

Một số tính chất hay dùng trong hình học phẳng Oxy

VÕ QUANG MÃN

Ngày 15 tháng 1 năm 2016

Mục lục

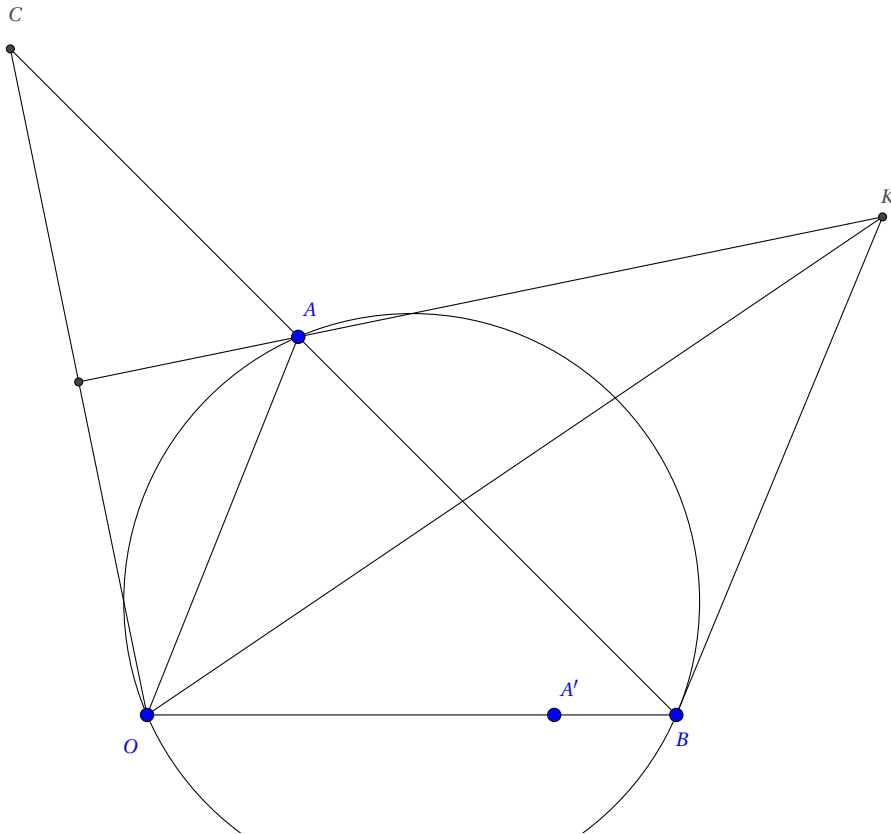
1	TÍNH CHẤT KINH ĐIỂN CẦN NẮM VỮNG	9
2	BÀI TOÁN LIÊN QUAN YẾU TỐ BA ĐỈNH CƠ BẢN	83
2.1	Bài toán AHO	83
2.2	Bài toán AHG	83
2.3	Bài toán AHM	83
2.4	Bài toán AGO	83
2.5	Bài toán AIO	84
2.6	Bài toán HMD	84
3	GIẢI ĐỀ THI THỬ THÔNG QUA PHÁT HIỆN TÍNH CHẤT	87
4	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	167
4.1	Bài tập rèn luyện cơ bản bổ sung	167
4.2	Các bài hình oxy trong đề thi thử 2015	171

BÌNH LUẬN ĐỀ THI CỦA BỘ

Bài toán 1. Trong Oxy cho tam giác OAB có các đỉnh A, B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 12 = 0$ và $K(6;6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O . Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC = AO$ và các điểm C, B nằm khác phía nhau so với A . Biết C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ A, B .

(Đề mẫu của bộ 2015)

Lời giải:



Ta có tam giác OAC cân tại A nên A nằm trên đường trung trực của OC . Vì $C \in \Delta$ và $x_C = \frac{24}{5}$ nên $C(-\frac{12}{5}; \frac{24}{5})$. Trung trực OC có phương trình $2x - y - 6 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3;0).$$

Đường thẳng $OK: x - y = 0$, gọi A' là ảnh đối xứng của A qua phân giác OK suy ra $A'(0;3)$ do đó đường thẳng OB đi qua A' nên có phương trình $x = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

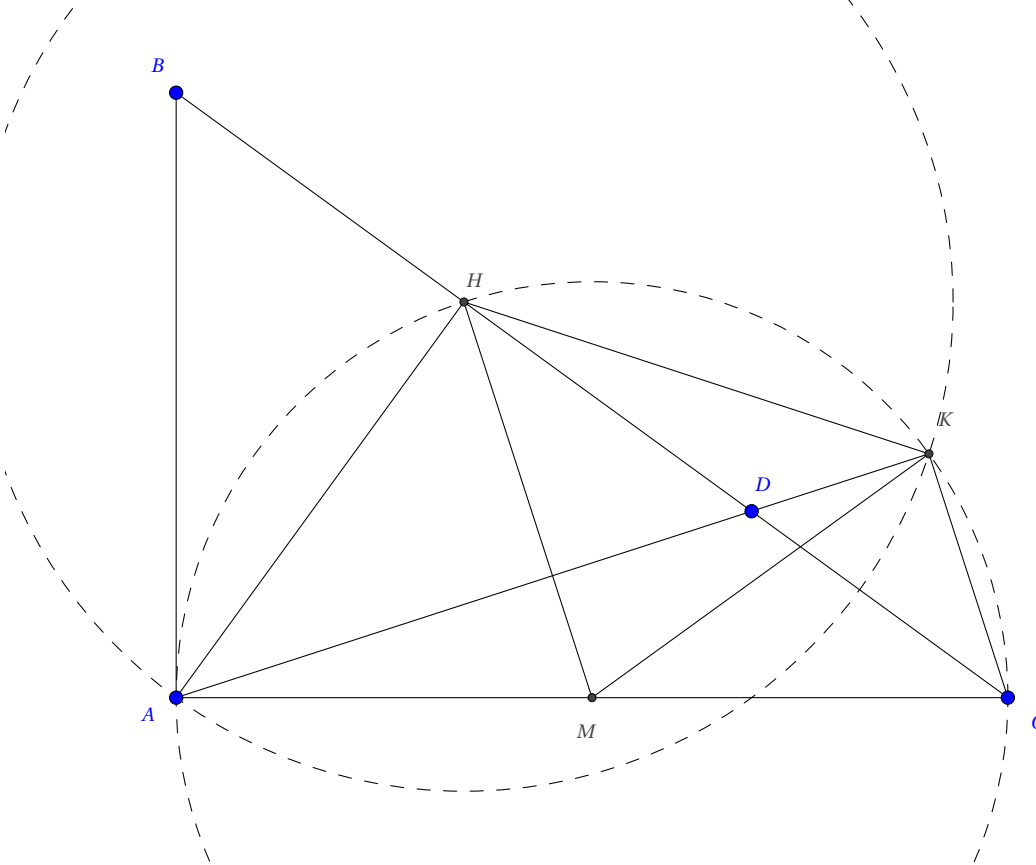
$$\begin{cases} x = 0 \\ 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;4)$$

Nhận xét: Đề cho thừa nhiều giả thiết.

Bài toán 2. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC , D là điểm đối xứng của B qua H , K là hình chiếu của vuông góc C trên đường thẳng AD . Giả sử $H(-5; -5)$, $K(9; -3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng: $x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm A .

(Đề thi THPTQG 2015)

Lời giải:



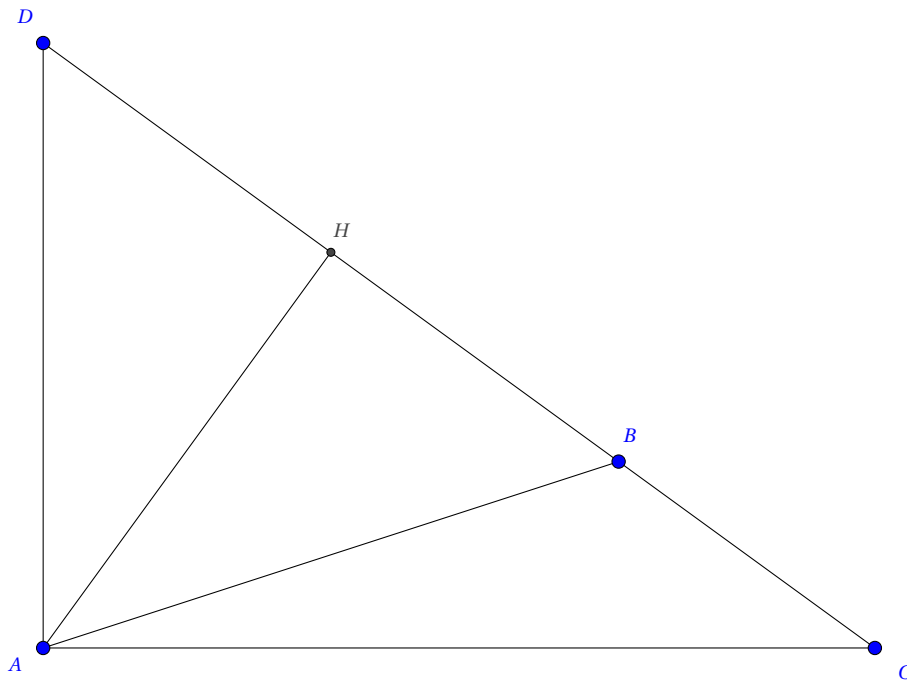
- Trước hết ta chứng minh một điều quan trọng (mà đáp án của bộ ngộ nhận) K không trùng A . Thật vậy giả sử K trùng A khi đó $\angle CAD = 90^\circ$ mà $\angle CAB = 90^\circ$ nên đường thẳng AB, AD trùng nhau hay $B \equiv C \equiv H$ do đó vô lý vì tam giác ABC vuông tại A .
- Ta sẽ chứng minh hai tính chất quan trọng là A, H, K, C nội tiếp đường tròn đường kính AC và tam giác AHK cân tại H .
Thật vậy $\angle AHC = \angle AKC = 90^\circ$ nên bốn điểm A, H, K, C nội tiếp đường tròn đường kính AC .
Vì tứ giác $AHKC$ nội tiếp nên $\angle HKA = \angle HCA = \angle BAH = \angle HAK$ nên tam giác AHK cân tại K .

Gọi $M(m; m + 10)$ vì tam giác HMK cân tại M nên $MH = MK$ suy ra $M(0; 10)$. Áp dụng tính chất trên ta có A nằm trên đường tròn tâm M bán kính MH và đường tròn tâm H bán kính HK . Đường tròn M bán kính MH có phương trình $x^2 + (y - 10)^2 = 250$ và đường tròn tâm H bán kính HK có phương trình $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 200$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + (y - 10)^2 = 250 \\ (x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-15; 5) \\ A(9; -3) \end{cases} \text{ loại}$$

Bình luận: Đáp án của bộ có lý luận $HA = HK$ và $MA = MK$ nên AK là trung trực của HM nên A, K đối xứng nhau qua đường thẳng HM . Đây là một suy luận nghe có lý nhân thật tế không

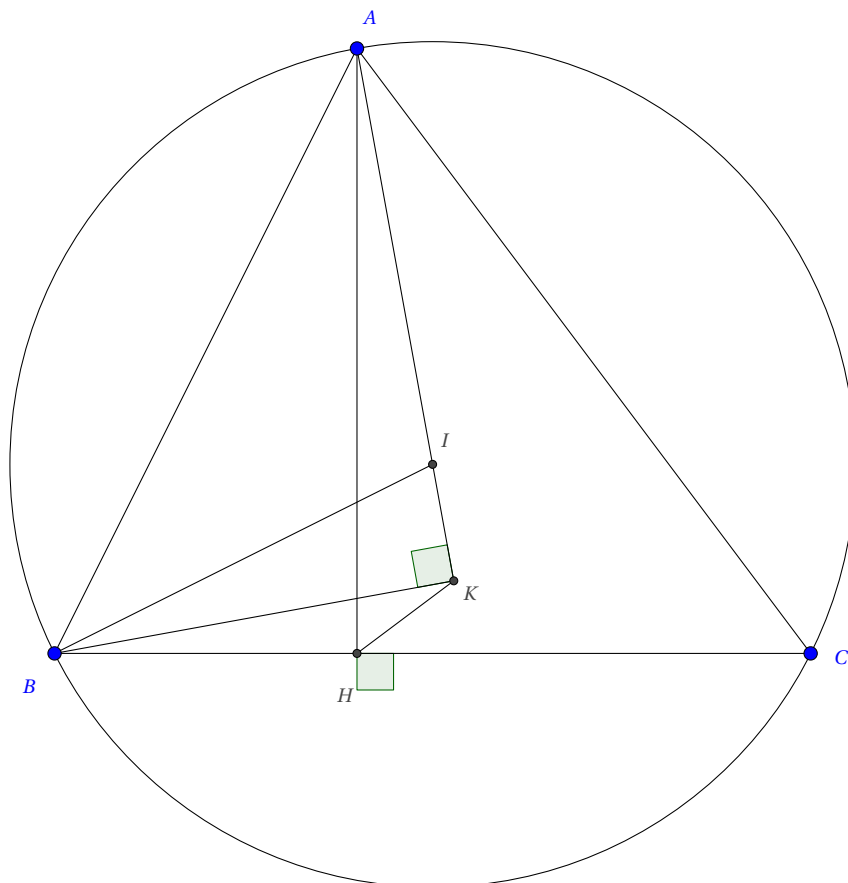
đúng vì A có thể trùng K thì sao? Mình cho các bạn hình vẽ để chỉ ra rằng A có thể trùng K để thấy việc tưởng thấy đúng nhưng thật tế là không đúng!



Bài toán 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, K là hình chiếu vuông góc của B trên AI. Giả sử $A(2;5)$, $I(1;2)$, điểm B thuộc đường thẳng $3x + y + 5 = 0$, đường thẳng HK có phương trình $x - 2y = 0$. Tìm tọa độ các điểm B, C.

(Đề dự bị 2015)

Lời giải:



Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tâm I bán kính IA có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.
Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + y + 5 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow B(-2; 1).$$

Đường thẳng AI: $3x - y - 1 = 0$. Điểm K là hình chiếu của B lên AI nên $K(\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$. Ta có bốn điểm A, B, H, K nằm trên đường tròn đường kính AB: $x^2 + (y-3)^2 = 8$. Tọa độ H là nghiệm của

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(2; 1) \\ H(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}) \end{cases}.$$

- Nếu $H(\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$

Khi đó ta có $H \equiv K$ hay đường cao AH cũng là đường phân giác do đó tam giác ABC cân tại A dẫn đến loại.

- $H(2; 1)$

Khi đó đường thẳng BH: $y = 1$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(4; 1) \\ C(-2; 1) \end{cases} \text{ loại vì trùng B}.$$

Nhận xét: Đề cho điểm $B \in 3x + y + 5 = 0$ là một dữ kiện thừa. Thật vậy trước hết ta có đường thẳng AI: $3x - y - 1 = 0$ do đó tọa độ $K(\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$. Đường thẳng BK vuông góc với AI nên có phương

trình $x + 3y - 1 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-2; 1) \\ B(\frac{14}{5}; -\frac{3}{5}) \end{cases}.$$

- $B(-2; 1)$

Giải tương tự như trên

- $B(\frac{14}{5}; -\frac{3}{5})$

Ta có bốn điểm A, B, H, K nằm trên đường tròn đường kính $AB: (x - \frac{14}{5})^2 + (y - \frac{11}{5})^2 = 8$. Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{14}{5})^2 + (y - \frac{11}{5})^2 = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}) \\ H(\frac{26}{5}; \frac{13}{5}) \end{cases}.$$

Đường thẳng $BH: 4x - 3y - 13 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

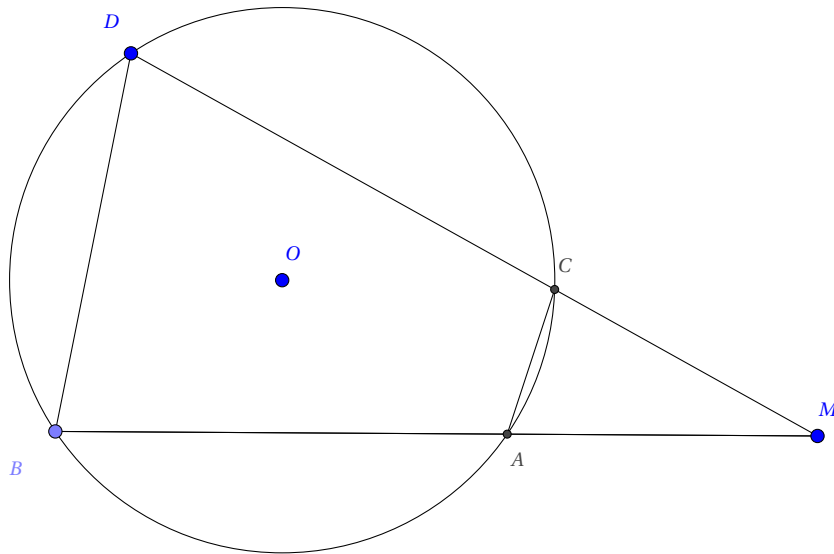
$$\begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow C(4; 1).$$

Chương 1

TÍNH CHẤT KINH ĐIỂN CẦN NĂM VỮNG

Tính chất 1. Cho điểm M và hai tia M_x, M_y . A, B chạy trên M_x , C, D chạy trên M_y . Khi đó bốn điểm A, B, C, D nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

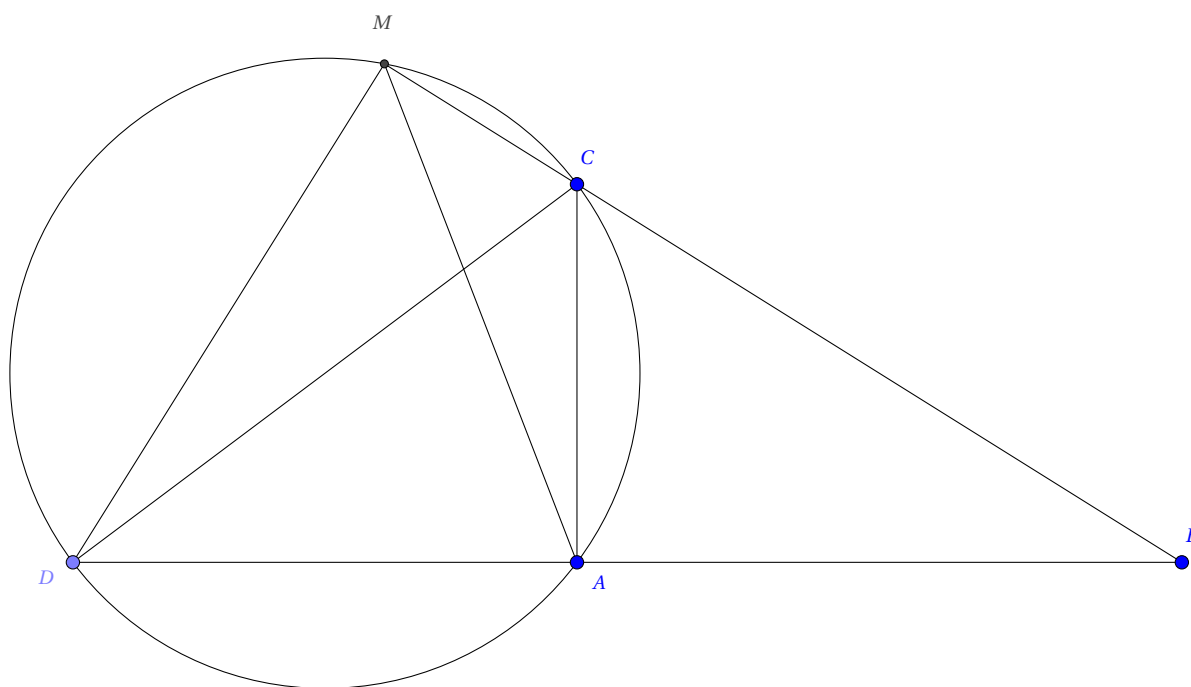
Lời giải:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Leftrightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD} \Leftrightarrow \triangle AMC \sim \triangle DMB \Leftrightarrow A, B, C, D \text{ nội tiếp đường tròn.}$$

Bài toán 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , điểm $B(1;1)$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM \cdot BC = 75$. Phương trình đường thẳng $AC: 4x + 3y - 32 = 0$. Tìm tọa độ điểm C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:



1. Tam giác ABC vuông tại A để làm gì?
2. $BM \cdot BC = 75$ sử dụng chỗ nào?
3. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC?

Đường thẳng AB đi qua B và vuông góc AC nên có phương trình AB: $3x - 4y + 1 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 332 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(5; 4).$$

Ta xây dựng điểm D cố định trên tia BA thỏa $BA \cdot BD = 75$ suy ra $D(13; 10)$.

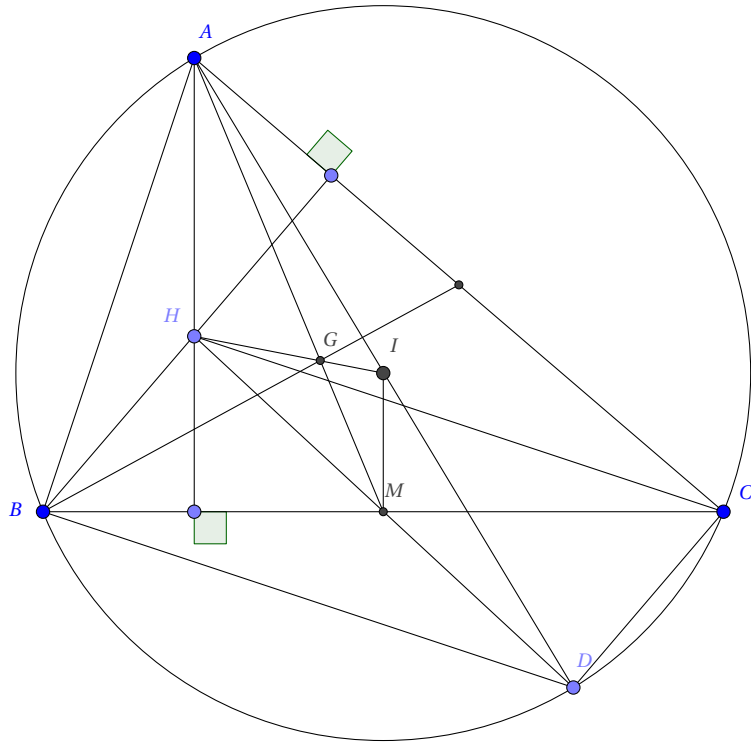
Áp dụng tính chất ta có $BA \cdot BD = BC \cdot BM$ suy ra bốn điểm D, A, C, M nội tiếp đường tròn do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC chính là đường tròn đường kính DC. Gọi $C(c; \frac{32-4c}{3})$ ta có

$$DC = 2R = 5\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} C(8; 0) \\ C(2; 8) \end{cases}.$$

Tính chất 2. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trọng tâm G và trực tâm H. Gọi AD là đường kính của (O) và M là trung điểm của BC. Khi đó:

1. Tứ giác BHCD là hình bình hành.
2. G cũng là trọng tâm tam giác AHD.
3. O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$.
4. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

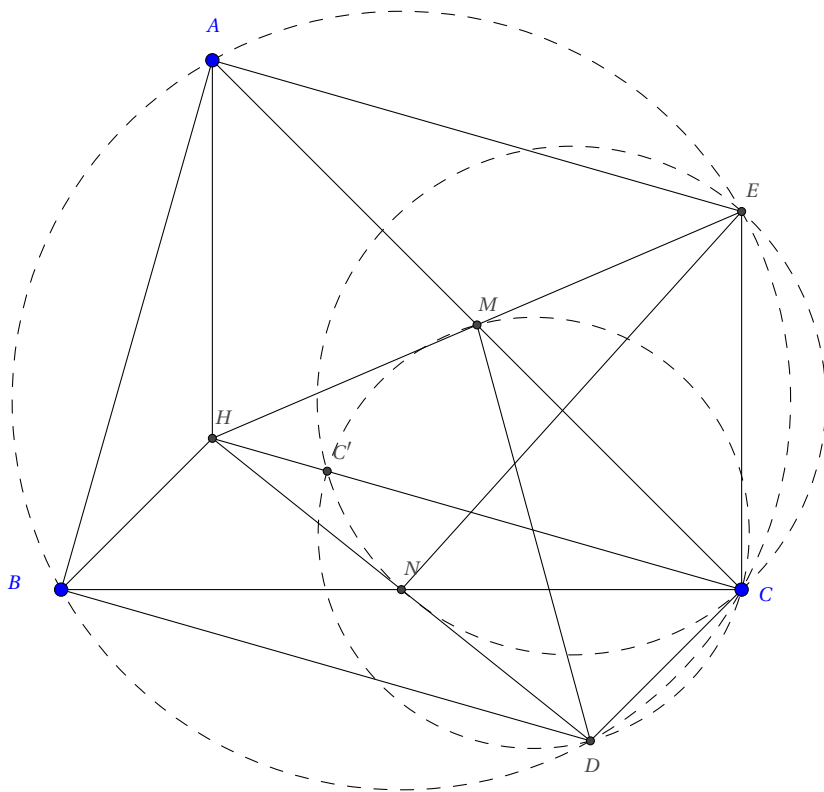
Lời giải:



1. Dễ thấy BH, DC cùng vuông góc với AC nên $BH \parallel DC$, tương tự $BD \parallel CH$. Do đó $HBCD$ là hình bình hành.
2. Do $HBCD$ là hình bình hành nên M là trung điểm HD . Suy ra G là trọng tâm tam giác AHD .
3. Theo chứng minh ý 2. vì G là trọng tâm tam giác AHD nên O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$.
4. theo tính chất đường trung bình trong tam giác AHD ta suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC , trực tâm $H(-1;6)$, các điểm $M(2;2), N(1;1)$ là trung điểm các cạnh AC, BC . Tìm tọa độ tam giác ABC .

Lời giải:



Gọi D, E là điểm đối xứng của H qua N, M suy ra $E(5; -2), D(3; -4)$. Ta có AD, BE là các đường kính nên các tam giác ECN, DCM vuông tại C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ECN và tam giác DCM có phương trình $(ECN) : (x-3)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}, (DCM) : (x-\frac{5}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{37}{4}$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \\ (x-\frac{5}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{37}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}) \\ C(3; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 2), B(-1; 0) \\ A(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}), B(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}) \end{cases}.$$

Bài toán 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác đường cao AA' có phương trình $x+2y-2=0$ trực tâm $H(2;0)$ kẻ các đường cao BB' và CC' đường thẳng $B'C'$ có phương trình $x-y+1=0$. $M(3;-2)$ là trung điểm BC . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

(Nghĩa Hưng C 2015)

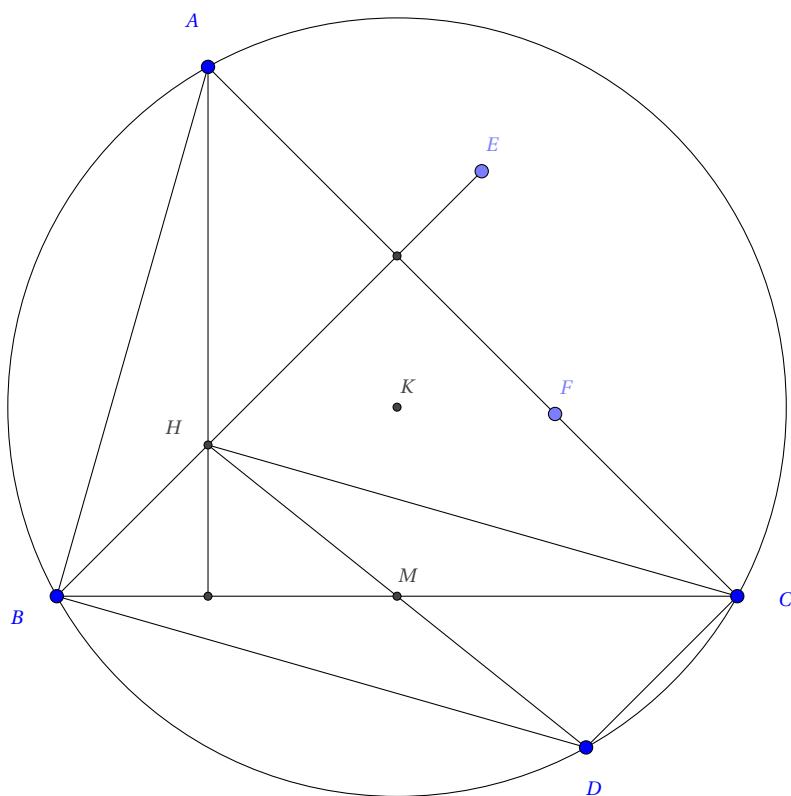
Bài toán 7. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;-2)$, trọng tâm $G(0;1)$ và trực tâm $H(\frac{1}{2};1)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

(Nguyễn Hiền, Đà Nẵng 2015)

Bài toán 8. Trong mặt phẳng (Oxy), cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao vẽ từ B đi qua $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa cạnh AC qua $F(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $D(4;-2)$ là điểm đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

(Núi Thành 2015, Mỹ Đức A lần 1 năm 2016)

Lời giải:



Áp dụng tính chất ta có BHCD là hình bình hành. Do đó M là trung điểm H, D suy ra $H(2;0)$. Đường cao BH đi qua H, E nên có phương trình BH: $x - y - 2 = 0$. Đường thẳng AC đi qua F và vuông góc BH nên có phương trình AC: $x + y - 4 = 0$. Đường thẳng DC đi qua D và vuông góc AC nên có phương trình DC: $x - y - 6 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5; -1).$$

Đường thẳng BC đi qua M, C nên có phương trình BC: $y + 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

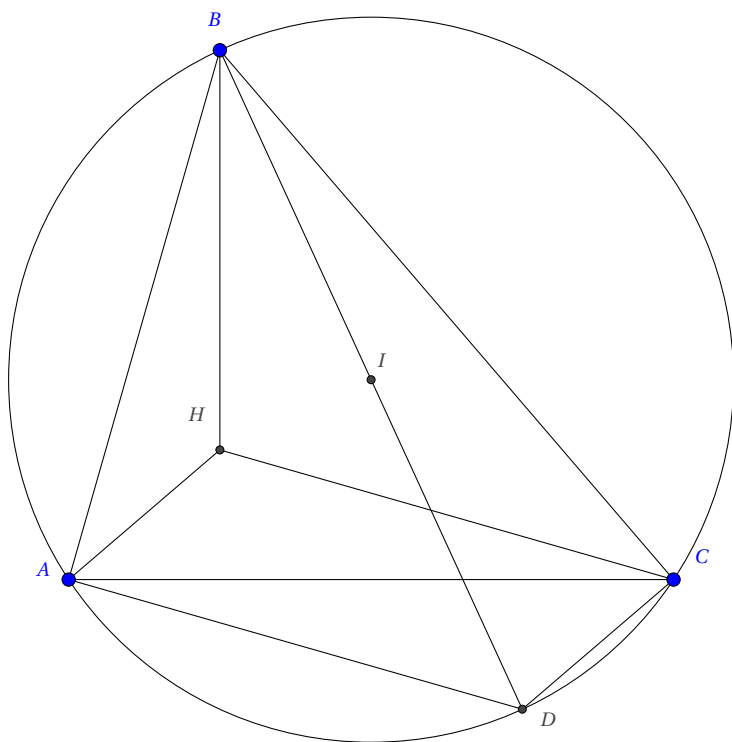
$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; -1).$$

Đường cao AH đi qua H và vuông góc BC nên có phương trình AH: $x - 2 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2; 2).$$

Bài toán 9. Tam giác ABC có trực tâm $H(2;1)$, $A(-2;-1)$, $BC = 2\sqrt{5}$, trung điểm M của cạnh BC thuộc d: $x - 2y - 1 = 0$. Tìm A, B, C biết M có tung độ dương.

