $-1 < t_2 \leq 0$ (cho ra ba nghiệm x) (Hình 2).

▪ Do $t_1 = 1 \longrightarrow t_2 = \frac{c}{a} = m^2 + m$

▪ Thay $t_1 = 1$ vào phương trình (*), ta được
$$\begin{cases} m = 1 \longrightarrow t_2 = 2 \notin (-1;0) \text{ (loại)} \\ m = \frac{1}{2} \longrightarrow t_2 = \frac{3}{4} \in (-1;0) \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2)^2 - m(-2) - 2m = 0 \\ 2.2^2 - 2m - 2m = 0 \end{cases} : \text{vô lí}$$

Vậy $\begin{cases} m > 2 \\ m = 0 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 3; 4; 5; \dots; 10\} \longrightarrow \text{có 9 giá trị.}$

Chọn B.

Ví dụ 24. Cho phương trình $(m+1)\cos x + (m-1)\sin x = 2m+3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \frac{2\pi}{3}$

- a) 0.
- b) 1.
- c) 2
- d) Vô số.

Lời giải:

Điều kiện có nghiệm: $(m+1)^2 + (m-1)^2 \geq (2m+3)^2 \Leftrightarrow \frac{-6-\sqrt{22}}{2} \leq m \leq \frac{-6+\sqrt{22}}{2}$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}} \cos x + \frac{m-1}{\sqrt{2m^2+2}} \sin x = \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + \alpha + k2\pi \\ x = -\beta + \alpha + \ell 2\pi \end{cases} \quad \text{v\u016f\u00ed} \quad \cos \alpha = \frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}; \cos \beta = \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$$

Yêu cầu bài toán: $|x_1 - x_2| = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow |2\beta + (k - \ell)2\pi| = \frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos|2\beta + (k - \ell)2\pi| = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \cos 2\beta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(2m+3)^2}{2m^2+2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (thỏa mãn)} \\ m = -\frac{17}{7} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Chọn C.

Ví dụ 25. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m + \sin(m + \sin 3x) = \sin(3 \sin x) + 4 \sin^3 x$ có nghiệm thực?

- a) 4.
- b) 5.
- c) 8.
- d) 9.

Lời giải:

Cộng thêm $\sin 3x$ vào hai vế phương trình ta được

$$m + \sin 3x + \sin(m + \sin 3x) = \sin(3 \sin x) + 4 \sin^3 x + \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow (m + \sin 3x) + \sin(m + \sin 3x) = (3 \sin x) + \sin(3 \sin x)$$

Xét hàm $f(t) = t + \sin(t)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 1 + \cos(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \longrightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Suy ra $m + \sin 3x = 3 \sin x \longrightarrow m = 4 \sin^3 x \in [-4; 4]$.

Chọn D.

Ví dụ 26. Cho phương trình $(8\sin^3 x - m)^3 = 162\sin x + 27m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$?

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) Vô số.

Lời giải:

Đặt $u = 2 \sin x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow 2 \sin x \in (0; \sqrt{3})$ nên $u \in (0; \sqrt{3})$

Phương trình trở thành: $(u^3 - m)^3 = 81u + 27m$

$$\Leftrightarrow (u^3 - m)^3 + 27(u^3 - m) = (3u)^3 + 27(3u) \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 27t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 27 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Nhận thấy (*) có dạng $f(u^3 - m) = f(3u) \Leftrightarrow u^3 - m = 3u \Leftrightarrow u^3 - 3u = m$

Xét hàm $g(u) = u^3 - 3u, \forall u \in (0; \sqrt{3})$. Khảo sát ta được $-2 \leq g(u) < 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \leq m < 0$

$$\longleftarrow^{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1\}.$$

Chọn B.

Ví dụ 27. Cho phương trình $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

- a) 2.
- b) 3.
- c) 5.
- d) 7.

Lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow m + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x} = \sin^3 x \Leftrightarrow m + 3\sin x + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x} = \sin^3 x + 3\sin x$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm đồng biến nên suy ra

$$f\left(\sqrt[3]{m+3\sin x}\right)=f\left(\sin x\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin x\Leftrightarrow m=\sin^3 x-3\sin x$$

Đặt $u = \sin x (-1 \leq u \leq 1)$, phương trình trở thành $m = u^3 - 3u$

Xét hàm $g(u) = u^3 - 3u, u \in [-1; 1]$. Ta tìm được $\begin{cases} \max_{[-1;1]} g(u) = 2 \\ \min_{[-1;1]} g(u) = -2 \end{cases}$

Do đó, đề phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{[-1;1]} g(u) \leq m \leq \max_{[-1;1]} g(u) \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

Chọn C.

Ví dụ 28. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m + \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = \sin x$ có nghiệm

là $[a; b]$. Giá trị của $a + b$ bằng

a) 4.

b) $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$.

c) 3.

d) $-\frac{1}{4} - \sqrt{2}$.

Lời giải:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (m+1+\sqrt{1+\sin x}) + \sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}} = (1+\sin x) + \sqrt{1+\sin x}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t \in [0; +\infty)$. Hàm này đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên suy ra

$$f(\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}) = f(\sqrt{1+\sin x}) \Leftrightarrow \sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}} = \sqrt{1+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow m+1+\sqrt{1+\sin x} = 1+\sin x$$

$$\Leftrightarrow m = \sin x - \sqrt{1+\sin x}$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{1+\sin x}, \text{ vì } \sin x \in [-1; 1] \longrightarrow u \in [0; \sqrt{2}]$$

$$\text{Phương trình trở thành: } m = u^2 - u = 1$$

$$\text{Xét hàm } g(u) = u^2 - u - 1 \text{ với } u \in [0; \sqrt{2}]. \text{ Ta có } g'(u) = 2u - 1; g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

u	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$g'(u)$		- 0 +	
$g(u)$	-1	$-\frac{5}{4}$	$1 - \sqrt{2}$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq m \leq 1 - \sqrt{2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ b = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow a + b = -\frac{1}{4} - \sqrt{2}$$

Chọn D.

Ví dụ 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sin x (2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1) \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3 \sqrt{2 \cos^2 x + m + 2}$$

có đúng một nghiệm thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$2 \sin^3 x + \sin x = 2(2 \cos^3 x + m + 2) \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} + \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}$$

Xét hàm $f(t) = 2t^3 + t$ với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0 \longrightarrow f(t)$ đồng biến

$$\text{Mà } f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right), \text{ suy ra } \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin^2 x + 2\cos^3 x + m + 2 \end{cases}$$

$$\sin^2 x = 2 \cos^3 x + m + 2 \quad (\text{vì } \sin x \geq 0, \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right))$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 2 \cos^3 x + m + 2 \Leftrightarrow m = -2 \cos^3 x - \cos^2 x - 1$$

Đặt $u = \cos x$, vì $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow u \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. Khi đó phương trình trở thành: $m = -2u^3 - u^2 - 1$

$$\text{Xét } g(u) = -2u^3 - u^2 - 1, \text{ có } g'(u) = -6u^2 - 2u; g'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \\ u = -\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

u	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
$g'(u)$	-	0	0	-
$g(u)$	1	$-\frac{28}{27}$	1	4

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ -4 \leq m \leq -\frac{28}{27} \end{array} \right.$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4; -3; -2; -1\}$$

Chọn D.

Ví dụ 30. Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

- a) 2.
- b) 3.
- c) 5.
- d) 9.

