

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG – HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.
- + Nắm được định lý ba đường vuông góc.
- + Phát biểu và vận dụng được cách tìm thiết diện bằng quan hệ vuông góc.

❖ Kỹ năng

- + Chứng minh được đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- + Chứng minh được hai mặt phẳng vuông góc.
- + Xác định được thiết diện và giải được các bài toán liên quan đến chu vi và diện tích của thiết diện.

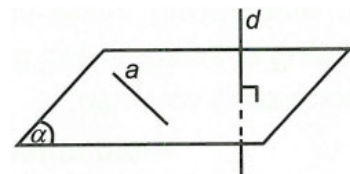
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a thuộc mặt phẳng (α) .

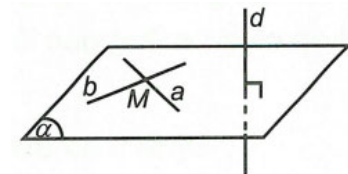
Kí hiệu: $d \perp (\alpha)$ hay $(\alpha) \perp d$.



$$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$$

Định lý

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi và chỉ khi nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng ấy.



$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha).$$

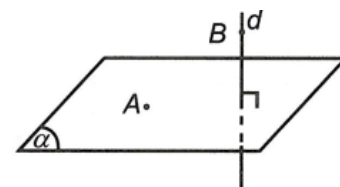
Hệ quả

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh còn lại của tam giác đó.

Tính chất

Tính chất 1: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Tính chất 2: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

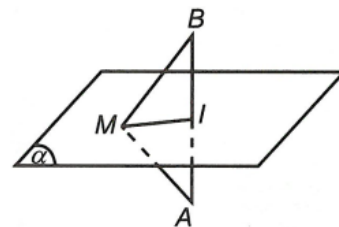


Có duy nhất đường thẳng d đi qua B và vuông góc với (α) .

Có duy nhất mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với d .

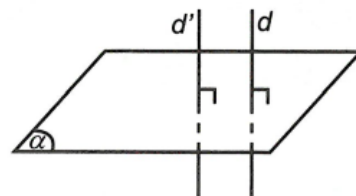
Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB .



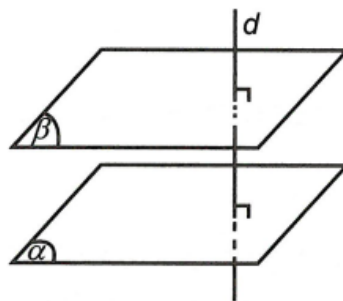
Tính chất 3:

- Một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song đường thẳng ấy.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Tính chất 4:

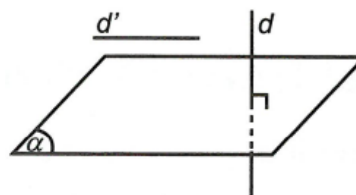
- Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song mặt phẳng ấy.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Tính chất 5:

Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song mặt phẳng ấy.

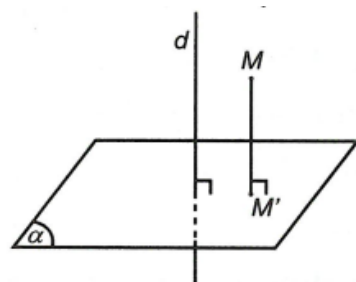
Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.



Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng $d \perp (\alpha)$.

Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α)

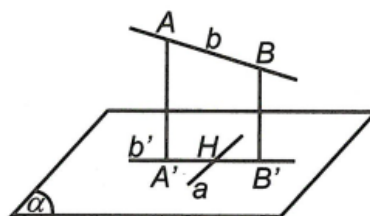


M' là hình chiếu của M lên (α) .

Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu của b trên (α) .

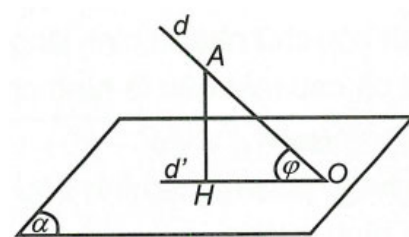
Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

- Nếu d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90° .
- Nếu d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d với hình chiếu d' của nó trên (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .



2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \widehat{((P), (Q))} = 90^\circ$$

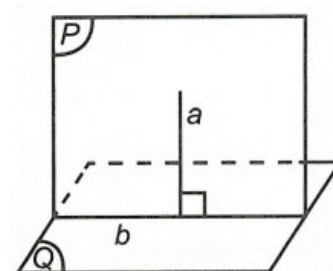
Tính chất

- Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$

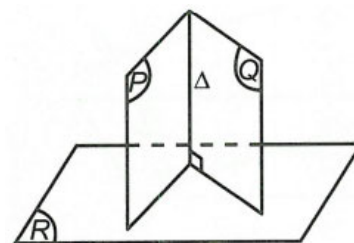


- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P) .

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$

- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R).$$



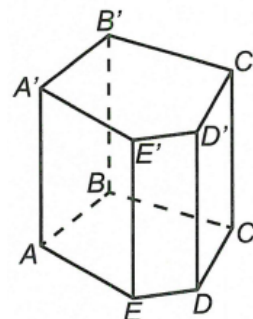
3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật

Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.

- Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên vuông góc với hai đáy.

Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là lăng trụ đều.



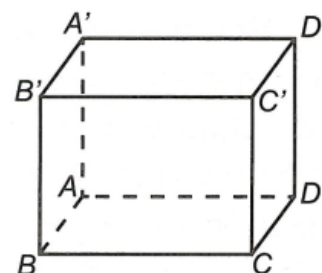
Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật.

Đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với a, b, c là 3 kích thước.

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có đáy và các mặt bên đều là hình vuông.

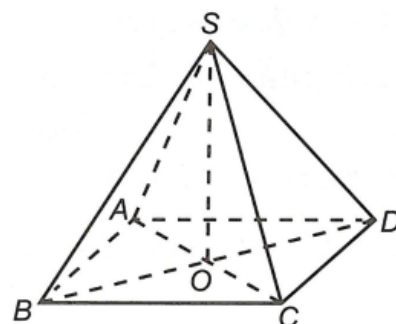


4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

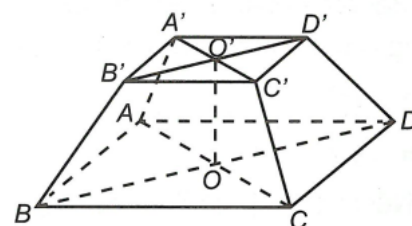
- +) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- +) Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- +) Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.



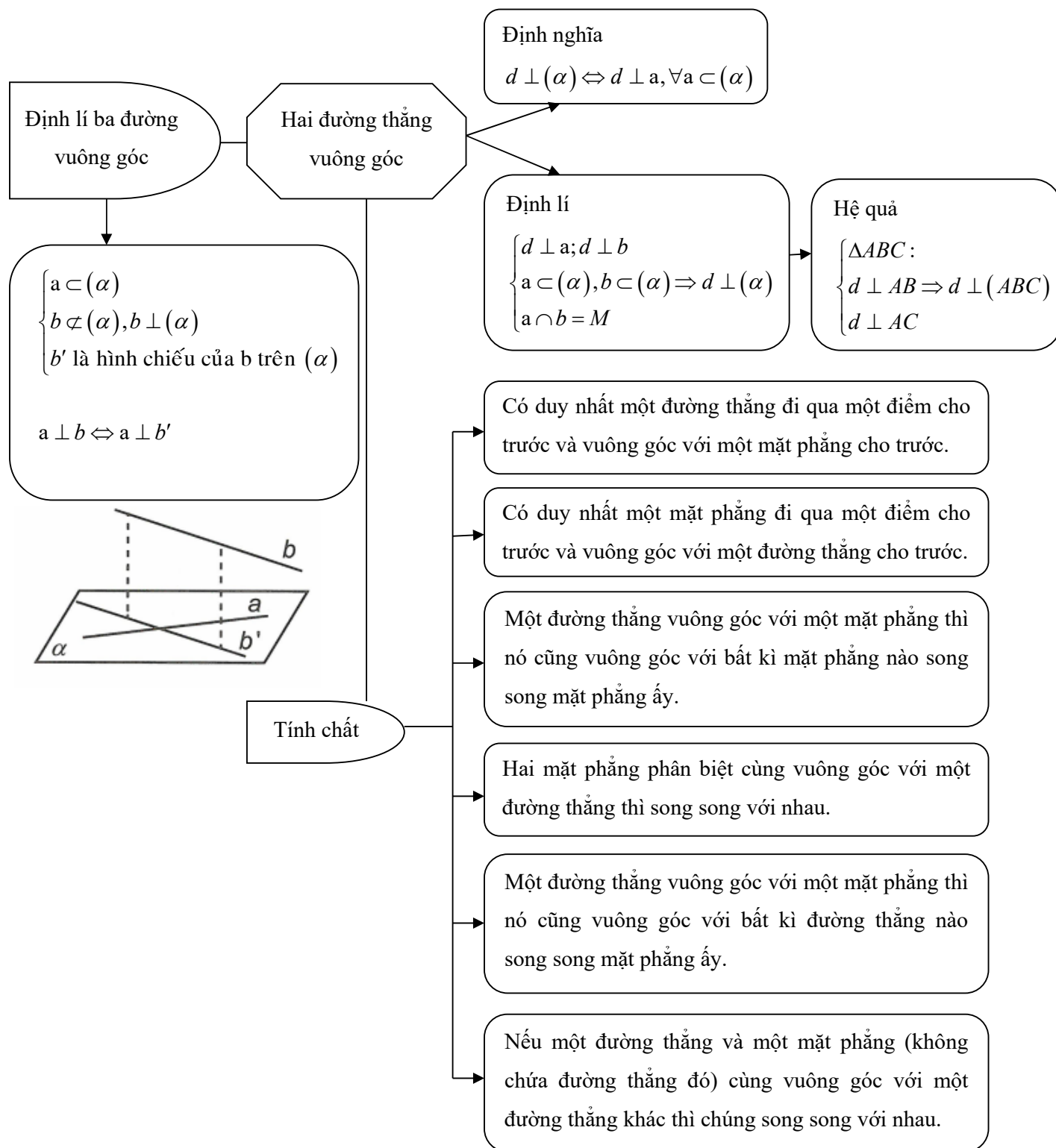
Hình chóp cụt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp được gọi là hình chóp cụt đều.

Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đồng dạng.



SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Bài toán 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

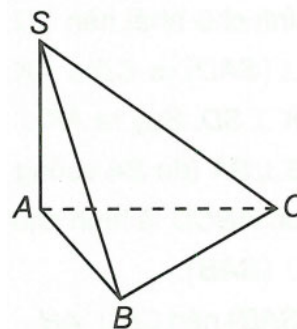
Phương pháp giải

Cách 1. Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong mặt phẳng (P) .

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy.

Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

Hướng dẫn giải



Ta có tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp AB$.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB \cap SA = \{A\} \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Cách 2. Chứng minh d song song với a mà $a \perp (P)$.

Cách 3. Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh

- a) $BC \perp (OAH)$. b) H là trực tâm của $\triangle ABC$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \text{ nên } OH \perp BC.$$

Vậy $BC \perp (OAH)$.

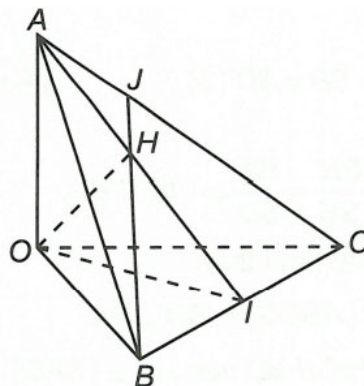
b) Do $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp AC$ (1).

Ta có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases}$ nên $OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH$.

Mặt khác $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC .



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD .

a) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

b) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA$.

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp AD$.

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Ta lại có $AK \perp SD$. Suy ra $AK \perp (SCD)$.

b) Ta có $CB \perp SA$ (do SA vuông góc với đáy)

$CB \perp AB$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật).

Suy ra $CB \perp (SAB)$.

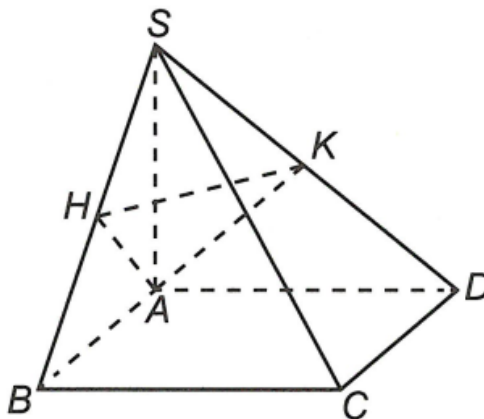
Mà $AH \subset (SAB)$ nên $CB \perp AH$.