Lời giải:



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Điểm M thuộc đường thẳng d nên có tọa độ $M(2a+1; a)$. Từ $\vec{MI} = \frac{1}{2} \vec{HA}$ có $I(2a-1, a-1)$. Ta có

$$IA^2 = IB^2 = IM^2 + MB^2 \Leftrightarrow (2a+1)^2 + a^2 = 5 + 5 = 10$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = -\frac{9}{5}.$$

Vì M có tung độ dương nên $M(3; 1)$. Đường thẳng BC qua điểm M và nhận $\vec{AH} = (4; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $BC: 2x + y - 7 = 0$.

Điểm B thuộc BC nên $B(b; 7-2b)$. M là trung điểm BC nên $C(6-b; 2b-5)$.

$$MB^2 = 5 \Leftrightarrow (b-3)^2 + (6-2b)^2 = 5 \Leftrightarrow b = 2 \text{ hoặc } b = 4.$$

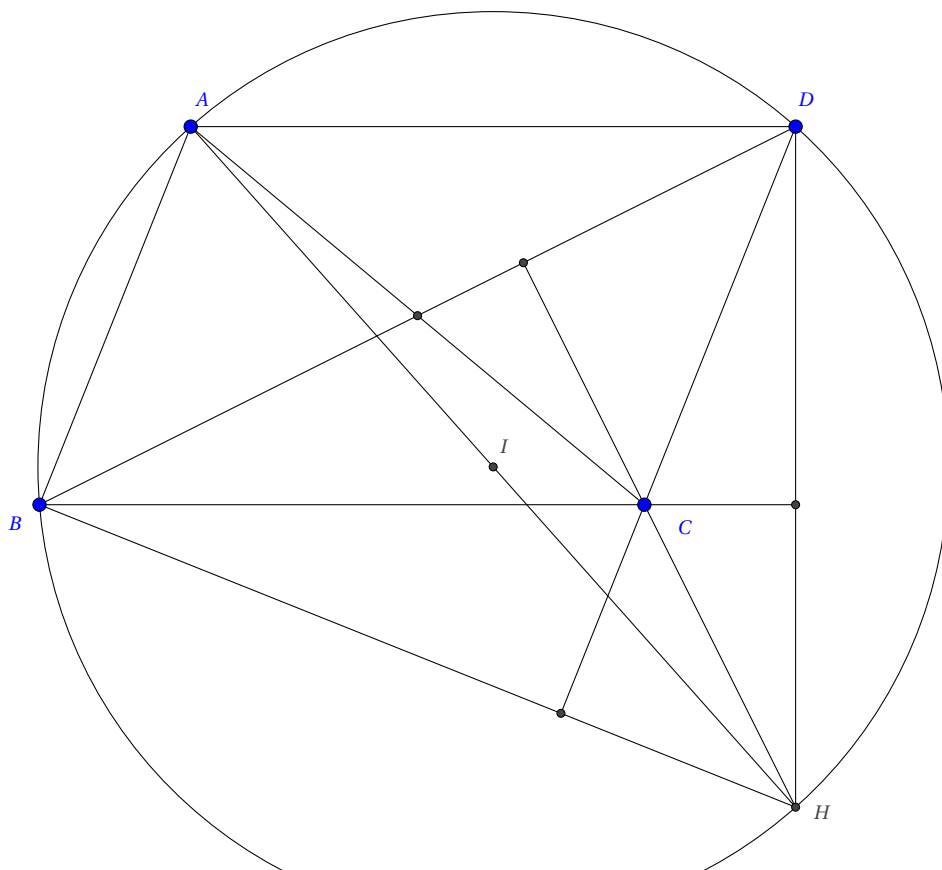
Vậy $B(2; 3), C(4; -1)$ hoặc $C(2; 3), B(4; -1)$.

Nhận xét: Dựng đường kính BD , chú ý theo tính chất ta có $AHCD$ là hình bình hành do đó $4R^2 = AD^2 = BC^2 + DC^2 = BC^2 + AH^2 = 40$

Bài toán 10. Cho hình bình hành $ABCD$ biết $H(4; 0)$ là trực tâm tam giác BCD , $I(2; \frac{3}{2})$ là tâm ngoại tiếp tam giác ABD . Biết $B \in 3x - 4y = 0, x_B > 0$ và đường thẳng BC đi qua $M(5; 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh hình bình hành.

(Chu Văn An- Thái Nguyên lần 1)

Lời giải:



Chú ý H là trực tâm tam giác $BCD \Leftrightarrow C$ là trực tâm tam giác BDH . Vì vậy theo tính chất cũ ta có AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Ta có A đối xứng của B qua I nên $A(0;3)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tâm I bán kính IA có phương trình $(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} \\ 3x-4y=0 \end{cases}.$$

Khi đó đường thẳng BC đi qua M, B nên có phương trình $BC: 3x+y-15=0$. Do đó đường thẳng AD qua A và song song với BC nên có phương trình $AD: 3x+y-3=0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ (x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow D(\frac{13}{10}; -\frac{9}{10}).$$

Sử dụng $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow C(\frac{53}{10}; -\frac{9}{10})$.

Bài toán 11. Cho $\triangle ABC$ có trung điểm BC là $M(3; -1)$, đường thẳng chứa đường cao từ B đi qua $E(-1; -3)$ và đường thẳng chứa AC đi qua điểm $F(1; 3)$. Điểm đối xứng A qua tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $D(4; -2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$.

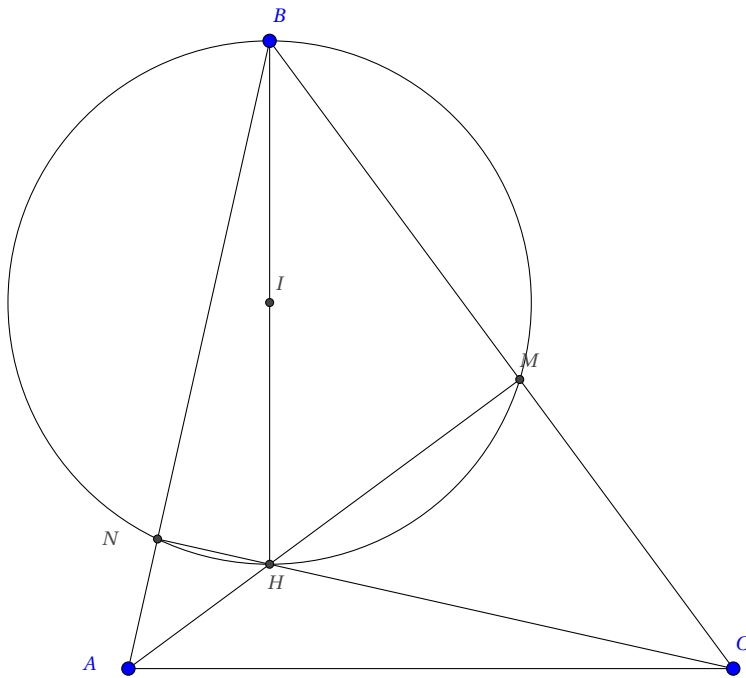
Đáp số: $A(2; 2); B(1; -1); C(5; -1)$

Bài toán 12. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G(\frac{5}{3}; 1)$ và nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 = 0$. Điểm $M(-1; -1) \neq A$ nằm trên đường cao từ A của tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC , biết $x_B > x_C$.

(đề sưu tầm trên face)

Bài toán 13. Cho tam giác ABC . Có góc A là góc nhọn, M và N lần lượt là hình chiếu của A, C lên BC và AB , H là trực tâm tam giác ABC . $I(2,0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN . Tìm tọa độ điểm B, C biết $A(-1,4)$ và B thuộc $d: x+2y-2=0$.

Lời giải:

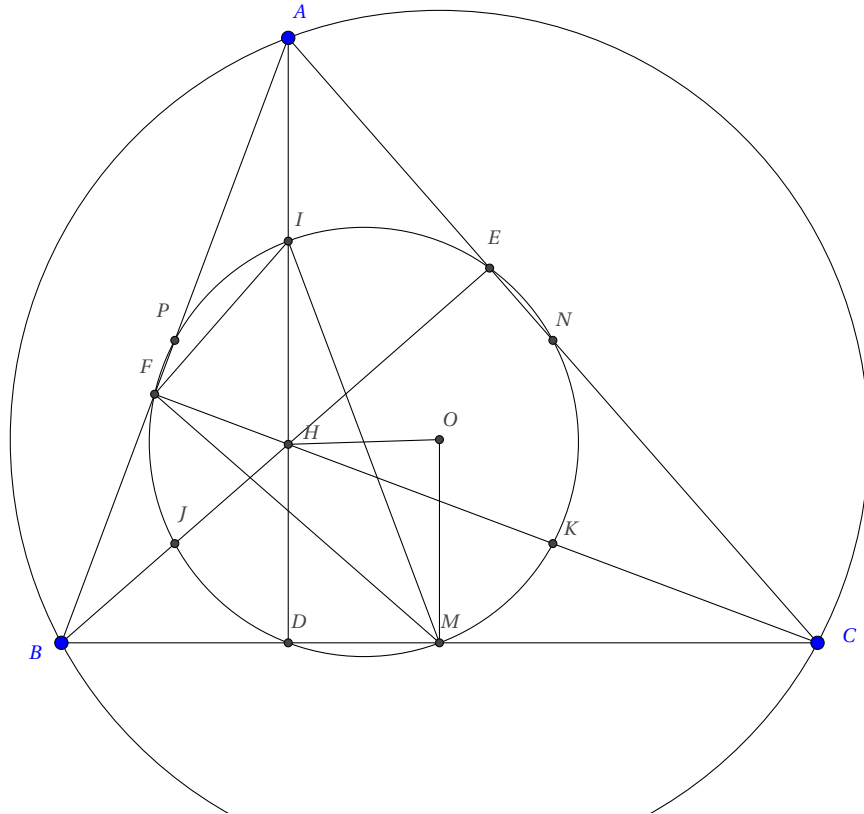


Tính chất 3. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF . Gọi M, N, P là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và I, J, K là trung điểm của AH, BH, CH . Khi đó

1. IM đi qua trung điểm HO .
2. bốn điểm I, F, D, M nằm trên một đường tròn.
3. chín điểm $D, E, F, M, N, P, I, J, K$ nằm trên một đường tròn và $R_E = \frac{1}{2}R$, ở đây R_E là bán kính đường tròn Euler.

(đường tròn Euler)

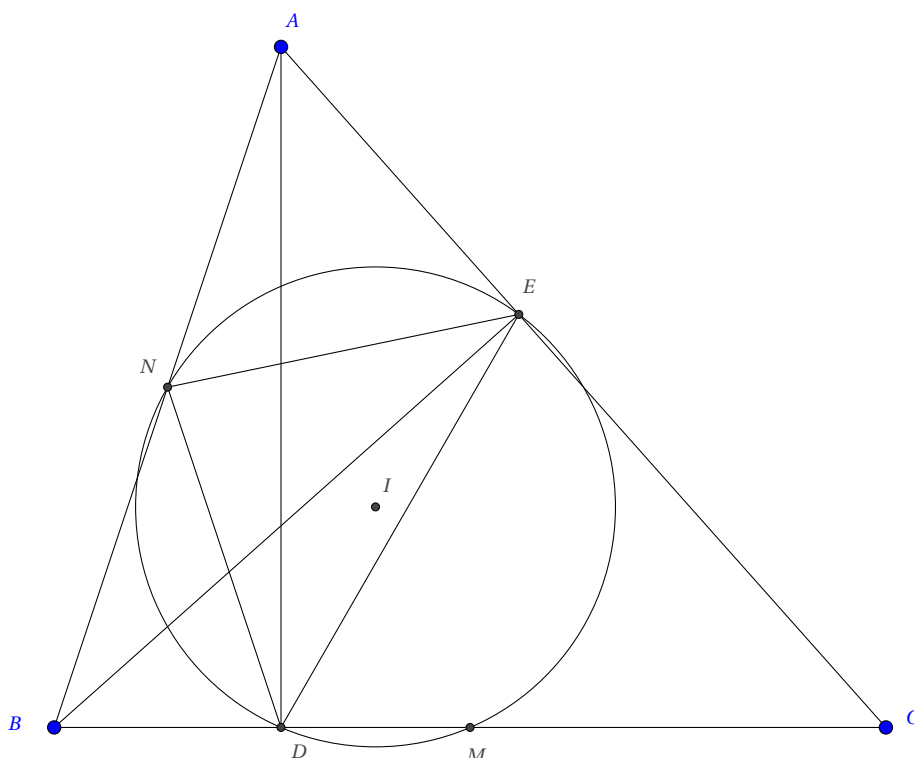
Lời giải:



1. Theo tính chất trước ta có $HI = OM$ hay tứ giác $IHMO$ là hình bình hành do đó IM đi qua trung điểm HO .
2. Do tam giác BFC, HFA vuông tại F suy ra $\angle MFC = \angle MCF = \angle DAF = \angle AFI$ mà $HF \perp AF$ nên $MF \perp FI$. Do đó tứ giác $IFDM$ nội tiếp hay bốn điểm I, F, D, M nằm trên một đường tròn.
3. Lập luận cho các bộ bốn điểm như trên ta suy ra chín điểm $D, E, F, M, N, P, I, J, K$ nằm trên một đường tròn. Gọi O_E là tâm đường tròn Euler, dễ thấy $O_E I$ là trung bình của tam giác AHO nên $R_E = \frac{1}{2}R$.

Bài toán 14. Cho tam giác ABC có $B(-1;4)$. Gọi $D, E(-1;2)$ là chân đường cao từ A, B của tam giác ABC và N là trung điểm AB . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEN có tâm $I(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2})$. Tìm tọa độ C .

Lời giải:



Đường thẳng AC đi qua E và vuông góc BE nên có phương trình AC: $y = 2$. Áp dụng tính chất ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác DEN chính là đường tròn Euler nên cũng đi qua trung điểm M của BC. Gọi $C(c; 2) \in y = 2$ suy ra trung điểm $M(\frac{c-1}{2}; 3)$.

Ta có $IE = IM$ suy ra $\begin{cases} c = 1 \\ c = -5 \end{cases}$ do đó $\begin{cases} C(1; 2) \\ C(-5; 2) \end{cases}$.

Bài toán 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình tam giác ABC không vuông và đường thẳng d có phương trình $2x + y - 2 = 0$. Giả sử $D(4; 1), E(2; -1), N(1; 2)$ theo thứ tự là chân đường cao kẻ từ A, chân đường cao kẻ từ B và trung điểm cạnh AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng d và điểm M có hoành độ nhỏ hơn 1.

Bài toán 16. Trong Oxy cho tam giác ABC không vuông có trực tâm H và M, N, P là trung điểm của AH, BH, CH. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có tâm $K(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Trung trực AB có phương trình $x + y = 0$, điểm H thuộc trục hoành, $C \in x + 3y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải:

Gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Áp dụng tính chất ta có K là trung điểm HI hay đường cao CH là ảnh của đường trung trực AB: $x + y = 0$ qua K nên CH: $x + y - 2 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(4; -2)$$

. Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(2; 0)$$

. Vì K là trung điểm HI nên $I(-1;1)$. Gọi D là trung điểm AB ta có $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{ID} \Rightarrow D(-2;2)$. Đường thẳng AB đi qua D và vuông góc với CH nên $AB: x - y + 4 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $(-1;1)$ và đi qua $C(4;-2)$ nên có phương trình $(I): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 34$. Tạo độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 34 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(2;6) \\ B(-6;-2) \\ A(-6;-2) \\ B(2;6) \end{cases}.$$

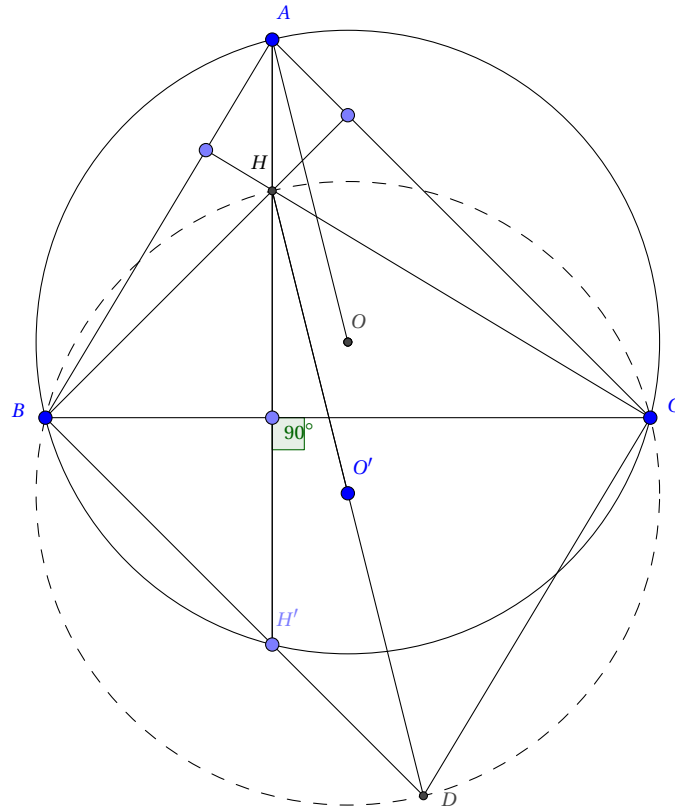
Bài toán 17. Trong Oxy cho tam giác ABC không vuông có trực tâm H và M, N, P là trung điểm của AH, BH, CH . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có phương trình $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{17}{2}$. Trung trực AB có phương trình $x + y = 0$, C thuộc đường thẳng $d: x + 3y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/

Tính chất 4. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O , trực tâm H . Gọi AH cắt (O) tại H' . Khi đó:

1. H, H' đối xứng nhau qua BC .
2. Điểm O' đối xứng với O qua BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .
3. $AHO'O$ là hình bình hành.
4. (O) và (O') có cùng bán kính.
5. Dựng đường kính HD của (O') . Ta có $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải:



1. Ta có $\angle H'BC = \angle H'AC = \angle HAC = \angle HBC$, tương tự $\angle H'CB = \angle HCB$ từ đó suy ra $\triangle BH'C = \triangle BHC$ hay H, H' đối xứng nhau qua BC .
2. Do O, O' đối xứng nhau qua BC nên $O'B = OB = OC = O'C$ và $O'H = OH' = OA$ do đó O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .
3. Gọi M là trung điểm BC , theo tính chất trước ta có $AH = 2OM = OO'$ và do $AH \parallel OO'$ nên $AHO'O$ là hình bình hành.
4. Do O, O' đối xứng nhau qua BC nên hiển nhiên (O) và (O') có cùng bán kính.
5. Để thấy $O'M = \frac{1}{2}AH$ nên $O'M$ là đường trung bình của tam giác AHD hay M là trung điểm của AD , mà M lại là trung điểm của BC nên $ABDC$ là hình hành.

Bài toán 18. Tam giác ABC có trực tâm $H(5;5)$, đường tròn ngoại tiếp tam giác qua hai điểm $M(7;3)$ và $N(4;2)$, $BC: x + y - 8 = 0$. Tìm A, B, C .

Lời giải:

Gọi E, D là giao điểm của AH với BC và đường tròn (S) ngoại tiếp tam giác ABC (D khác A). Do đó D đối xứng với H qua BC nên $D(3;3)$. Đường tròn (S) qua ba điểm M, N, D nên có phương trình

$$(S): x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0.$$

Từ đó có $A(6;6), B(3;5), C(6;2)$ hoặc $A(6;6), C(3;5), B(6;2)$.

Bài toán 19. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác nhọn ABC . Đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình $3x + 5y - 8 = 0, x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A và vuông

góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4, -2)$. Viết phương trình đường thẳng AB, biết hoành độ điểm B không lớn hơn 3.

(THPT Lê Quý Đôn – Tây Ninh 2015)

Bài toán 20. Trong mặt phẳng Oxy, gọi $H(3; -2)$, $I(8; 11)$, $K(4; -1)$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

(sở thành phố HCM 2015)

Bài toán 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1; 1)$, trực tâm $H(-31; 41)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(16; -18)$. Tìm tọa độ B, C.

Đáp số: $B(-3; -1); C(5; 5) \vee C(-3; -1); B(5; 5)$

Bài toán 22. Tam giác ABC có trực tâm H thuộc $d: 3x - y - 4 = 0$, $M(2; 3)$ là trung điểm AB, đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có phương trình (S): $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$. Tìm A, B, C.

Lời giải:

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (S) có tâm $O' = (\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ và bán kính $R' = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(2; 2)$$

Gọi $A(a, b)$, do M là trung điểm AB nên $B(4 - a; 6 - b)$. Do $AHO'K$ là hình bình hành nên $K(a - \frac{3}{2}; b + \frac{1}{2})$. Ta có $KB = R = \frac{\sqrt{10}}{2}$ và B thuộc đường tròn (S) nên tọa độ B là nghiệm của hệ

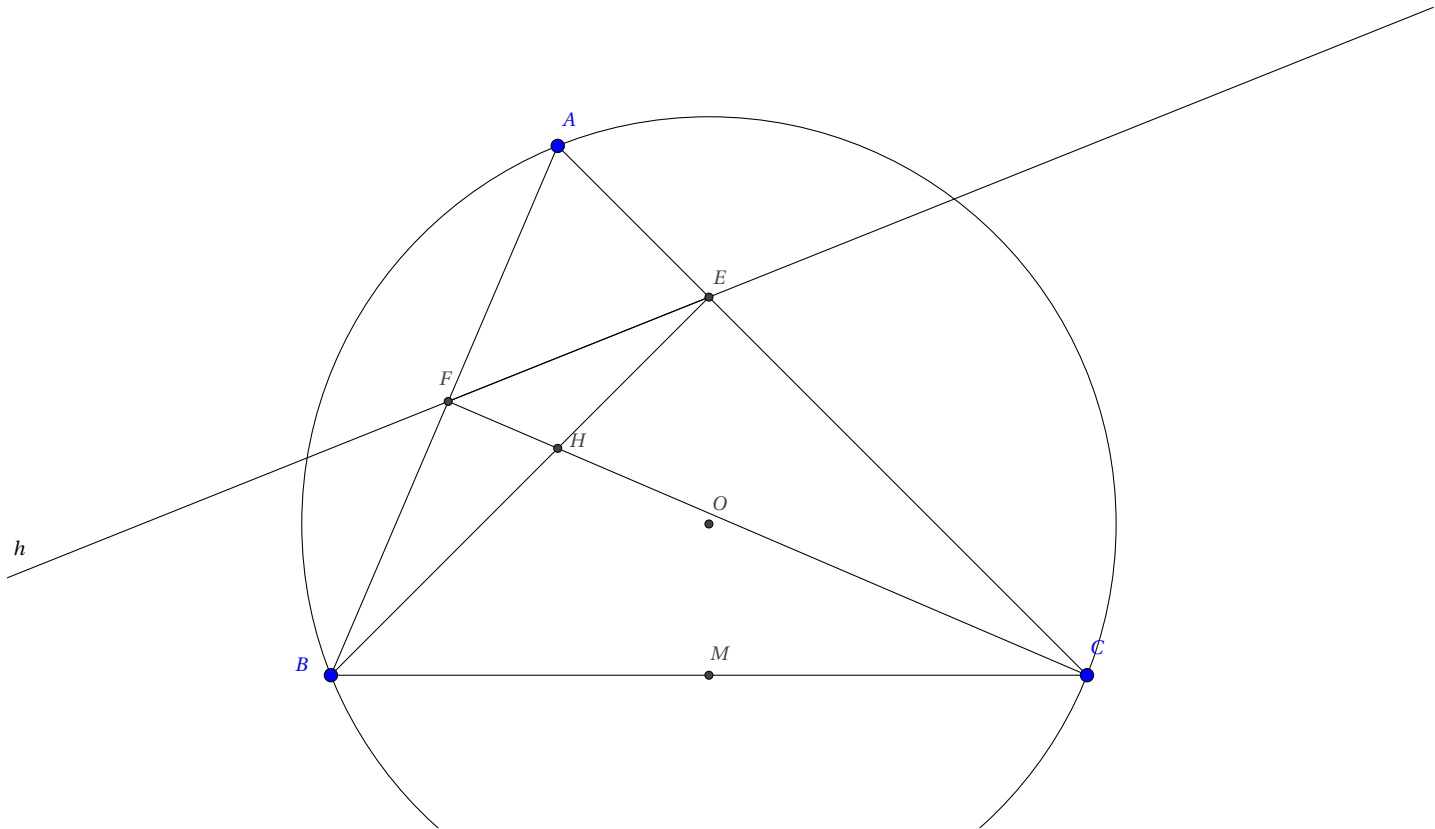
$$\begin{cases} (2a - \frac{11}{2})^2 + (2b - \frac{11}{2})^2 = \frac{5}{2} \\ (4 - a)^2 + (6 - b)^2 - (4 - a) - 5(6 - b) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(4; 1) \\ B(1; 4) \end{cases}$$

Bài toán 23. Tam giác ABC có trực tâm H thuộc $d: 2x - y - 4 = 0$, $M(\frac{9}{2}; \frac{5}{2})$ là trung điểm AB, đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có phương trình (C): $(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{130}{4}$. Tìm A, B, C, biết B có độ nguyên.

(Hocmai lần 2)

Bài toán 24. Cho tam giác ABC có $M(3; -2)$ là trung điểm BC và $H(1; 1)$ là trực tâm tam giác. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC. Đường thẳng EF có phương trình $2x - 5y + 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

Lời giải:



Bài toán 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(1;3)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I(0;2)$. Trung điểm M của đoạn BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B, C biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đi qua điểm $E(5;1)$ và hoành độ của điểm B lớn hơn 1.

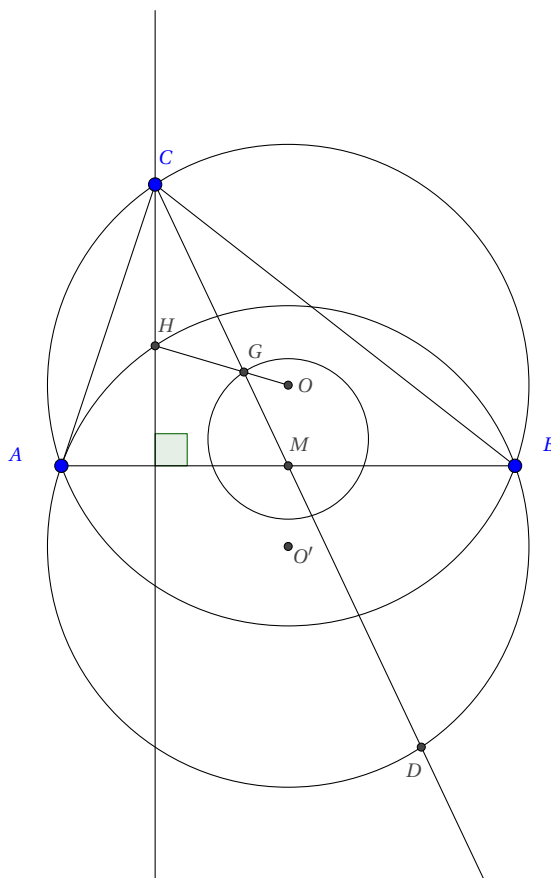
(HSG 12, Bảng B, Tỉnh Quảng Ninh, 2016)

Lời giải:

Gọi M là trung điểm BC . I' là đối xứng của I qua M . Khi đó I' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC suy ra tính chất quan trọng là $I'H = I'E$.

Bài toán 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm G thuộc đường tròn $(C) : \left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$ và trực tâm H thuộc đường thẳng $x - 3y - 1 = 0$. Tìm C , biết $A(2; -1)$, $B(6; 1)$.

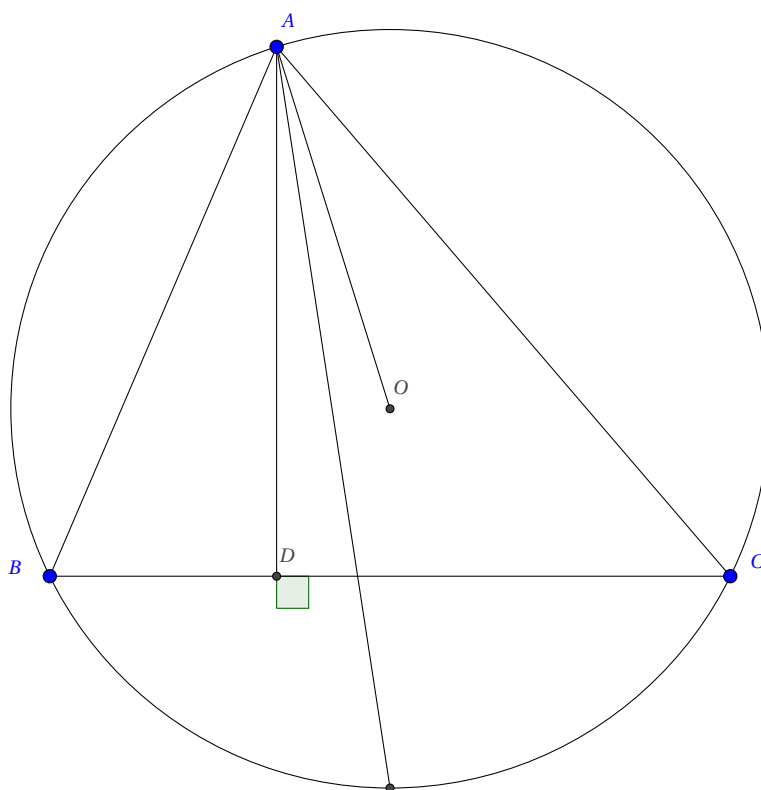
Lời giải:



Gọi M là trung điểm của AB . Xét phép vị tự tâm M tỉ số $k = -3$ biến G thành D . Chú ý D là điểm đối xứng với C qua M . Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm M tỉ số $k = -3$. Khi đó phương trình $(C') : (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 10$. Vì G thuộc (C) nên D thuộc (C') . Ta nhận thấy một điều là A, B cùng thuộc (C') . Do đó (C') là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Theo tính chất (C') là đường tròn đối xứng với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua đường thẳng AB và đường tròn (C') đi qua trực tâm H . Vậy H là giao điểm của (C') và đường thẳng d . Từ đó ta tìm được trực tâm H , tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC . Suy ra tọa độ trọng tâm G và tọa độ C .

Tính chất 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) , đường cao AD . Khi đó AD, AO đẳng giác tức là AD, AO đối xứng nhau qua phân giác góc A .

Lời giải:



Chú ý tam giác AOC cân tại O nên $OAC = \angle OCA$. Ta lại có $\angle BAD = 90^\circ - \angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = \angle OAC$ hay AD, AO đẳng giác.

Bài toán 27. Cho tam giác ABC có trục hoành là phân giác trong góc A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C biết BC đi qua $E(3; -1)$ và A có hoành độ âm.