Lời giải:

Điều kiện: $2\cos^2 x + m \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương với $2 + \sin 2x + |\sin x + \cos x| = 1 + \cos 2x + m + \sqrt{2 \cos^2 x + m}$

$$\Leftrightarrow \left(|\sin x + \cos x| \right)^2 + |\sin x + \cos x| = \left(\sqrt{2 \cos^2 x + m} \right)^2 + \sqrt{2 \cos^2 x + m}$$

Mà $f(|\sin x + \cos x|) = f(\sqrt{2\cos^2 x + m})$, suy ra $|\sin x + \cos x| = \sqrt{\cos^2 x + m}$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2 \cos^2 x + m \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = 2 \cos^2 x + m \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = m$$

$$\forall x \quad \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

—> phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1\}$

Ví dụ 31. Cho phương trình $\sqrt[3]{4\sin x + m} + \sin x = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4\sin x + m - 8} + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

- a) 18.
- b) 19.
- c) 20.
- d) 21.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{4\sin x + m} \\ b = \sin x \end{cases}$

Phương trình trở thành: $a + b = \sqrt[3]{a^3 + b^3 - 8} + 2$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)^3 = a^3 + b^3 - 8$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 6(a+b)^2 + 12(a+b) - (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(3ab-6a-6b+12)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)(a-2)(b-2)=0$$

- Với $b = 2 \longrightarrow \sin x = 2$: vô nghiệm
- Với $a = 2 \longrightarrow \sqrt[3]{4 \sin x + m} = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{8 - m}{4}$

Phương trình có nghiệm khi $-1 \leq \frac{8-m}{4} \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 12 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{4; 5; 6; \dots; 12\}$

- Với $a+b=0 \longrightarrow \sqrt[3]{4\sin x+m}+\sin x=0 \Leftrightarrow m=-\sin^3 x-4\sin x$

Đặt $t = \sin x (-1 \leq t \leq 1)$, ta được $m = -t^3 - 4t$

Xét hàm $f(t) = -t^3 - 4t$ trên đoạn $[-1; 1]$, ta được $-5 \leq f(t) \leq 5$ với mọi $t \in [-1; 1]$

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -5 \leq m \leq 5 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-5; -4; \dots; 4; 5\}$

Hợp hai trường hợp ta được 18 giá trị nguyên của m (vì $m = 4; m = 5$ lặp lại).

Trang 19

a) 2015.
c) 2018.

b) 2016.
d) 4036.

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

▪ Với $u = -\cos x$, ta được $\sqrt{m + \cos x} = -\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos x \geq 0 \\ m + \cos x = \cos^2 x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ m = \cos^2 x - \cos x \xrightarrow{\text{khảo sát}} m \in [0; 2] \end{cases}$$

$m \in \{0; 1; 2; 3\} \longrightarrow$ có 4 số nguyên dương thỏa mãn.

Chọn C.

Ví dụ 34. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = \frac{m}{3}$ có nghiệm là

a) 2.

b) 3.

c) 4.

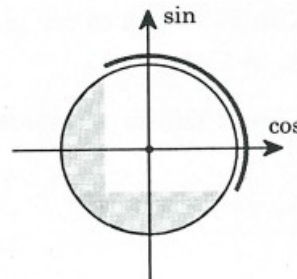
d) 5.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 1+2\cos x \geq 0 \\ 1+2\sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ (Hình vẽ)

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2 + 2(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1+2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x} = \frac{m^2}{9} \end{cases}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \xrightarrow{\text{điều kiện}} t \in \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2} \right]$



Phương trình (1) trở thành $2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1} = \frac{m^2}{9}$

Xét hàm $f(t) = 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}$ với $t \in \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2} \right]$

Ta có $f'(t) = 2 + \frac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}} > 0, \forall t \in \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2} \right]$

Suy ra $\begin{cases} \max f(t) = f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 4 \\ \min f(t) = f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$

Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} + 1 \leq \frac{m^2}{9} \leq 4(\sqrt{2} + 1) \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{\sqrt{3} + 1} \leq m \leq 6\sqrt{\sqrt{2} + 1}$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$

Chọn D.

Cách khác:

Bài toán cô lập m một vế nên dùng MODE 7 nhanh hơn.

Nhập hàm $dF(X) = \sqrt{1+2\cos X} + \sqrt{1+2\sin X}$ với $Start = -\frac{\pi}{6}; End = \frac{2\pi}{3}; Step : \frac{5\pi}{114}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 7.