Ta lại có $AH \perp SB$. Suy ra $AH \perp (SBC)$.

c) Ta có $AK \perp (SCD)$ suy ra $AK \perp SC$.

$$AH \perp (SCB) \text{ suy ra } AH \perp SC.$$

Suy ra $SC \perp (AHK)$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, có SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và SD . Chứng minh rằng $HK \perp (SAC)$.

Hướng dẫn giải

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A , đường cao AH .

Ta có $SA^2 = SH.SB \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} (1).$

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A , đường cao AK .

Ta có $SA^2 = SK.SD \Rightarrow \frac{SK}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} (2).$

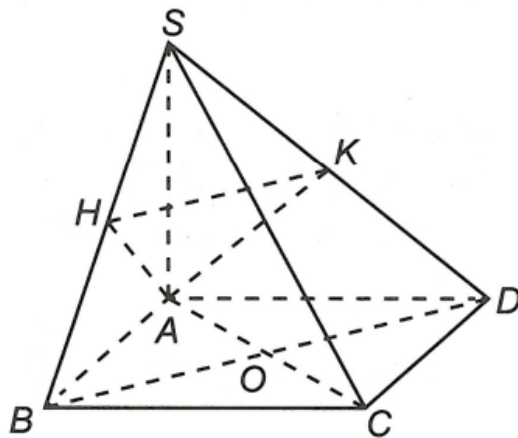
Mà $\begin{cases} SB^2 = SA^2 + AB^2 \\ SD^2 = SA^2 + AD^2 \Rightarrow SB = SD (3). \\ AB = AD \end{cases}$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD.$

Lại có $BD \perp AC$ (tính chất hình thoi)

mà $SA \perp (ABCD), BD \subset (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA.$

Suy ra $BD \perp (SAC)$ mà $HK \parallel BD$ nên $HK \perp (SAC).$

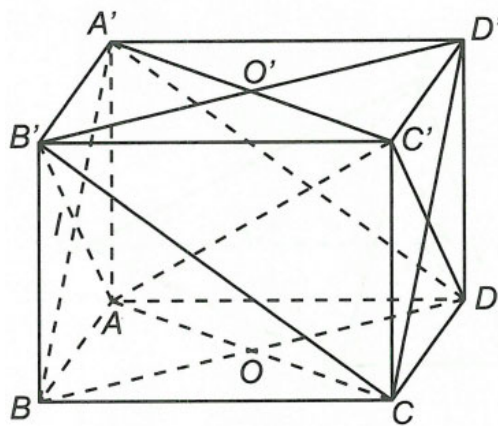


Ví dụ 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $AC' \perp (A'BD).$

b) Chứng minh $AC' \perp (CB'D').$

Hướng dẫn giải



a) Gọi O, I lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, AA'B'B$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC' (1).$

$\begin{cases} BA' \perp AB' \\ BA' \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow BA' \perp (AB'C'D) \Rightarrow BA' \perp AC' (2).$

Từ (1) và (2), ta có $AC' \perp (A'BD).$

b) Ta có $\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ A'B \parallel CD' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD \parallel (CB'D') \\ A'B \parallel (CB'D') \end{cases} \Rightarrow (A'BD) \parallel (CB'D').$

Mà $AC' \perp (A'BD)$ nên $AC' \perp (CB'D')$.

Bài toán 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

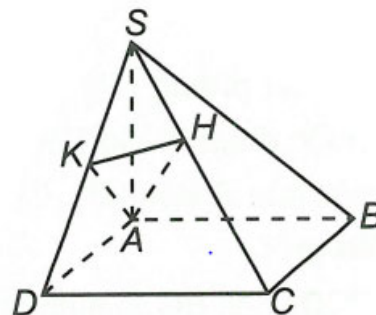
Phương pháp giải

Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b , sau đó chứng minh $a \perp (P)$.

Từ đó suy ra $a \perp b$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Chứng minh $HK \perp SC$.

Hướng dẫn giải



Ta có $CD \perp AD, CD \perp SA$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$.

Mặt khác $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$.

Suy ra $HK \perp SC$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ACBD), AD = 2a, AB = BC = a$. Chứng minh rằng $CD \perp SC$.

Hướng dẫn giải

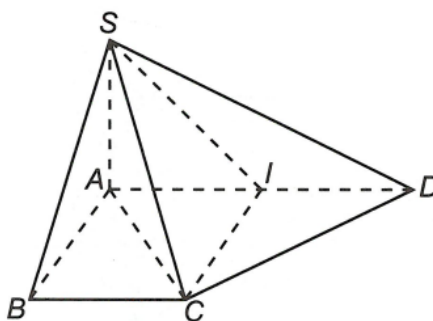
Ta có: $\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp CD(1).$

Gọi I là trung điểm của AD . Tứ giác $ABCI$ là hình vuông. Do đó $\widehat{ACI} = 45^\circ$.

Mặt khác, $\triangle CID$ là tam giác vuông cân tại I nên $\widehat{DCI} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{ACD} = 90^\circ$ hay $AC \perp CD(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$.



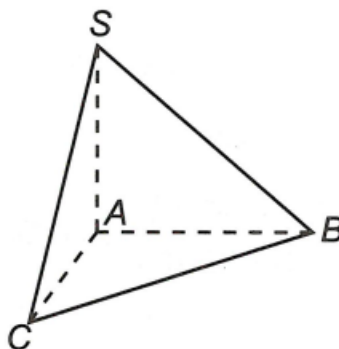
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là hình tam giác vuông tại A và có $SA \perp (ABC)$. Chứng minh rằng $AC \perp SB$.

Hướng dẫn giải

Vì $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC) .

Mặt khác theo giả thiết $AC \perp AB$.

Suy ra $AC \perp SB$ (theo định lý ba đường vuông góc).



Chú ý:

Cách khác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc: Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

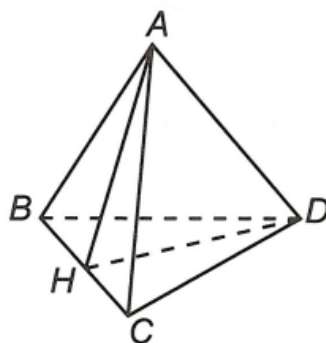
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC, DB = DC$. Chứng minh $AD \perp BC$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm BC .

Vì $\triangle ABC$ cân tại A và $\triangle DBC$ cân tại D nên ta có

$AH \perp BC; DH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow AD \perp BC$.

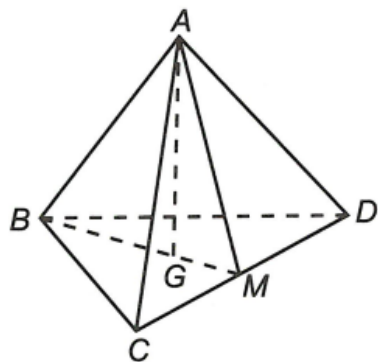


Ví dụ 4. Trong mặt phẳng (P) cho $\triangle BCD$ đều. Gọi M là trung điểm của CD, G là một điểm thuộc đoạn thẳng BM . Lấy điểm A nằm ngoài (P) sao cho G là hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

Hướng dẫn giải

Vì $AG \perp (BCD)$ nên BG là hình chiếu vuông góc của AB trên (BCD) .

Mặt khác theo giả thiết $BG \perp CD$ suy ra $AB \perp CD$ (theo định lý ba đường vuông góc).



Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 2: Cho mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng phân biệt a và b . Đường thẳng c vuông góc với (α) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. c và a cắt nhau. B. c và b chéo nhau.
C. c vuông góc với a và c vuông góc với b . D. a, b, c đồng phẳng.

Câu 3: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

- A. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$. B. Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.
C. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$. D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Câu 4: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm I . Có bao nhiêu mặt phẳng chứa điểm I và vuông góc với đường thẳng Δ ?

- A. 2. B. Vô số. C. Không có. D. 1.

Câu 5: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với BD . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, D lên các mặt phẳng (BCD) và (ABC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. H là trực tâm tam giác BCD . B. AD vuông góc với BC .
C. AH và DK không chéo nhau. D. Cả ba câu đều sai.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAB)$. B. $BC \perp (SAJ)$. C. $BC \perp (SAC)$. D. $BC \perp (SAM)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BA \perp (SAC)$. B. $BA \perp (SBC)$. C. $BA \perp (SAD)$. D. $BA \perp (SCD)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $AC \perp (SBC)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $AC \perp (SCD)$.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$. C. $(A'CD')$. D. $(A'B'CD)$.

Câu 11: Tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(ABC) \perp (ABD)$. B. $(ADC) \perp (DFK)$. C. $(ABD) \perp (ACD)$. D. $(ABD) \perp (ACD)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân đỉnh C . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $CH \perp SA$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp AK$. D. $AK \perp SB$.

Câu 13: Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ chứa trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi O, I, J lần lượt là trung điểm của CD, AB, EF . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $OI \perp (ABEF)$. B. $IJ \perp (ABCD)$. C. $OJ \perp (ABCD)$. D. $AB \perp OJ$.

Câu 14: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số các mặt của tứ diện $SABC$ là tam giác vuông là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là tâm của $ABCD$ và I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $IO \perp (ABCD)$. B. $BC \perp SB$.
C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD . D. Tam giác SCD vuông ở D .

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a, AB = 2a, SA \perp (ABCD)$, E là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $CE \perp (SAB)$. B. $CB \perp (SAB)$.
C. $\triangle SDC$ vuông tại C . D. $CE \perp (SDC)$.

Câu 17: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Xét các khẳng định sau

- (1): $AH \perp SC$; (2): $BC \perp (SAB)$; (3): $SC \perp AB$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy.

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BC \perp (SAB)$. B. $AC \perp (SBD)$. C. $BD \perp (SAC)$. D. $CD \perp (SAD)$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi $AE; AF$ lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SC \perp (AFB)$. B. $SC \perp (AEC)$. C. $SC \perp (AED)$. D. $SC \perp (AEF)$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $H \in SB$. B. H trùng với trọng tâm tam giác SBC .
C. $H \in SC$. D. $H \in SI$ (I là trung điểm của BC).

Câu 21: Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Hãy chỉ ra điểm I cách đều bốn điểm A, B, C, D .

- A. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . B. I là trọng tâm tam giác ACD .
C. I là trung điểm cạnh BD . D. I là trung điểm cạnh AD .

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\triangle ABC$ vuông tại C . Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H là trung điểm của cạnh AB .

B. H là trọng tâm của $\triangle ABC$.

C. H là trực tâm của $\triangle ABC$.

D. H là trung điểm của cạnh AC .

Câu 23: Cho tứ diện $SABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm của $\triangle ABC$.

B. trọng tâm của $\triangle ABC$.

C. tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

D. tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$.

Câu 24: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A'C \perp (B'BD)$.

B. $A'C \perp (B'C'D)$.

C. $AC \perp (B'BD')$.

D. $AC \perp (B'CD')$.

Dạng 2: Hai mặt phẳng vuông góc

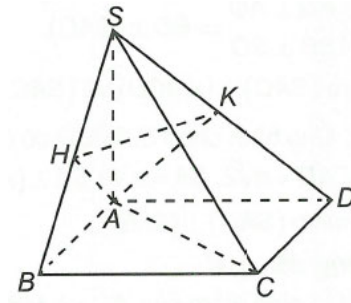
🔗 Phương pháp giải

Chúng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta).$$

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AHK)$.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} SA \perp CD \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \\ CD \perp AD \\ AD \cap SA = \{A\} \end{cases}$$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Tương tự ta chứng minh được $AH \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AHK)$.

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (AHK)$.

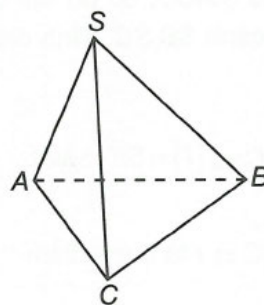
🔗 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ (SAC) \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC), BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp SAC$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng b . Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Hướng dẫn giải

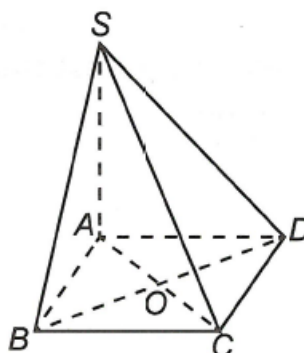
Gọi $\{O\} = AC \cap BD$. Vì $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b nên $ABCD$ là một hình thoi. Suy ra $AC \perp BD$ nên O là trung điểm của BD .