Lời giải:

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $K(1; 5)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

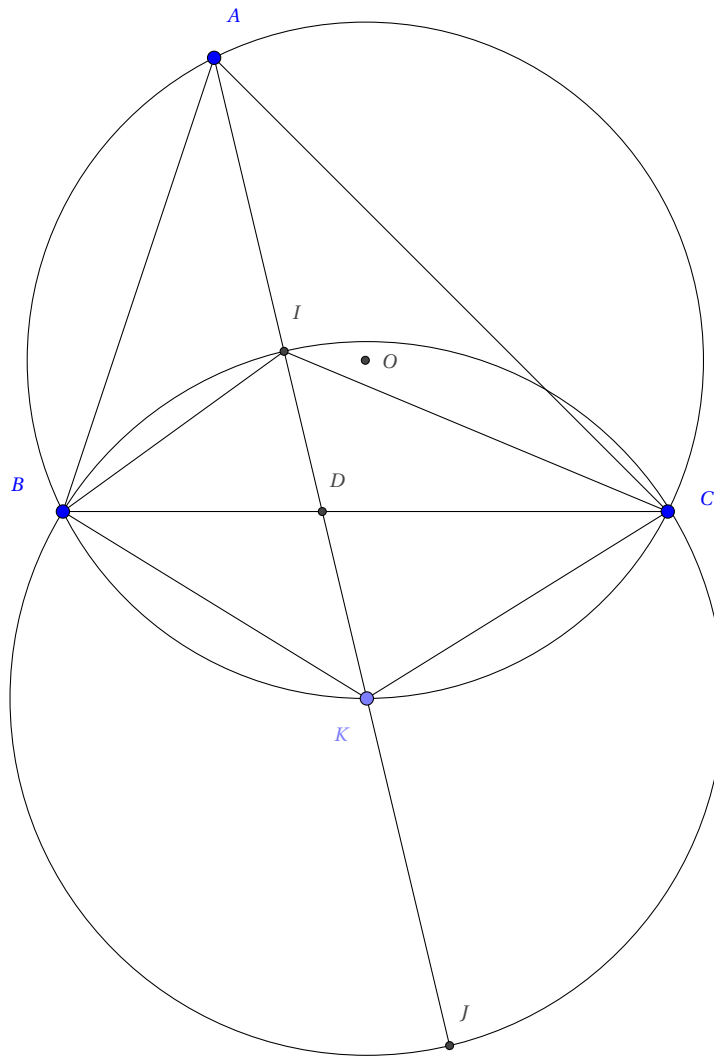
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 \\ A_0. \end{cases}$$

Gọi K' là ảnh của K qua phân giác góc A, khi đó $K'(1; -5)$ và theo tính chất trên ta có K' thuộc đường cao góc A. Do đó đường thẳng BC đi qua $E(3; -1)$ nhận $\overrightarrow{AK'}$ làm vtpt nên có phương trình BC: Tọa độ của B, C là nghiệm của hệ {.

Tính chất 6. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) và đường tròn ngoại tiếp (O). Đường thẳng AI cắt (O) tại K và BC tại D. Khi đó:

1. $KB = KC = KI$ hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.
2. Gọi J là điểm đối xứng với I qua K thì tứ giác BICJ nội tiếp trong đường tròn tâm K hay K là trung điểm IJ.
3. J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A.
4. BK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Lời giải:



1. Ta có $\angle BIK = \angle BAI + \angle ABI = \angle BCK + \angle IBC = \angle KBC + \angle IBC = \angle IBK$ hay tam giác BKI cân tại K , suy ra $KB = KI$. Tương tự $KI = KC$ do đó $KB = KI = KC$ hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC .
2. Theo 1. ta có $KB = KI = KC = KJ$ suy ra tứ giác $BICJ$ nội tiếp trong đường tròn tâm K và K là trung điểm IJ .
3. Theo 2. ta có tam giác JBK vuông tại B hay $JB \perp BI$ suy ra BJ là phân giác ngoài góc B . Tương tự CJ là phân giác ngoài góc C . vậy J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A .
4. Chú ý $\angle KBC = \angle KCB = \angle BAD$ nên BK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

Bài toán 28. Tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp $I(4;5)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $J(6;6)$, đỉnh $A(2;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C .

Lời giải:

Giả sử phân giác AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm J bán kính JA nên có phương trình $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$. Đường thẳng AD đi qua I, A nên có phương trình AK: $x - y + 1 = 0$ Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow K(9; 10).$$

Áp dụng tính chất ta có $KB = KI = KC$ do đó B, C nằm trên đường tròn tâm K bán kính KI có phương trình $(x-9)^2 + (y-10)^2 = 50$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$(x-9)^2 + (y-10)^2 = 50 \quad (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} B(10; 3), C(2; 9) \\ C(10; 3), B(2; 9) \end{cases}.$$

Bài toán 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2; 1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình $2x + y - 10 = 0$ và $D(2; -4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$. Đáp số $A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0)$

(chuyên Vĩnh Phúc 2016 lần 1)

Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIA.

Phương trình đường thẳng AD đi qua $J(2; 1)$ và $D(2; -4)$ nên có phương trình $x - 2 = 0$. Tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2; 6).$$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BJC tâm D bán kính DJ nên có phương trình $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. Do đó tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(-3; -4) \\ B(2; -9) \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

Đường thẳng BC đi qua $B(-3; -4)$ vuông góc với đường cao đỉnh A nên có phương trình BC: $x - 2y - 5 = 0$. Do đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow C(5; 0)$$

Bài toán 30. Cho tam giác ABC có $A(-1; 1)$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm $I(1; 1)$.

(yên Lạc lần 2)

Lời giải:

Giả sử AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Đường thẳng AD: $3x - 4y - 1 = 0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ 3x - 4y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(7; 5).$$

Áp dụng tính chất ta có $DB = DI = DC$ do đó B, C nằm trên đường tròn tâm D bán kính DI hay B, C nằm trên đường tròn $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 52$. Điểm B, C là giao của hai đường tròn do đó BC : $(x-3)^2 + (y-2)^2 - 25 - [(x-7)^2 + (y-5)^2 - 52] = 0$.

Bài toán 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 5)$. Tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác lần lượt là $I(2; 2)$ và $K(\frac{5}{2}; 3)$. Tìm tọa độ B và C .

(THPT Lê Quý Đôn – Tây Ninh 2015)

Bài toán 32. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội, ngoại, bàng tiếp góc A là $I(3; 5), K(1; 4), J(11; 14)$. Tìm tọa độ các đỉnh.

Lời giải:

Gọi P là trung điểm của IJ khi đó $P(7; \frac{19}{2})$. Áp dụng tính chất ta có P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác $(ABC) : (x-1)^2 + (y-4)^2 = \frac{265}{4}$. Đường thẳng AI đi qua I, J nên có phương trình $AI : 9x - 8y + 13 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 9x - 8y + 13 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = \frac{265}{4} \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{109}{29}; -\frac{151}{58})$$

Ta có $PB = PI = PC$ do đó B, C thuộc đường tròn tâm P bán kính PI có phương trình $(x-7)^2 + (y-\frac{19}{2})^2 = \frac{145}{4}$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-\frac{19}{2})^2 = \frac{145}{4} \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = \frac{265}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(;), C(;) \\ B(;), C(;) \end{cases}$$

Bài toán 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Phân giác trong góc A , phân giác ngoài góc B lần lượt có phương trình $x = 2; x + y + 7 = 0$. Các điểm $I(\frac{-1}{2}; 1), J(2; 1)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp nội tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ A, B, C .

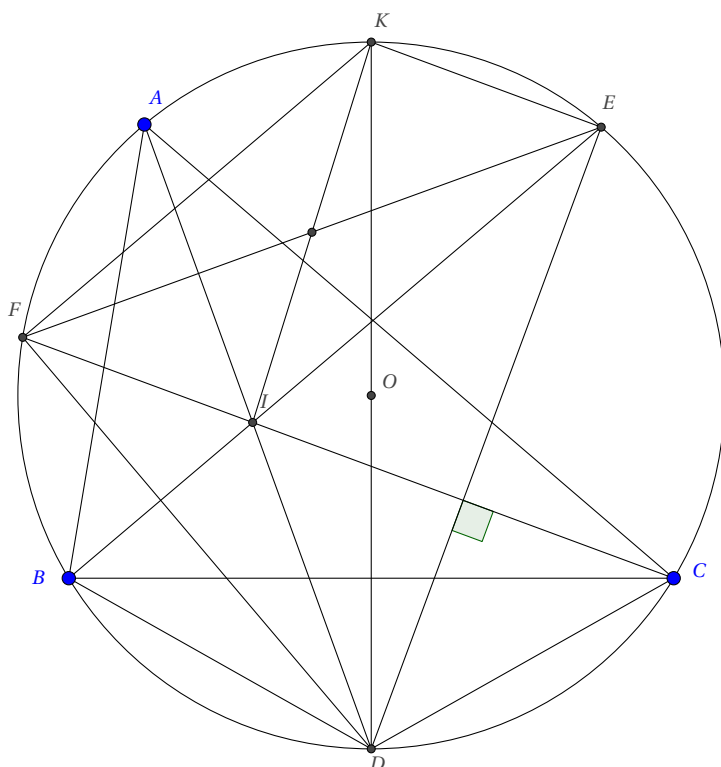
Bài toán 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2; 1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình $2x + y - 10 = 0$ và $D(2; -4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Đáp số: $A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0)$.

Hệ quả 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I) . AI, BI, CI cắt (O) tại D, E, F . DK là đường kính của (O) . Khi đó

1. I là trực tâm tam giác DEF .
2. $EKFI$ là hình bình hành.
3. DE là trung trực của IC .

Lời giải:



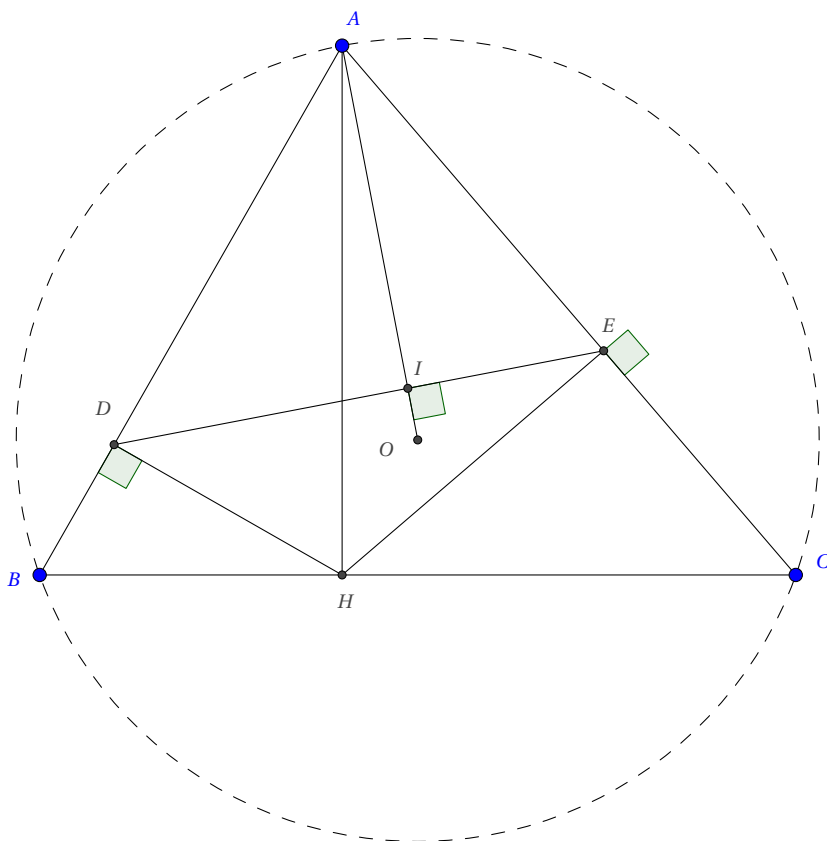
Bài toán 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Các đường thẳng AI, BI, CI lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại các điểm D, E, F (D, E, F khác ba đỉnh của tam giác). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, và tìm tọa độ đỉnh A biết rằng $D(9; 10)$, $E(6; 1)$, $F(1; 6)$.

Tổng quát ta có tính chất mạnh như sau

Tính chất 7. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). AI cắt (O) tại D. Đường tròn tâm D bán kính DB giả sử cắt AC tại E. Kéo dài BE cắt (O) tại F. Khi đó

1. AD là trung trực của BE.
2. DF là trung trực của EC.
3. E là trực tâm tam giác ADF.

Lời giải:



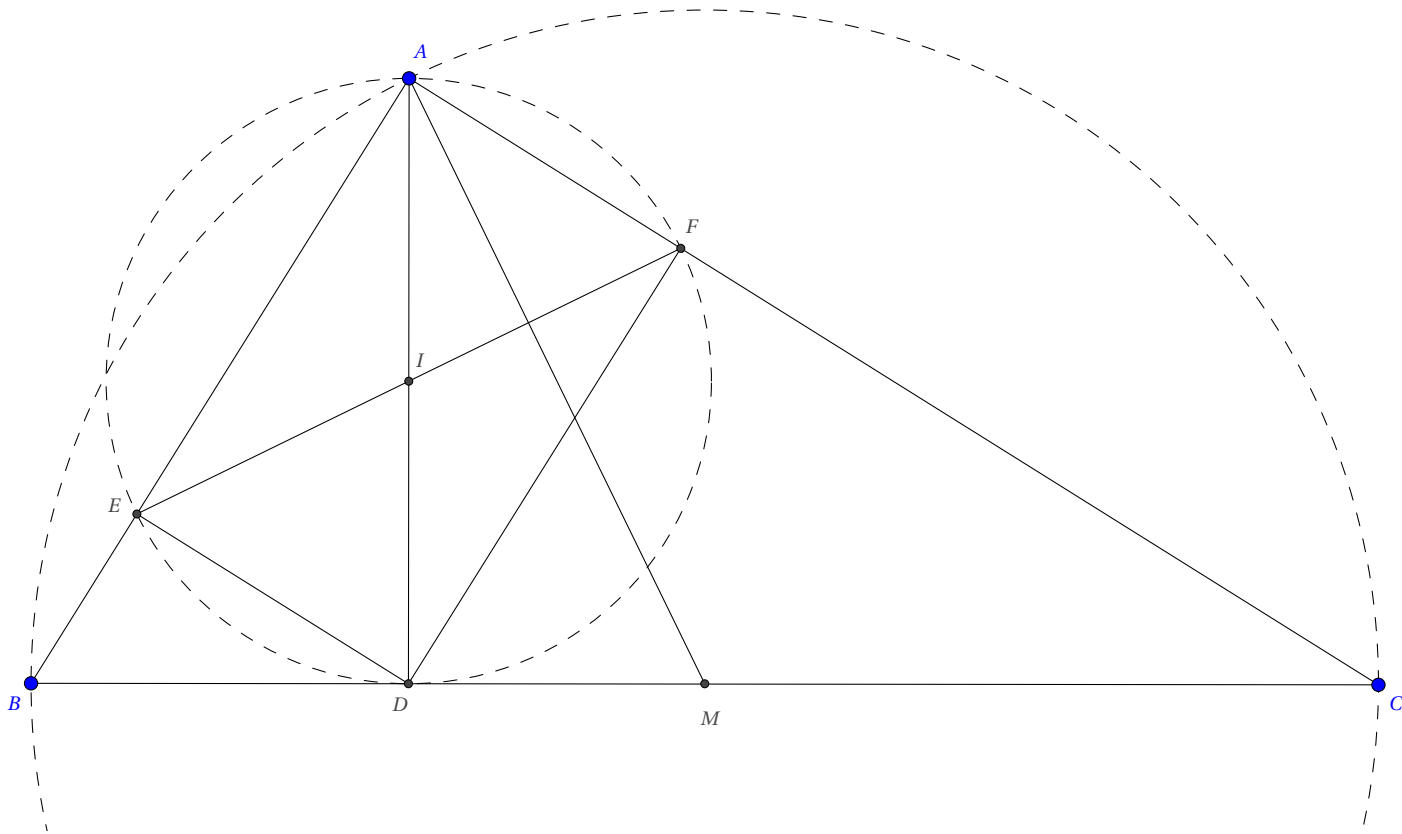
1. Tứ giác ADHE nội tiếp nên $\angle ADE = \angle AHE = \angle C$, do tam giác AOB cân tại O nên $\angle DAO = 90^\circ - \angle C$. Do đó $AO \perp DE$.

2. Thật vậy áp dụng định lý hàm sin ta có $\frac{DE}{\sin A} = AH = R\sqrt{2}$, $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, suy ra $\frac{BC}{DE} = \sqrt{2}$. Theo câu 1. tứ giác BDEC nội tiếp nên $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ nên $\frac{AH}{AI} = \frac{BC}{DE} = \sqrt{2}$, do đó $AI = R$. Mà A, I, O thẳng hàng và I nằm trong tam giác ABC nên ta suy ra $I \equiv O$.

Bài toán 37. Cho tam giác ABC nội tiếp một đường tròn (K, R). Gọi H là hình chiếu của B lên AC có $BH = R\sqrt{2}$ và $B(2, 1)$. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên BA và BC. Biết đường thẳng qua DE là $3x - y + 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác biết H thuộc $d: 2x + y + 1 = 0$ và H có tung độ dương.

Bài toán 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. Gọi D là hình chiếu của A lên cạnh BC, đường tròn đường kính AD cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F, đường thẳng EF có phương trình là $EF: 20x - 10y - 9 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm D có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

Lời giải:



Đường tròn (T) có tâm $M(3;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$. Áp dụng tính chất ta có trung tuyến AM vuông góc EF nên có phương trình $AM: x + 2y - 5 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1;2) \\ A(5;0) \end{cases} \quad (\text{loại vì } A, M \text{ cùng phía đối với } EF)$$

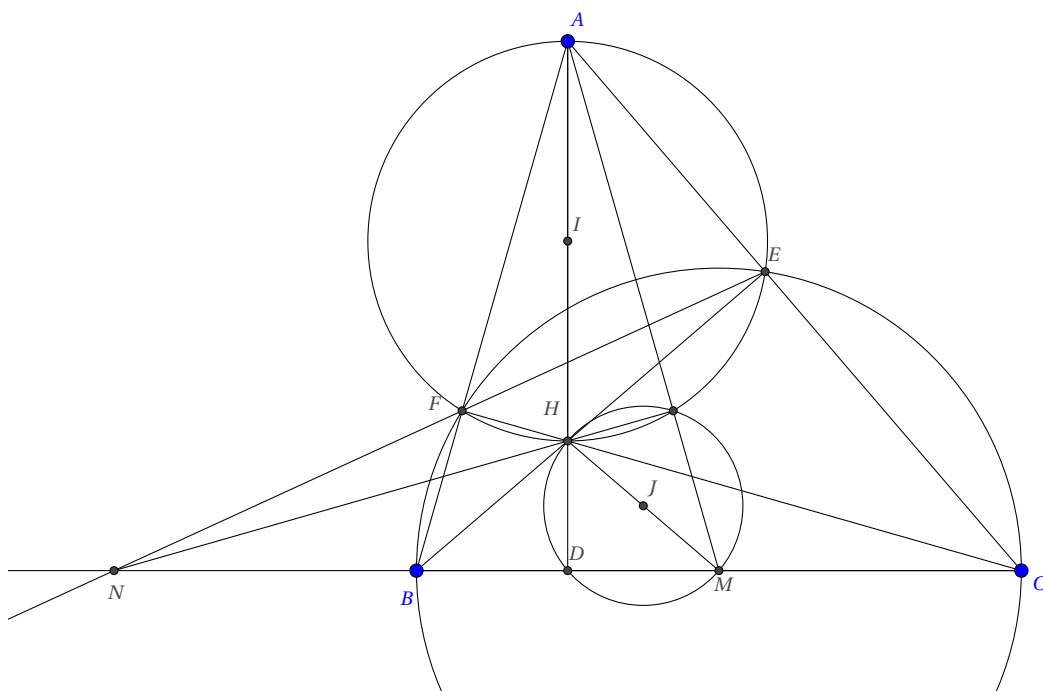
Ta có $AEDF$ là hình chữ nhật nên EF đi qua trung điểm I của AD . Gọi $D(a;b)$ suy ra trung điểm $I(\frac{a+1}{2}; \frac{b+2}{2})$ và $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$ giải ra ta được $\begin{cases} D(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}) \\ D(\frac{31}{25}; \frac{17}{25}) \end{cases}$ (loại). Do đó đường thẳng BC đi qua M, D nên có phương trình $BC: 2x + y - 7 = 0$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4;-1), C(2;3) \\ B(2;3), C(4;-1) \end{cases}$$

Tính chất 9. Cho tam giác ABC , trực tâm H nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt BC tại K . M là trung điểm BC . Khi đó

- $MD \cdot MK = MB^2 = MC^2$.
- Gọi T là giao điểm của tia MH với đường tròn (O) . Chứng minh rằng năm điểm T, F, H, A, E nằm trên một đường tròn. BC, EF, AT đồng quy tại K và $AM \perp KH$.
- AM cắt KH tại I và AM cắt (O) tại J . Ta có $MI = MJ$

Lời giải:



1. Ta có $(K, D, B, C) = -1$ và do M là trung điểm của BC nên $MD.MK = MB^2 = MC^2$. Chú ý ta có thể chứng minh bằng sơ cấp ý 1. bằng cách sử dụng ý 2. và ý 3. rồi suy ra lại ý 1. như sau
2. Giả sử AO cắt đường tròn (O) tại N . Chú ý H, M, N thẳng hàng suy ra $HT \perp AT$. Do đó năm điểm T, F, H, A, E nằm trên một đường tròn. Vì EF cắt BC tại K nên K là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(O), (M), (L)$ hay BC, EF, AT đồng quy tại K . Trong tam giác AKM có AH, MH là đường cao nên $KH \perp AM$.
3. Chú ý M là trung điểm của HN và HI, NJ song song vì cùng vuông góc với AM nên $HINJ$ là hình bình hành hay M là trung điểm của IJ .

Khi đó ta chứng minh lại ý 1. như sau: Ta có $MD.MK = MI.MA = MJ.MA = MB.MC = MB^2 = MC^2$

Bài toán 39. Cho tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF . Cho $D(1;0)$, gọi $M(4;0)$ là trung điểm BC . Giả sử đường thẳng EF có phương trình $2x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Bài toán 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(3; 0)$ và trung điểm của BC là $I(6; 1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đường thẳng $DE: x - 2 = 0$ và điểm D có tung độ dương. (Chuyên Vĩnh Phúc 2015)

Bài toán 41. Cho $\triangle ABC$ với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm BC và N là giao điểm EF và BC . Cho $C(5; -4), N(-\frac{65}{2}; \frac{7}{2})$ và đường thẳng $AM: 9x - y - 3 = 0, H$ thuộc đường thẳng $d: x - 37 - 3 = 0$.

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

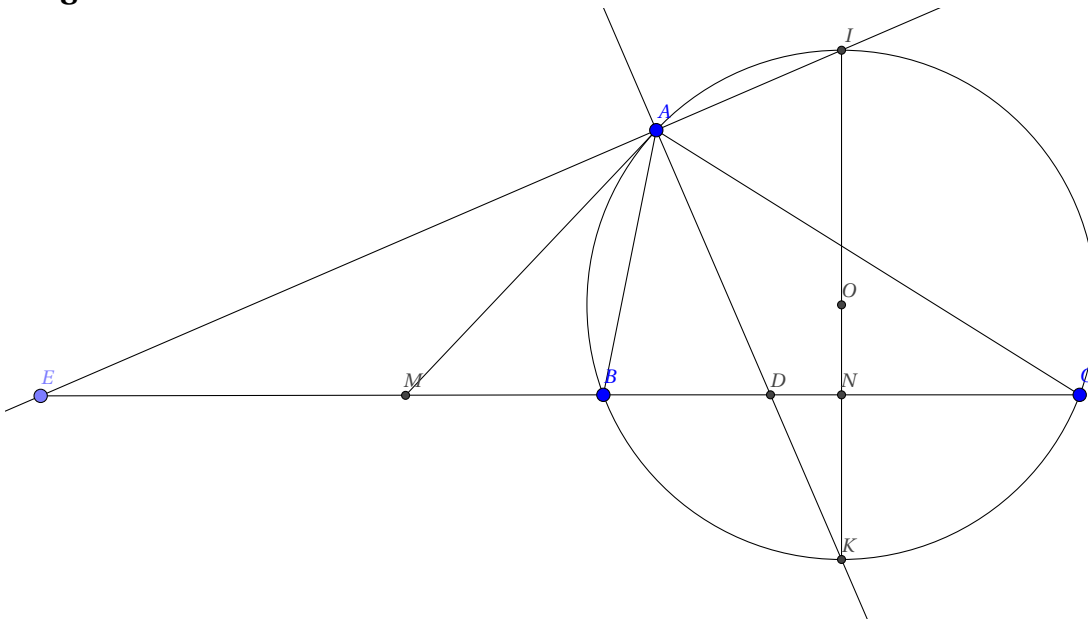
Bài toán 42. Trong Oxy cho tam giác nhọn ABC có $A(7; 4), E, F$ là hình chiếu của B, C lên AC, AB . Gọi $K(1; -1)$ là giao điểm của EF và BC , trung điểm BC có tọa độ $M(9; 1)$. Tìm tọa độ B, C .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Tính chất 10. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). Gọi AD, AE lần lượt là các phân giác trong và ngoài của tam giác. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, BC. Khi đó,

1. AD, AE lần lượt đi qua trung điểm cung nhỏ và cung lớn BC của (O).
2. Tứ giác AMNO nội tiếp.
3. AM là tiếp tuyến của đường tròn (O).
4. Tam giác AMD cân tại M.

Lời giải:



1. Do AD, AE là phân giác trong và ngoài của tam giác ABC nên đi qua trung điểm K, I của cung nhỏ, cung lớn BC.
2. Ta có $\angle ADE = \angle DAC + \angle ACD = \angle BAK + \angle ACD = \angle BCK + \angle ACD = \angle ACK = \angle AIK$ do đó $\triangle EAD \sim \triangle KAI$ và có AM, AO là trung tuyến nên $\triangle EAM \sim \triangle KAO$ suy ra $AM \perp AO$ hay tứ giác AMNO nội tiếp.
3. Vì $AM \perp AO$ nên AM là tiếp tuyến của đường tròn (O).
4. Vì AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\angle MAD = \angle MAK = \angle ACK = \angle ADB$ suy ra tam giác AMD cân tại M.

Bài toán 43. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (S), các đường phân giác trong và ngoài góc A cắt đường tròn (S) lần lượt tại E(0;-3) và F(-2;1), điểm D(2;-1) thuộc đường thẳng BC và điểm H(11;0) thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải:

Do EF là đường kính của (S), nên I là trung điểm của EF. Suy ra I(-1;-1). Do đó (S): $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$. Áp dụng tính chất $BC \perp IE$. Đường thẳng BC qua D và vuông góc với IE nên có phương trình BC: $x - 2y - 4 = 0$. B và C là giao điểm của BC với (S) nên tọa độ của B và C là các nghiệm

của hệ

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in \left\{ (-2; -3); \left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5} \right) \right\}.$$

Trường hợp 1: $B(-2; -3), C\left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right)$. Đường thẳng AC qua C và H nên AC: $3x - 13y - 33 = 0$. A là giao điểm thứ 2 của AC với (S) nên $A\left(\frac{69}{89}; -\frac{210}{89}\right)$. Ta có AE: $57x - 69y - 207 = 0$. Kiểm tra ta thấy B và C cùng phía so với AE nên không thỏa mãn điều kiện AE là phân giác trong.

Trường hợp 2: $B\left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right), C(-2; -3)$. Đường thẳng AC qua C và H nên AC: $x - 7y - 11 = 0$. A là giao điểm thứ 2 của AC với (S) nên $A(-3; -2)$. Ta có AE: $x + 3y + 9 = 0$. Kiểm tra ta thấy hai điểm B và C khác phía so với AE nên AE chính là phân giác trong góc A.

Vậy $A(-3; -2), B(-2; -3), C\left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right)$

Bài toán 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\angle ADB$ có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm $M(-4; 1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

(Chuyên Vĩnh Phúc lần 2)

Lời giải:

Gọi AE là phân giác trong góc A. Áp dụng tính chất ta có tam giác DAE cân tại D. Đường thẳng AE: $x + y - 5 = 0$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AE khi đó $M'(4; 9)$. Vậy AB: $5x - 3y + 7 = 0$.

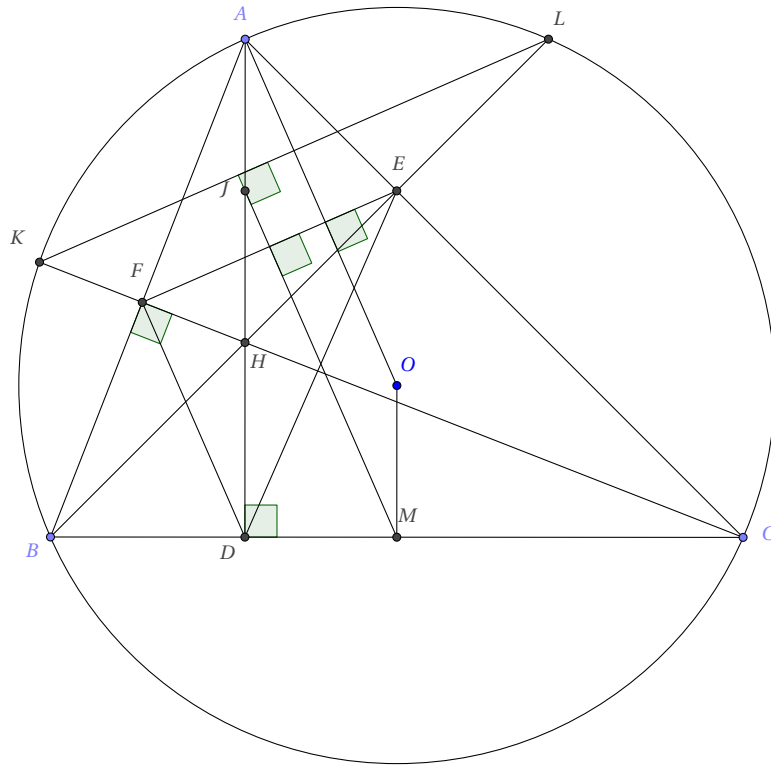
Bài toán 45. Cho ABC nội tiếp đường tròn, $D(1; -1)$ là chân đường phân giác của góc A, AB có phương trình $3x + 2y - 9 = 0$, tiếp tuyến tại A có phương trình $\Delta: x + 2y - 7 = 0$. Hãy viết phương trình BC.

(D-14)

Tính chất 11. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi đó:

1. DA là phân giác trong và BC là phân giác ngoài tại đỉnh D của tam giác DEF
2. H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF
3. OA vuông góc với EF
4. Đường thẳng nối trung điểm của AH, BC là trung trực của EF.

Lời giải:



1. Ta có tứ giác $FHDE$, $HECD$, $BFEC$ nội tiếp nên $\angle FDH = \angle FBH = \angle FCE = \angle EDH$ do đó AD là phân giác trong tại D của tam giác EDF . Vì $BC \perp DH$ nên BC là phân giác ngoài của tam giác EDF .
2. Hoàn toàn tương tự BE , CF là phân giác trong của tam giác EDF suy ra H là tâm nội tiếp tam giác DEF .
3. Tam giác AOC cân tại O nên ta có

$$\angle OAC + \angle AEF = \angle OAC + \angle B = \frac{1}{2}(\angle OAC + \angle OCA) + \frac{1}{2}(\angle AOC) = 90^\circ$$

hay $AO \perp EF$.

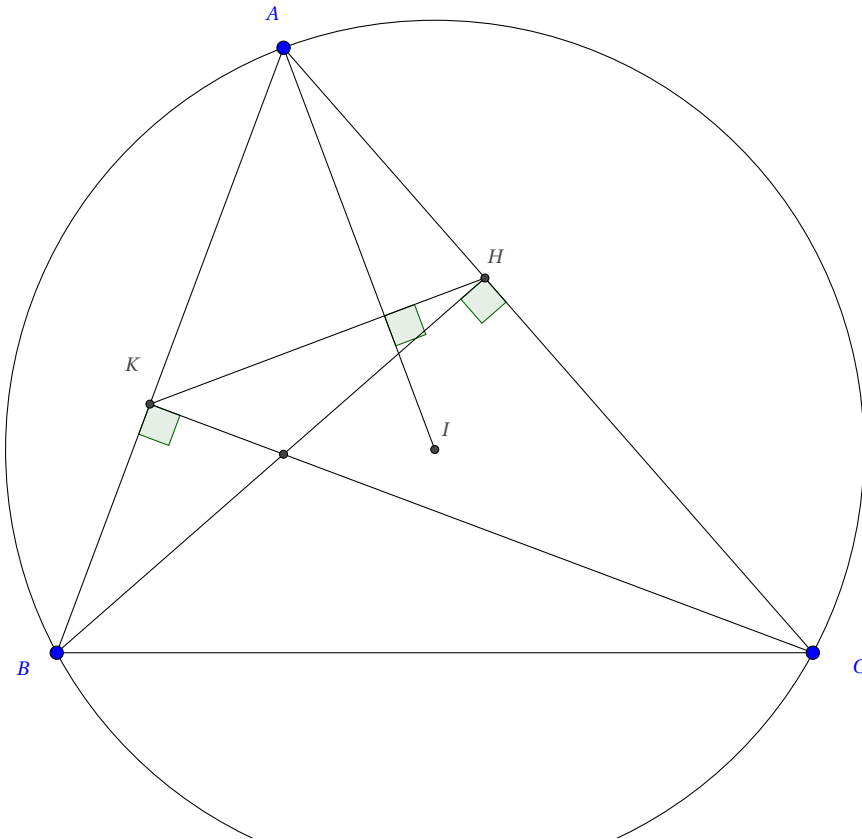
4. Vì $AJMO$ là hình bình hành nên ta suy ra $JM \perp EF$, hơn nữa ta có $ME = MF = \frac{1}{2}BC$ vậy MJ là trung trực của EF .