Câu 2. Tìm m để phương trình $m \sin 2x - \cos x 2x = 2m - 1$ vô nghiệm

- A. $0 < m < \frac{4}{3}$. B. $m < 0 \vee m > \frac{4}{3}$. C. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. D. $m \leq 0 \vee m \geq \frac{4}{3}$.

Câu 3. Với giá trị nào sau đây của tham số m thì phương trình $\sin x + m \cos x = \sqrt{14}$ có nghiệm?

- A. 2. B. -4. C. 3. D. -3.

Câu 4. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $3\sin x + m \cos x = 5$ vô nghiệm

- A. $m \in (-4; 4)$. B. $m \in (4; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ D. $m \in (-\infty; -4)$.

Câu 5. Tìm m để phương trình $3\sin x - 4\cos x = 2m$ có nghiệm

- A. $-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$. B. $-\frac{5}{2} < m < \frac{5}{2}$. C. $m \leq -\frac{5}{2}$. D. $\frac{5}{2} \leq m$.

Câu 6. Tìm điều kiện của m để phương trình $m \sin x - 3\cos x = 5$ có nghiệm?

- A. $m \geq \sqrt{34}$. B. $-4 \leq m \leq 4$. C. $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$. D. $m \geq 4$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin x - 4\cos x = m$ có nghiệm

- A. $m \leq -5$. B. $-5 \leq m \leq 5$. C. $m \leq 5$. D. $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 8. Tìm m để phương trình $m = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ có nghiệm

- A. $-2 \leq m \leq 0$. B. $0 \leq m \leq 1$. C. $\frac{2}{11} \leq m \leq 2$. D. $-2 \leq m \leq -1$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2m \sin x - (m-1)\cos x - 2\sqrt{2} = 0$ vô nghiệm

- A. $m \leq -1 \vee m \geq \frac{7}{5}$. B. $m < -2 \vee m > 1$. C. $-\frac{7}{5} < m < 1$. D. $m \leq -\frac{7}{5} \vee m \geq 1$.

Câu 10. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x + (m-1)\cos x = 2m-1$ có nghiệm là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm?

- A. 4036. B. 2020. C. 4037. D. 2019.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

- A. $-1 \leq m < 0$. B. $-1 < m < 0$. C. $-1 \leq m \leq 0$. D. $-1 \leq m < \frac{1}{2}$.

Câu 13. Tìm m để phương trình $(\sin x - 1)(2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 14. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x - 1)(\cos^2 x - \cos x + m) = 0$ có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

- A. $0 < m < \frac{1}{4}$. B. $-\frac{1}{4} < m < 0$. C. $-\frac{1}{4} < m < 0$. D. $0 \leq m < \frac{1}{4}$.

Câu 15. Cho phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2(\sqrt{3}\sin x + \cos x) - m = 0$. Để phương trình chỉ có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $m \in (a; b)$. Giá trị của $b - a$ là

- A. $3\sqrt{3}$. B. $4 - 2\sqrt{3}$. C. 4. D. $4\sqrt{3} - 2$.

Câu 16. Cho phương trình $(2\sin x + 1)(\sqrt{3}\cos x + 2\sin x) = 2\sin^2 x + 3\sin x + 1$. Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình đã cho

- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. 2π . C. $\frac{16\pi}{3}$. D. π .

Câu 17. Tìm m để phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ là $(a; b]$. Giá trị của $a + b$ là

- A. -1. B. $\frac{5}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. 0.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

- A. $\begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{47}{64} \end{cases}$. B. $\frac{47}{64} < m < \frac{3}{2}$. C. $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$. D. $\frac{47}{64} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 19. Tìm m nguyên để phương trình $2\cos 3x = m - 2\cos x + \sqrt[3]{m + 6\cos x}$ có nghiệm?

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 20. Tìm tất cả các tập giá trị của tham số m để phương trình $m = \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = \sin x$ có nghiệm là $[\alpha; \beta]$. Giá trị $\alpha + \beta$ bằng

- A. $-\frac{1}{4} - \sqrt{2}$. B. $-\frac{1}{4} + \sqrt{2}$. C. $-\frac{1}{2} - \sqrt{2}$. D. $-\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

Câu 21. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\sin^2 x + \sqrt{m + \sin x} = m$ có nghiệm thực?