Mặt khác $SB = SD$ nên $\triangle SBD$ cân tại S .

Do đó $SO \perp BD$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

Suy ra $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD . Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của AC và MB .

Ta có $MA = MD$ và $AD \parallel BC$ nên áp dụng định lý

Talet, suy ra $AI = \frac{1}{2}IC$.

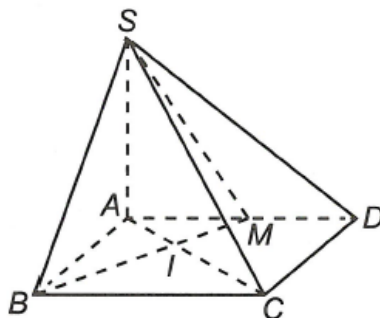
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{1}{9}AC^2 = \frac{a^2}{3}.$$

$$MI^2 = \frac{1}{9}MB^2 = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 + a^2 \right] = \frac{a^2}{6}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = MA^2.$$

Vậy $\triangle AMI$ là tam giác vuông tại I . Suy ra $MB \perp AC$. (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$. (2)



Từ (1), (2) suy ra $MB \perp (SAC)$.

Do $MB \subset (SMB)$ nên $(SMB) \perp (SAC)$.

Chú ý:

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta có thể xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90° .

$$(\widehat{(\alpha), (\beta)}) = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow (\alpha) \perp (\beta).$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của BC và $\{I\} = SK \cap MN$.

Từ giả thiết ta có

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, MN \parallel BC \Rightarrow I \text{ là trung điểm của}$$

SK và MN .

Ta có $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow AM = AN$ (hai trung tuyến tương ứng).

Suy ra $\triangle AMN$ cân tại $A \Rightarrow AI \perp MN$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC).$$

$$\text{Suy ra } AI \perp SK \text{ và } \triangle SAK \text{ cân tại } A; SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

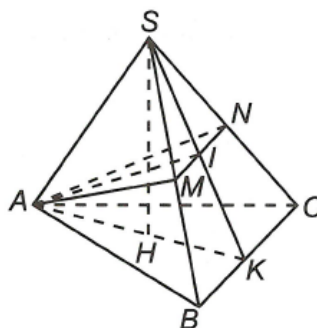
$$\text{Ta có } SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

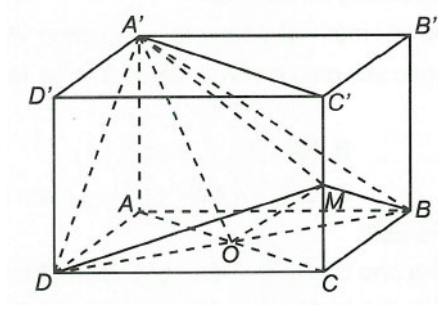
$$\text{Suy ra } AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC' . Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải





Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD = (A'BD) \cap (MBD)$ mà $\begin{cases} AC \perp BD \\ AA' \perp BD \end{cases}$ nên $(ACC'A') \perp BD$.

Ta có $\begin{cases} (ACC'A') \perp BD \\ (ACC'A') \cap (A'BD) = OA' \\ (ACC'A') \cap (MBD) = OM \end{cases}$ nên góc giữa hai đường thẳng OM, OA' là góc giữa hai mặt phẳng

$(A'BD)$ và (MBD) .

Ta có $OM = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$ và

$$OA'^2 = AO^2 + AA'^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2}{2} + b^2.$$

$$MA'^2 = A'C'^2 + MC'^2 = a^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{5b^2}{4}.$$

Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau nên $\triangle OMA'$ vuông tại $O \Rightarrow OM^2 + OA'^2 = MA'^2$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2 + b^2}{4} + \left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) = \left(a^2 + \frac{5b^2}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1.$$

Vậy $(A'BD) \perp (MBD)$ khi $\frac{a}{b} = 1$.

Khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho các đường thẳng $a; b; c$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

- A. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a , mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
- B. Cho $a \perp b, a \subset (\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa b và vuông góc với a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.
- C. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .
- D. Cho a, b . Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a, c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

Câu 2: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a .

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 3: Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với giao tuyến Δ và a, b, c, d là các đường thẳng. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $b \perp \Delta$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

B. Nếu $d \perp \Delta$ thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp \Delta$ thì $a \perp (\beta)$.

D. Nếu $c // \Delta$ thì $c // (\alpha)$ hoặc $c // (\beta)$.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 5: Cho các khẳng định sau

$$(I) \begin{cases} a // b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b;$$

$$(II) \begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$

$$(III) \begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp b \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta);$$

$$(IV) \begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // b.$$

Những khẳng định nào sai?

A. (I).

B. (II).

C. (III).

D. (IV).

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

C. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

D. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 7: Cho các mệnh đề sau:

1) Hình hộp có các đường chéo bằng nhau là hình lập phương.

2) Hình hộp các cạnh bằng nhau là hình lập phương.

3) Hình hộp đứng có các cạnh bằng nhau là hình lập phương.

4) Hình hộp chữ nhật có các cạnh bằng nhau là hình lập phương

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 8: Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.
- B. Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
- C. Hình chóp đều có các mặt bên là các tam giác đều.
- D. Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật bằng nhau.

Câu 9: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$.
- B. $(AA'H) \perp (A'B'C')$.
- C. $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
- D. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A . Gọi H là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.
- B. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.
- C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$.
- D. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của BC .

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) . Gọi BE và DF là hai đường cao của $\triangle BCD$, DK là đường cao của $\triangle ACD$.

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $(ABE) \perp (ADC)$.
- B. $(ABD) \perp (ADC)$.
- C. $(ABC) \perp (DFK)$.
- D. $(DFK) \perp (ADC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm AC và H là hình chiếu của I lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(BIH) \perp (SBC)$.
- B. $(SAC) \perp (SAB)$.
- C. $(SBC) \perp (ABC)$.
- D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Câu 13: Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Cạnh của đáy nhỏ $ABCD$ bằng $\frac{a}{3}$ và cạnh của đáy lớn $A'B'C'D'$ bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Chiều cao OO' của hình chóp cụt là

- A. $OO' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- B. $OO' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- C. $OO' = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.
- D. $OO' = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x, (ACD) \perp (BCD)$.

Giá trị của x để $(ABC) \perp (ABD)$ bằng

- A. $x = a$.
- B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- C. $x = a\sqrt{2}$.
- D. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15: Một khối lập phương lớn tạo bởi 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang (không đi qua đỉnh) bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

- A. 16.
- B. 17.
- C. 18.
- D. 19.

Dạng 3: Dùng mối quan hệ vuông góc giải bài toán thiết diện

Phương pháp giải

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng a cắt hình chóp theo một thiết diện.

+) Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì?

Tìm đường thẳng song song với (P) .

+) Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:

Sử dụng tính chất về giao tuyến song song như sau

$$\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$$

+ Kết luận hình dạng của thiết diện và tính các yêu cầu liên quan.

✓ Thiết diện là hình gì?

✓ Dựa vào các công thức tính diện tích để tính diện tích thiết diện.

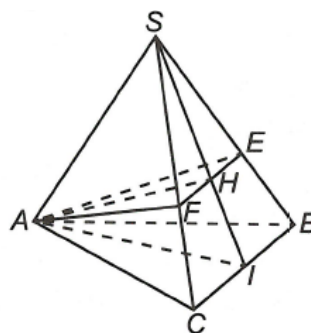
✓ Áp dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất diện tích thiết diện.

Ví dụ: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh

BC , mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện.

Tính diện tích thiết diện đó.

Hướng dẫn giải



Kẻ $AH \perp SI$. Suy ra $AH \subset (P)$.

Ta có $AI \perp BC, SI \perp BC \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $(P) \perp SI$ nên $(P) // BC$.

Lại có $(P) \cap (SBC) = d // BC \Rightarrow H \in d$.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d và SB, SC .

Suy ra thiết diện cần tìm là $\triangle AEF$.

Ta có $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$SI = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{\triangle SAI} = \frac{\sqrt{5}a^2}{8} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Ta có } \frac{EF}{BC} = \frac{SH}{SI} \Rightarrow EF = \frac{a}{2}.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AH \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D ; $AB = 2a; SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha) \perp (SAC)$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm AB .

Tứ giác $ADCM$ là hình vuông $\Rightarrow DM \perp AC$.

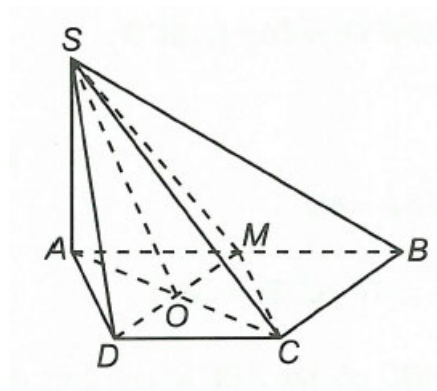
Mà $DM \perp SA$ suy ra

$$DM \perp (SAC) \Rightarrow (SDM) \perp (SAC) \Rightarrow (\alpha) = (SDM).$$

Suy ra thiết diện là $\triangle SDM$.

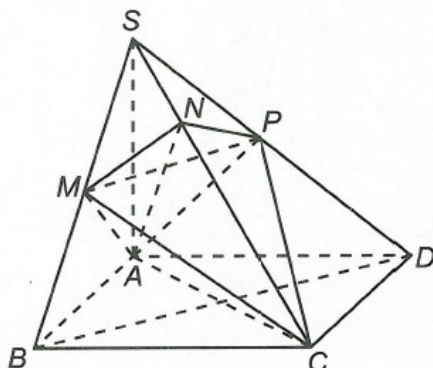
$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}, DM = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Diện tích thiết diện là } S_{\triangle SDM} = \frac{SO \cdot DM}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC . Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn giải



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (P) với các đường thẳng SB, SC, SD .

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Mà $BC \perp AB$.

$$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM.$$

Mặt khác $SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AM$ nên $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB$.

Tương tự $AN \perp SC, AP \perp SD, MP \parallel BD \Rightarrow MP \perp AN$.

$$\text{Ta có } \frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{MP}{BD} = \frac{4}{5} \Rightarrow MP = \frac{4a\sqrt{2}}{5}.$$

$$\triangle SAN \text{ vuông tại } A \text{ nên } AN = \frac{AS \cdot AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } S_{AMNP} = \frac{AN.MP}{2} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{15}.$$

Ví dụ 3. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy của lăng trụ bằng a . Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 45° và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P, Q . Tính diện tích thiết diện.

Hướng dẫn giải

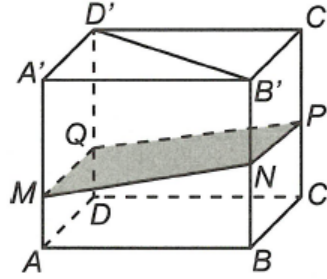
Gọi S là diện tích thiết diện $MNPQ$.

Ta có hình chiếu của $MNPQ$ xuống $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

$$S' = S_{ABCD} = a^2.$$

Gọi $\varphi = ((\alpha), (ABCD))$ thì $\varphi = 45^\circ$.

$$\text{Do } S' = S \cdot \cos \varphi = S \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}S' = \sqrt{2}a^2.$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Gọi H là trung điểm của BC , O là trung điểm của AH và G là trọng tâm của tam giác ABC . Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO = 2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH .

Hướng dẫn giải

Qua G dựng đường thẳng MN ($M \in AB, N \in AC$)

song song với BC thì $MN \perp AH \Rightarrow MN \subset (P)$.

Qua G dựng đường thẳng GK ($K \in SH$) song song với SO thì $GK \perp AH$.

$$\Rightarrow GK \subset (P)$$

Qua K dựng đường thẳng PQ ($P \in SC, Q \in SB$)

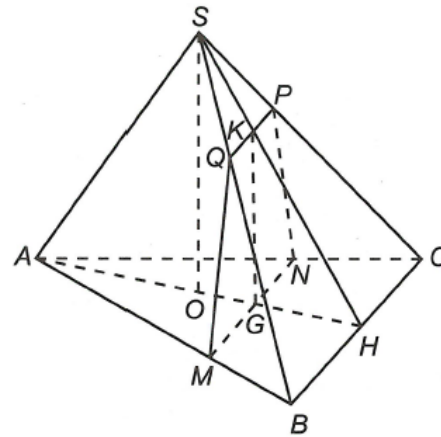
song song với BC thì $PQ \perp AH \Rightarrow PQ \subset (P)$.