Bài toán 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; -1)$; $N(2; 2)$; $P(-2; 2)$ tương ứng là chân đường cao hạ từ A, B, C xuống các cạnh của tam giác ABC . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải:

Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Áp dụng tính chất ta có H là tâm nội tiếp của tam giác MNP hay BC, CA, AB là phân giác ngoài của tam giác MNP ứng với các đỉnh M, N, P . Dễ dàng tính được phương trình các cạnh BC, CA, AB và giải ra ta được $A(-1; 5)$; $B(-4; -4)$; $C(4; 0)$.

Bài toán 47. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$. Đường thẳng AC đi qua $E(2; -3)$. Gọi H, K là chân đường cao từ đỉnh B, C . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đường thẳng $HK: 3x + y = 0$ và A có hoành độ âm, B có tung độ dương.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -2)$. Áp dụng tính chất ta có $AI \perp KH$ nên $AI: x - 3y - 8 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-1; -3) \\ A(5; -1) \text{ (loại)} \end{cases}$$

Đường thẳng AC đi qua A, E nên có phương trình $AC: y + 3 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5; -3)$$

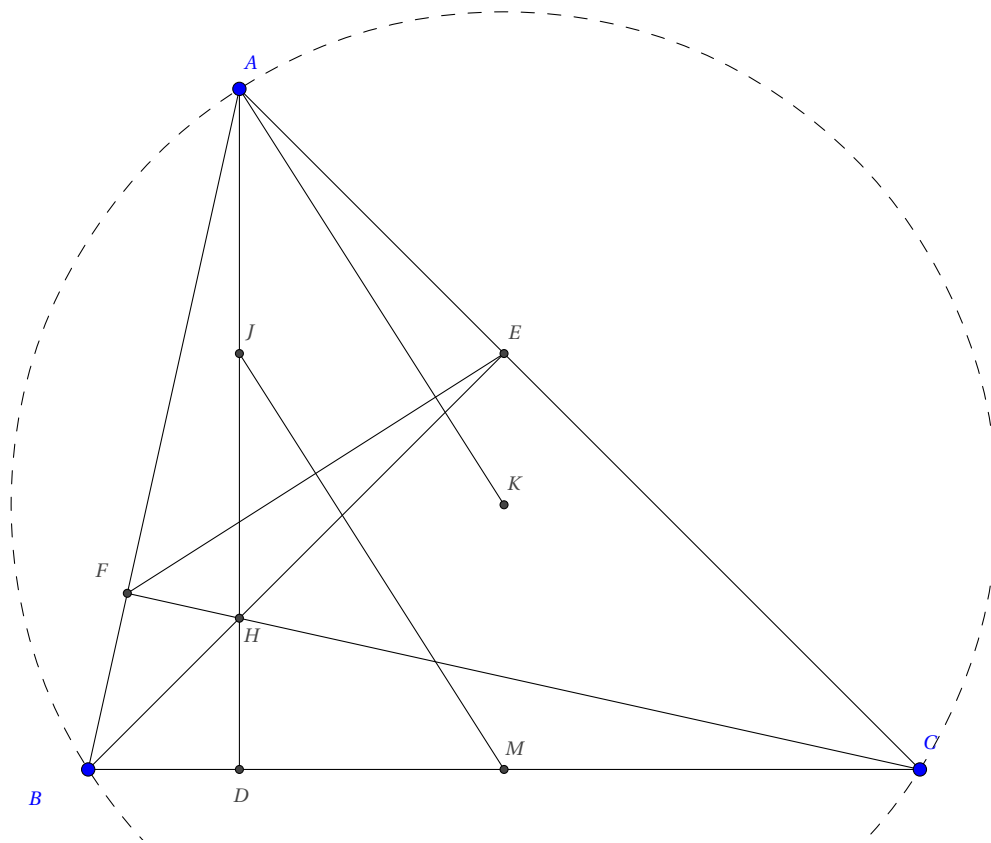
Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} y + 3 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1; -3)$. Đường cao BH đi qua H và vuông góc AC nên có phương trình $BH: x = 1$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(1; 1) \\ B(1; -5) \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bài toán 48. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(4; 6)$, trực tâm $H(4; 4)$ và các đường cao BE, CF. Trung điểm M của cạnh BC thuộc đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết EF song song với đường thẳng $x - 3y + 5 = 0$.

(Chuyên ĐHKHTN lần 1)

Lời giải:



Gọi J là trung điểm AH suy ra $J(4;5)$. Áp dụng tính chất ta có MJ là trung trực của EF mà EF song song với đường thẳng $x - 3y + 5 = 0$ nên $MJ: 3x + y - 17 = 0$. Do đó tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + y - 17 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(5;2)$$

. Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc AH nên có phương trình BC: $y = 2$. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KM}$ suy ra $K(5;3)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2;2), C(8;2) \\ B(8;2), C(2;2) \end{cases}$$

Bài toán 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và có điểm A có hoành độ âm.

Bài toán 50. Cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$, điểm $I(6;1)$ là trung điểm của cạnh BC, AH: $x + 2y - 3 = 0$, D và E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC, DE: $x - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm D có tung độ dương.

Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có $IF \perp DE$. Do đó $IF: y = 1$. Suy ra $F(1;1)$. F là trung điểm của AH nên $A(-1;2)$. $D \in DE \Rightarrow D(2;a), a > 0$. Ta có

$$FD = FH \Leftrightarrow (a - 1)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow a = 3 \text{ hoặc } a = -1 \text{ (loại)}.$$

Do đó $D(2;3)$. Từ đó có AC: $x - 3y + 7 = 0$, BC: $2x - y - 11 = 0$. Nên $C(8;5) \Rightarrow B(4;-3)$. Vậy $A(-1;2)$, $B(4;-3)$, $C(8;5)$.

Bài toán 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I(0; 5)$. Đường thẳng AI cắt đường tròn (T) tại điểm $M(5; 0)$ với $M \neq A$. Đường cao từ đỉnh C cắt đường tròn (T) tại điểm $N(\frac{-17}{5}; \frac{-6}{5})$, $N \neq C$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết B có hoành độ dương.

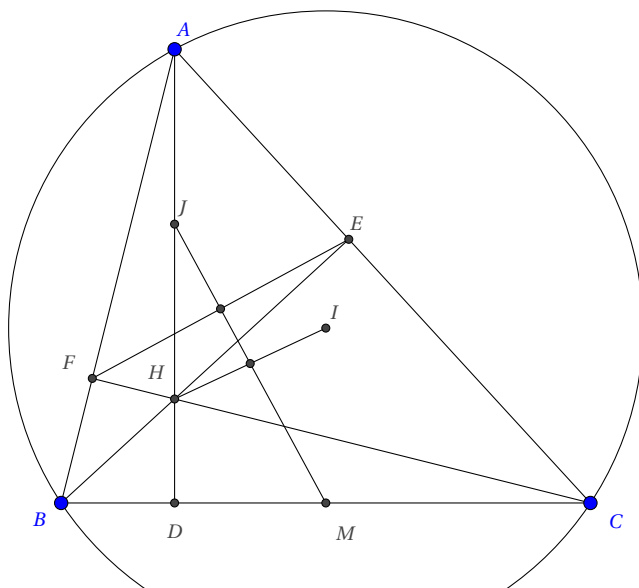
Bài toán 52. Trong Oxy cho đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. $M(2;2)$, $N(-1;2)$ là chân đường cao hạ từ B, C. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết A có tung độ dương.
(Ngô Quyền - Ba Vì lần 3 năm 2015)

Bài toán 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Các điểm $K(-1;1)$, $H(2;5)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh C có hoành độ dương.
(Lương Ngọc Quyền, Thái Nguyên 2015)

Bài toán 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;1)$, bán kính $R = 5$. Chân đường cao hạ từ B, C, A của tam giác ABC lần lượt là $D(4; 2)$, $E(1; -2)$ và F. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF, biết rằng A có tung độ dương.
(Lương Thế Vinh, Hà Nội, năm 2015)

Bài toán 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có $H(3; -\frac{4}{3})$ và $I(6; -\frac{7}{3})$ là trực tâm, tâm ngoại tiếp và các đường cao BE, CF. Đường trung trực của đoạn EF có phương trình : $x - 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết điểm B có tung độ dương và $BE : x - 3 = 0$.

Lời giải:



Hệ quả 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn qua B, C cắt AB, AC tại P, Q. Khi đó ta cũng có $AO \perp PQ$.

Lời giải:

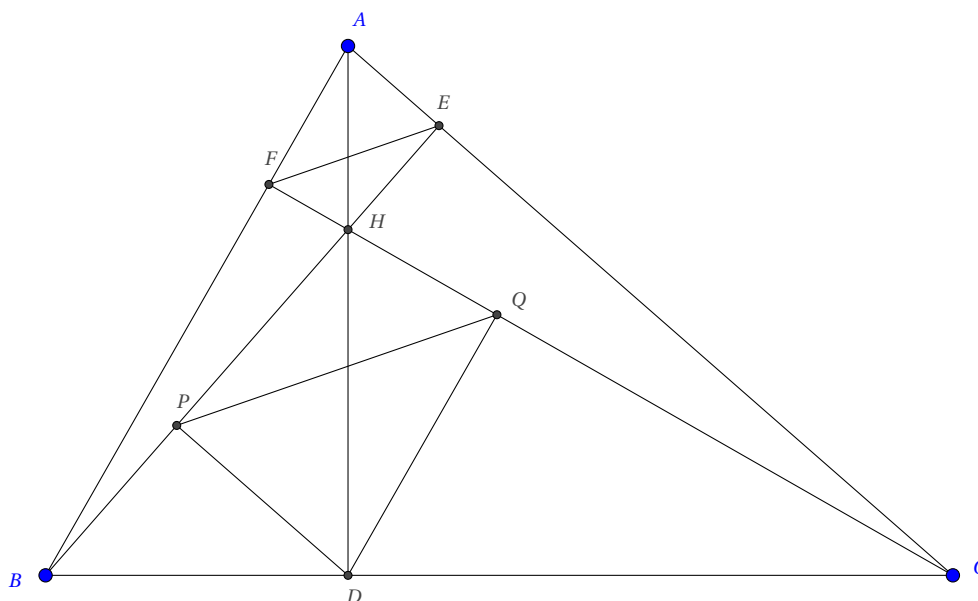
Để thấy $PQ \parallel EF$ (góc đồng vị) do đó $AO \perp PQ$.

Bài toán 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $J(-1;0)$, trực tâm là điểm $H(1;1)$. Gọi D là chân đường cao hạ từ đỉnh A, và I, K lần lượt là hình chiếu vuông

góc của D lên HB, HC . Phương trình đường thẳng IK là $y - \frac{1}{2} = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết đỉnh A nằm trên đường thẳng $4x + 5y - 21 = 0$, đỉnh B có hoành độ âm.

Đáp số $A(-1; 5), B(-4; -4), C(4; 0)$.

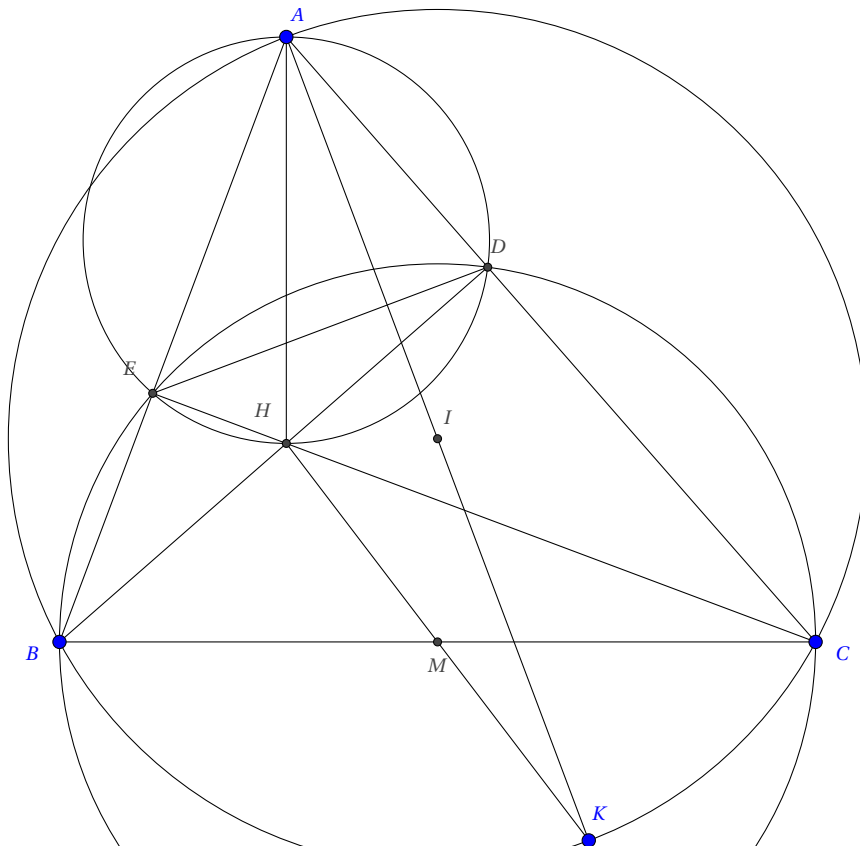
Lời giải:



Chú ý tứ giác $AFHE, DPHQ$ nội tiếp suy ra $PQ \parallel EF$ do đó áp dụng tính chất cơ bản $AJ \perp EF$ nên ta có $PQ \perp AJ$.

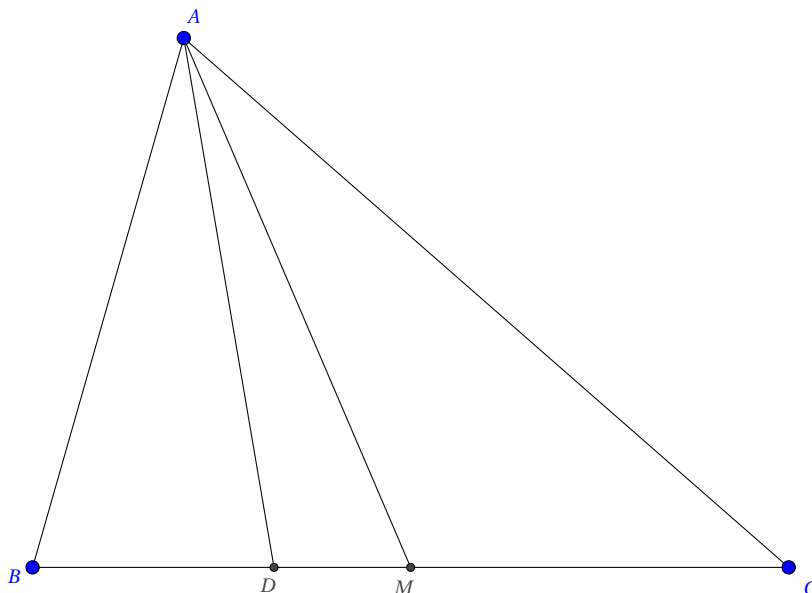
Bài toán 57. Tam giác ABC có trực tâm $H(2; 1)$, $A(-2; -1)$, $BC = 2\sqrt{5}$ với các đường cao BD, CE . Giả sử đường thẳng DE đi qua $K(3; -4)$, viết phương trình đường thẳng BC .

Lời giải:



Tính chất 12. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Gọi D là một điểm tùy ý trên cạnh BC. Khi đó AD, AM đối xứng nhau qua đường phân giác khi và chỉ khi $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.
(Đường thẳng AD được gọi là đường đối trung)

Lời giải:

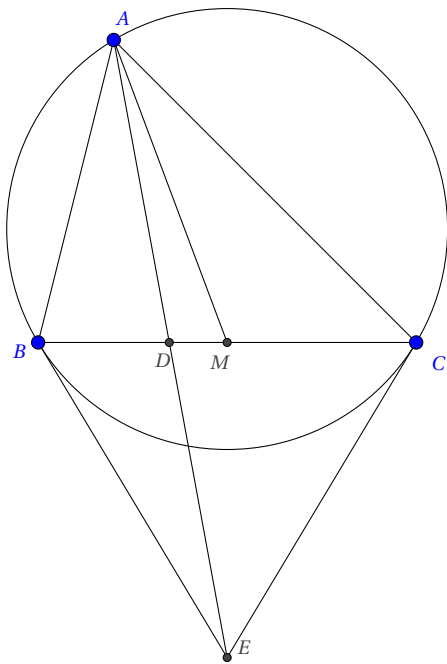


Bài này có nhiều cách chứng minh. Cách đơn giản nhất là dùng diện tích. Thật vậy ta có

$$\frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot \sin BAD}{AC \cdot \sin DAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin CAM}{\sin BAM} = \frac{AB^2}{AC^2} \frac{AC \cdot \sin CAM}{AB \cdot \sin BAM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \frac{S_{AMC}}{S_{BAM}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

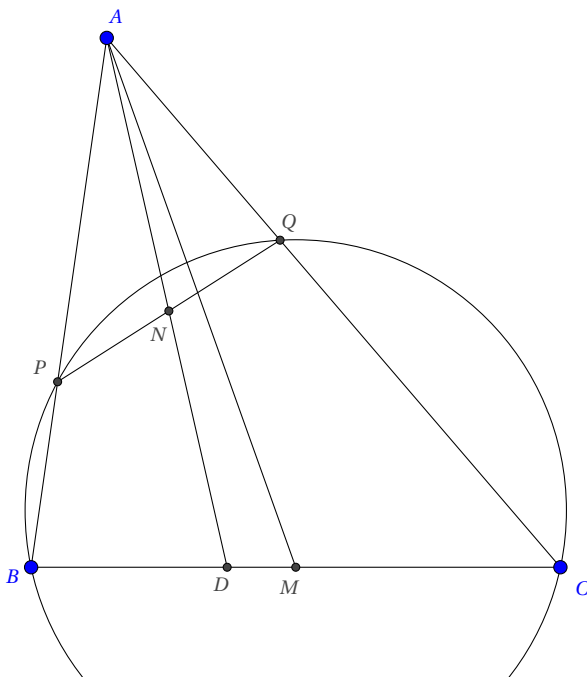
Cách dựng đường đối trung.

Cách 1



Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại E. Khi đó AE là đường đối trung.

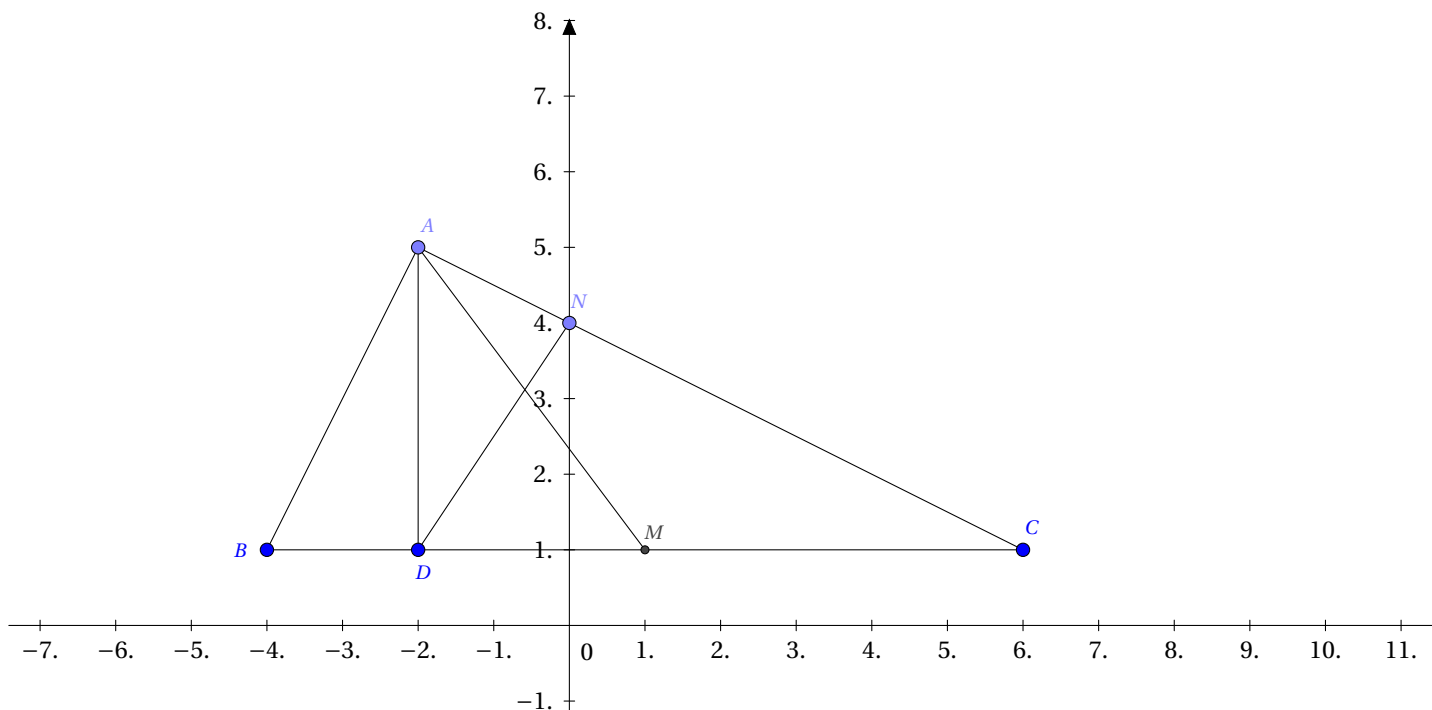
Cách 2



Một đường tròn bất kỳ qua B, C cắt AB, AC tại P, Q. Gọi N là trung điểm PQ. Khi đó AN là đường đối trung. Còn nhiều cách nữa nhưng tạm ngang đây.

Bài toán 58. Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$. M(1;1) là trung điểm BC. N thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}NC$. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD đối xứng AM qua phân giác góc A. Đường thẳng DN: $3x - 2y + 8 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $C \in x + y - 7 = 0$.

Lời giải:

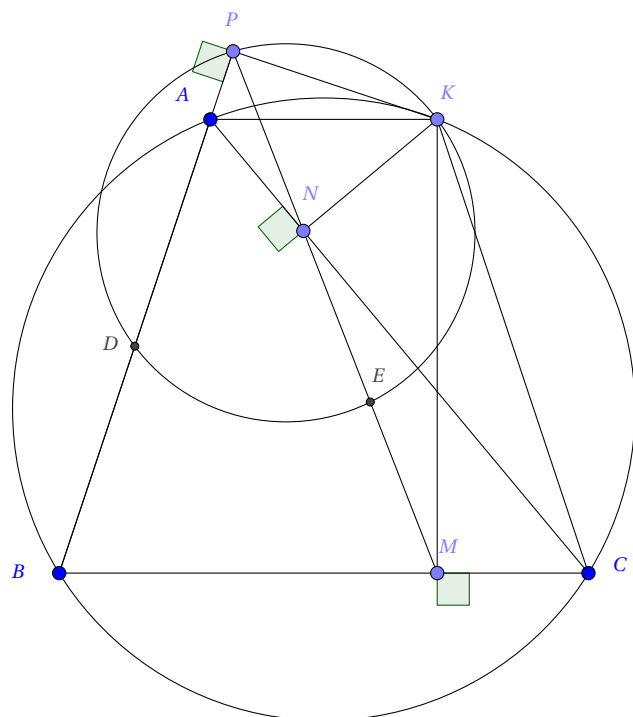


Áp dụng tính chất ta có $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ hay $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$. Gọi $C(c; 7-c)$ suy ra $B(2-c; c-5)$. Điểm D chia đoạn BC theo tỷ số $k = -\frac{1}{4}$ do đó $D\left(\frac{8-3c}{5}; \frac{3c-13}{5}\right)$. Vì D thuộc DN: $3x-2y+8$ nên $c = 6$ hay $C(6; 1), B(-4; 1)$. Gọi $N(n; \frac{3n+8}{2})$ ta có $\overrightarrow{CA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CN}$ suy ra $A\left(\frac{4n-6}{3}; \frac{6n-1}{3}\right)$. Mặt khác $AC = 2AB$ thế vào giải ra ta được $A(-2; 5)$.

Tính chất 13. Cho tam giác ABC. K là một điểm trong mặt phẳng tam giác không trùng với các đỉnh của tam giác. Gọi M, N, P là hình chiếu của K trên các cạnh BC, AC và AB. Khi đó

1. K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi M, N, P thẳng hàng. (Đường thẳng đi qua 3 điểm M, N, P được gọi là đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với điểm K)
2. Gọi D, E là trung điểm AB, MN. Ta có bốn điểm P, K, D, E nội tiếp đường tròn.

Lời giải:



1. Ta chứng minh chiều qua: tức giả sử K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó ta có tứ giác $KPAN, KNMC$ nội tiếp nên $\begin{cases} \angle ANP = \angle AKP \\ \angle MNC = \angle MKC \end{cases}$. Vì tứ giác $ABCK, BPKM$ nội tiếp nên $\angle AKP = \angle MKC$. Từ đó suy ra $\angle ANP = \angle MNC$ hay M, N, P thẳng hàng.
- Chứng minh chiều về tương tự.

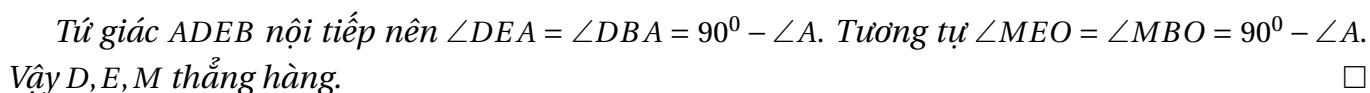
2.

Bài toán 59. trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I) . Điểm $M(5; 4)$ là một điểm thuộc đường tròn (I) . Gọi $D(1; 6), E(1; 2), F$ theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CA . Xác định các đỉnh của tam giác ABC , biết điểm F thuộc đường thẳng $2x+y=0$.

Bài toán 60. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$. Trên cung AB lấy điểm M (khác A và B). Gọi P, Q, R, S lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AD, AB, BC, CD . Biết rằng $P(-2; 8)$, đường thẳng chứa RS có phương trình $(\Delta): x - y + 2 = 0$, điểm B có hoành độ nguyên thuộc đường thẳng $5x - 4y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D (k2pi lần 7 năm 2014)

Tính chất 14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là trung điểm BC . Hạ BD, BE lần lượt vuông góc với AC, AO . Khi đó M, E, D thẳng hàng.

Lời giải:



Lời giải:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x+2y-13=0 \\ y+1=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=5 \\ y=-1 \end{array} \right. \Rightarrow K(5;-1)$$

$$M \text{ là trung điểm } AC \text{ nên } \begin{cases} 5+c=6 \\ a-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow A(5;5); C(1;-1)$$

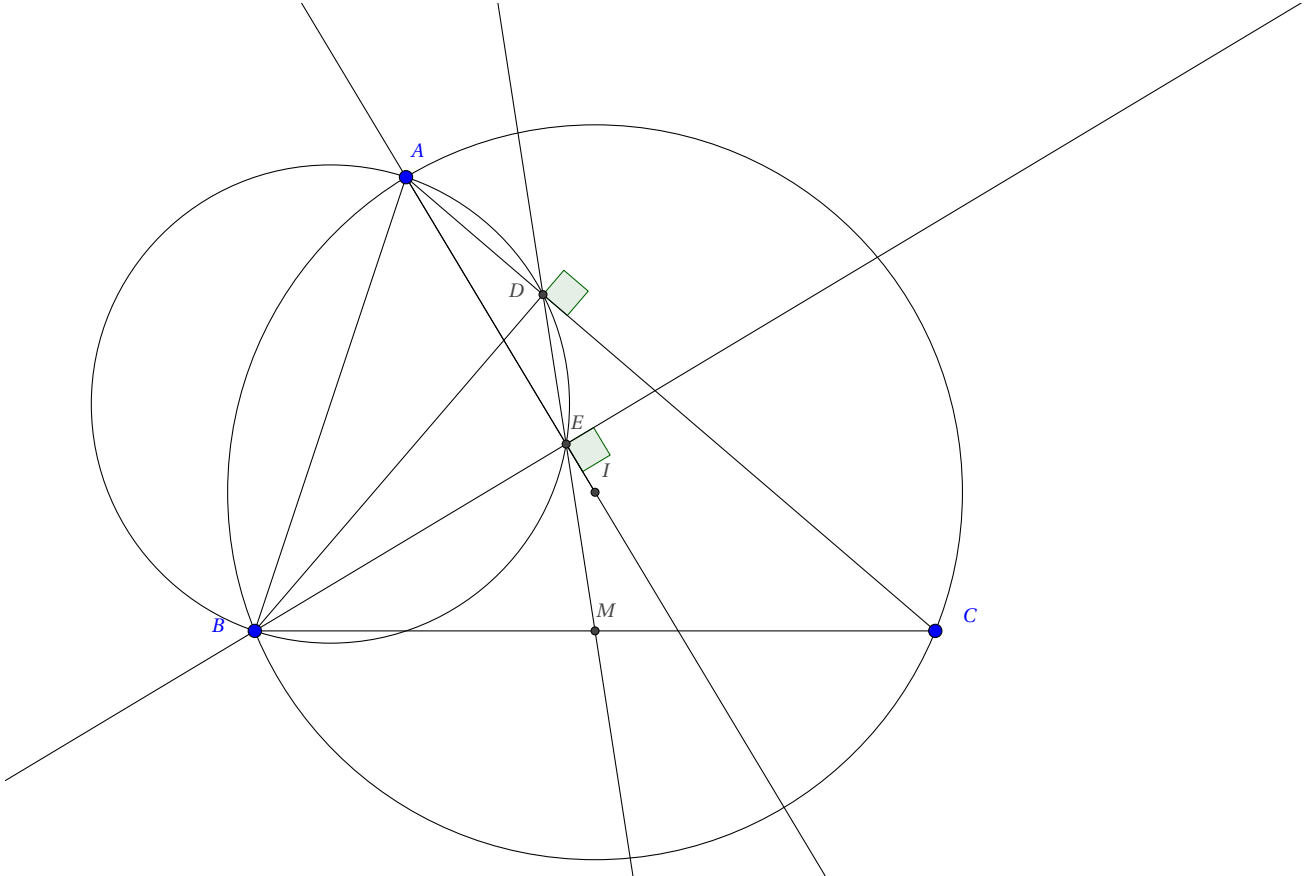
$$\begin{cases} 2x+3y-13=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(8;-1)$$

Bài toán 62. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $K, M(\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$ là trung điểm $BC, E(\frac{24}{5}; \frac{8}{5})$ là hình chiếu vuông góc của B lên $AK, AC: 7x - y + 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC .

Bài toán 63. Trong Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (I) và $C \in x + y - 4 = 0$. Điểm $M(2; -1)$ là trung điểm cạnh BC và E là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AI. Gọi D là giao điểm của ME và AC. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE có phương trình $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Hocmai lần 1)

Lời giải:



Áp dụng tính chất ta có $BD \perp AC$ hay tứ giác ABED nội tiếp.