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\cos^2 x + \sqrt{m + \cos x} = m$ có nghiệm thực?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

Câu 23. Cho phương trình $\sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} = 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2}$. Gọi $S = [a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình trên có nghiệm thực. Tính giá trị của $P = a^2 + b^2$

- A. $P = \frac{162}{49}$. B. $P = \frac{49}{162}$. C. $P = 4$. D. $P = 2$.

Câu 24. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $\cos 3x + (m+1)\cos x - \cos 2x = 1$ có 7 nghiệm phân biệt trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$

- A. $0 < m < 2$. B. $-1 < m < 1$. C. $1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-B	2-B	3-B	4-A	5-A	6-C	7-B	8-C	9-C	10-C
11-B	12-B	13-A	14-	15-B	16-A	17-C	18-B	19-A	20-A
21-D	22-A	23-A	24-A						

Câu 1: Chọn B

$$\text{Ta có } 3\sin 2x - m^2 + 5 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{m^2 - 5}{3}$$

$$\text{Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } -1 \leq \frac{m^2 - 5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq m^2 \leq 8$$

$$\text{Kết hợp } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{\pm 2\}.$$

Câu 2: Chọn B

$$\text{Phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow m^2 + (-1)^2 < (2m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ m < 0 \end{cases}$$

Câu 3: Chọn B

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1 + m^2 \geq 14 \Leftrightarrow m^2 \geq 13$

Vậy trong 4 giá trị của tham số m ở các phương án trên thì $m = -4$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Chọn A

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 3^2 + m^2 < 5 \Leftrightarrow m^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Câu 5: Chọn A

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 3^2 + (-4)^2 \geq (2m)^2 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$

Câu 6: Chọn C

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + (-3)^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$

Câu 7: Chọn B

Phương trình có nghiệm $3^2 + (-4)^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 5$

Câu 8: Chọn C

Dễ thấy $2 \cos x - \sin x + 4 > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$

Do đó phương trình $\Leftrightarrow m(2 \cos x - \sin x + 4) = \cos x + 2 \sin x + 3$

$\Leftrightarrow (2m - 1) \cos x + (-m - 2) \sin x = 3 - 4m$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (2m - 1)^2 + (-m - 2)^2 \geq (3 - 4m)^2$

$\Leftrightarrow 11m^2 - 24m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq m \leq 2$

Câu 9: Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow 2m \sin x - (m - 1) \cos x = 2\sqrt{2}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$(2m)^2 + (1 - m)^2 < (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 4m^2 + m^2 - 2m + 1 < 8 \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 7 < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{7}{5} < m < 1$

Câu 10: Chọn C

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 1 + (m - 1)^2 \geq (2m - 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$. Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0; 1\}$

Câu 11: Chọn B

$PT \Leftrightarrow (m + 1) \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow m + 1 - m \cos 2x - \cos 2x - 2 \sin 2x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (m - 1) \cos 2x + 2 \sin 2x = m + 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (m-1)^2 + 2^2 \leq (m+1)^2 \Leftrightarrow 4m \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 1$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2018; 2018] \end{cases} \Rightarrow$ có 2020 giá trị của tham số m .

Câu 12: Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 1 + \cos 2x - (2m+1)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2m\cos x - \cos x + m = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x - m) - (\cos x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}$$

Với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (-1; 0)$ nên phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1 < m < 0$.

Câu 13: Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow (\sin x - 1)[2\cos x(\cos x - m) - (\cos x - m)] = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \cos x = m \end{cases}$$

Trên đoạn $[0; 2\pi]$ thì các phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2}; x = \pm \frac{\pi}{3}$ do đó phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thực khi và chỉ khi

TH1: Phương trình $\cos x = m$ có đúng 1 nghiệm thực khác $x = \frac{\pi}{2}; x = \pm \frac{\pi}{3}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

TH2: Phương trình $\cos x = m$ có 2 nghiệm trong đó 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m = 0$

Vậy có 3 giá trị của m .