Suy ra thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra G là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ . Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ và } MN \parallel BC \Rightarrow MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}a.$$

$$\text{Ta có } \frac{OH}{AH} = \frac{1}{2}, \frac{HG}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HG}{OH} = \frac{2}{3}.$$



Vì $GK \parallel SO$ nên $\frac{HG}{HO} = \frac{GK}{SO} = \frac{HK}{HS} = \frac{2}{3} \Rightarrow KG = \frac{4}{3}a$.

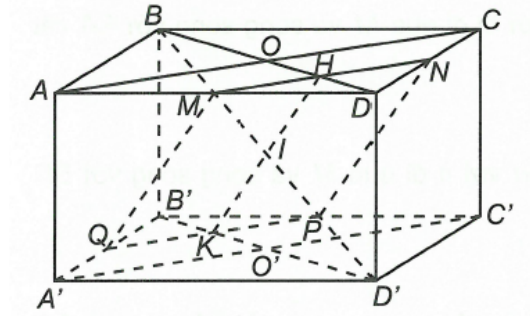
Mặt khác $PQ \parallel BC$, $\frac{HK}{HS} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SK}{SH} = \frac{1}{3} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow PQ = \frac{1}{3}a$.

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là

$$S = \frac{1}{2} \cdot (PQ + MN) \cdot GK = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a \right) \cdot \frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a^2.$$

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD' . Tính diện tích thiết diện.

Hướng dẫn giải



Thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có $\triangle IBH \sim \triangle DBD'$ suy ra $\frac{IB}{DB} = \frac{IH}{DD'} = \frac{BH}{BD'}$.

$$\text{Suy ra } BH = \frac{IB \cdot BD'}{DB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \text{ và } IH = \frac{IB \cdot DD'}{DB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}a}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{DH}{DO} = \frac{BD - BH}{DO} = \frac{a\sqrt{2} - \frac{3a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } NP = HK = 2IH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = MN \cdot NP = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

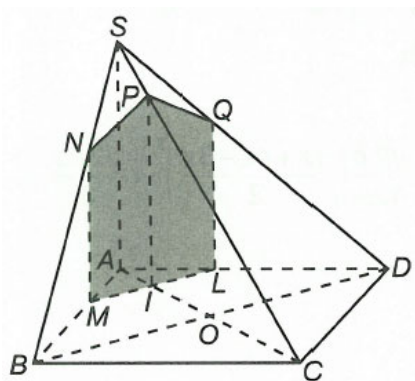
Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = b$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sau cho $AM = x (0 < x < a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng AC .

a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α) .

b) Tính diện tích S của thiết diện theo a, b, x .

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α) .



+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = m$ với m đi qua M và song song với SA cắt cạnh SB tại N .

đoạn AC tại I .

+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = p$ đi qua I và song song với SA cắt cạnh SC tại P .

+) $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = q$ đi qua L và song song với SA cắt cạnh SD tại Q .

Mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình chóp $S.ABCD$ theo năm đoạn giao tuyến MN, NP, PQ, QL, LM nên thiết diện là ngũ giác $MNPQL$.

b) Tính diện tích S của thiết diện theo a, b, x .

Chú ý tính chất đối xứng ta có $S_{MNPOL} = 2S_{MNP}$.

Trong đó tứ giác $MINP$ là hình thang vuông tại I và M , gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ ta có theo định lí

$$\text{Ta-lét, ta có } \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \frac{b(a-x)}{a};$$

$$\frac{MI}{BO} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow MI = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{IP}{SA} = \frac{CI}{CA} = \frac{CO+OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{BM}{2BA} = \frac{1}{2} + \frac{a-x}{2a} = \frac{2a-x}{2a}.$$

Suy ra $IP = \frac{b(2a-x)}{2a}$. Ta có

$$S_{MNPQL} = (MN + IP)MI = \left[\frac{b(a-x)}{a} + \frac{b(2a-x)}{2a} \right] \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}bx(4a-3x)}{4a}.$$

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$S = \frac{\sqrt{2}bx(4a-3x)}{4a} = \frac{\sqrt{2}.b}{12a}.3x(4a-3x) \leq \frac{\sqrt{2}.b}{12a} \left(\frac{3x+4a-3x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}ab}{3}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 3x = 4a - 3x \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là

- A. Hình thang vuông. B. Tam giác đều. C. Tam giác cân. D. Tam giác vuông.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có hai tam giác ABC và ABD đều lần lượt nằm trong mặt phẳng cùng vuông góc với (ABD) . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BD, DA . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình ngũ giác đều. B. Hình chữ nhật. C. Lục giác. D. Tam giác vuông.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình thang vuông. B. Hình thang cân. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC , SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì?

- A. Hình thang cân. B. Hình thang vuông. C. Hình bình hành. D. Tam giác vuông.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB . Khi đó, mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình ngũ giác đều. B. Hình thang. C. Hình bình hành. D. Tam giác vuông.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy BD , là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC), SA = a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với BC . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ có diện tích bằng

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^2}{6}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .

Câu 7: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với SA vuông góc với đáy và $AB = a, BC = a\sqrt{2}, SA = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB . Diện tích của thiết diện khi cắt hình chóp bởi (P) là

A. $\frac{8a^2\sqrt{10}}{25}$.

B. $\frac{4a^2\sqrt{10}}{25}$.

C. $\frac{4a^2\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{4a^2\sqrt{6}}{15}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$ ($a > b\sqrt{2}$). Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC tại điểm C , nằm giữa S và C . Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2+a^2}}{4b}$.

B. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{2b}$.

C. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2+a^2}}{2b}$.

D. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

Câu 9: Tam giác ABC có $BC = 2a$, đường cao $AD = a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A , lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và SC . Diện tích tam giác AEF bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

C. $\frac{1}{2}a^2$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8, BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB . (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. 10.

B. 20.

C. 15.

D. 16.

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD . Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. 40.

B. $36\sqrt{2}$.

C. $36\sqrt{3}$.

D. 36.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) . Diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của BD' . Diện tích thiết diện tạo thành bằng

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $a^2\sqrt{2}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 14: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD . Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$.

B. $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$.

C. $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a, AD = CD = a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (α) qua SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (α) bằng

- A. a^2 . B. $3a^2$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$; $SO \perp (ABCD)$, $SO = \frac{3a}{4}$. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua AD và vuông góc với (SBC) bằng

- A. $\frac{9a^2}{16}$. B. $\frac{3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{8}$. D. $\frac{a^2}{2}$.

Câu 17: Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, \widehat{B} = 60^\circ$. Gọi O là trung điểm BC . Lấy S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SB = a$ và $SB \perp OA$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = x (0 < x < a)$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua điểm M và song song với SB và OA . Với giá trị nào của x thì thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (β) có diện tích lớn nhất?

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AD = \frac{3a}{2}$, tam giác SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc tạo bởi mặt bên (SCD) với mặt đáy bằng 30° , gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD , mặt phẳng (P) chứa MN và vuông góc (SAD) . Diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) với hình chóp bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{16}$. B. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a^2}{16}$.

Câu 19: Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a , $SA = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, M là điểm trên AB sao cho $AM = b (0 < b < a)$, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC . Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, AC = 2a$ và $SA = 2a$ vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Diện tích của thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC bằng

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^2\sqrt{6}}{5}$. D. $\frac{a^2\sqrt{6}}{10}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là

- A. $\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$. B. $\frac{7a^2\sqrt{2}}{16}$. C. $\frac{7a^2\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$ và $SA = AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC ; mặt phẳng (α) qua MN và vuông góc với (SBC) . Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi (α) bằng

- A. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{32}$. B. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. C. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và AA' . Diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (MNP) bằng

- A. $\frac{7a^2\sqrt{11}}{24}$. B. $\frac{7a^2\sqrt{11}}{12}$. C. $\frac{5a^2\sqrt{11}}{12}$. D. $\frac{5a^2\sqrt{11}}{24}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC và mặt bên SAB là các tam giác đều cạnh a , mặt bên (SAB) vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC và M, N lần lượt thuộc đoạn SA, SB (M không trùng S và A) sao cho $MN \parallel AB$; mặt phẳng (α) qua MN và vuông góc với (ABI) . Giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi (α) bằng

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$. C. $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, CD = b$ và $AB \perp CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD . Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD . Diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) , biết $IM = \frac{1}{3}IJ$ bằng

- A. ab . B. $\frac{ab}{9}$. C. $2ab$. D. $\frac{2ab}{9}$.

Đáp án và lời giải

Dạng 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1 – D	2 – C	3 – B	4 – D	5 – D	6 – D	7 – A	8 – C	9 – C	10 – A
11 – B	12 – D	13 – C	14 – C	15 – C	16 – A	17 – B	18 – B	19 – D	20 – D
21 – D	22 – A	23 – A	24 – C						

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

Câu A sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau.

Câu **B** sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau khi không đồng phẳng hoặc cắt nhau nếu chúng đồng phẳng.

Câu **C** sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng đã cho.

Câu 2.

$$\text{Ta có } \begin{cases} c \perp (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \perp a \\ c \perp b \end{cases}.$$

Câu 3.

Đáp án **A** sai vì b có thể vuông góc với (P) .

Đáp án **B** đúng bởi $a \parallel (P) \Rightarrow \exists a' \subset (P)$ sao cho $a \parallel a'$. Do $b \perp (P)$ nên $b \perp a' \Rightarrow a \perp b$.

Đáp án **C** sai vì b có thể nằm trong (P) .

Đáp án **D** sai vì b có thể nằm trong (P) .

Câu 4.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng đã cho.

Câu 5.

Dựng một mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng Δ .

Khi đó đường thẳng Δ vuông góc với vô số đường thẳng đi qua điểm O và nằm trong mặt phẳng (α) .

Câu 6.

Phương án **A** sai vì

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABH) \Rightarrow BD \perp BH.$$

Suy ra BH và CD không vuông góc (vì nếu $BH \perp CD$ thì BD song song hoặc trùng CD).

Suy ra H không là trực tâm tam giác BCD .

Phương án **B** sai vì

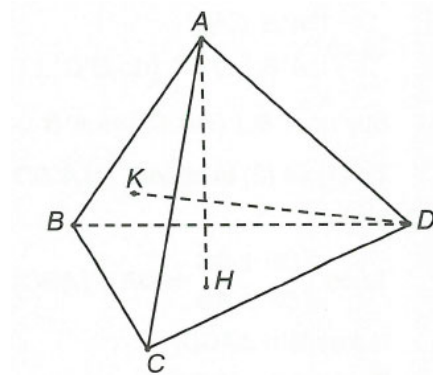
Giả sử $BC \perp AD$ mà $BC \perp AH$ nên $BC \perp (ADH)$

Suy ra $BC \perp DH$ (mâu thuẫn vì H không là trực tâm tam giác BCD).

Suy ra BC và AD không vuông góc. Phương án **C** sai vì. Giả sử AH và DK cắt nhau.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp DK \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD \text{ (mâu thuẫn)}. \text{ Suy ra } AH \text{ và } DK \text{ chéo nhau.}$$

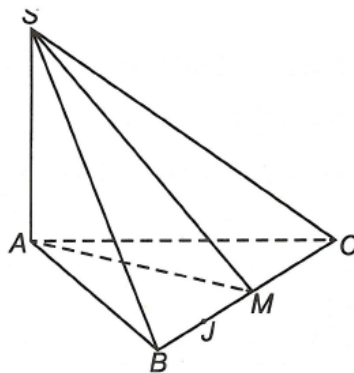
Câu 7.



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$.

Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow BC \perp AB$

Suy ra $BC \perp (SAB)$.

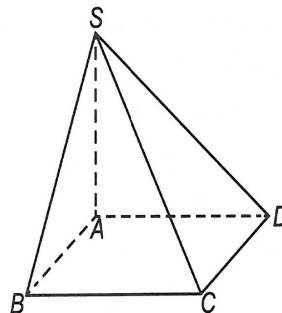


Câu 8.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$

Mà $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp AD$.

Từ đó suy ra $AB \perp (SAD)$.

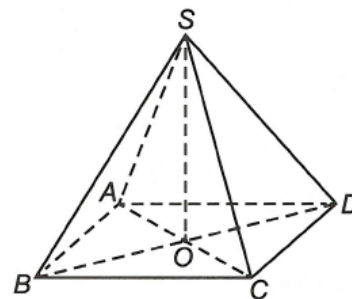


Câu 9.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Do $SA = SC$ nên ΔSAC cân $\Rightarrow AC \perp SO$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (SBD)$.