Bài toán 64. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I, $D\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm cạnh BC, $E\left(\frac{24}{5}; \frac{8}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AI, $AC: 7x - y + 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải:

Theo tính chất ta có $BF \perp AC$. Mặt khác $DE: 9x + 13y - 64 = 0$. Đường thẳng DE cắt AC tại $F\left(-\frac{2}{5}; \frac{26}{5}\right)$. Đường thẳng BF qua F và vuông góc với AC nên có phương trình $BF: x + 7y - 36 = 0$. $C \in AC \Rightarrow C(c; 7c + 8)$, $B \in BF \Rightarrow B(36 - 7b; b)$. Vì D là trung điểm của BC nên

$$\begin{cases} \frac{36 - 7b + c}{2} = \frac{7}{2} \\ \frac{b + 7c + 8}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = -1. \end{cases}$$

Do đó $B(8; 4)$, $C(-1; 1)$.

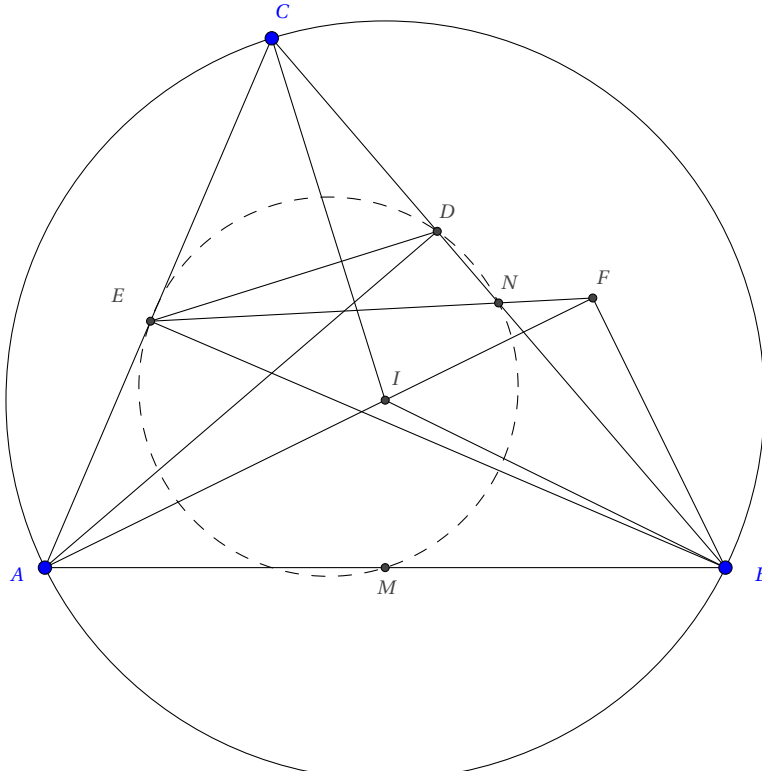
Đường thẳng AI qua E và vuông góc với BE nên có phương trình $AI: 4x + 3y - 24 = 0$. A là giao điểm của AI với AC nên $A(0; 8)$.

Bài toán 65. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm I với các đường cao AD, BE.

Biết $D(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5})$, $E(2;2)$ và $F(1;0)$ là hình chiếu của B lên đường thẳng AI . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Lời giải:



Ta có năm điểm A, E, D, F, B nằm trên đường tròn tâm M bán kính $R = MD = \frac{BC}{2}$. Gọi $M(a; b)$ vì $MK = MD = MF$ nên $M(-\frac{3}{10}; \frac{19}{10})$. Chú ý theo tính chất cũ ta có EF đi qua trung điểm N của BC và bốn điểm E, D, M, N nằm trên đường tròn Euler. Đường tròn Euler có phương trình $(x - \frac{9}{10})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = \frac{53}{20}$. Phương trình $EF: 2x - y - 2 = 0$. Tọa độ N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{9}{10})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = \frac{53}{20} \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}).$$

Đường thẳng BC đi qua D, N nên có phương trình $BC: x + 2y + 1 = 0$. Đường cao $AD: 2x - y = 0$. Vì M là trung điểm AB , $A \in 2x - y = 0$; $B \in x + 2y + 1 = 0$ suy ra $A(\frac{8}{5}; \frac{16}{5})$, $B(-\frac{11}{5}; \frac{3}{5})$. Đường trung trực của AB có phương trình $MI: 19x + 13y - 19 = 0$. Đường thẳng $AF: 16x - 3y - 16 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 16x - 3y - 16 = 0 \\ 19x + 13y - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0).$$

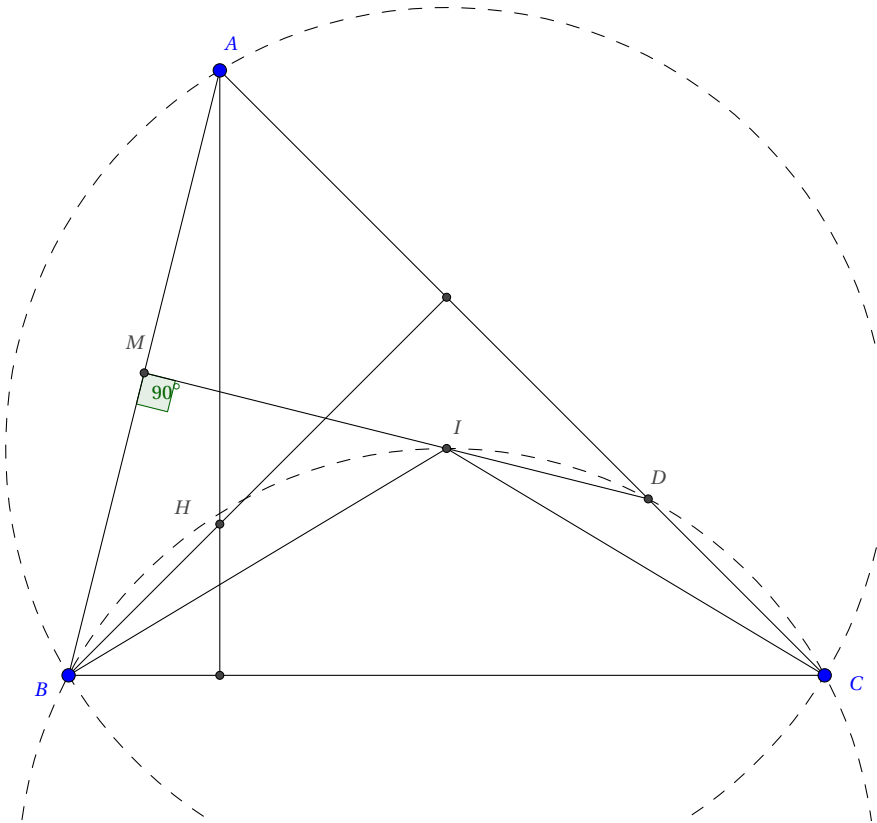
Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{53}{5}$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = \frac{53}{5} \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{17}{5}; -\frac{11}{5}).$$

Nhận xét: Ta có thể tìm điểm N không cần thông qua đường tròn Euler. Chú ý MN là trung trực của DF .

Tính chất 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) với tâm I . Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt đường thẳng AC tại D . Khi đó ID là trung trực của AB .

Lời giải:



Ta xét D thuộc cạnh AD , trường hợp ngược lại làm tương tự.

Kéo dài DI cắt AB tại M . Vì tứ giác $IDCB$ nội tiếp nên $\angle IDA = \angle IBC$, chú ý tam giác BIC cân tại I và $\angle BIC = 2\angle BAC$ do đó $\angle MAD + \angle ADI = 90^\circ$ hay $ID \perp AB$. Vì tam giác AIB cân tại I nên ID là trung trực của AB .

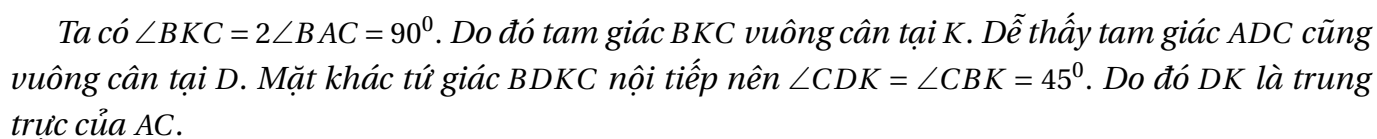
Bài toán 66. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) với tâm I , trực tâm $H(-5; -19)$, $B(-5; -9)$. Đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ICB cắt đường thẳng AC tại D biết $ID: x + y + 1 = 0$, tìm tọa độ A, C . **Lời giải:**

Áp dụng tính chất ta có A đối xứng B qua ID nên $A(8; 4)$. Đường thẳng BC qua B vuông góc AH nên có phương trình $BC: 13x + 23y + 272 = 0$. Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc với BH nên có phương trình $AC: y = 4$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 4 \\ 13x + 23y + 272 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-28; 4).$$

Tính chất 16. Cho tam giác ABC có $\angle A = 45^\circ$ nội tiếp đường tròn tâm K . Đường cao CD . Khi đó DK là trung trực của AC .

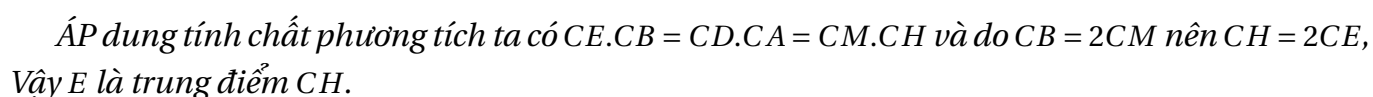
Lời giải:



Bài toán 67. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-2; 1)$ và $\angle AIB$ vuông. Gọi D là chân đường cao hạ từ A xuống BC với $D(-1; -1)$. Đường thẳng AC qua $M(-1; 4)$. Tìm tọa độ A, B, C biết A có hoành độ dương

Kể $ID \cap AC = E$, khi đó do $\angle ACB = \frac{\angle AIB}{2} = 45^\circ$ nên $\triangle ACD$ vuông cân tại D do đó ID là trung trực của AC suy ra E là trung điểm AC . Phương trình $ID: 2x + y + 3 = 0$, phương trình $AC: x - 2y + 9 = 0$. Tọa độ $E = AC \cap ID$ nên suy ra $E(-3, 3)$. Gọi $A(2a - 9; a)$, $a > \frac{9}{2}$. Do E là trung điểm AC nên $C(3 - 2a; 6 - a)$. Có $\overrightarrow{DA} = (2a - 8; a + 1)$, $\overrightarrow{DC} = (4 - 2a; 7 - a)$. Ta có: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \iff (2a - 8)(4 - 2a) + (a + 1)(7 - a) = 0 \iff \begin{cases} a = 5 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \begin{cases} A(1; 5) \\ C(-7; 1) \end{cases}$. Phương trình $BC: x + 3y + 4 = 0$, Phương trình $IB: 3x + 4y + 2 = 0$. Từ đó suy ra $B(2; -2)$.

Lời giải:



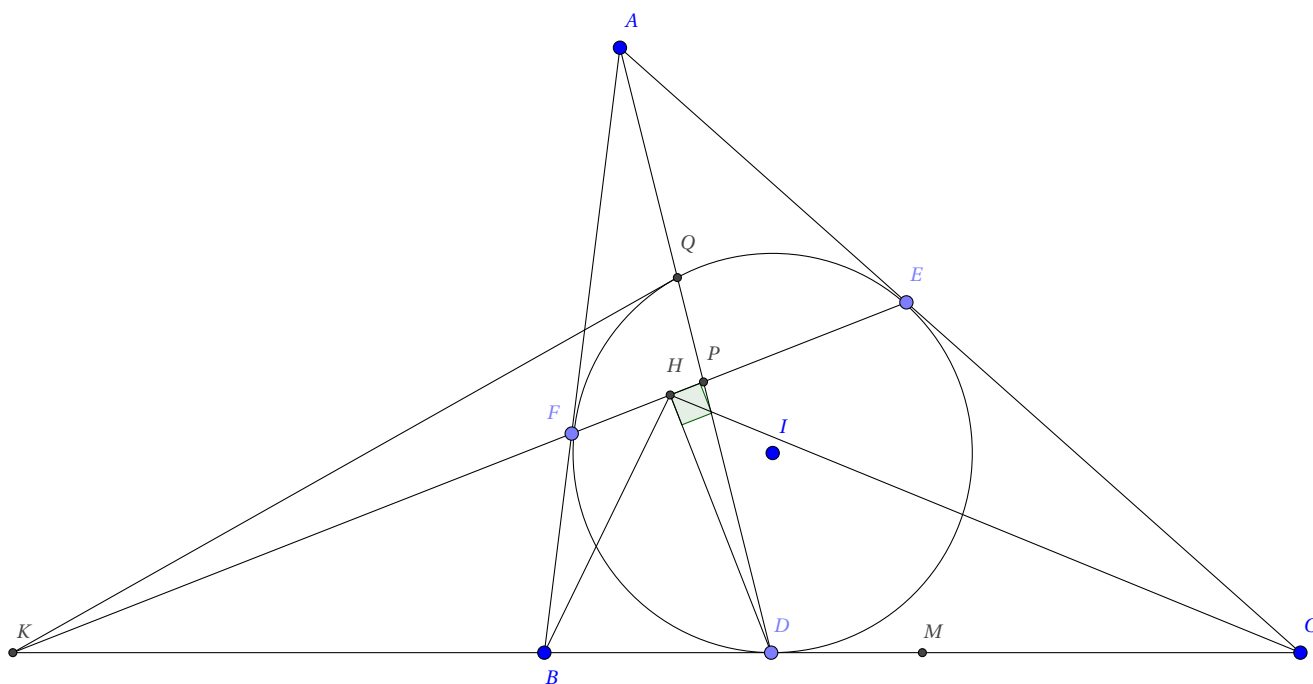
Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có E là trung điểm HC suy ra $H(1; -2)$. Đường thẳng AH đi qua H và vuông góc EC nên có phương trình $3x - y - 5 = 0$. Gọi $A(a; 3a - 5)$ ta có $OA = 5$ suy ra

$\begin{cases} A(3; 4) \\ A(0; -5) \end{cases}$	loại
---	------

3. Hạ DH vuông góc với EF ta có HD là phân giác $\angle BHC$.

Lời giải:



1. Chú ý AD, BE, CF đồng quy nên theo định lý Ceva và Menelaus ta có $(K, D, B, C) = -1$. từ đó theo công thức Maclaurin nên ta có $MD \cdot MK = MB^2 = MC^2$.
2. Được suy ra từ 1.
3. Vì $(K, D, B, C) = -1$ và $KH \perp HD$ nên HD là phân giác trong của $\angle BHC$.

Chú ý KQ là tiếp tuyến của (I) .

Bài toán 69. Cho tam giác ABC có $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Cho $D(3; 1)$, $EF: y - 3 = 0$. Tìm A biết A có tung độ dương.

(B-11)

Bài toán 70. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Cho $D(2; -2)$, $EF: y - 1 = 0$, điểm $M(0; -3)$ là trung điểm của BC . Tìm A, B, C .

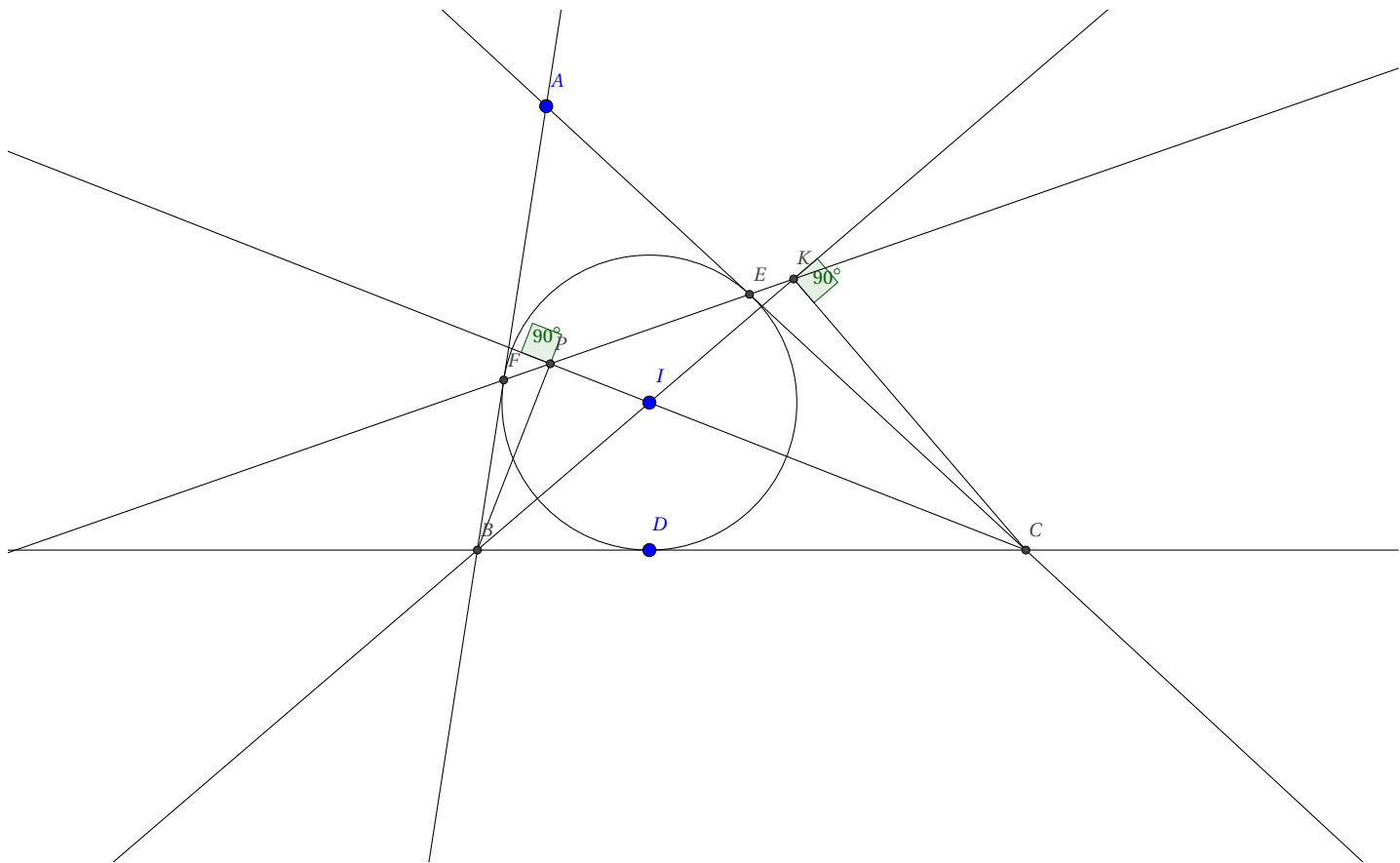
(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Bài toán 71. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Cho $D(2; -2)$, $EF: y - 1 = 0$, điểm $A(1; 5)$. Tìm B, C .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Tính chất 19. Cho tam giác ABC , đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F . Giả sử BI cắt EF tại K . Khi đó $\angle BKC = 90^\circ$.

Lời giải:



Ta có $\angle KEC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \angle KIC$. Do đó tứ giác KEIC nội tiếp, suy ra $IK \perp KC$. Hoàn toàn tương tự $IC \perp BP$.

Bài toán 72. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (S) có tâm $I(6;0)$, (S) tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N, đường thẳng MN cắt các đường thẳng BI và CI lần lượt tại $E(10;2)$ và $F(3;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải:

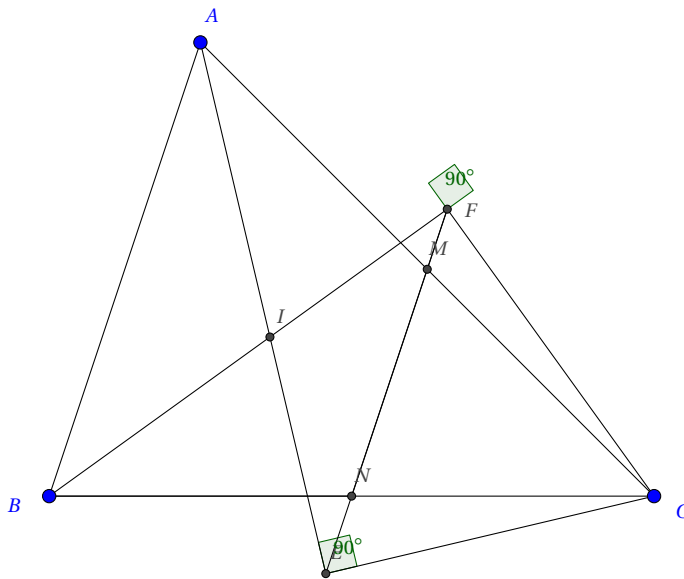
Áp dụng tính chất ta có $CE \perp BI$.

- Ta có $MN: x - 7y + 4 = 0$, $BI: x - 2y - 6 = 0$, $CI: x + 3y - 6 = 0$, $BF: 3x - y - 8 = 0$, $CE: 2x + y - 22 = 0$, $AI: 7x + y - 42 = 0$.
- B là giao điểm của BI với BF nên $B(2; -2)$. C là giao điểm của CI với CE nên $C(12; -2)$.
- Gọi D là điểm đối xứng với C qua AI. Đường thẳng CD qua C và vuông góc với AI nên có phương trình $CD: x - 7y - 26 = 0$. H là giao điểm của CD với AI thì $H\left(\frac{32}{5}; -\frac{14}{5}\right)$. H là trung điểm của CD nên $D\left(\frac{4}{5}; -\frac{18}{5}\right)$. Do đó $AB: 4x - 3y - 14 = 0$.
- A là giao điểm của AB với AI nên $A\left(\frac{28}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

Vậy $A\left(\frac{28}{5}; \frac{14}{5}\right)$, $B(2; -2)$, $C(12; -2)$.

Tính chất 20. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn I. M, N là trung điểm AC, BC. Kéo dài AI, BI cắt MN tại E, F. Khi đó $AE \perp CE$, $BF \perp CF$.

Lời giải:



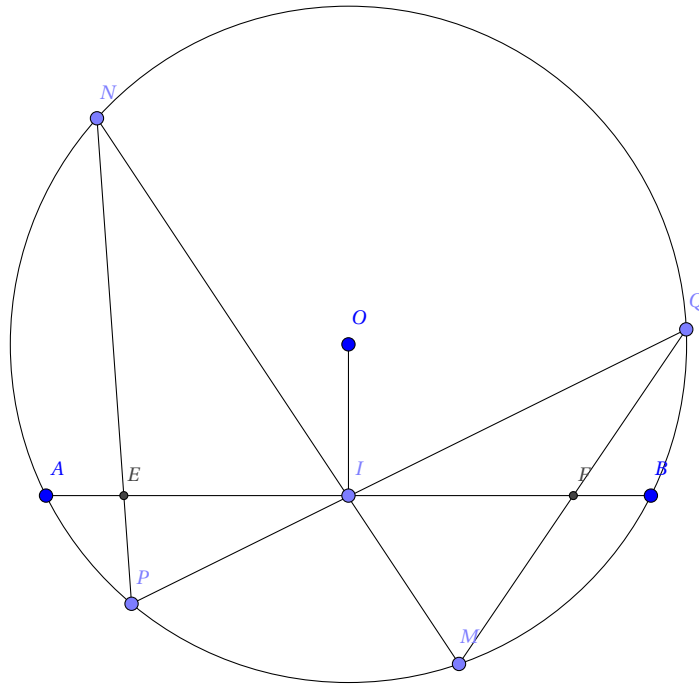
Tam giác BFC có N là trung điểm BC và $\angle NFB = \angle ABF = \angle NBF$ do đó tam giác BNF cân tại N hay $NF = NB = NC$. Suy ra tam giác BFC vuông tại F . Tương tự $AE \perp CE$.

Bài toán 73. Cho tam giác ABC có trung điểm N của cạnh AC thuộc đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$. Gọi I, K là chân đường vuông góc hạ từ A xuống hai phân giác trong góc B và góc C . Biết $M(1; 0)$ thuộc đường thẳng BC và $K(2 + \sqrt{5}; 2)$. Tìm tọa độ A, C .

(PTNK thành phố HCM 2016)

Tính chất 21. Cho (O) một dây cung AB với I trung điểm. Qua I xét 2 dây cung MN và PQ tùy ý sao cho các dây này cắt AB ở E và F . Chứng minh rằng I trung điểm EF . (định lý con bướm)

Lời giải:

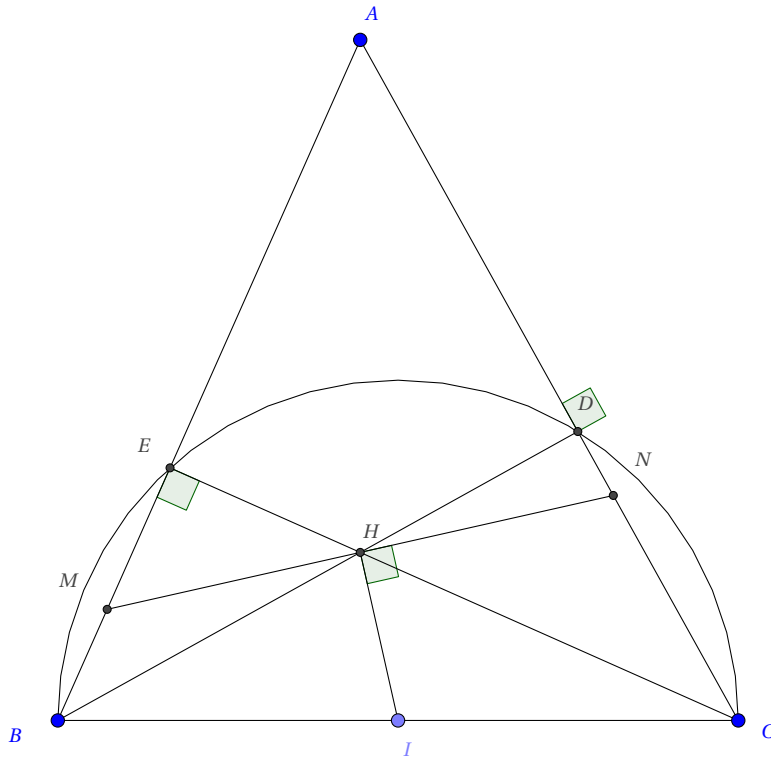


Gọi K, T lần lượt là trung điểm của dây MP, NQ . Ta có tứ giác $OIEK$ và $OIFT$ nội tiếp. Suy ra: $\angle EOI = \angle EKI$ $\angle FOI = \angle ITF$. Mặt khác tam giác IMP đồng dạng với INQ và IK, IT lần lượt là hai trung tuyến suy ra $\angle EKI = \angle ITN$

Do đó: $\angle EOI = \angle FOI$ Vậy tam giác OEF có OI vừa phân giác vừa đường cao nên nó là tam giác cân. Suy ra $IE = IF$

Tính chất 22. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD, CE cắt nhau ở H (D thuộc AC ; E thuộc AB). Lấy I là trung điểm BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB, AC ở M, N . Chứng minh $HM = HN$.

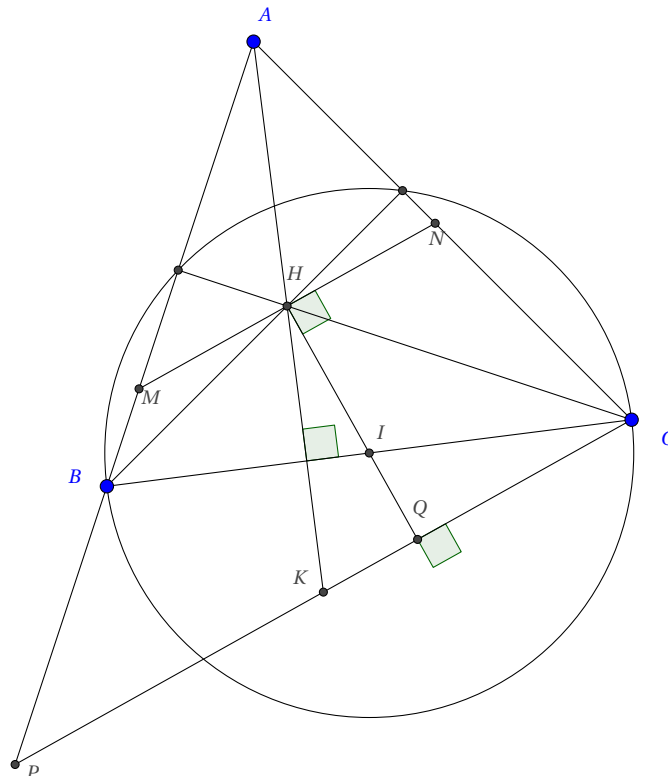
Lời giải:



$\Rightarrow$) Kẻ đường tròn đường kính BC . Ta có tứ giác $BCDE$ nội tiếp theo bài toán con bướm có d vuông góc với IH nên $HM = HN$.

$\Leftarrow$) đơn giản.

cách 2:



$\Rightarrow$) Kẻ CP song song MN theo Thalet suy ra K là trung điểm của CP . Do I là trung điểm BC nên $KI \parallel AB$, suy ra K là trực tâm tam giác HKC . Do đó $HI \perp CP$, vậy $MN \perp MI$.

⇔ đơn giản.

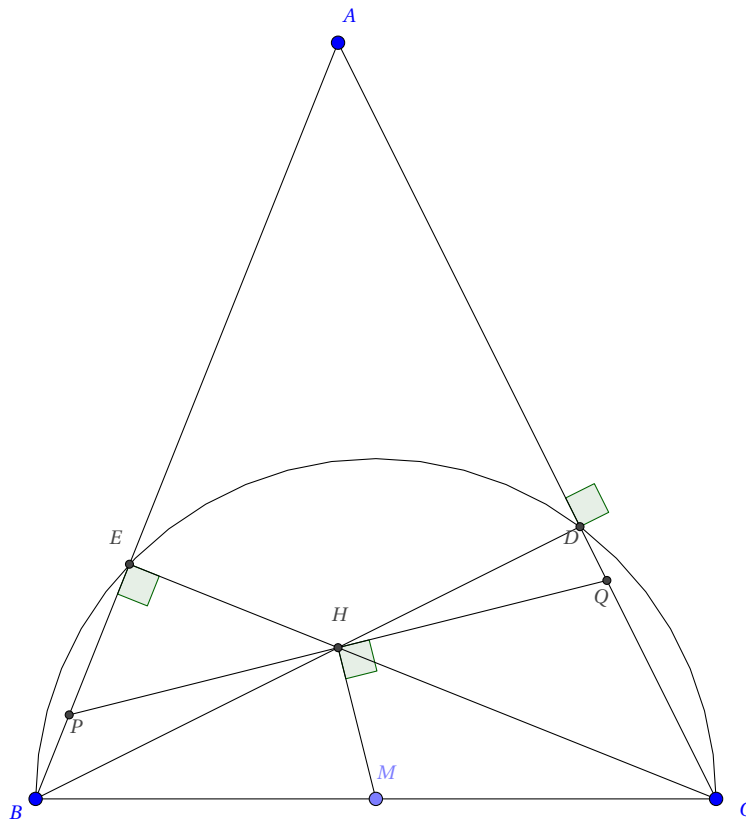
Cách 3: Đơn giản nhất. Hạ BP, CQ lần lượt vuông góc đường thẳng MN . Dùng phương tích ta dễ dàng suy ra $HN.HP = HB.HE = HF.HC = HM.HQ$. Do đó $HM = HN \Leftrightarrow HP = HQ \Leftrightarrow MN \perp HI$.

Nhận xét:

- Bài toán trên vẫn còn đúng khi tam giác ABC tù và vuông.
- Chiều ngược lại cũng đúng, tức là nếu $HM = HN$ thì $MN \perp HI$.
- IE, ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHD$. Thật vậy ta có $\angle HDI = \angle DBI = \angle HAD$ do đó ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHD . Tương tự IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE .
- Bài toán trên được gọi là bài toán con bướm trong tam giác.