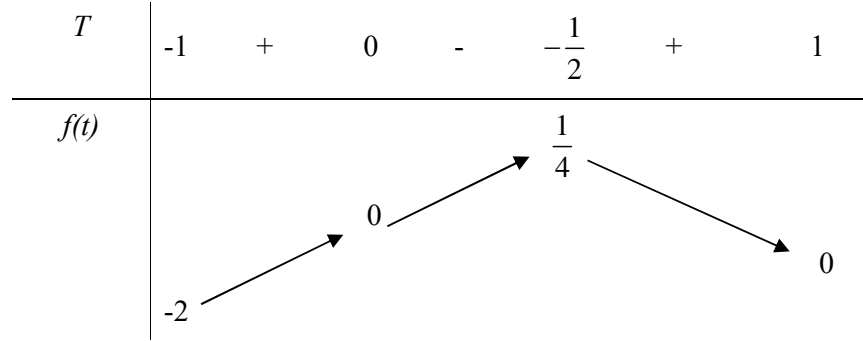
Câu 14: Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos^2 x - \cos x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \cos^2 x - \cos x + m = 0 \end{cases}$$

Với $x \in [0; 2\pi]$ thì phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ có 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ do đó để phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ thì phương trình $\cos^2 x - \cos x + m = 0$ có 4 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ khác nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$.

Đặt $t = \cos x$ thì $t \in [-1; 1]$

Điều kiện bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình $t^2 - t + m = 0 \Leftrightarrow m = t - t^2$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in (-1; 1) \setminus \{0\}$. Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(t) = t - t^2$ với $t \in [-1; 1]$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < \frac{1}{4}$

Câu 15: Chọn B

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = m$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = m \Leftrightarrow 1 - 2 \left[1 - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] - 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 = m$$

$$\text{Với } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} \right] \text{ và đặt } t = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \text{ thì } t \in \left[-\frac{1}{2}; 1 \right]$$

$$\text{Khi đó } f(t) = 4t^2 - 4t - 1 = m$$

Để phương trình có đúng 2 nghiệm x_1, x_2 thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right]$ ta xét

TH1: $f(t) = m$ có nghiệm kép $t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$, mà $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \notin \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$ nên trường hợp này loại.

TH2: $f(t) = m$ có 2 nghiệm $t_1, t_2 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ khi và chỉ khi $m \in (-2; 2 - 2\sqrt{3})$

$$\text{Suy ra } b - a = 4 - 2\sqrt{3}$$

Câu 16: Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sqrt{3}\cos x + 2\sin x) = (2\sin x + 1)(\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Với } 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Với } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\} \text{ suy ra tổng các nghiệm của phương trình là } \frac{7\pi}{2}$$

Câu 17: Chọn C

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m(1 - \sin^2 x) = m(1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos 2x - m \cos x) = (1 + \cos x)(m - m \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ \cos 2x - m \cos x = m - m \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = m \end{cases}$$

- Với $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$, kết hợp $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow$ vô nghiệm.

- Với $\cos 2x = m$ và $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow 2x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, dựa vào đường tròn lượng giác thì để phương trình có đúng 2 nghiệm thì $\cos 2x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right]$

$$\text{Do đó } S = \left(-1; -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow a + b = -\frac{3}{2}$$

Câu 18: Chọn B

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 4x = m$$

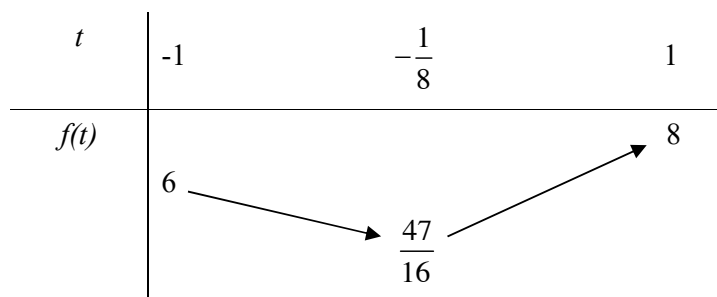
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} + \cos^2 4x = m$$

$$\Leftrightarrow 4 - 1 + \cos 4x + 4\cos^2 4x = 4m \Leftrightarrow 4\cos^2 4x + \cos 4x + 3 = 4m$$

$$\text{Với } x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 4x \in [-\pi; \pi], \text{ đặt } t = \cos 4x \text{ suy ra } f(t) = 4t^2 + t + 3 = 4m$$