Câu 10.

Ta có $\begin{cases} A'D \perp AD' \\ A'D \perp C'D' \text{ (do } C'D' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$

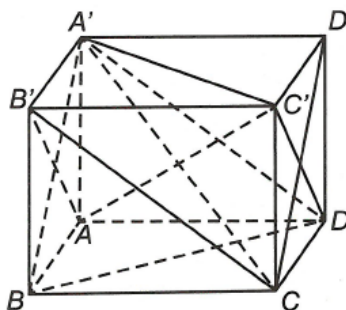
Suy ra $A'D \perp (AC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$ (1)

Ta có $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp B'C' \text{ (do } B'C' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$

Suy ra $A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AC'$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AC' \perp (A'BD)$

Câu 11.

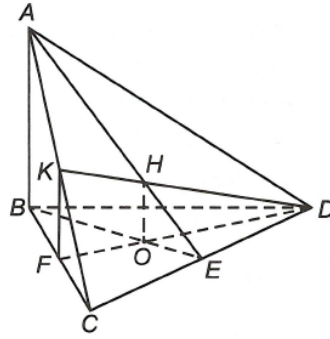


Ta có $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$ và

$DK \perp AC$ (vì H là trực tâm $\triangle ACD$).

Do đó $AC \perp (DFK)$

Ta có $\begin{cases} AC \perp (DFK) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

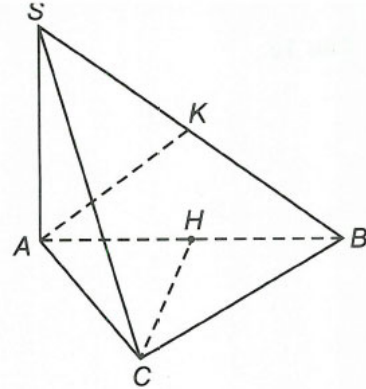


Câu 12.

Do $\triangle ABC$ cân tại C nên $CH \perp AB$. Lại có $SA \perp CH$.

Suy ra $CH \perp (SAB)$. Vậy các câu **A, B, C** đúng.

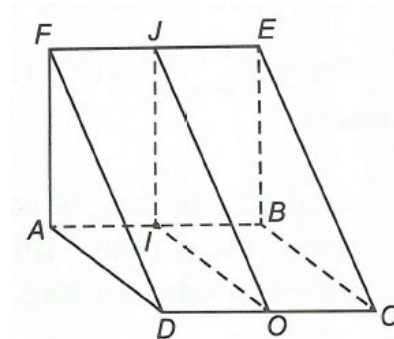
Đáp án **D** sai.



Câu 13.

Ta có $\begin{cases} (ABEF) \cap (ABCD) = AB \\ IJ \perp AB \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (ABCD)$.

Do đó khẳng định $OJ \perp (ABCD)$ là sai.



Câu 14.

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA$ vuông góc với AC, AB

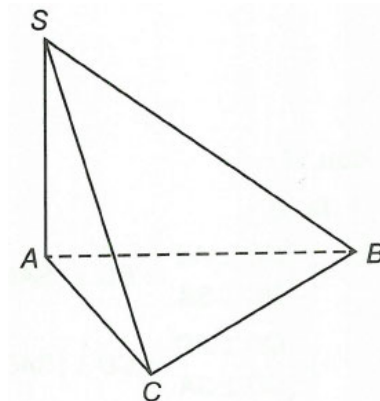
Suy ra $\triangle SAC$ và $\triangle SAB$ vuông tại A .

Mặt khác: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $\triangle SBC$ vuông tại B .

Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B .

Vậy tứ diện $SABC$ có 4 mặt là tam giác vuông.



Câu 15.

Có IO là đường trung bình tam giác SAC nên
 $IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$ (**A** đúng).

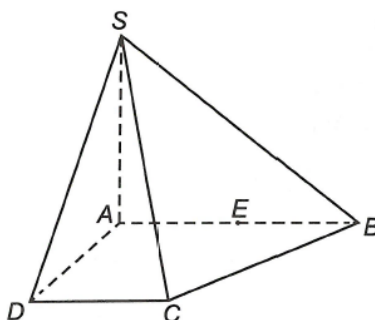
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$ (**B** đúng).

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$ (**D** đúng).

Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \Rightarrow BD \perp AC$

(chỉ xảy ra khi $ABCD$ là hình vuông) nên đáp án **C** sai.

Câu 16.



Ta có $ABCD$ là hình thang vuông.

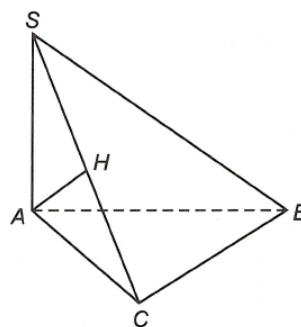
Suy ra $\begin{cases} CE \perp AE \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$.

Câu 17.

Ta có $BC \perp SA, BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$ ((2) đúng).

Khi đó $(SBC) \perp (SAB)$, $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp SC$ ((1) đúng).

Vậy có hai khẳng định đúng.



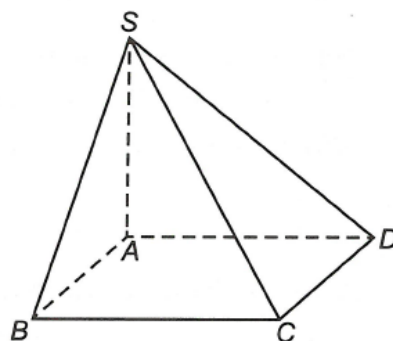
Câu 18.

Ta có:

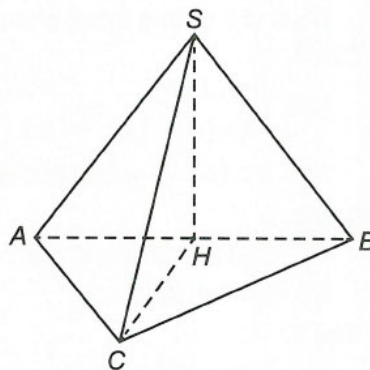
+) $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ (**A** đúng).

+) $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$ (**D** đúng)

+) $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ (**C** đúng)



Vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$ do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
Mà ABC là tam giác vuông tại C nên H là trung điểm của cạnh huyền AB .



Câu 23.

Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC); \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$$

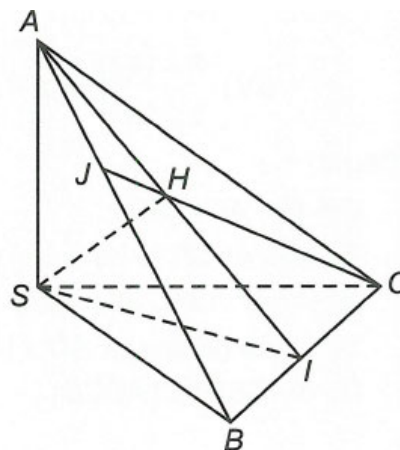
$$\Rightarrow BC \perp AH \quad (1).$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{cases} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{cases} \Rightarrow SC \perp (SAB); \begin{cases} AB \perp SC \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCH)$$

$$\Rightarrow AB \perp CH \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC .

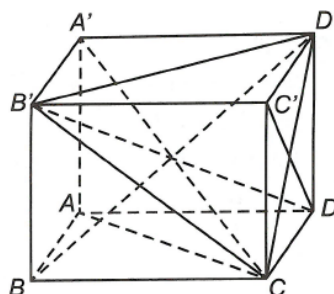


Câu 24.

Ta có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình vuông).

$AC \perp BB'$ (do $BB' \perp (ABCD)$).

Suy ra $AC \perp (BB'D)$.



Dạng 2. Hai mặt phẳng vuông góc

1 – B	2 – A	3 – C	4 – B	5 – D	6 – A	7 – B	8 – C	9 – A	10 – B
11 – B	12 – A	13 – A	14 – D	15 – D					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\beta) \perp a \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \perp (\alpha).$$

Câu 2.

A. luôn đúng.

B. sai vì 2 đường thẳng đó có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.

C. sai vì 2 mặt phẳng đó có thể song song với nhau.

D. sai vì 2 đường thẳng phân biệt đó có thể cắt nhau.

Câu 3.

$$\text{Nếu } \begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ \Delta \perp (\beta) \end{cases}$$

Nếu $a \subset (\alpha)$ và vuông góc với giao tuyến Δ thì $a \perp (\beta)$ (C đúng).

Câu 4.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Do đó mệnh đề **B** sai.

Câu 5:

$$\text{Ta có: (III) } \begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta) \text{ sai vì } (\alpha) \text{ còn có thể trùng } (\beta).$$

$$\text{(IV) } \begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // b \text{ sai vì } a \text{ có thể trùng với } b.$$

Câu 6.

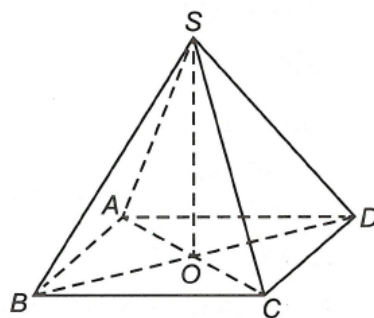
Gọi $O = AC \cap BD$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1).

Mặt khác ΔSAC cân tại S nên $SO \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SBD)$.

Do đó $(SBD) \perp (ABCD)$.



Câu 7.

Hình lập phương là hình lăng trụ đứng, có đáy và các mặt bên là hình vuông.

Suy ra hình hộp đứng có các cạnh bằng nhau là hình lập phương và hình hộp chữ nhật có các cạnh bằng nhau là hình lập phương.

Câu 8.

Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

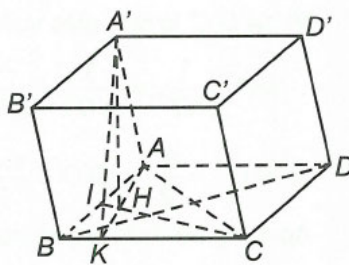
Do đó các mặt bên là những tam giác cân có đỉnh là đỉnh của hình chóp.

Câu 9.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BC .

$\Rightarrow H \in AK, BC \perp AK, BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (AA'H)$

$\Rightarrow \begin{cases} (AA'H) \perp (A'B'C') \\ (BB'C'C) \perp (AA'H) \\ BC \perp BB' \end{cases}$ nên đáp án **B, C, D** đúng.

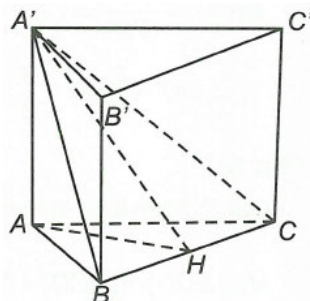


Câu 10.

A đúng vì $\widehat{((AA'C'C), (AA'B'B))} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

C, D đúng vì $BC \perp (AA'H)$ và H là trung điểm BC .

B sai vì chỉ có mặt bên $AA'C'C$ và $AA'B'B$ bằng nhau.



Câu 11.

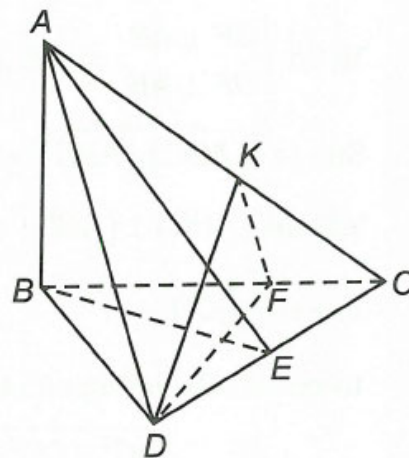
Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) nên $AB \perp (DBC)$.

Ta có:

$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow (ABE) \perp (ADC)$ nên **A** đúng.

$\Rightarrow \begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (DFK)$ nên **C** đúng.

$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp DK \\ AC \perp DF \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DFK) \Rightarrow (DFK) \perp (ADC)$ nên **D** đúng.



Câu 12.

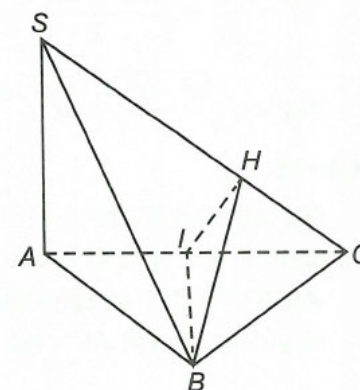
Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC)$.

Suy ra $SC \perp BI$ (1).