Bài toán 74. Cho tam giác ABC có trực tâm H và đỉnh $C(3; \frac{3}{2})$. Phương trình đường cao $AH : 2x - y + 1 = 0$, một đường thẳng qua H cắt các cạnh AB, AC tại P, Q và thỏa mãn $HP = HQ$. Tìm tọa độ đỉnh của tam giác ABC , biết $PQ : 2x - 3y + 7 = 0$.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm BC . Áp dụng tính chất ta suy ra $PQ \perp HM$. Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(1; 3).$$

Đường thẳng HM đi qua $H(1; 3)$ và vuông góc với PQ nên có phương trình $3x + 2y - 9 = 0$. Đường thẳng BC đi qua $C(3; \frac{3}{2})$ và vuông góc với $AH : 2x - y + 1 = 0$ có phương trình $x + 2y - 6 = 0$. Do đó

tọa độ M là nghiệm của hệ

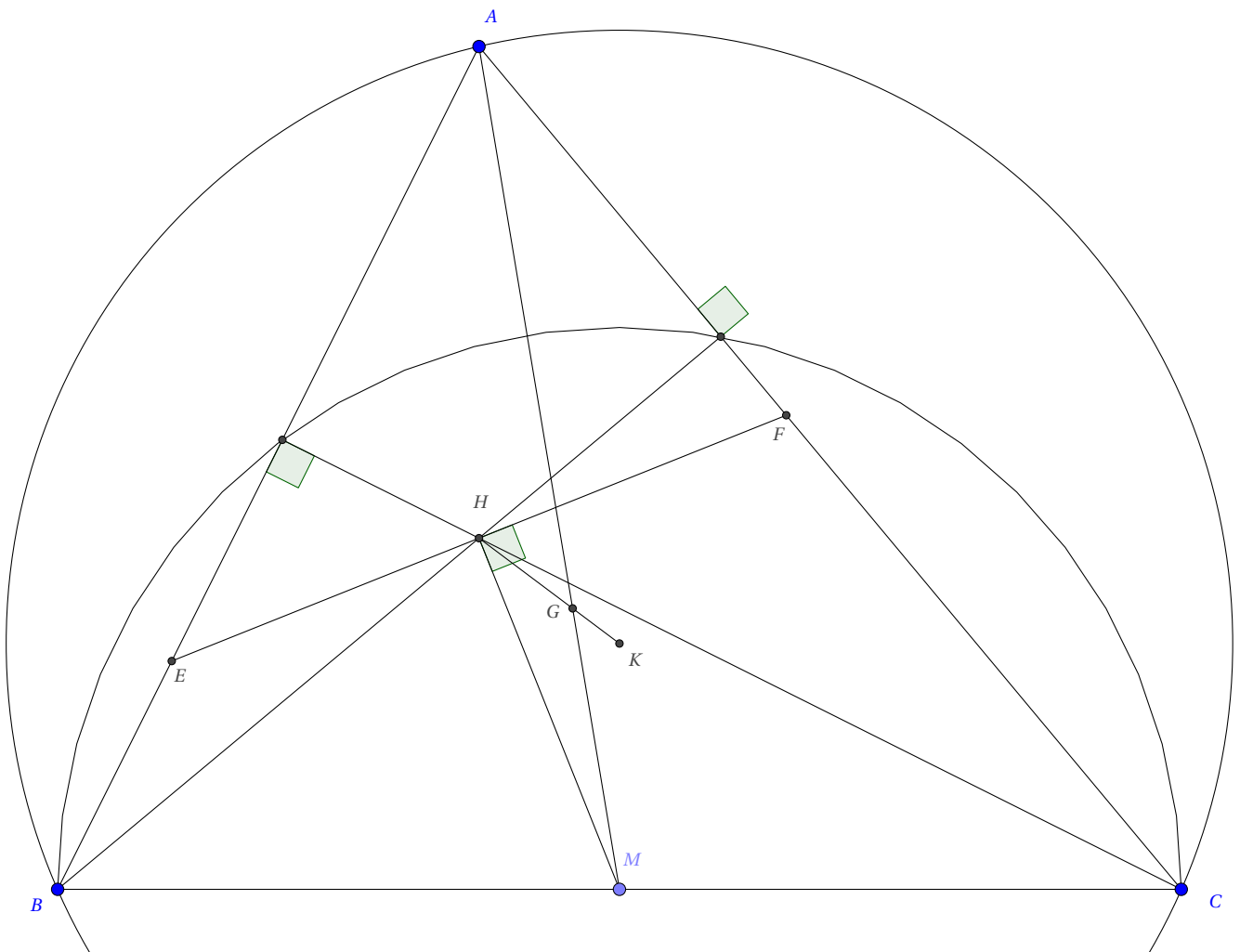
$$\begin{cases} x+2y-6=0 \\ 3x+2y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right).$$

Do M là trung điểm BC nên $B(0; -3)$. Đường thẳng AB đi qua B và nhận $\overrightarrow{HC} = (2; -\frac{3}{2})$ nên có phương trình $AB: 4x - 3y + 5 = 0$. Tương tự $AC: x + 6y - 18 = 0$. Vậy tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x-3y+5=0 \\ x+6y-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow A\left(\frac{10}{9}; \frac{76}{27}\right).$$

Bài toán 75. Cho tam giác ABC trọng tâm $G(2; 1)$, H là trực tâm tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Đường thẳng đi qua H và vuông góc với MH cắt AB, AC tại $E(2; 0)$ và $F(1; -1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết điểm A thuộc đường thẳng có phương trình $x - y + 1 = 0$.

Lời giải:



Áp dụng tính chất ta có MH là trung trực của EF nên H là trung điểm của EF do đó $H(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$. Trung trực $MH: x + y - 1 = 0$. Gọi $M(a; 1 - a)$. Vì G là trọng tâm nên $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ suy ra $A(6 - 2a; 1 + 2a)$. Ta có $A \in x - y + 1 = 0$ suy ra $a = \frac{3}{2}$ suy ra $A(3; 4)$. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có $\overrightarrow{HK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$ suy ra $K(\frac{9}{4}; \frac{7}{4})$. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn tâm K bán kính KA nên có phương trình $(ABC): (x - \frac{9}{4})^2 + (y - \frac{7}{4})^2 = 5$.

Bài toán 76. Cho tam giác ABC cân tại B, có trục tâm H, gọi M là trung điểm AC, kẻ đường thẳng đi qua H và vuông góc với HM, cắt cạnh AB, BC lần lượt tại E và F. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác, biết $HF = 1$, $HM : 2y - 1 = 0$, $FM : x - y + 2 = 0$ và điểm E có tung độ dương.

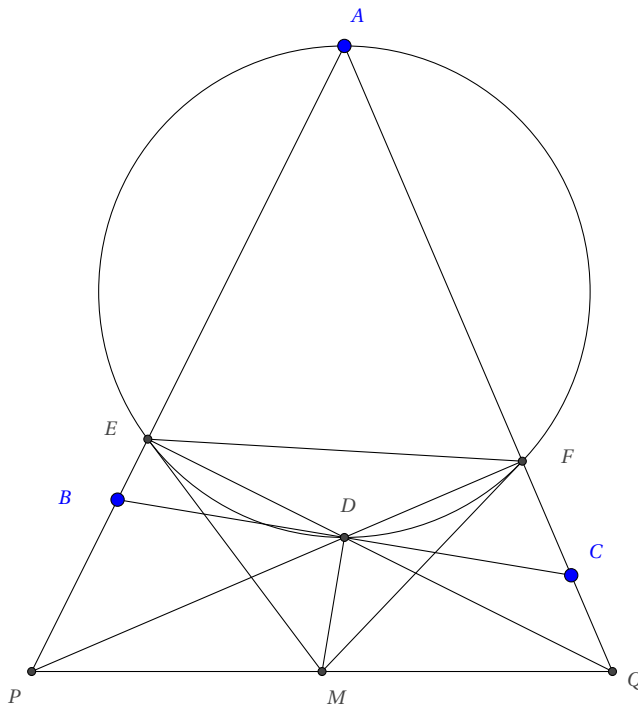
Lời giải:

Chú ý đề cho giả thiết suy ra tam giác EMF vuông cân tại M.

Bài toán 77. Cho tam giác ABC và D là trung điểm BC. Gọi E, F là hình chiếu của D lên AB, AC. DF cắt AB tại P, DE cắt AC tại Q. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác EAF cắt nhau tại M. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $DM : 4x - y - 6 = 0$, $PQ : x - y = 0$ và P có tọa độ nguyên và $B(\frac{11}{25}; \frac{81}{25})$.

(Chế đề lại của Đoàn Trí Dũng)

Lời giải:



Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x - y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(2; 2).$$

Ta có DM là trung trực của BC do đó $D(\frac{11}{5}, \frac{14}{5})$ và $C(\frac{99}{25}, \frac{59}{25})$. Gọi $P(a; a)$ vì M là trung điểm PQ suy ra $Q(4 - a; 4 - a)$. Ta có D là trục tâm tam giác APQ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0 \\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{QD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1; 1) \\ Q(3; 3) \end{cases}.$$

Do đó đường thẳng PB: $4x + y - 5 = 0$ và đường thẳng QC: $2x + 3y - 15 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của

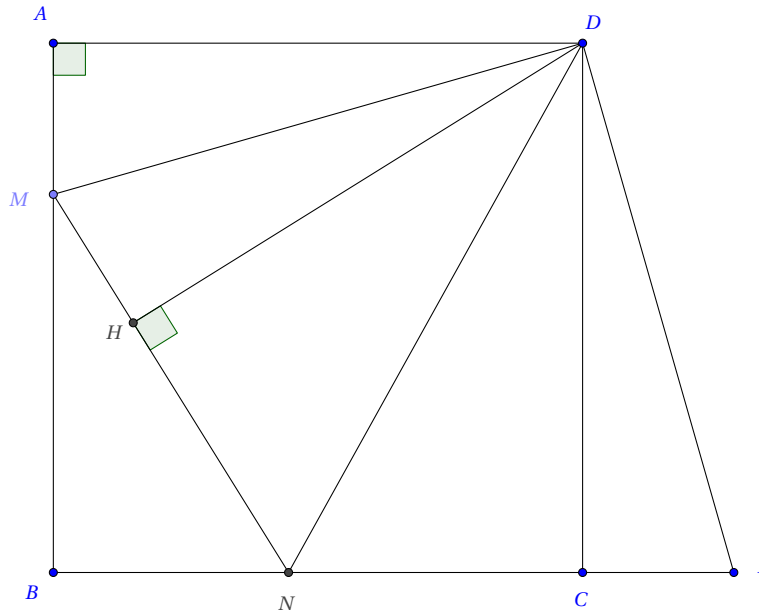
hệ

$$\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ 2x + 3y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;5).$$

Tính chất 23. Cho hình vuông $ABCD$. M, N lần lượt trên hai cạnh AB và AC . Khi đó

$$AM + CN = MN \Leftrightarrow \angle MDN = 45^\circ \Leftrightarrow DH = AD \Leftrightarrow MD \text{ là phân giác của } \angle NMA$$

Lời giải:



1. Giả sử $AM + CN = MN$.

Trên tia đối CB lấy điểm điểm I sao cho $CI = AM$. Khi đó

$$\begin{cases} \triangle DAM = \triangle DCI \\ \angle MDI = 90^\circ \\ MN = NI \end{cases} \Rightarrow \triangle DMN =$$

$$\triangle DIN \text{ hay } \angle MDN = \frac{1}{2} \angle MDI = 45^\circ$$

2. Giả sử $\angle MDN = 45^\circ$.

Dựng I trên tia đối CB sao cho $\angle MDI = 90^\circ$. Khi đó ta có $\angle ADM = \angle CDI$ suy ra $\triangle MAD = \triangle CDI$ suy ra $MD = ID$ suy ra $\triangle MDN = \triangle IDN$ do đó $DH = DC = AD$.

3. Giả sử $DH = AD$.

Dễ dàng thấy $\triangle MAD = \triangle MHD$ hay MD là phân giác $\angle AMN$

4. Giả sử MD là phân giác $\angle AMN$.

Dựng I trên tia đối CB sao cho $\angle MDI = 90^\circ$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} \triangle MAD = \triangle ICD = \triangle MHD \\ \triangle MDN = \triangle IDN \end{cases} \text{ suy ra } AM + CN = MN$$

Bài toán 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, có $AB = AD < CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình $y = 2$. Biết đường thẳng $\Delta: 7x - y - 25 = 0$ cắt các đoạn thẳng AD, CD lần lượt tại hai điểm M, N sao cho BM vuông góc với BC và tia BN là tia phân giác trong của $\angle MBC$. Tìm tọa độ điểm D biết D có hoành độ dương

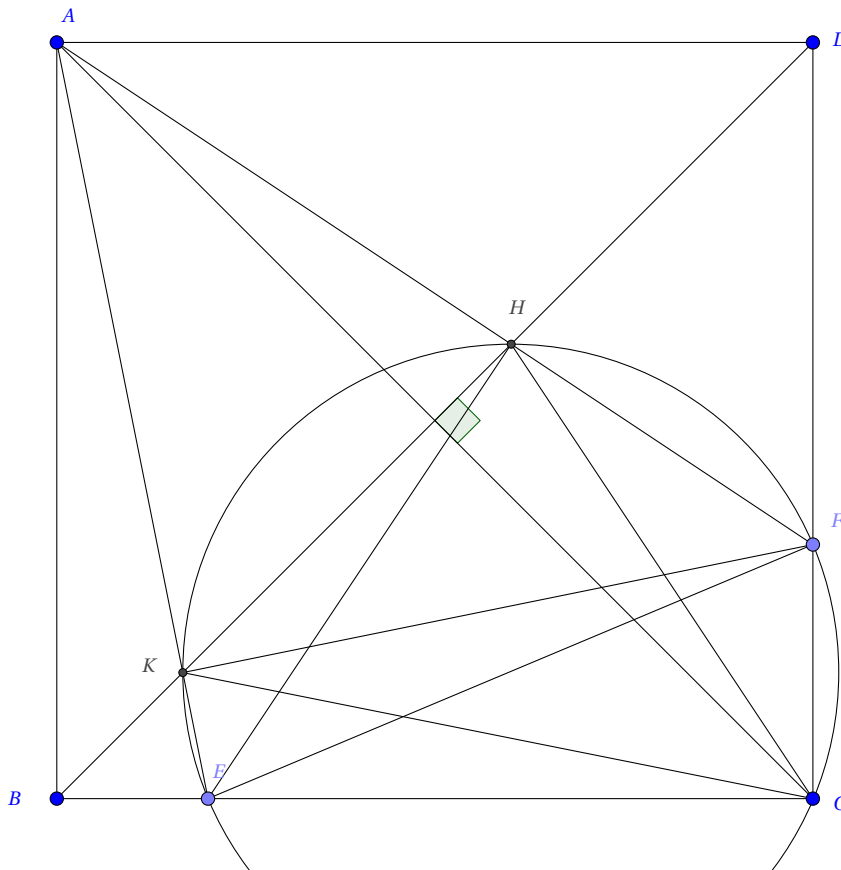
Bài toán 79. Cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M(\frac{11}{2}; \frac{1}{2})$ (A- 2012 CB) và AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Bài toán 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có điểm $M(-2;-2)$ thuộc cạnh AB và điểm N thuộc đường thẳng AD sao cho đường thẳng CM là phân giác của góc BMN, phương trình đường thẳng CN: $3x + 4y - 11 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh B thuộc đường thẳng (d): $4x - 3y - 8 = 0$ và đỉnh C có tung độ âm.

Tính chất 24. Cho hình vuông ABCD có hai điểm E, F nằm trên hai cạnh BC, CD sao cho $\frac{CE}{BE} = 2 \frac{DF}{CF}$. Đường thẳng AF, AE cắt BD tại H, K. Khi đó

1. $\angle EAF = 45^\circ$.
2. năm điểm E, K, H, F, C nằm trên một đường tròn.
3. $EF = \sqrt{2}KH$.

Lời giải:



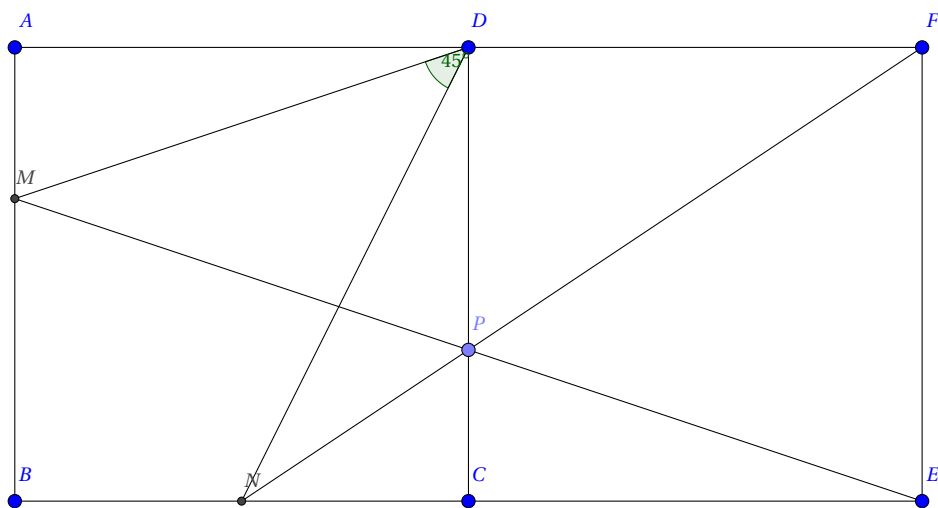
Các em có thể chứng minh bài này bằng nhiều cách. Đơn giản nhất là dùng tính chất tương đương để $\angle EAF = 45^\circ$ hoặc có thể vẽ thêm hình phụ v.v....

Bài toán 81. Cho hình vuông $ABCD$ có hai điểm E, F nằm trên hai cạnh BC, CD sao cho $\frac{CE}{BE} = 2\frac{DF}{CF}$. Đường thẳng AF cắt BD tại $H(\frac{11}{2}; \frac{15}{2})$ và $K(8; 5)$ là giao điểm của AE và BD . Xác định tọa độ hình vuông biết $A \in 3x + y - 15 = 0$ và $S_{AEFF} = 15$.

Ta có một tính chất tương đương sau:

Tính chất 25. Cho hình vuông $ABCD$, dựng thêm hình vuông $DCEF$. Gọi P là điểm tùy ý trên cạnh DC . EP cắt AB tại M , FP cắt BC tại N . Khi đó $\angle MPN = 45^\circ$.

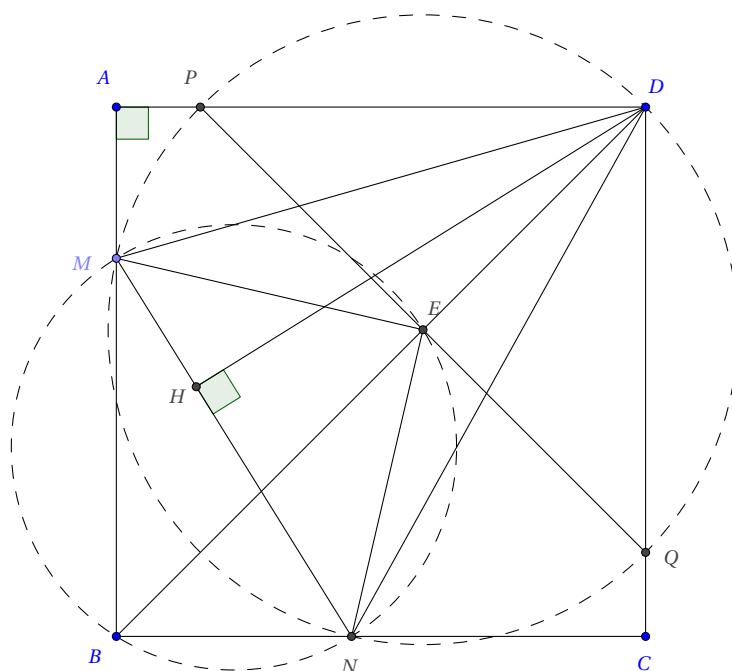
Lời giải:



Tính chất 26. Cho hình vuông $ABCD$. M, N lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho $\angle MDN = 45^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN cắt BD tại $E \neq B$. Khi đó

1. Tam giác MEN vuông cân tại E .
2. E là tâm ngoại tiếp của tam giác MDN .
3. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác MDN cắt AD, CD tại P, Q . Ta có P, E, Q thẳng hàng và tam giác PDQ vuông cân tại D .

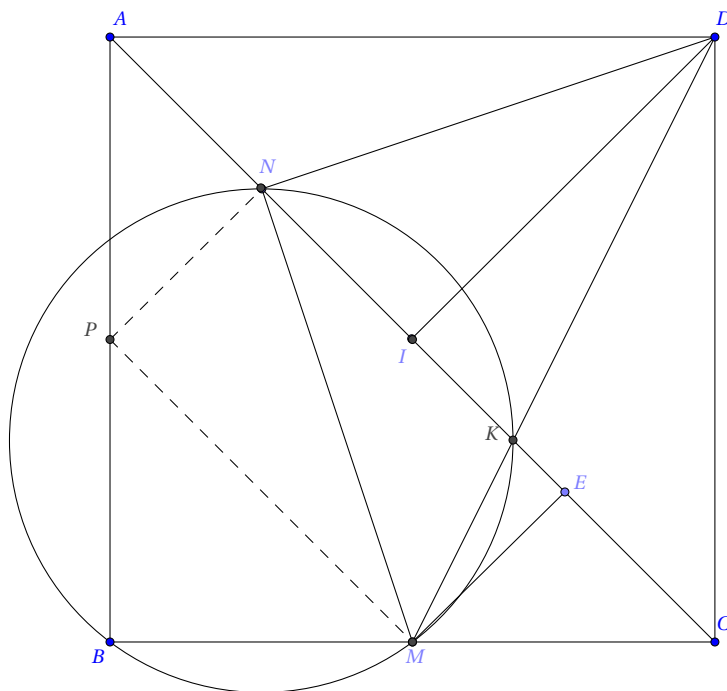
Lời giải:



Tính chất 27. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. P là trung điểm AB . Khi đó

1. Tam giác DMN vuông cân tại N .
2. Tam giác NPM vuông tại P và $PM = 2PN$.
3. Cho N chạy trên AI và M chạy trên BC . Khi đó $\frac{IN}{IA} = \frac{CM}{CB}$ khi và chỉ khi tam giác DNM vuông cân tại N .
4. Gọi K là giao điểm của AC với MD . Tam giác DNM vuông cân tại $N \Leftrightarrow$ bốn điểm M, K, N, B nội tiếp đường tròn.

Lời giải:



1. Để thấy $\triangle NID = \triangle MEN$ suy ra tam giác MND vuông cân tại N .
2. Để thấy hai tam giác ANP, MBP vuông cân tại N, B nên suy ra $PN \perp PM$ và $PM = 2PN$.
3. Ta có $\frac{IN}{IA} = \frac{CM}{CD} \Leftrightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{CM}{CB} \Leftrightarrow \triangle NID \sim \triangle MCD \Leftrightarrow \begin{cases} \angle NDM = 45^\circ \\ \frac{DN}{DM} = \frac{DI}{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle MND \text{ vuông cân tại } N$.
4. Chú ý B, D đối xứng qua NK do đó ta luôn có $\angle NBK = \angle NDK$, vì vậy tam giác DNM vuông cân tại $N \Leftrightarrow \angle NBK = \angle NMK \Leftrightarrow$ bốn điểm M, K, N, B nội tiếp đường tròn.

Bài toán 82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

(A-14)

Bài toán 83. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, điểm $M(5;7)$ nằm trên cạnh BC . Đường tròn đường kính AM cắt BC tại B và cắt BD tại $N(6;2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ đỉnh A bé hơn 2.

Bài toán 84. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$.

(Ngô Gia Tự, Vĩnh Phúc 2015)

Bài toán 85. Cho hình vuông $ABCD$ có điểm $E(4;2)$ thuộc cạnh BC , điểm $M(1;3)$ thuộc đường thẳng AB , F là giao điểm của AE và BD , K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam

giác CEF với đường thẳng BD, $AK: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết A có hoành độ âm.

Lời giải:

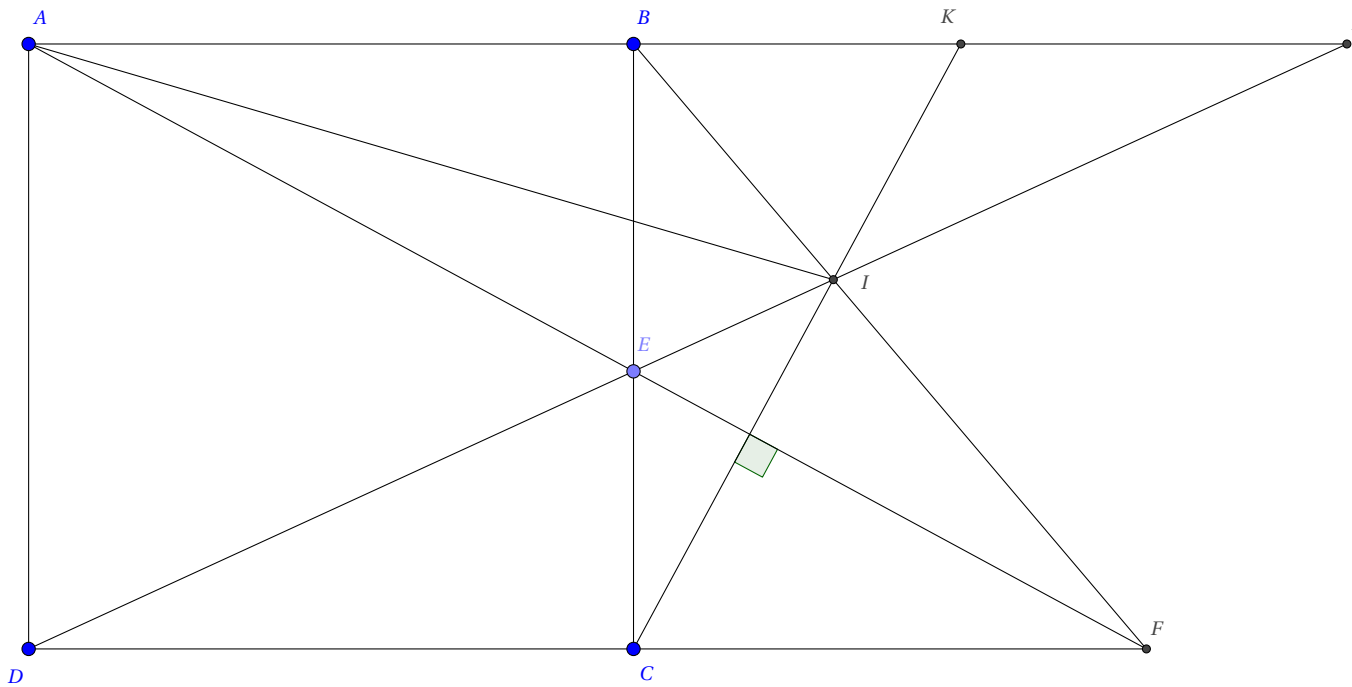
Theo tính chất ta có tam giác AKE vuông cân tại K. Từ đó có $EK: x - y - 2 = 0$, suy ra $K\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
 $A \in AK \Rightarrow A(a, 1 - a)$. Ta có

$$AK = EK \Leftrightarrow \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - a\right)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow a \in \{-1; 4\}$$

Trường hợp 1: $a = 4$. Ta có $A(4; -3)$, từ đó có $AB: 2x + y - 5 = 0$, $BC: x - 2y = 0$, $B(2; 1)$. Ta có $\vec{MA} = 2\vec{MB}$ nên không thỏa mãn M thuộc cạnh AB.

Trường hợp 2: $a = -1$. Ta có $A(-1; 2)$, từ đó có $AB: x - 2y + 5 = 0$, $BC: 2x + y - 10 = 0$ và $AD: 2x + y = 0$.
 Nên $B(3; 4) \Rightarrow BD: 3x - y - 5 = 0 \Rightarrow D(1; -2) \Rightarrow C(5; 0)$. Khi đó M, E lần lượt là trung điểm của AB, BC nên các giả thiết M và E thuộc cạnh AB và BC đều thỏa mãn.

Tính chất 28. Cho hình vuông ABCD điểm E bất kỳ trên cạnh BC. Đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại F. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BF tại I. Khi đó $CI \perp AF$.



Kéo dài CI cắt AB tại K. Theo định lý Menelaus với đường thẳng DI trong tam giác BCF ta có:

$$\frac{DC}{DF} \cdot \frac{IF}{IB} \cdot \frac{EB}{EC} = 1. (*)$$

Mặt khác theo Thalet ta có $\frac{IF}{IB} = \frac{CF}{BK}$ và $\frac{EC}{CF} = \frac{EB}{AB} = \frac{CE + EB}{CF + AB} = \frac{CD}{DF}$. Thế vào (*) ta được $\frac{BK}{BC} = \frac{EC}{CF}$, do đó tam giác $\triangle KBC \sim \triangle ECF$. Vậy $EF \perp CK$.

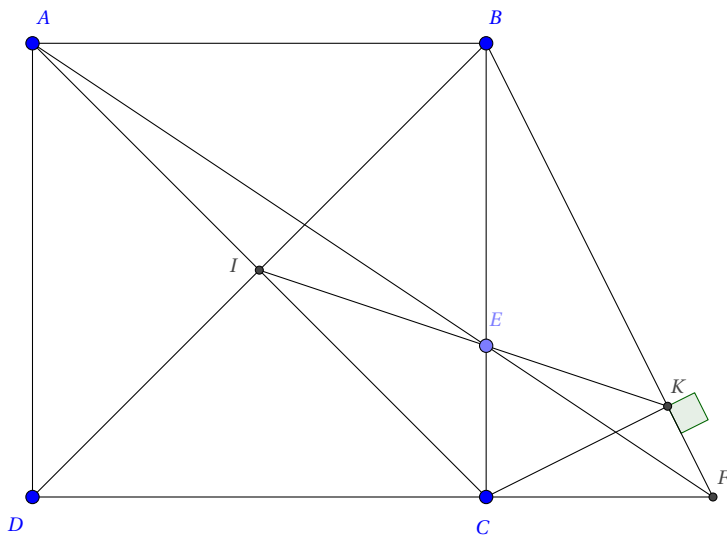
Nhận xét: ta có thể chứng minh bằng cách khác, cụ thể chứng $BD \parallel EK$, vì $BD \perp AC$ nên $EK \perp AC$ do đó E là trực tâm tam giác ACK. Từ đó suy ra $AE \perp CI$.

Cách 2: Kéo dài DE cắt AB tại L . Dễ dàng chứng minh được $\frac{LK}{BK} = \frac{LI}{ID}$ do đó $EK \parallel BD$. Mà $BD \perp AC$ nên $EK \perp AC$ hay E là trực tâm tam giác ACK . Vậy $AE \perp CK$.

Bài toán 86. Cho hình vuông $ABCD$ có $C(3; -3)$ và $A \in x + 2y - 2 = 0$. Điểm E thuộc cạnh BC . Giả sử đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại F . Đường thẳng DE cắt đường thẳng BF tại $I(\frac{87}{19}; -\frac{7}{19})$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông biết đường thẳng AF đi qua $M(\frac{4}{3}; 0)$.