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm thì phương trình $f(t) = 4m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1)$

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\frac{47}{16} < 4m < 6 \Leftrightarrow \frac{47}{64} < m < \frac{3}{2}$

Câu 19: Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2(\cos 3x + \cos x) = m\sqrt[3]{m+6\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x \cdot \cos x = m + \sqrt[3]{m+6\cos x} \Leftrightarrow 4(2\cos^2 x - 1)\cos x = m + \sqrt[3]{m+6\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x)^3 + 2\cos x = m + 6\cos x + \sqrt[3]{m+6\cos x}$$

$$\text{Đặt } a = 2\cos x, b = \sqrt[3]{m+6\cos x} \text{ ta có: } a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Do đó } 2\cos x = \sqrt[3]{m+6\cos x} \Leftrightarrow m = 8\cos^3 x - 6\cos x = 2(4\cos^3 x - 3\cos x) = 2\cos 3x$$

Vậy phương trình có nghiệm $km \in [-2; 2]$, kết hợp $m \in \mathbb{Z}$ suy ra có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 20: Chọn A

$$\text{Đặt } a = \sqrt{1+\sin x} \text{ thì } a \in [0; \sqrt{2}] \text{ do } \sin x \in [-1; 1]$$

$$\text{Khi đó } m + \sqrt{m+1+a} = a^2 - 1 \Leftrightarrow m+1 + \sqrt{m+1+a} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \left(m+1+a+\sqrt{m+1+a}+\frac{1}{4}\right) = \left(a^2+a+\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{m+1+a}+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+1+a}+\frac{1}{2} = a+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m+1+a} = a \Leftrightarrow m+1 = a^2 - a \Leftrightarrow m+\frac{5}{4} = \left(a-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{Với } a \in [0; \sqrt{2}] \text{ thì } \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \in \left[0; \frac{9}{4}-\sqrt{2}\right] \text{ nên phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow 0 \leq m+\frac{5}{4} \leq \frac{9}{4}-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow m \in \left[-\frac{5}{4}; 1-\sqrt{2}\right] \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{1}{4} - \sqrt{2}$$

Câu 21: Chọn D

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x = m + \sin x - \sqrt{m+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4} = m + \sin x - \sqrt{m+\sin x} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{m + \sin x} - \frac{1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \frac{1}{2} = \sqrt{m + \sin x} - \frac{1}{2} \\ \sin x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{m + \sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 = \sqrt{m + \sin x} \\ \sin x = -\sqrt{m + \sin x} \end{cases}$$

▪ **TH1:** $\sin x + 1 = \sqrt{m + \sin x} \Leftrightarrow m = (\sin x + 1)^2 - \sin x = \sin^2 x + \sin x + 1$

Với $\sin x \in [-1; 1]$ thì $m = \sin^2 x + \sin x + 1 = \left(\sin x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \in \left[\frac{3}{4}; 3 \right]$

Suy ra phương trình có nghiệm khi $m \in \left[\frac{3}{4}; \frac{9}{4} \right]$, kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{1; 2; 3\}$

▪ **TH2:** $\sin x = -\sqrt{m + \sin x} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 0 \\ m = \sin^2 x - \sin x \end{cases}$

Với $\sin x \in [-1; 0] \Rightarrow m = \sin^2 x - \sin x \in [0; 2]$

Suy ra phương trình có nghiệm khi $n \in [0; 2]$, kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0; 1; 2\}$