Theo giả thiết: $SC \perp IH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$.

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.



Câu 13.

Ta có $SO' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow SO' \perp B'D' \Rightarrow O'D'$ là hình chiếu vuông góc của SD' lên $(A'B'C'D')$.

$$\Rightarrow (SD', (ABCD)) = (SD', O'D') = \widehat{SD'O'} = 60^\circ.$$

Từ giả thiết dễ dàng chỉ ra được $\frac{AA'}{SA'} = \frac{OO'}{SO'} = \frac{2}{3}$.

Vì $\Delta A'D'C'$ là tam giác vuông cân tại D' có $D'O'$ là đường cao

$$\text{nên } \frac{1}{D'O'^2} = \frac{1}{A'D'^2} + \frac{1}{D'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}.$$

$$\Rightarrow D'O'^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow D'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta SD'O'$ vuông tại O' ta có:

$$\tan 60^\circ = \frac{SO'}{O'D'} \Rightarrow SO' = O'D' \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow OO' = \frac{2}{3}SO' = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 14.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm CD và $AB \Rightarrow \begin{cases} AE \perp CD \\ BE \perp CD \end{cases}$

Mà $(BCD) \perp (ACD) = CD$ nên $\left(\widehat{(BCD), (ACD)} \right) = \widehat{BEA} = 90^\circ$

Ta có $\begin{cases} CF \perp AB \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CFD).$

Suy ra $\left(\widehat{(ABC), (ABD)} \right) = \left(\widehat{CF, FD} \right).$

Vậy để $(ABC) \perp (ABD)$ thì $\left(\widehat{CF, FD} \right) = 90^\circ = \widehat{CFD}$

$$\Rightarrow FE = \frac{1}{2}CD.$$

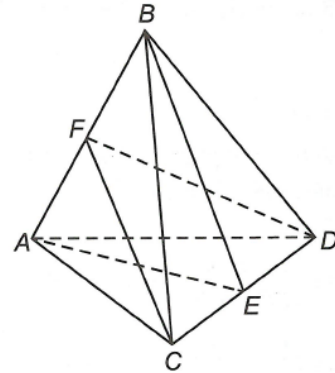
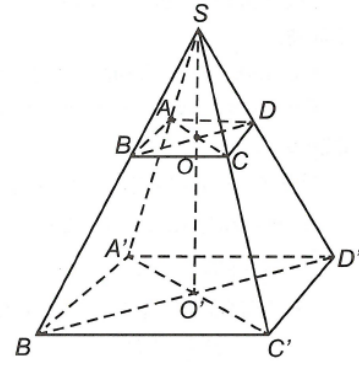
Ta có ΔEAB vuông cân tại E nên

$$EF = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{AC^2 - CE^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}}.$$

$$\text{Vậy } x = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2 - x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow x = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 15.

Gọi $ABCD.A'B'C'D'$ là khối lập phương lớn tạo bởi 27 khối lập phương đơn vị và O là tâm hình lập



phương đó, khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3. Ta xét mặt phẳng (P) đi qua O và vuông góc với AC' , cắt AC tại M , cắt $A'C'$ tại M' .

$$\text{Ta có: } \frac{AM}{AC'} = \frac{AO}{AC} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} AC' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CM = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

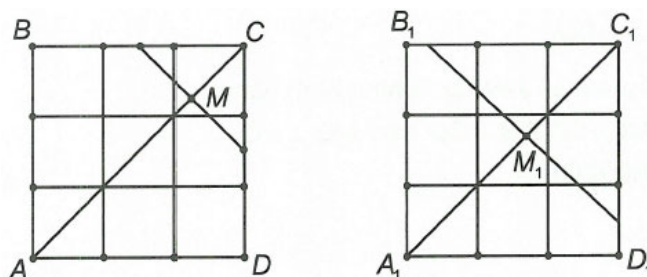
Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là mặt phẳng chia lớp 9 khối lập phương mặt trên với 9 khối lập phương ở mặt thứ hai, gọi $M_1 = A_1C_1 \cap MM'$.

$$\text{Ta có } A_1M_1 = \frac{7}{3} CM = \frac{7}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{4} \Rightarrow C_1M_1 = A_1C_1 - A_1M_1 = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

Gọi $A_2B_2C_2D_2$ là mặt phẳng chia lớp 9 khối lập phương mặt thứ 2 với 9 khối lập phương ở mặt thứ ba, gọi $M_2 = A_2C_2 \cap MM'$.

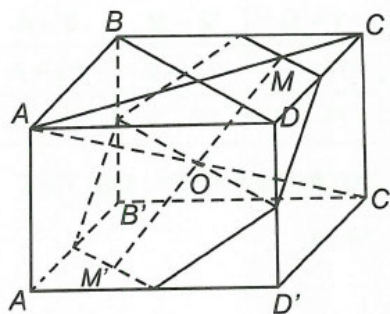
$$\text{Ta có } A_2M_2 = \frac{5}{3} CM = \frac{5}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \Rightarrow C_2M_2 = A_2C_2 - A_2M_2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

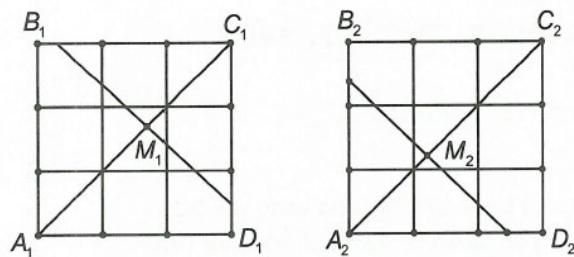
Giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh của 3 hình vuông, giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ cắt các cạnh của 5 hình vuông (hình vẽ bên dưới), trong các hình vuông này có 2 cặp hình vuông cùng chung một hình lập phương đơn vị nên mặt phẳng (P) cắt ngang 6 khối lập phương mặt trên.



Tương tự mặt phẳng (P) cắt ngang 6 khối lập phương mặt dưới cùng.

Giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ cắt các cạnh của 5 hình vuông, giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(A_2B_2C_2D_2)$ cắt các cạnh của 5 hình vuông (hình vẽ), trong đó có 3 cặp hình vuông cùng chung với một hình lập phương đơn vị, nên suy ra mặt phẳng (P) cắt ngang 7 khối lập phương mặt thứ hai.





Vậy mặt phẳng (P) cắt ngang (không đi qua đỉnh) $6 + 6 + 7 = 19$ khối lập phương đơn vị.

Dạng 3. Dùng mối quan hệ vuông góc giải bài toán thiết diện

1 – D	2 – B	3 – A	4 – A	5 – B	6 – A	7 – B	8 – D	9 – C	10 – C
11 – B	12 – C	13 – A	14 – C	15 – D	16 – A	17 – D	18 – B	19 – C	20 – C
21 – D	22 – A	23 – A	24 – C	25 – D					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

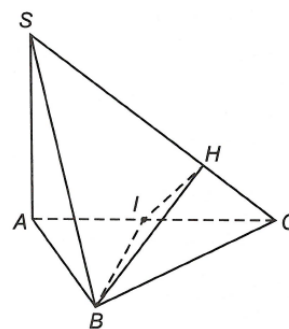
Câu 1.

Gọi I là trung điểm của AC , kẻ $IH \perp SC$.

Ta có $BI \perp AC, BI \perp SA \Rightarrow BI \perp SC$.

Do đó $SC \perp (BIH)$ hay thiết diện là tam giác BIH .

Mà $BI \perp (SAC)$ nên $BI \perp IH$ hay thiết diện là tam giác vuông.



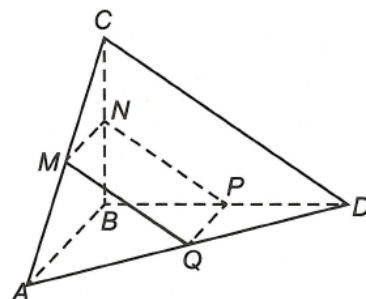
Câu 2.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MQ \parallel CD \text{ và } MQ = \frac{1}{2}CD \\ NP \parallel CD \text{ và } NP = \frac{1}{2}CD \end{cases}.$$

Suy ra $MQ \parallel NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $PQ \parallel AB$ và $MQ \parallel CD, AB \perp CD$ nên $MQ \perp PQ$.

Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Câu 3.

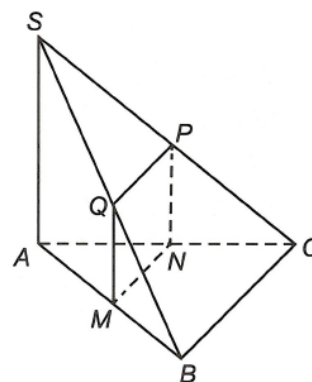
$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} BC \perp SB \\ (P) \perp SB \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel BC \text{ (1).}$$

Mà $(P) \cap (ABC) = MN$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $MN \parallel BC$.

Tương tự ta có $PQ \parallel BC; PN \parallel SA$. Do đó $PQ \parallel MN$.



Mà $SA \perp BC \Rightarrow PN \perp NM$.

Vậy thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$.

Câu 4.

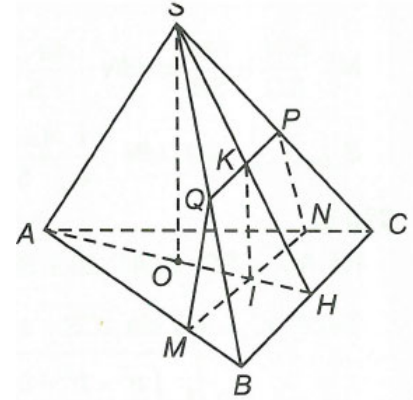
Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên (P) song song với SO .

Suy ra (P) cắt (SAH) theo giao tuyến là đường thẳng qua I và song song với SO cắt SH tại K .

Từ giả thiết suy ra (P) song song BC , do đó (P) cắt (ABC) và (SBC) lần lượt là các đường thẳng qua I và K song song với BC cắt AB, AC, SB, SC lần lượt tại M, N, Q, P .

Do đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra I là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ . Mà $IK \parallel SO$ nên IK vuông góc với MN và PQ . Do đó $MNPQ$ là hình thang cân.



Câu 5.

Qua điểm A , ta kẻ đường thẳng vuông góc với SB , cắt SB tại H .

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} AD \perp AB \\ AD \perp SA \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (SAB).$$

$$\text{Do } \left\{ \begin{array}{l} AD \perp (SAB) \\ SB \subset (SAB) \end{array} \right. \text{ nên } AD \perp SB. \text{ Suy ra } (\alpha) \equiv (ADH).$$

Do $AD \subset (\alpha)$ và $AD \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (\alpha)$ nên $(\alpha) \cap (SBC) = Hx$, với $Hx \parallel BC$.

Gọi I là giao điểm của Hx và BC . Khi đó $(\alpha) \cap (SBC) = HI$.

Suy ra $(\alpha) \cap (SAB) = AH, (\alpha) \cap (SAD) = AD, (\alpha) \cap (SCD) = ID$ và $(\alpha) \cap (SBC) = HI$.

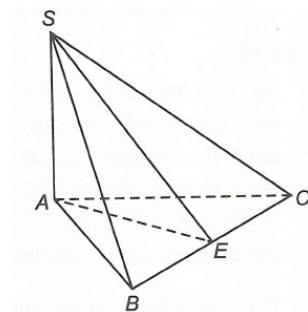
Vậy thiết diện cần tìm là hình thang $AHID$.

Câu 6.

Kẻ $AE \perp BC, SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow (SAE) \equiv (P)$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AE \Rightarrow \triangle SAE$ vuông tại A .

Vậy thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông SAE .



Ta có: $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{\Delta SAE} = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đơn vị diện tích)

Câu 7.

Trong (SAB) , dựng $AM \perp SB \Rightarrow M \in (P)$.

Lại có: $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra BC song song với (P) .

Trong (SBC) , dựng MN song song với BC ($N \in SC$), khi đó $N \in (P)$.

$AM \perp (SBC)$ nên thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P) là tam giác AMN vuông tại M .

Ta có: $AM = \frac{2a\sqrt{5}}{5}; SM = \frac{4a\sqrt{5}}{5}; SB = a\sqrt{5}$.

Mà $\frac{MN}{BC} = \frac{SM}{SB} \Rightarrow MN = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$.

$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5} = \frac{4a^2\sqrt{10}}{25}$ (đơn vị diện tích)

Câu 8.

Kẻ $AC_1 \perp SC \Rightarrow (AC_1B) \perp SC$. Thiết diện là tam giác AC_1B .