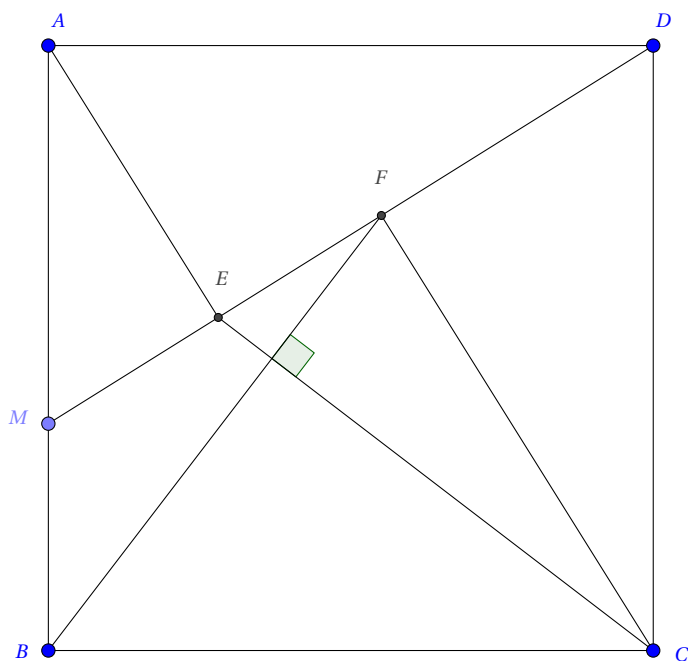
Tính chất 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm I và điểm E bất kỳ trên cạnh BC . Đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại F . Đường thẳng IE cắt BF tại K . Khi đó $CK \perp BF$.

Lời giải:



Tính chất 30. Cho hình vuông $ABCD$ có M nằm trên cạnh AB . Gọi E, F là hình chiếu của A, C lên DM và I là giao điểm của CE với BF . Khi đó $CE \perp BF$.

Lời giải:



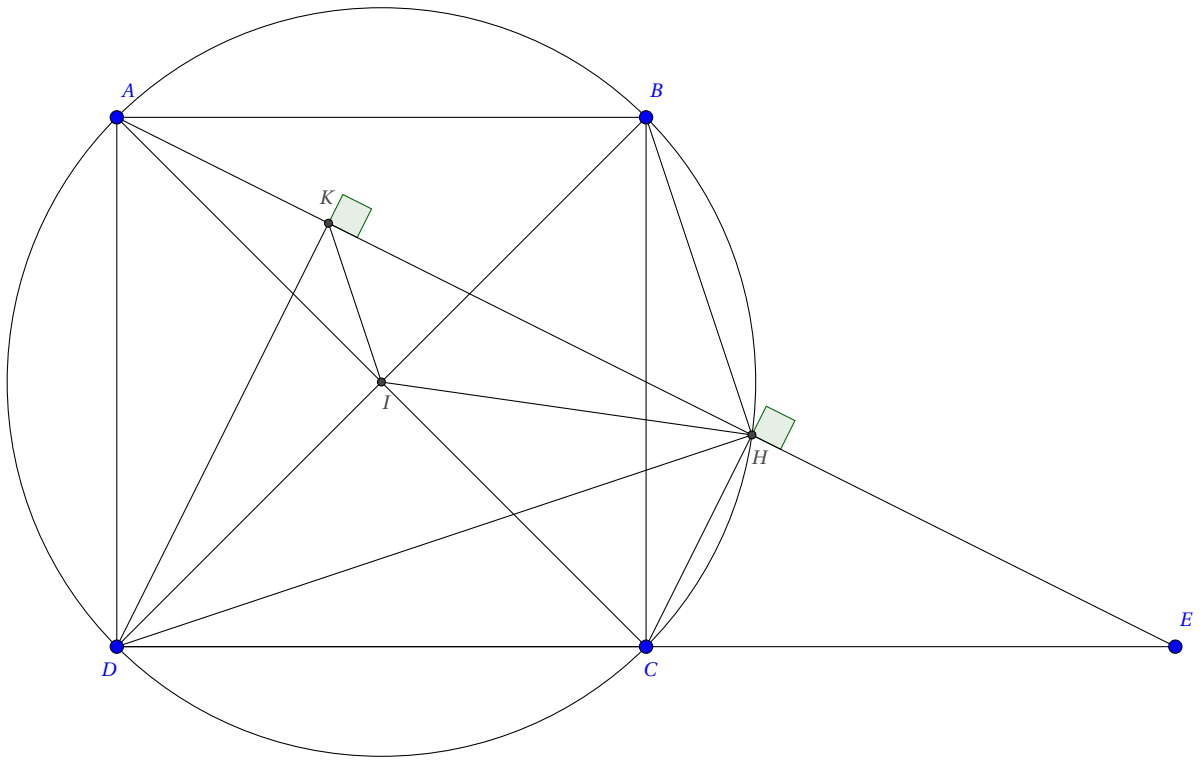
Chú ý $\triangle AED = \triangle DFC$ nên suy ra $\triangle BCF = \triangle CDE$ do đó $\angle CBF = \angle DCE$ hay $CE \perp BF$.

Bài toán 87. Cho hình vuông ABCD có $C(-4; -3)$, M thuộc cạnh AB. Gọi E, F là hình chiếu của A, C lên DM . $I(2; 3)$ là giao điểm của CE và BF . Điểm $B \in x - 2y + 10 = 0$, tìm tọa độ các đỉnh của bình vuông.

Tính chất 31. Cho hình vuông ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Hạ CH, DK vuông góc xuống AE . Khi đó

1. Năm điểm A, B, C, D, H nằm trên một đường tròn.
2. Tam giác DKH vuông cân tại K
3. $KI \perp DH$ hay $KI \parallel BH$, ở đây I là tâm hình vuông.

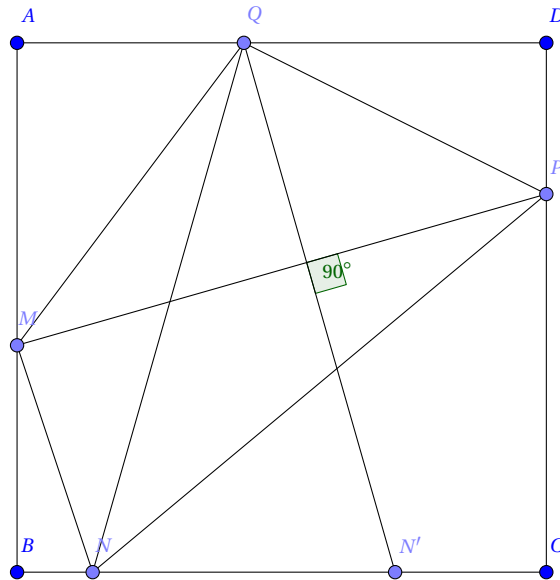
Lời giải:



1. Vì $\angle AHC = 90^\circ$ nên năm điểm A, B, C, D, H nằm trên một đường tròn.
2. Theo 1. ta có $\angle DHA = \angle DBA = 45^\circ$ do đó tam giác DKH vuông cân tại K .
3. Ta có $KD = KH, ID = IH$ nên KI là trung trực của DH suy ra $KI \perp DH$. Vì $BH \perp DH$ nên $KI \parallel BH$.

Tính chất 32. Cho hình vuông $ABCD$ với 4 điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA . Cho tọa độ các điểm M, N, P, Q . Dựng lại hình vuông? (Bài này đã từng đọc khi học phổ thông)

Lời giải:



1. Dựng QN' vuông góc với MP và $QN' = MP$ thì N, N' nằm trên cạnh BC .

2. Từ đó suy ra cách dựng.

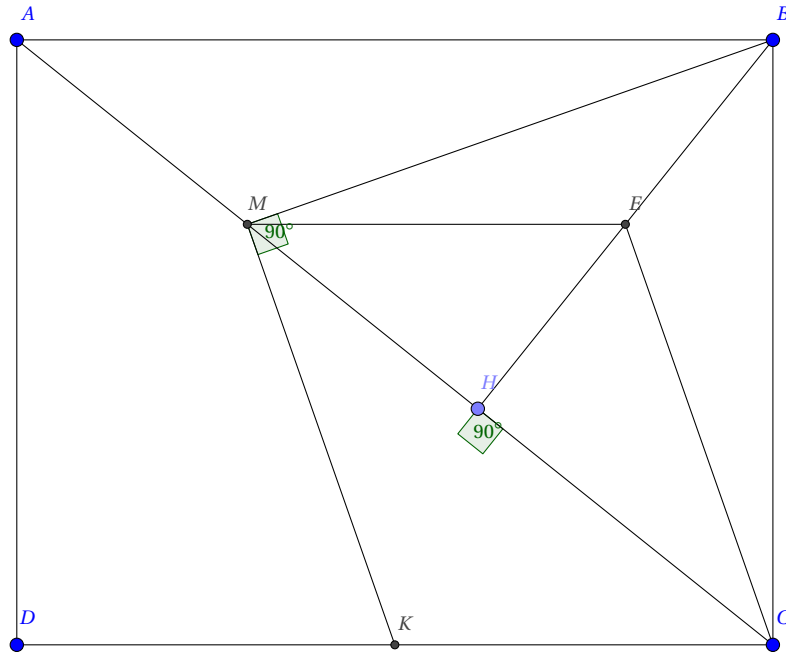
Tính chất 33. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường chéo AC . Các điểm M, K , lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh rằng $BM \perp KM$.

1. Đặc biệt khi $ABCD$ là hình vuông thì tam giác BMK vuông cân tại M .

2. Gọi E là trung điểm BH . Khi đó $MECK$ là hình bình hành và E là trực tâm tam giác MBC .

3. Bài toán vẫn còn đúng khi M thuộc đoạn HA và thỏa hệ thức $\frac{HM}{HA} = \frac{HE}{HB} = \frac{CK}{CD}$

Lời giải:



Hoàn toàn tương tự như tính chất của hình vuông. Ta chú ý $\triangle BHA \sim \triangle BCD$ suy ra $BM \perp KM$.

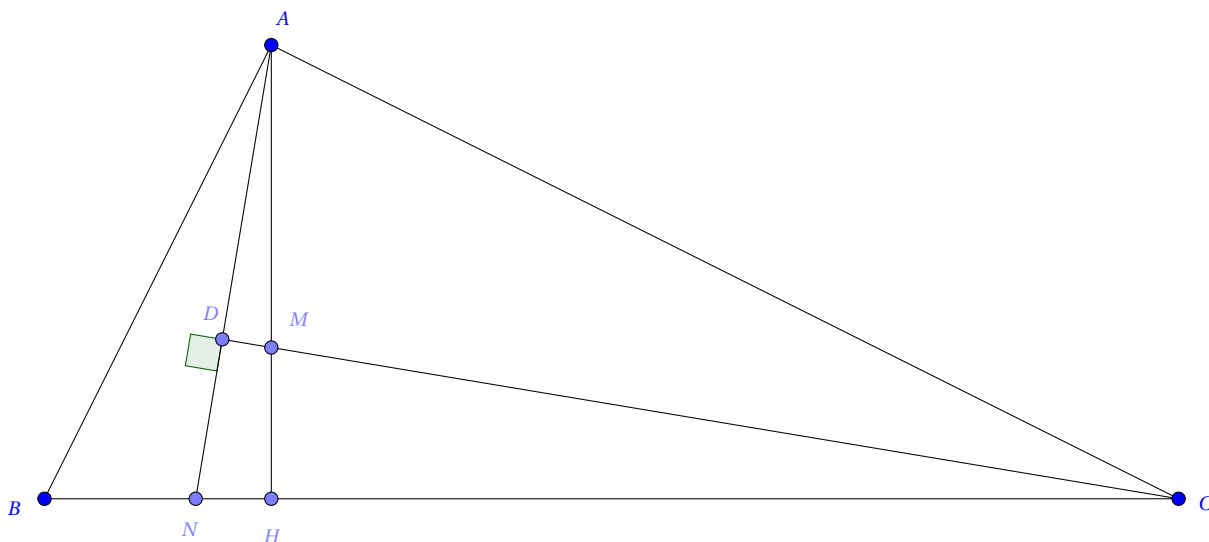
1. là hiển nhiên do ABCD là hình chữ nhật thì $\angle MBK = \angle ABD = 50^\circ$ hay tam giác KMB vuông cân tại M.

2. Khi E là trung điểm BH ta có $\begin{cases} ME \parallel AB \\ ME = \frac{1}{2}AB \end{cases}$ do đó MECK là hình bình hành. Vì $KC \perp BC$ nên $ME \perp CB$ do đó E là trực tâm tam giác MBC.

3. hoàn toàn tương tự như chứng minh trong tính chất của hình vuông.

Hệ quả 3. Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc AH và BH. Khi đó $CM \perp AN$ khi và chỉ khi $\frac{HN}{HB} = \frac{HM}{HA}$. Đặc biệt ta hãy xét M, N là trung điểm AH, BH, hoặc CM, AN là phân giác góc $\angle ACH, \angle BAH$.

Lời giải:



Chú ý $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ do đó $\frac{HN}{HB} = \frac{HM}{HA} \Leftrightarrow \triangle AHN \sim \triangle CHM \Leftrightarrow DACH$ nội tiếp $\Leftrightarrow \angle ADC = 90^\circ \Leftrightarrow CM \perp AN$.

Bài toán 88. Cho hình chữ nhật ABCD, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại H. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CH, BH và AD. Biết $E(\frac{17}{5}; \frac{29}{5})$, $F(\frac{17}{5}; \frac{9}{5})$, $G(1; 5)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE

Bài toán 89. Cho hình thang ABCD vuông tại A, D có $CD = 2AB = 2AD$. Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Điểm $M(\frac{22}{5}; \frac{14}{5})$ là trung điểm của HC, cho $D(2; 2)$ và $B \in d: x - 2y + 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình thang.

Bài toán 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu của B lên AC là $E(5; 0)$, trung điểm AE và CD lần lượt là $F(0; 2)$, $I(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$. Viết phương trình đường thẳng CD.

(Trần Hưng Đạo, Đắc Nông lần 1)

Bài toán 91. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC, M và N lần lượt là trung điểm của AH và BH, trên cạnh CD lấy điểm K sao cho tứ giác MNCK là hình bình hành. Biết $M(\frac{9}{5}; \frac{2}{5})$, $K(9; 2)$ và các đỉnh B, C lần lượt nằm trên các đường thẳng $2x - y + 2 = 0$ và $x - y - 5 = 0$, hoành độ đỉnh C lớn hơn 4. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

GVDG Lý Thái Tổ 2016

Bài toán 92. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm $H(1; 2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M(\frac{9}{2}; 3)$ là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của $\triangle ADH$ là $d: 4x + y - 4 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

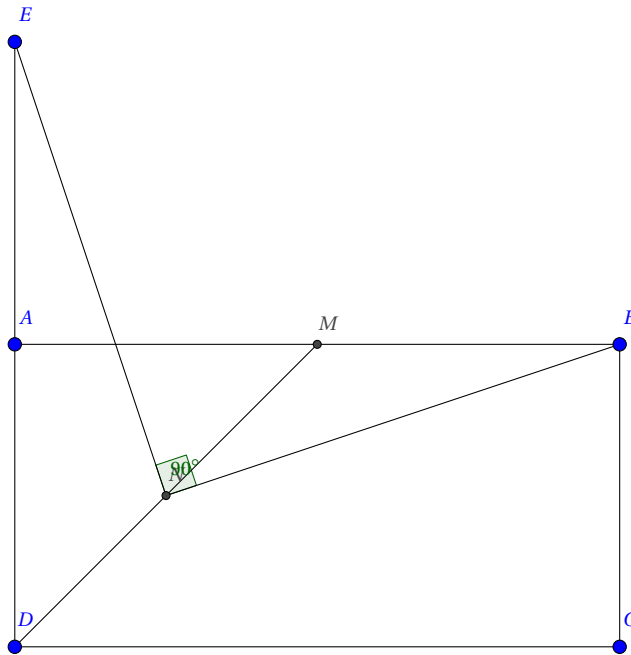
(THPT Triệu Sơn 5, Thanh Hóa 2015)

Bài toán 93. Trong Oxy cho hình chữ nhật ABCD có $M(3;0)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD, điểm $K(0;-2)$ là trung điểm BC. Phương trình đường trung tuyến đỉnh A của tam giác ADH là $7x + 9y - 47 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

(Chuyên Bắc Ninh lần 2)

Tính chất 34. Cho hình chữ nhật ACBD có $AB = 2AD$, gọi E là điểm đối xứng của D qua A. M là trung điểm AB, N trung điểm DM. Khi đó $EN \perp BN$.

Lời giải:



Đây là hệ quả của bài toán hình chữ nhật tổng quát trên.

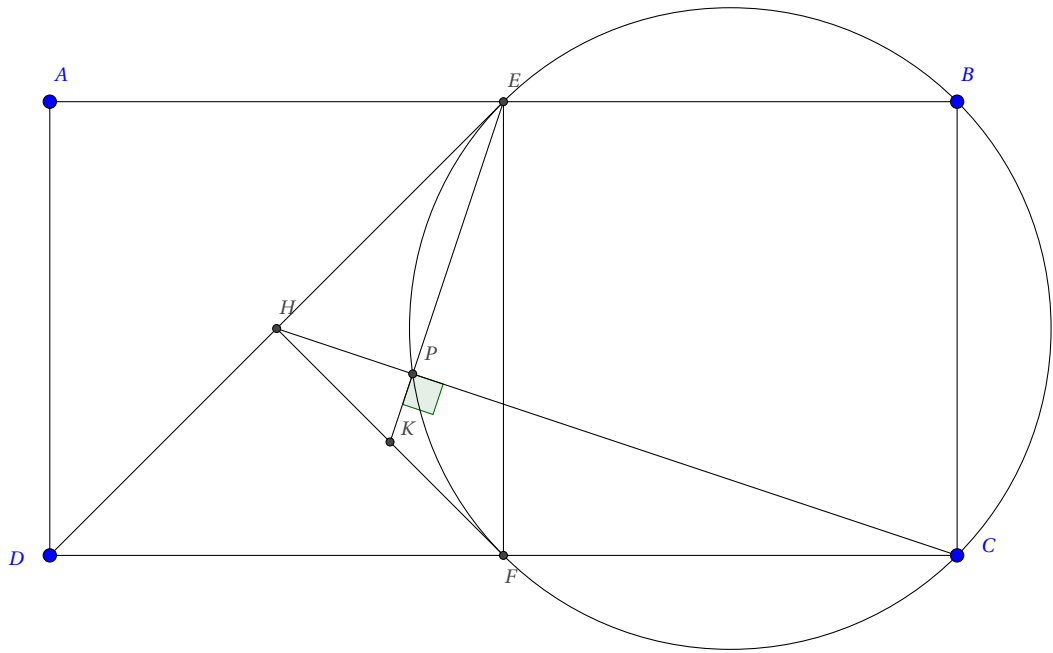
Dựng hình chữ nhật EDCF, chú ý DM đi qua F và tam giác EMD vuông cân nên EM vuông góc với đường chéo DF và chú ý N là trung điểm DM. Áp dụng tính chất hình chữ nhật tổng quát ta có $EN \perp NB$.

Bài toán 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$, $B(7; 3)$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, E là điểm đối xứng với D qua A. Biết rằng $N(2; -2)$ là trung điểm của DM, điểm E thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y + 9 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh D. (Trích đề thi thử lần 4, THPT Chuyên Đại Học Vinh, năm 2015)

Tính chất 35. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2CD$. Gọi E, F là trung điểm của AB, CD. Giả sử H, K là trung điểm của DE, HF. Khi đó

1. $EK \perp HC$.
2. Gọi P là giao điểm của EK và HC. Ta có năm điểm E, P, F, C, D nội tiếp đường tròn.
3. $CP = 2PE, CH = 5HP$.

Lời giải:

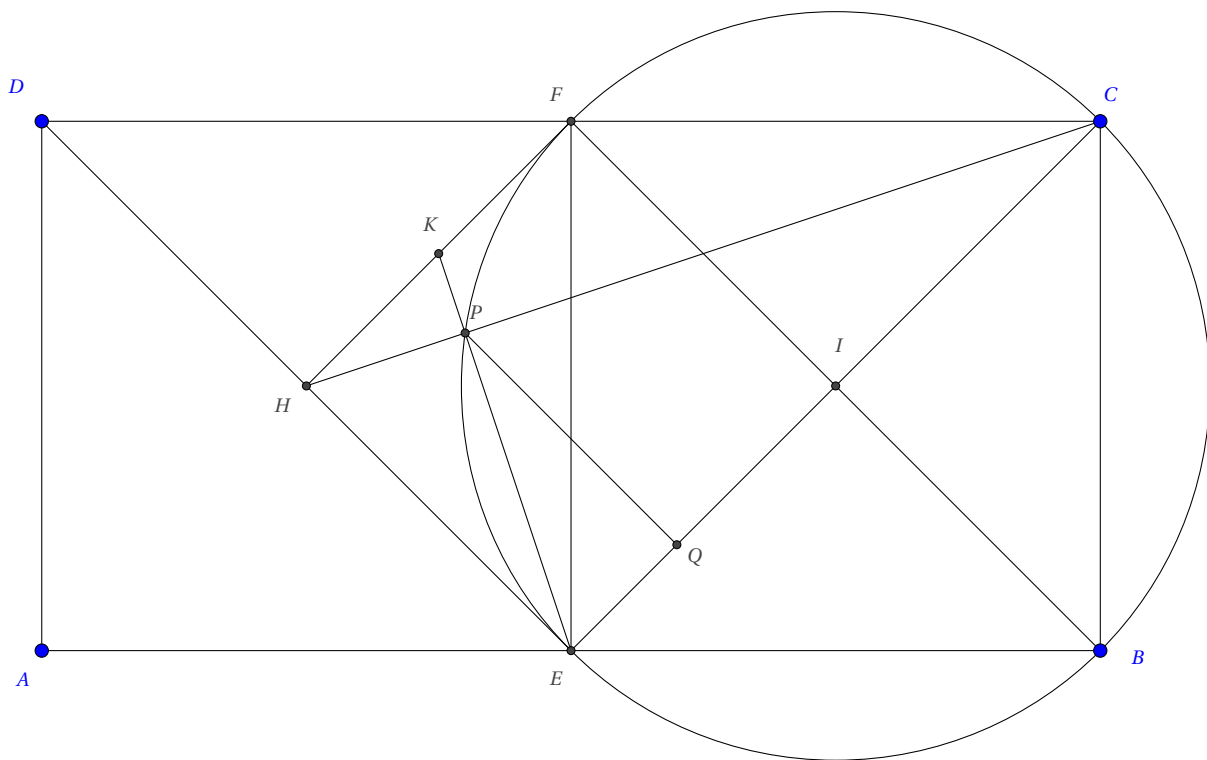


1. Chú ý hai tam giác EHF, CED vuông cân tại H, E do đó $\triangle EKF \sim \triangle CHD \Rightarrow \angle KEF = \angle HCF \Rightarrow EK \perp HC$.
2. Theo 2. ta có $\angle EPC = 90^\circ = \angle EFC$ do đó năm điểm E, P, F, C, D nội tiếp đường tròn.
3. Chú ý tam giác HEC vuông tại E và $HE = \frac{1}{2}EC$ nên $CH = 5HP$.

Bài toán 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AB = 2BC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD , H và K lần lượt là trung điểm của hai cạnh DE và HF , điểm $P(0; -1)$ là giao điểm của EK và CH . Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết trung điểm của đoạn BF là điểm $I(5; -1)$ và đỉnh B thuộc đường thẳng $d: 4x + 3y - 42 = 0$.

(Toanhoc247 lần 2)

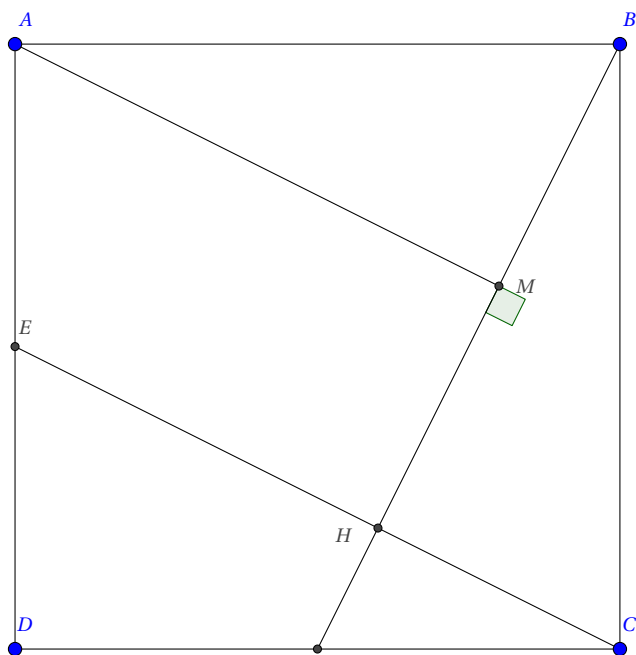
Lời giải:



Áp dụng tính chất ta có P nằm trên đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $EFCB$ tâm I . Ta có $IP = 5 = IB$ mà $b \in 4x + 3y - 42 = 0$ nên $B(9; 2)$ suy ra $F(1; -4)$. Vì $EFCB$ là hình vuông và $CP = 2EP$ nên ta suy ra $C(8; -5), E(2; 3)$. Điểm D, A đối xứng C, B qua F, E nên $D(-6; -3), A(-5; 4)$.

Tính chất 36. Hình vuông $ABCD$ có E là trung điểm của AD , H là hình chiếu vuông góc của B trên CE , M là trung điểm của BH . Khi đó tam giác AMH vuông tại M và $AM = 2MH$.

Lời giải:



Bài toán 96. Hình vuông ABCD có E là trung điểm của AD, $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên CE, $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của BH. Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D biết A có hoành độ âm.

Lời giải:

Cách 1: dùng đại số Vì M là trung điểm của BH nên $B(-1; -2)$.

Gọi F là trung điểm của BC. Ta có $AE \parallel FC$ và $AE = FC$ nên AECF là hình bình hành. Do đó $AF \parallel CE$. Suy ra FA là đường trung bình của tam giác BCE. Nên AF đi qua M và do đó $AM \perp BH$. Ta có $AM: 2x + y = 0$, $CE: 2x + y - 4 = 0$.

$$\sin \angle BCE = \cos \angle ECD = \frac{CD}{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow CD = \frac{BH}{\sin \angle BCE} = 4.$$

$A \in AM$ nên $A(a; -2a)$, $a < 0$.

$$\begin{aligned} AB = 4 &\Leftrightarrow (a+1)^2 + (2a-2)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = \frac{11}{5} \text{ (loại)}. \end{aligned}$$

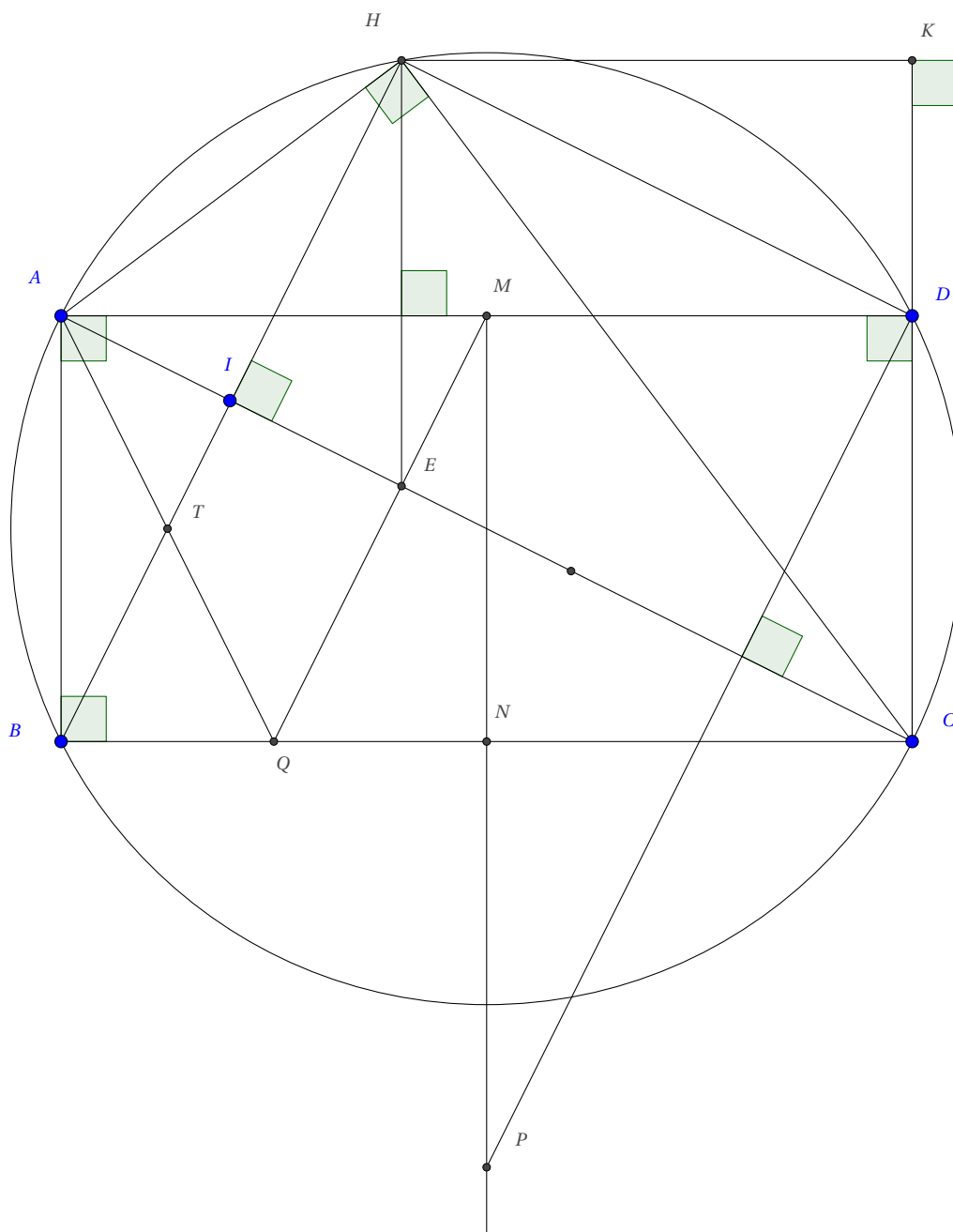
Do đó $A(-1; 2)$. Ta có $BC: y = -2$, $C(3; -2)$. Từ đó có $D(3; 2)$.

Cách 2 dùng tính chất hình học ở trên ta suy ra điểm A đơn giản.

Tính chất 37. Cho hình chữ nhật ABCD có $BC = 2AB$. Hạ BI vuông góc với AC. Gọi H là điểm đối xứng của B qua AC. Hạ HK vuông góc CD. Gọi E là điểm đối xứng của A qua I. Khi đó

1. $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI}$
2. $HE \perp AD$
3. $HK = 2KD = \frac{3}{4}KC$
4. Nếu M, N lần lượt là trung điểm AD, BC, và P là điểm đối xứng của M qua N thì $PD \perp AC, PD = AC$.
5. Gọi Q là trung điểm BN. Ta có BI đi qua trung điểm T của AQ (tính chất hay dùng đường cao BI của tam giác vuông ABC đi qua T) và Q, E, M thẳng hàng.

Lời giải:



Bài toán 97. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC. Trên đường thẳng MN lấy điểm K sao cho N là trung điểm của đoạn thẳng MK. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $K(5; -1)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh AC : $2x + y - 3 = 0$ và điểm A có tung độ dương.

(Bắc Ninh năm 2014)

Bài toán 98. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, có $AD = 2AB$. Điểm $H(\frac{31}{5}; \frac{17}{5})$ là điểm đối xứng của điểm B qua đường chéo AC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, biết phương trình CD : $x - y - 10 = 0$ và C có tung độ âm.

(Bắc Ninh năm 2016 lần 1)

Bài toán 99. Hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$, M và N là trung điểm của AD và BC, $K(-5; 1)$ đối xứng với M qua N, AC : $2x + y - 3 = 0$. Tìm A, B, C, D biết A có hoành độ dương.