Kết hợp 2 trường hợp suy ra $m = \{0; 1; 2; 3\}$

Câu 22: Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x + \frac{1}{4} = m + \cos x - \sqrt{m + \cos x} + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{m + \cos x} - \frac{1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \frac{1}{2} = \sqrt{m + \cos x} - \frac{1}{2} \\ \cos x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{m + \cos x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = \sqrt{m + \cos x} \\ \cos x = -\sqrt{m + \cos x} \end{cases}$$

▪ **TH1:** Với $\cos x + 1 = \sqrt{m + \cos x} \Leftrightarrow m = (\cos x + 1)^2 - \cos x = \cos^2 x + \cos x + 1 = \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$

Với $\cos x \in [-1; 1]$ thì $\frac{3}{4} \leq \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \leq 3 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi $m \in \left[\frac{3}{4}; 3 \right]$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = \{1; 2; 3\}$

▪ **TH2:** Với $\cos x = -\sqrt{m + \cos x} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 0 \\ m = \cos^2 x - \cos x \end{cases}$

Với $-1 \leq \cos x \leq 0 \Rightarrow \cos^2 x - \cos x \in [0; 2] \Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi $m \in \{0; 2\}$

Suy ra phương trình có nghiệm khi $m \in \{0; 2\}$, kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = \{1; 2\}$

Kết hợp 2 trường hợp suy ra $m = \{1; 2; 3\}$

Câu 23: Chọn A

Để thấy với $\sin x = m$ thì phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{8\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = m = 0$

Với $\sin x \neq m$ chia cả 2 vế của phương trình cho $\sqrt[3]{(\sin x - m)^2}$ ta được

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)} = 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{\left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)} \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \sin x + m = \sin x - m \Leftrightarrow m = 0$$

$$\text{Với } t = -2 \Rightarrow \frac{\sin x + m}{\sin x - m} = -8 \Leftrightarrow \sin x + m = -8\sin x + 8m \Leftrightarrow 9\sin x = 7m \text{ có nghiệm khi và chỉ khi}$$

$$-9 \leq 7m \leq 9 \Leftrightarrow \frac{-9}{7} \leq m \leq \frac{9}{7} \Rightarrow S = \left[\frac{-9}{7}; \frac{9}{7} \right] \Rightarrow P = \frac{162}{49}$$

Câu 24: Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + (m+1)\cos x = 1 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + (m+1)\cos x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^3 x + (m-2)\cos x = 2\cos^2 x$$

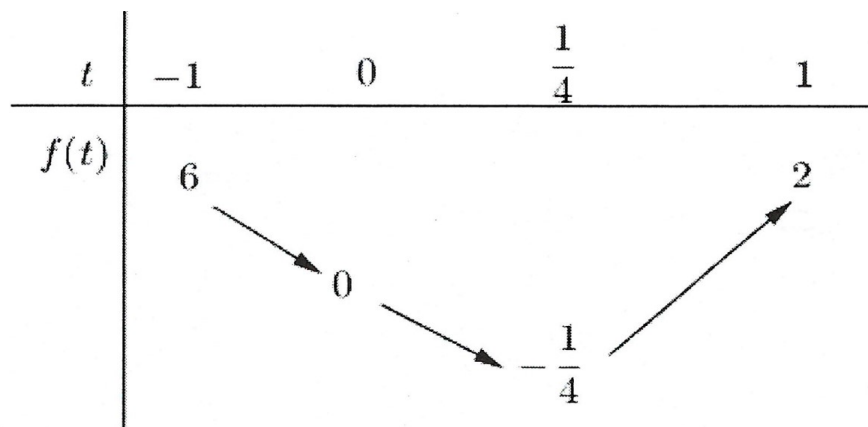
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x + m - 2 = 2\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 4\cos^2 x - 2x\cos x = 2 - m \end{cases}$$

Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$, để phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt trong

khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ thì phương trình $4\cos^2 x - 2x\cos x = 2 - m$ có 5 nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$

Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]$ thì bài toán thỏa mãn khi phương trình $f(t) = 4t^2 - 2t = 2 - m$ có 1 nghiệm

$t_1 \in (-1; 0)$ và $t_2 \in (0; 1)$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $0 < 2 - m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 2$