Ta có $AC_1 = AC \cdot \sin \widehat{ACS} = a\sqrt{1 - \cos^2 \widehat{ACS}}$

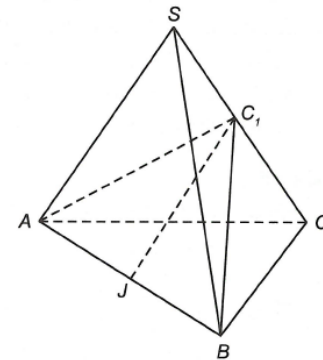
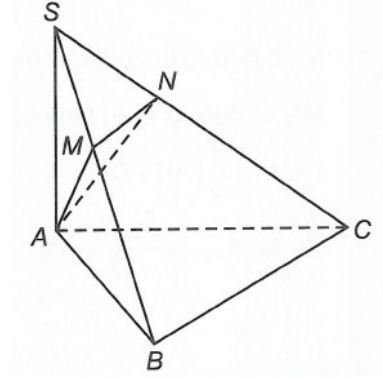
$$= a\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - b^2}{2ab}\right)^2} = a\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4b^2}}.$$

Gọi J là trung điểm của AB . Ta có tam giác AC_1B cân tại C_1 , suy ra $C_1J \perp AB$.

$$C_1J = \sqrt{AC_1^2 - AJ^2} = \frac{a}{2b} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}$$

Do đó: $S_{AC_1B} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1J = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2b} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{a^2}{4b} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}$.

Câu 9.



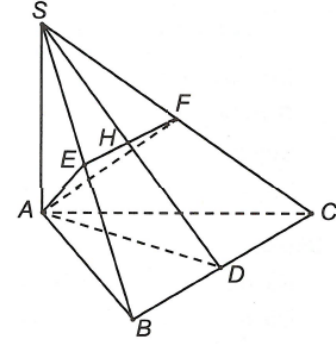
Do $AD \perp BC, SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD)$.

Gọi $H = HF \cap SD$.

Suy ra $BC \perp AH \Rightarrow EF \perp AH \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot AH$

Mà $EF = \frac{1}{2} BC = a$.

Do H là trung điểm của SD nên $AH = \frac{SD}{2} = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} a^2$.



Câu 10.

Do $(P) \perp AB$ nên $(P) \parallel SA$.

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$.

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC$
 $\Rightarrow MN \parallel IK \Rightarrow IK \subset (P)$.

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M

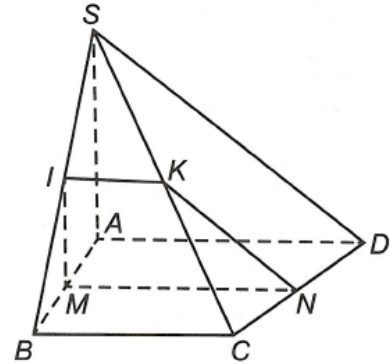
Ta có: MI là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow MI = \frac{1}{2} SA = 3$.

IK là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow IK = \frac{1}{2} BC = 3$.

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7.$$

Khi đó $S_{MNKI} = \frac{IK + MN}{2} \cdot MI = \frac{3 + 7}{2} \cdot 3 = 15$ (đơn vị diện tích).



Câu 11.

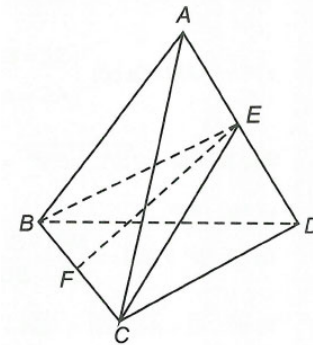
Gọi E là trung điểm của AD . Do $ABCD$ là tứ diện đều nên các mặt bên là tam giác đều.

Do đó $BE \perp AD, CE \perp AD \Rightarrow (BEC) \perp AD \Rightarrow (P) \equiv (BEC)$.

Gọi F là trung điểm của BC .

Ta có: $BE = CE = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}; EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = 6\sqrt{2}$.

Diện tích thiết diện là: $S = \frac{1}{2} EF \cdot BC = 36\sqrt{2}$ (đơn vị diện tích).



Câu 12.

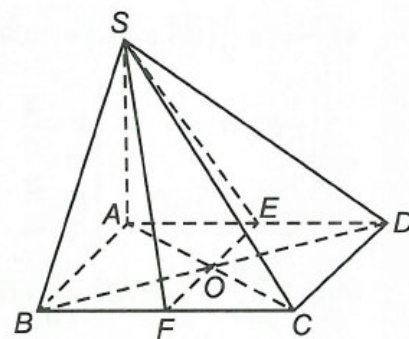
Gọi E, F lần lượt là trung điểm AD, BC . Khi đó

$$\begin{cases} EF \perp AD \\ EF \perp SA \end{cases} \Rightarrow EF \perp (SAD) \Rightarrow (SEF) \perp (SAD).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SO \subset (SEF) \\ (SEF) \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SEF).$$

Vậy thiết diện cần tìm là $\triangle SEF$ vuông tại E nên

$$S_{\triangle SEF} = \frac{1}{2} SE \cdot EF = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \text{ (đơn vị diện tích)}.$$



Câu 13.

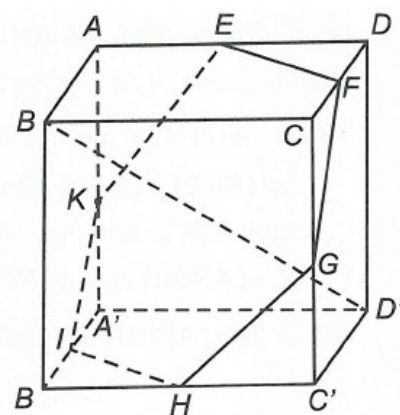
Gọi E là trung điểm của AD . Ta có $EB = ED'$ nên E thuộc mặt phẳng trung trực của BD' .

Gọi F, G, H, I, K lần lượt là trung điểm của $CD, CC', B'C', A'B', AA'$.

Chứng minh tương tự ta có các điểm trên đều thuộc mặt phẳng trung trực của BD' .

Vậy thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng trung trực của BD' là hình lục giác đều $EFGHIK$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Vậy diện tích thiết diện là } S = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2.$$



Câu 14.

Gọi $O = AC \cap BD, I = AM \cap SO$.

Trong (SBD) từ I kẻ đường thẳng Δ song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại N, P .

Suy ra thiết diện là tứ giác $ANMP$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM.$$

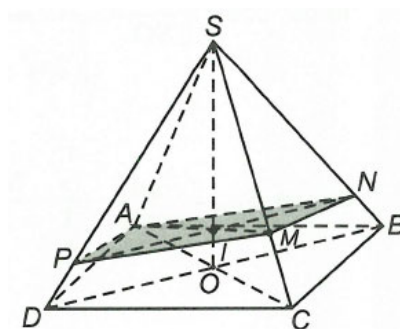
Mặt khác: $BD \parallel NP$. Suy ra $AM \perp NP$.

$$\text{Suy ra } S_{ANMP} = \frac{1}{2} NP \cdot AM.$$

$$\text{+) Tính } AM: \text{ Ta có: } \begin{cases} SA = SC = a \\ AC = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle SAC \text{ vuông cân tại } S.$$

$$\text{Suy ra } AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

+) Tính NP :



Ta có $NP \parallel BD \Rightarrow \frac{NP}{BD} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow NP = \frac{SI \cdot BD}{SO}$. Gọi $\frac{SI}{SO} = k$.

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{SA} + k\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$

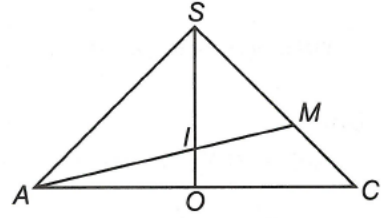
A, I, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = h\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + k\overrightarrow{SO} = -h\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}h\overrightarrow{SC}$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + \frac{k}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) = -h\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}h\overrightarrow{SC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k + h = 1 \\ \frac{1}{2}k - \frac{2}{3}h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ h = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Suy ra $\frac{SI}{SO} = \frac{4}{5} \Rightarrow NP = \frac{4}{5}BD = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$.

Vậy $S_{ANMP} = \frac{1}{2}NP \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{3} = \frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.



Câu 15.

Gọi E là trung điểm AB , suy ra $AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$ (1).

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $DE \perp (SAC)$ mà $DE \subset (SDE)$ nên $(SDE) \perp (SAC)$. Do đó $(\alpha) \equiv (SDE)$.

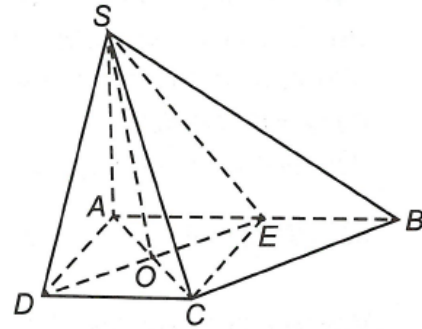
Vậy thiết diện là tam giác SDE .

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $\triangle ADE$ là hình chiếu vuông góc của tam

giác $\triangle SDE$ nên $(ABCD)$ và $((SDE), (ABCD)) = \widehat{SOA} = \alpha$.

$$\text{Ta có: } \cos \alpha = \frac{AO}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } S_{SDE} = \frac{S_{ADE}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3a^2}{2}.$$



Câu 16.

Dựng đường cao OH của ΔOBC , cắt AD tại H' . Dựng $OK \perp SH$.

Chúng minh được $BC \perp (SOH)$

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \perp (SOH) \\ (SBC) \cap (SOH) = SH \\ OK \subset (SOH); OK \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow OK \perp (SBC).$$

Dựng $H'K' \parallel OK (K' \in SH)$

Suy ra mặt phẳng (α) là mặt phẳng (ADK') .

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ K' \in (ADK') \cap (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow (ADK') \cap (SBC) = EF \text{ (với } EF \text{ qua } K' \text{ và song song với } BC)$$

$$(ADK') \cap (SAB) = AE; (ADK') \cap (SCD) = DF; (ADK') \cap (SAD) = DA$$

Vậy thiết diện cần tìm là hình thang $EFDA$ với $EF \parallel AD$, đường cao $H'K'$.

$$\text{Ta có } \Delta ABC \text{ đều nên } OH = OC \cdot \sin \widehat{OCB} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Tính được: } OK = \frac{SO \cdot OH}{SO^2 + OH^2} = \frac{3a}{8}, H'K' = 2OK = \frac{3a}{4}, SH = \frac{SO \cdot OH}{SH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HK = \frac{a\sqrt{3}}{8}, HK' = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } SH = 2HK' \Rightarrow K' \text{ là trung điểm } SH \Rightarrow EF = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$S_{EFDA} = \frac{1}{2} H'K' \cdot (EF + DA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \left(\frac{a}{2} + a \right) = \frac{9a^2}{16} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Câu 17.

Kẻ $MN \parallel OA (N \in BC), MQ \parallel SB (Q \in SA), NP \parallel SB (P \in SC)$.

Khi đó thiết diện là hình thang $MNPQ (MQ \parallel NP)$.

Kẻ $BK \perp OA (K \in AC)$. Do $SB \perp AO$ nên $AO \perp (SBK)$.

Gọi R là giao điểm của MN và BK , I là giao điểm của PQ và SK .

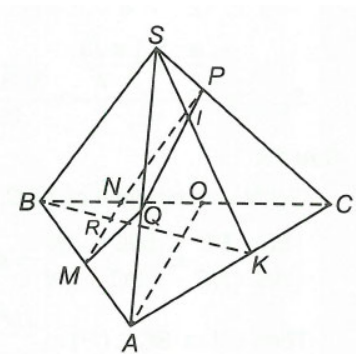
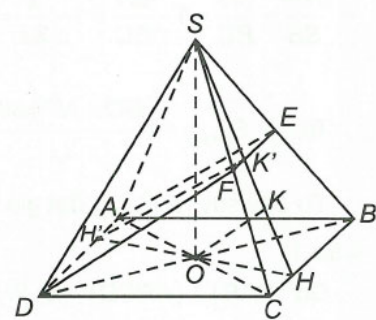
$$\text{Ta có: } \left\{ \begin{array}{l} MN \parallel AO \\ AO \perp (SBK) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \perp (SBK) \Leftrightarrow MN \perp RI \text{ (1).}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (SAB) \cap (SBK) = SB \\ (SAB) \cap (MNPQ) = MQ \\ (SBK) \cap (MNPQ) = RI \\ MQ \parallel SB \end{array} \right\} \Rightarrow MQ \parallel RI \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông.

Ta có: $\widehat{OAB} = \widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BMN} = 60^\circ \Rightarrow \Delta BMN$ đều.

Suy ra $BN = MN = BM = x$.



$$BC = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2a.$$

Sử dụng định lý Ta-lét, ta có: $\frac{MQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = \frac{a-x}{x} \Rightarrow MQ = \frac{a-x}{a} \cdot SB = a-x.$

$$\frac{NP}{SB} = \frac{CN}{BC} = 1 - \frac{BN}{BC} = 1 - \frac{x}{2a} = \frac{2a-x}{2a} \Rightarrow NP = \frac{2a-x}{2a} \cdot SB = \frac{2a-x}{2}.$$

$$\text{Ta có: } S_{MNPQ} = \frac{(MQ+NP)MN}{2} = \frac{\left(a-x + \frac{2a-x}{2}\right)x}{2} = \frac{-3x^2 + 4ax}{4}$$

Từ đây suy ra S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất khi $x = -\frac{4a}{2 \cdot (-3)} = \frac{2a}{3}.$

Câu 18.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$, kẻ $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$, kéo dài OH cắt CD tại P .

Có $HP \perp CD \Rightarrow \left[\widehat{(SCD); (ABCD)} \right] = \widehat{SPH} = 30^\circ.$

Xét tam giác vuông SHP có:

$$\tan 30^\circ = \frac{SH}{HP} \Rightarrow SH = HP \cdot \tan 30^\circ = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do tam giác SAB đều nên $AB = a.$

Trong mặt phẳng (SDC) qua I kẻ đường thẳng song song với CD , cắt SD và SC tại P và Q , dễ thấy IO là đường trung bình của ΔSHP nên $IO \parallel SH \Rightarrow IO \perp (ABCD).$

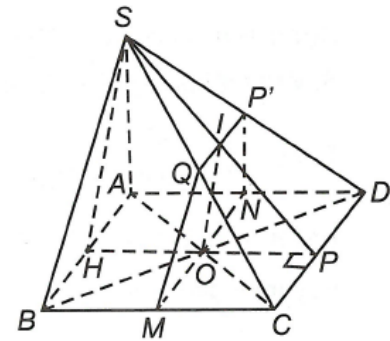
Vậy mặt phẳng $(MNPQ)$ chính là thiết diện cần tìm.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang có đường cao là $IO.$

$$\text{Có } IO = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}, MN = AB = a, QP = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Câu 19.



Gọi N là trung điểm của BC .

$$\begin{cases} SB = SC \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SN \\ BC \perp AN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN).$$

$$\text{Theo bài ra } BC \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ (P) \parallel (SAN) \end{cases}.$$

Kẻ $MI \parallel AN, MK \parallel SA$. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ là ΔKMI .

Vì $\Delta ABC; \Delta SBC$ là hai tam giác đều cạnh a

$$\text{Nên } AN = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA.$$

$$\text{Suy ra } \Delta SAN \text{ là tam giác đều cạnh } \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \Delta KMI \text{ là tam giác đều cạnh } \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a-b}{a}.$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta KMI} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

Câu 20.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC .

Vì $AH \perp SC$ nên $AH \subset (\alpha)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SC \Rightarrow AK \subset (\alpha).$$

Suy ra thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác

AHK vuông tại K .

Theo giả thiết ta tính được

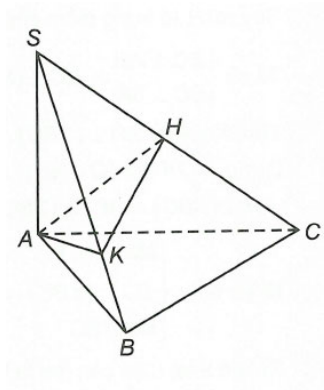
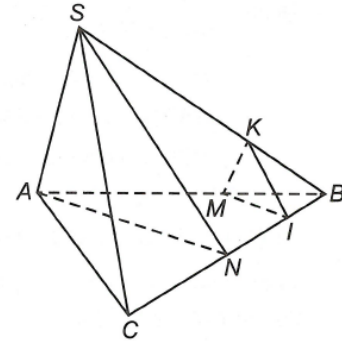
$$AH = \frac{1}{2}SC = a\sqrt{2}, AK = \frac{2a}{\sqrt{5}}; KH = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Diện tích thiết diện là } S_{AHK} = \frac{1}{2}AK \cdot HK = \frac{a^2\sqrt{6}}{5} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Câu 21.

Kẻ $AH \perp SD$.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$. Lại có $CD \perp AD$ nên



$$CD \perp (SAD).$$

Suy ra $CD \perp AD$.

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow (ABH) \perp (SCD).$$

Vậy (ABH) chính là mặt phẳng (α) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \\ H \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = HK \parallel AB \parallel CD.$$

Thiết diện là tứ giác $AHKB$.

Dễ thấy $AHKB$ là hình thang vuông tại A và H nên

$$S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong $\triangle SCD$ có $HK \parallel CD$ nên

$$\frac{HK}{CD} = \frac{SH}{SD} = \frac{SH \cdot SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Suy ra } HE = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a.$$

$$\text{Vậy } S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{4}\right)\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 22.

$SA = AB = a \Rightarrow \triangle SAB$ cân tại A . Dựng $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

Suy ra H là trung điểm của SB .

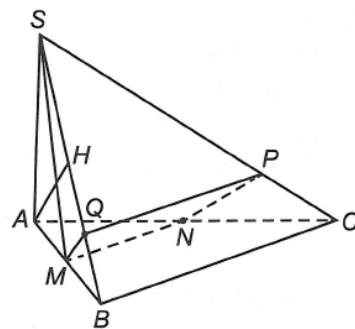
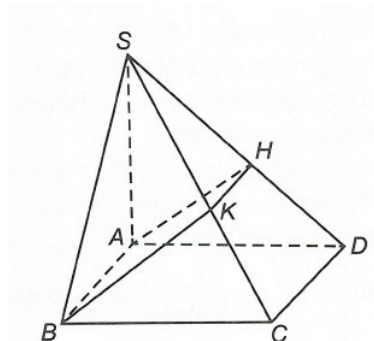
$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

Từ đó suy ra $AH \perp (SBC)$.

Dựng $MQ \parallel AH$ ($Q \in HB$), suy ra Q là trung điểm HB .

$AH \perp (SBC) \Rightarrow MQ \perp (SBC)$. Do đó $(\alpha) \equiv (QMN)$.

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = QP \parallel BC \quad (P \in SC). \\ MN \parallel BC \end{cases}$$



Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang vuông $MNPQ$.

$$\text{Ta có: } MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}; MQ = \frac{AH}{2} = \frac{SB}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$

$$\frac{QP}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{3}{4} \Rightarrow QP = \frac{3}{4}BC = \frac{3a}{4}.$$

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + QP) \cdot MQ = \frac{5a^2\sqrt{2}}{32}.$$

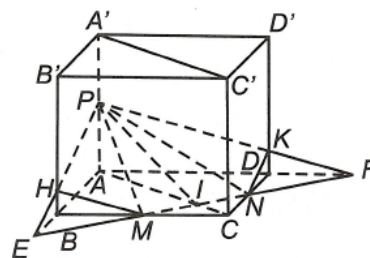
Câu 23.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = MN \cap AB$ và $F = MN \cap AD$.

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $H = PE \cap BB'$.

Trong mặt phẳng $(ADD'A')$, gọi $K = PF \cap DD'$.

Suy ra, thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi (MNP) là ngũ giác $PHMNK$.



Mặt khác, ngũ giác $ABMND$ là hình chiếu vuông góc của ngũ giác $PHMNK$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên diện tích ngũ giác $PHMNK$

được tính bởi công thức $S_{ABMND} = S_{PHMNK} \cdot \cos \alpha$.

Suy ra $S_{PHMNK} = \frac{S_{ABMND}}{\cos \alpha}$ với α là góc tạo bởi (MNP) và $(ABCD)$.

$$\text{Ta có } S_{ABMND} = S_{ABCD} - S_{\triangle CMN} = a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNP) \cap (ABCD) = MN \\ MN \perp (ACC'A') \\ (ACC'A') \cap (ABCD) = AI \\ (ACC'A') \cap (MNP) = PI \end{cases} \Rightarrow \left((MNP), (ABCD) \right) = \left(\widehat{AI, PI} \right) = \widehat{AIP} = \alpha \text{ trong đó } I = MN \cap AC.$$

$$\text{Ta có } AI = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}}{4}a; PI = \sqrt{AP^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}a}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{22}}{4}a.$$

$$\text{Suy ra } \cos \alpha = \frac{AI}{PI} = \frac{3\sqrt{11}}{11}. \text{ Vậy } S_{PHMNK} = \frac{S_{ABMND}}{\cos \alpha} = \frac{7\sqrt{11}}{24}a^2.$$

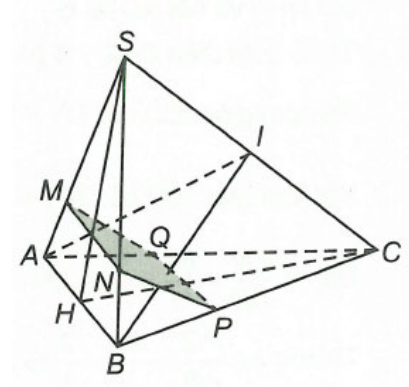
Câu 24.

Vì ΔSAC và ΔSBC là tam giác cân nên

$$\begin{cases} SC \perp AI \\ SC \perp BI \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ABI).$$

Dựng $MQ \parallel SC (Q \in AC) \Rightarrow MQ \perp (ABI)$. Do đó $(\alpha) \equiv (QMN)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ MN \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = QP (QP \parallel AB; P \in BC).$$



$$\text{Đặt } k = \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} (0 < k < 1) \Rightarrow MN = PQ = k \cdot AB = k \cdot a.$$

$$\text{Từ } MQ \perp (ABI) \Rightarrow MQ \perp AB \Rightarrow MQ \perp PQ.$$

Do đó thiết diện cần tìm là hình chữ nhật $MNPQ$.

Gọi H là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HC \text{ (do } HC \subset (ABC)) \\ SH \perp AB \end{cases}$$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\frac{MQ}{SC} = \frac{MA}{SA} = 1 - k \Rightarrow MQ = (1 - k) \cdot SC = (1 - k) \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích thiết diện là:

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{a^2 \sqrt{6}}{2} \cdot k(1 - k) \leq \frac{a^2 \sqrt{6}}{2} \cdot \left(\frac{k + 1 - k}{2} \right)^2 = \frac{a^2 \sqrt{6}}{8}.$$

Vậy thiết diện đạt diện tích lớn nhất là $\frac{a^2 \sqrt{6}}{8}$ khi $k = \frac{1}{2}$ hay M, N là trung điểm SA, SB .

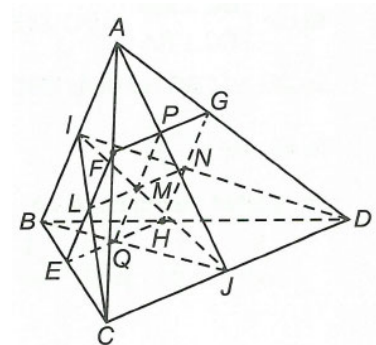
Câu 25.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \parallel CD; CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases}$$

Suy ra giao tuyến của (α) với (ICD) là đường thẳng qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N .

$$\text{Lại có } \begin{cases} (\alpha) \parallel AB; AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases}$$

Nên giao tuyến của (α) với (JAB) là đường thẳng qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q .



Ta có
$$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \quad \text{nên giao tuyến của } (\alpha) \text{ với } (ABC) \text{ là đường}$$

thẳng qua L và song song với AB cắt BC tại E và cắt AC tại F .

Tương tự
$$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \quad \text{nên giao tuyến của } (\alpha) \text{ với } (ABD) \text{ là đường thẳng qua } N \text{ và song song với } AB$$

cắt BD tại H và cắt AD tại G .

Ta có thiết diện $EFGH$ là hình bình hành. Mà $AB \perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

Xét tam giác ICD có: $LN // CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}$.

Xét tam giác ICD có: $MN // JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}$.

Do đó $\frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{1}{3}CD = \frac{b}{3}$.

Tương tự $\frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$.

Vậy $S_{EFGH} = PQ.LN = \frac{2ab}{9}$.