Lời giải:

Gọi H là giao điểm của DK với AC . Ta có $\triangle KMD = \triangle ADC$ nên

$$\angle KDM = \angle ACD \Rightarrow \angle DHA = 90^\circ \Rightarrow DK \perp AC \Rightarrow DK: x - 2y + 7 = 0.$$

H là giao của DK và AC nên $H\left(-\frac{1}{5}; \frac{17}{5}\right)$. Gọi I là giao điểm của AC và MK . Ta có $KI \parallel CD$ nên

$$\frac{KH}{HD} = \frac{KI}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{KD} = \frac{5}{3} \overrightarrow{KH} \Rightarrow D(3; 5).$$

Ta có

$$DH = d(D, AC) = \frac{8}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DA^2} = \frac{5}{4DC^2} \Rightarrow DC = 4 \Rightarrow DA = 8.$$

Do đó A thuộc đường tròn (S) tâm D bán kính $DA = 8$,

$$(S): (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 64.$$

A là giao điểm của AC với (S) nên tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ \left(-\frac{17}{5}; -\frac{49}{5}\right); (3; -3) \right\}.$$

Vì A có hoành độ dương nên $A(3; -3)$. Từ đó có $C(-1; 5)$, $B(-1; -3)$.

Bài toán 100. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$. Điểm $M(2; -2)$ là trung điểm của cạnh BC . Gọi E là điểm thuộc cạnh AC sao cho $EC = 3EA$, điểm $K\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$ là giao điểm của AM và BE . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết điểm E nằm trên đường thẳng $d: x + 2y - 6 = 0$.

Lời giải:

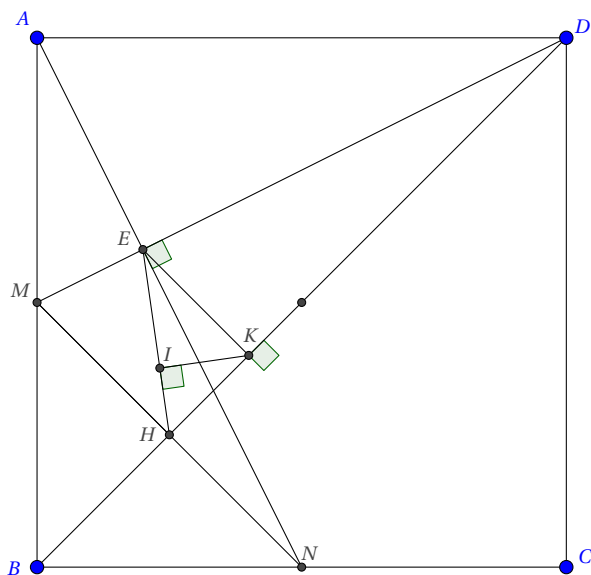
Áp dụng tính chất ta có $BE \perp AM$ tại K . Phương trình $BE: x - 3y + 4 = 0$.

Bài toán 101. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi $M\left(\frac{7}{2}; 4\right)$, N, P lần lượt là trung điểm của AB , AC , BN ; $H(0; 6)$ là hình chiếu vuông góc của B lên AP . Tìm tọa độ của A, B, C biết C có tung độ âm.

Lời giải: MC là trung trực AH hay tam giác MHC vuông tại H .

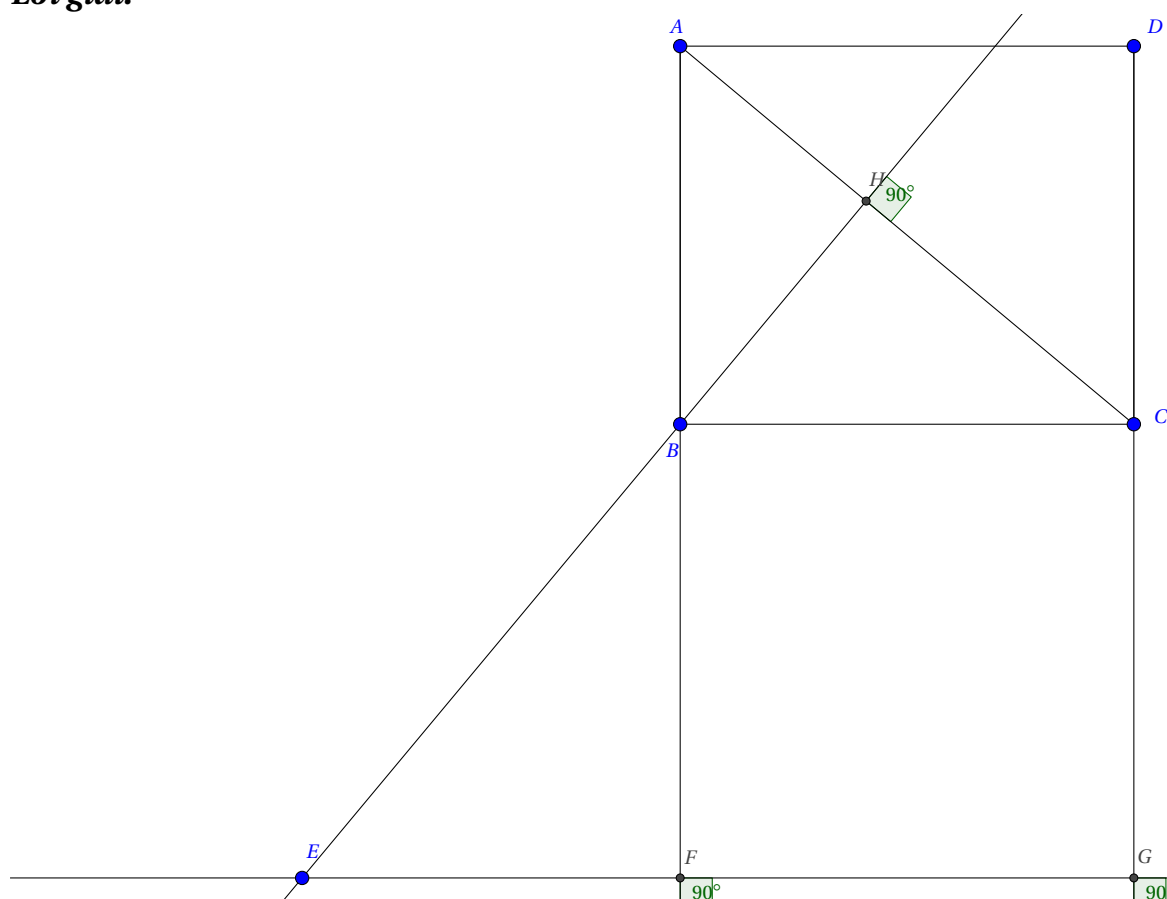
Bài toán 102. Cho hình vuông $ABCD$ có M, N là trung điểm AB, BC . AN cắt DM tại $E(-1; -4)$. Trên đường chéo BD lấy điểm $H(2; -5)$ sao cho $BD = 4BH$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông. Biết D có hoành độ dương.

Lời giải:



Tính chất 38. Cho hình chữ nhật $ABCD$. H là chân đường cao từ B xuống AC . Trên tia đối BH lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Đường thẳng qua E vuông góc với AB cắt CD tại G . Khi đó tam giác EGD vuông cân tại G .

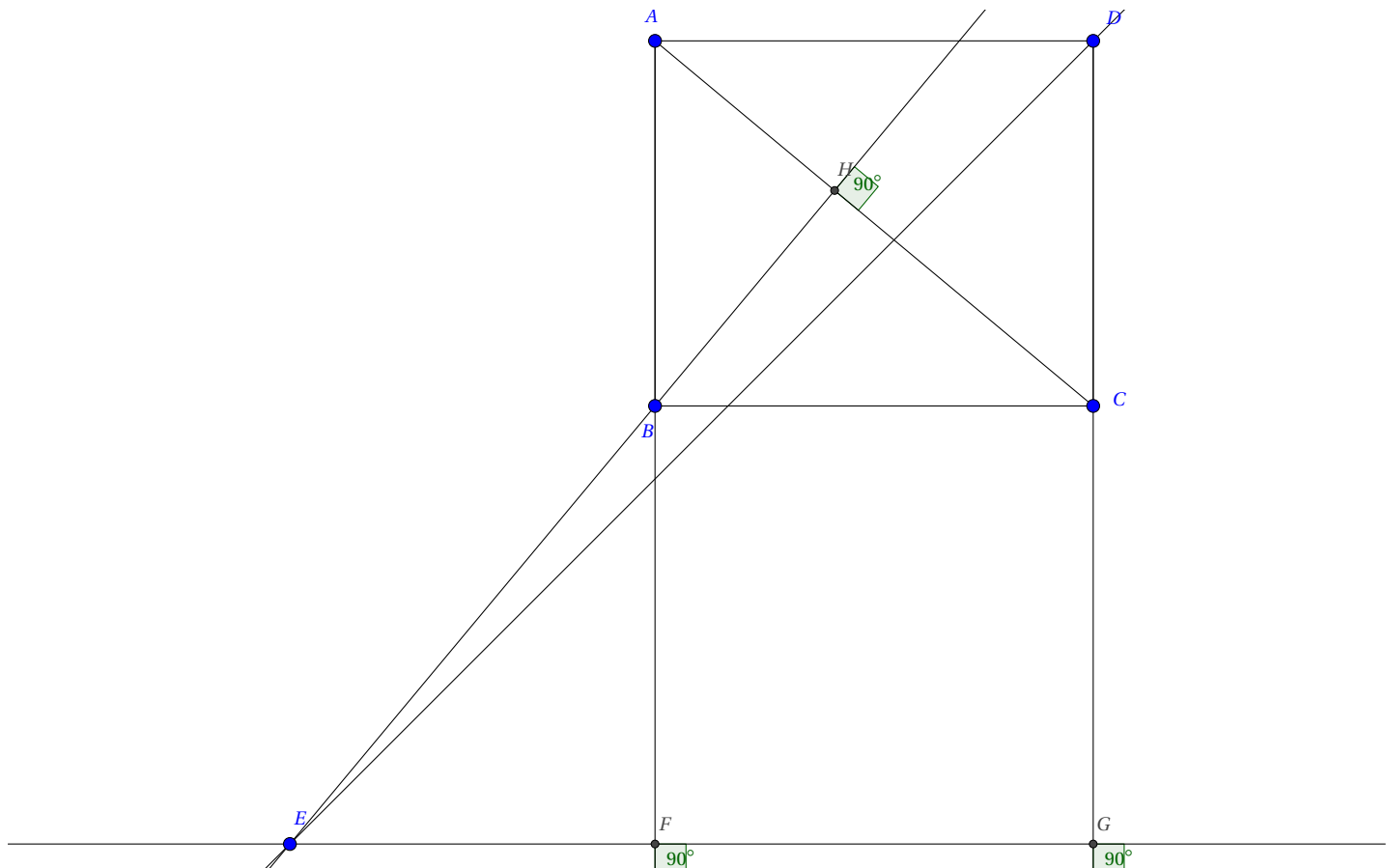
Lời giải:



Chú ý $\triangle BFE = \triangle ADC$ nên suy ra $EF = DC$, $BF = AD = BC$ do đó $EG = GD$ hay tam giác EGD vuông cân tại G .

Bài toán 103. Hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6, $A(2;0)$, H là hình chiếu vuông góc của B trên AC , điểm E thuộc tia đối của tia BH sao cho $BE = AC$, $DE: x - y = 0$. Tìm C biết B có tung độ dương.

Lời giải:



Gọi F, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của E lên AB, CD . Ta có $\triangle EBF = \triangle ACB$ nên $BF = BC$ và $EF = AB = CD$. Nên $BCGF$ là hình vuông. Do đó $EG = EF + FG = CD + GC = DG$ nên tam giác GDE vuông cân tại G . Suy ra $\angle ADE = 45^\circ$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên DE . Ta có

$$AD = \sqrt{2}AK = \sqrt{2}d(A, DE) = 2 \quad (1)$$

$D \in DE \Rightarrow D(d; d)$. Ta có $(1) \Leftrightarrow (d-2)^2 + d^2 = 4 \Leftrightarrow d \in \{0; 2\}$.

Trường hợp 1: $d = 2$. Ta có $D(2; 2)$. Đường thẳng AB qua A và vuông góc với AD nên có phương trình $AB: y = 0$. Trường hợp này không thỏa mãn vì B có tung độ dương.

Trường hợp 2: $d = 0$. Ta có $D(0; 0)$. Đường AB qua A và vuông góc với AD nên có phương trình $AB: x = 2$. $B \in AB \Rightarrow B(2; b), b > 0$.

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 6 \Leftrightarrow AB = 3$$

$$\Leftrightarrow |b| = 3 \Leftrightarrow b = 3 \text{ hoặc } b = -3 \text{ (loại)}$$

Do đó $B(2; 3) \Rightarrow C(0; 3)$.

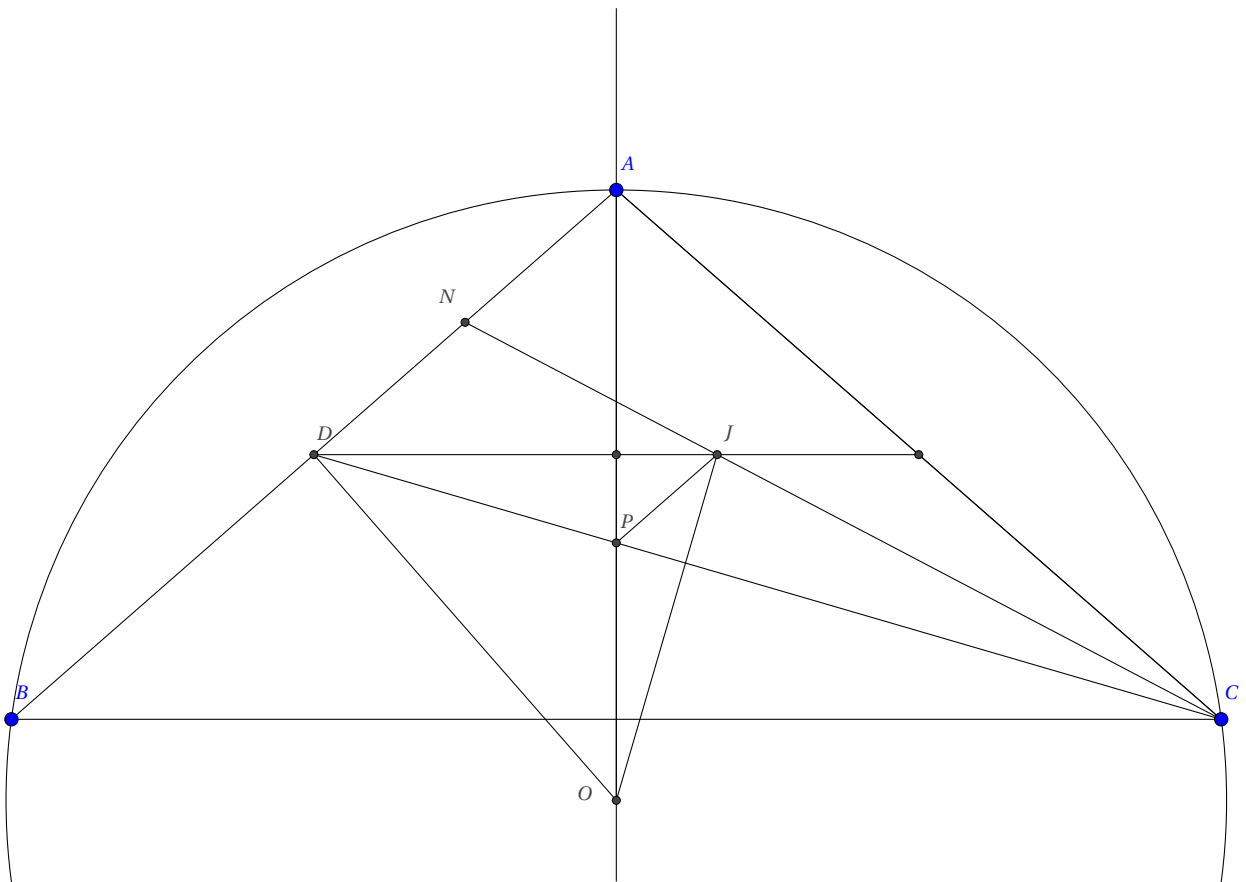
Bài toán 104. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình $AD: x - 2y + 3 = 0$. Trên đường thẳng qua B và vuông góc với đường chéo AC lấy điểm E sao cho $BE = AC$ (D và E nằm về hai phía so với đường thẳng AC). Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết điểm $E(2; -5)$ và đường thẳng AB đi qua điểm $F(4; -4)$ và điểm B có hoành độ dương.

Đáp số $A(1; 2), B(2; 0), C(6; 2), D(5; 4)$.

Lời giải:

Tính chất 39. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi D là trung điểm của AB và J là trọng tâm tam giác ADC . Khi đó $CD \perp JO$ hay P là trực tâm tam giác DOJ .

Lời giải:



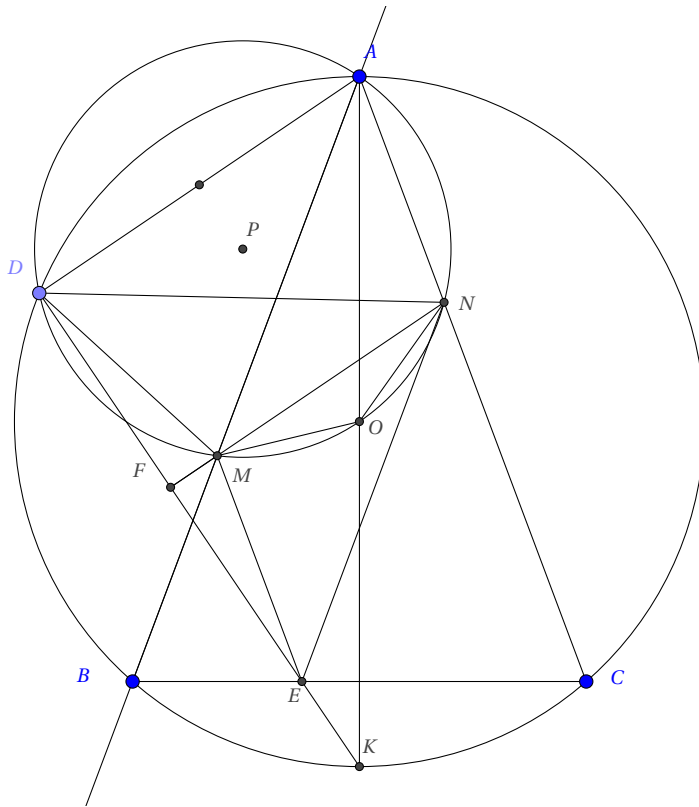
Chú ý P là trọng tâm tam giác ABC suy ra $PJ \parallel DN$. Mà $OD \perp DN$ nên $PJ \perp DO$, mặt khác $OP \perp DJ$ do đó P là trực tâm tam giác DJO . Vậy $DC \perp OJ$

Bài toán 105. Tam giác ABC cân tại A . D là trung điểm của AB tâm đường tròn ngoại tiếp ABC là $I(\frac{11}{3}; \frac{5}{3})$ trọng tâm ACD là $J(\frac{13}{3}; \frac{5}{3})$ và CD qua $M(3; -1)$, AB qua $N(-3; 0)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ABC biết $y_A > 0$.

Tính chất 40. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . AK là đường kính. D là điểm trên cung BC chứa A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt các cạnh AB, AC tại M, N . Nối DK cắt BC tại E . Khi đó

1. $DANM$ là hình thang cân.
2. MN là trung trực của DE
3. Bài toán vẫn còn đúng khi D di động trên (O)

Lời giải:

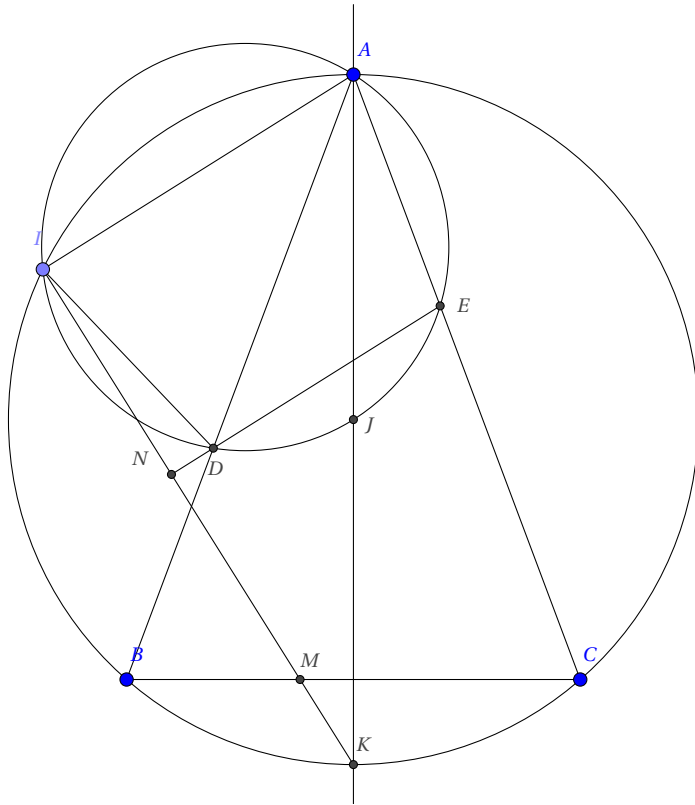


1. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DAO . Chú ý AO là phân giác MAN nên $OM = ON$ suy ra OP là trung trực MN (vì M không trùng N). Tam giác DOA cân tại O nên $OP \perp DA$. Do đó tứ giác $DANM$ là hình thang hay là hình thang cân.

2. Ta sẽ chứng minh $AMEN$ là hình bình hành. Các bạn sẽ được chứng minh ở tập 2.

Bài toán 106. Cho tam giác cân ABC nội tiếp đường tròn (C) , AK là đường kính $I(-3;0)$ nằm trên cung nhỏ AB không chứa C , nối IK cắt BC tại M . Đường trung trực MI cắt AB, AC tại $D(-1;-1), E(3;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC .

Lời giải:



Áp dụng tính chất trên ta có A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IED và IK vuông góc với ED.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác IDE : $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}$. Tâm đường tròn ngoại tiếp J của tam giác ABC là chính giữa cung DE và khác phía đối với I nên $J(2;0)$. Đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với DE nên có phương trình $x + y + 3 = 0$. Ta có A, K đối xứng nhau qua J mà $K \in x + y + 3 = 0$ nên $A \in x + y - 7 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2} \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;5).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm J bán kính JA nên có phương trình $(x - 2)^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng AD đi qua A, D nên có phương trình AD : $2x - y + 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

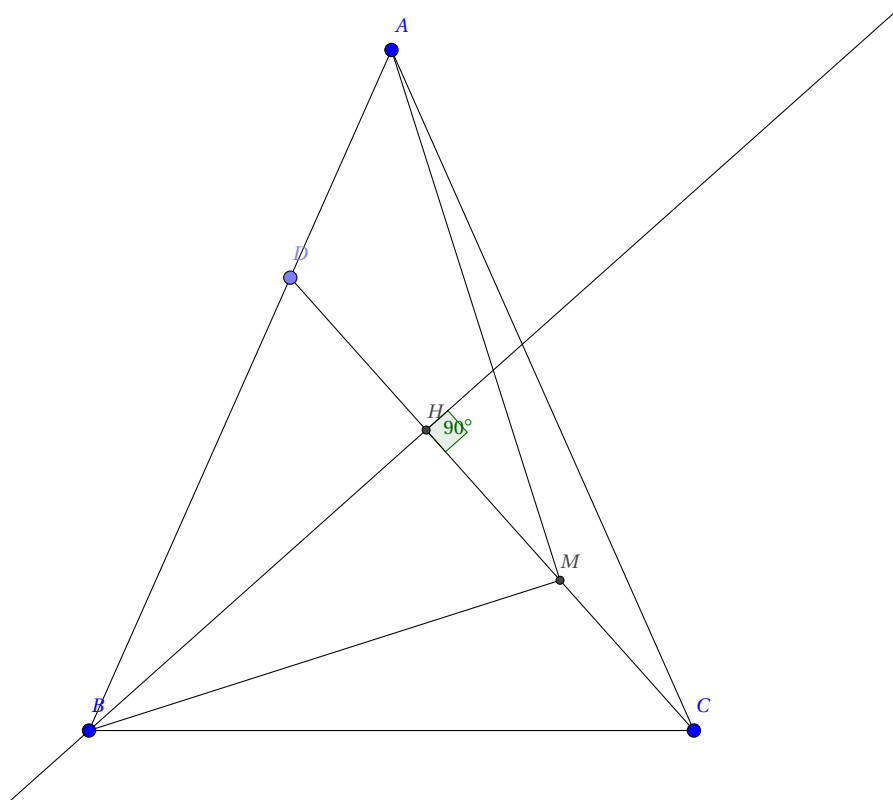
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 25 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -3).$$

Đường thẳng AE đi qua A, E nên có phương trình AE : $2x + y - 9 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6; -3).$$

Tính chất 41. Cho tam giác ABC cân tại A, D là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AD$. Hạ BH vuông góc với CD. Gọi M là trung điểm CH. Khi đó $AM \perp BM$.

Lời giải:



Thật ra tính chất này chính chất của hình chữ nhật mà được dấu hình!

Bài toán 107. Cho tam giác ABC cân tại A $A(-1;3)$, D là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên CD. Cho $M(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2})$ là trung điểm CH và B thuộc đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$. Tìm tọa độ B, C.

Lời giải:

$$\text{Điểm } B \in d \Rightarrow B(b, -b-7), \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow D\left(\frac{b-2}{3}, -\frac{b+1}{3}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{MD} = \left(\frac{2b-7}{6}, -\frac{2b-7}{6}\right)$. Vì $CD \geq AC = AB > BD \geq DH$ nên D không trùng M hay $b \neq \frac{7}{2}$. Đường thẳng CD qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{6}{2b-7} \cdot \overrightarrow{MD} = (1; -1)$ nên có phương trình

$$CD: x + y + 1 = 0.$$

Đường thẳng BH qua B và vuông góc với CD nên có phương trình

$$BH: x - y - 7 - 2b = 0.$$

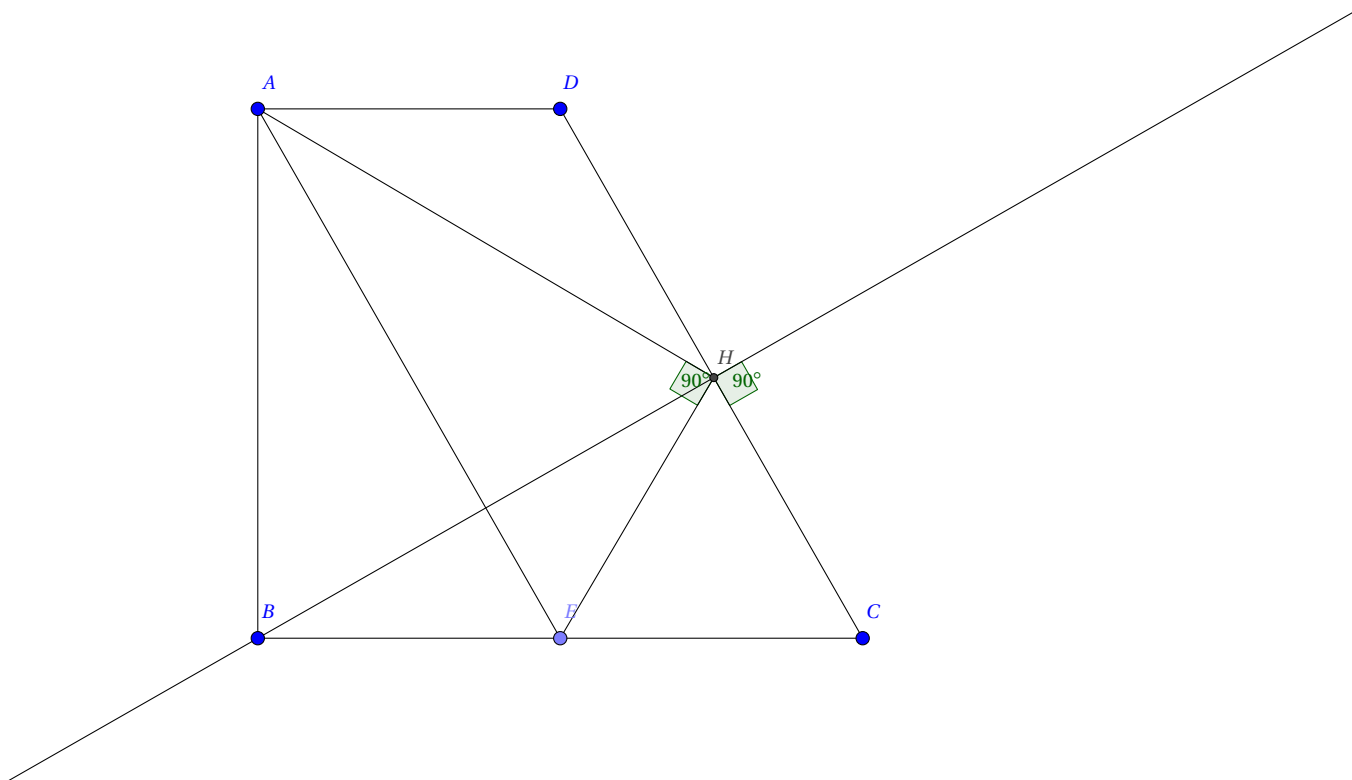
H là giao điểm của CD với BH nên $H(b+3, -b-4)$. M là trung điểm của CH nên $C(-b-2, b+1)$. Tam giác ABC cân tại A nên

$$\begin{aligned} AB^2 = AC^2 &\Leftrightarrow (b+1)^2 + (b+10)^2 = (b+1)^2 + (b-2)^2 \\ &\Leftrightarrow b = -4. \end{aligned}$$

Vậy $B(-4; -3)$ và $C(2; -3)$.

Tính chất 42. Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A, B và $BC = 2AD$. Gọi E là trung điểm của BC. H là hình chiếu của B lên DC. Khi đó $AH \perp HE$.

Lời giải:



Để thấy $ADCE$ là hình bình hành, nên $AE \parallel CD$. Mà $BH \perp DC$ do đó $BH \perp AE$. Vì tam giác BHC vuông tại H , M là trung điểm BC nên $BE = HE$. Từ đó suy ra AE là trung trực của BH , do đó $\triangle ABE = \triangle AHE$. Vậy $AH \perp HE$.

Chương 2

BÀI TOÁN LIÊN QUAN YẾU TỐ BA ĐỈNH CƠ BẢN

2.1 Bài toán AHO

Bài toán 108. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, trực tâm $H(-31;41)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(16;-18)$. Tìm tọa độ B, C.

2.2 Bài toán AHG

Bài toán 109. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;-2)$, trọng tâm $G(0;1)$ và trực tâm $H\left(\frac{1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2.3 Bài toán AHM

- Nếu M là trung điểm của BC ta quy về bài toán AHG.

Bài toán 110. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;-2)$, trung điểm cạnh BC có tọa độ $M(-1;\frac{5}{2})$ và trực tâm $H\left(\frac{1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- Nếu M không là trung điểm cạnh BC chẳng hạn M là trung điểm cạnh AC.

Bài toán 111. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;3)$, trung điểm cạnh AC có tọa độ $M(4;1)$ và trực tâm $H(2;1)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2.4 Bài toán AGO

Thật chất bài toán này là biến hình của bài toán AHO bằng cách sử dụng $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$ ta quy về bài toán AHO

Bài toán 112. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;3)$, trọng tâm $G(\frac{8}{3}; \frac{1}{3})$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $K(3;0)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C .

2.5 Bài toán AIO

Bài toán 113. Tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp $I(4;5)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $J(6;6)$, đỉnh $A(2;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C .

2.6 Bài toán HMD

Bài toán 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đường cao AH , trung tuyến CM và phân giác trong BD . Biết $H(-4;1)$, $M(\frac{17}{5}; 12)$ và BD có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC .

(Trích đề thi thử THPT Hậu Lộc 2, Thanh Hóa, năm 2013)

Bài toán 115. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có điểm $M(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$ là trung điểm của cạnh AB , điểm $H(-2; 4)$ và điểm $I(-1; 1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm C .

(khối D 2013)

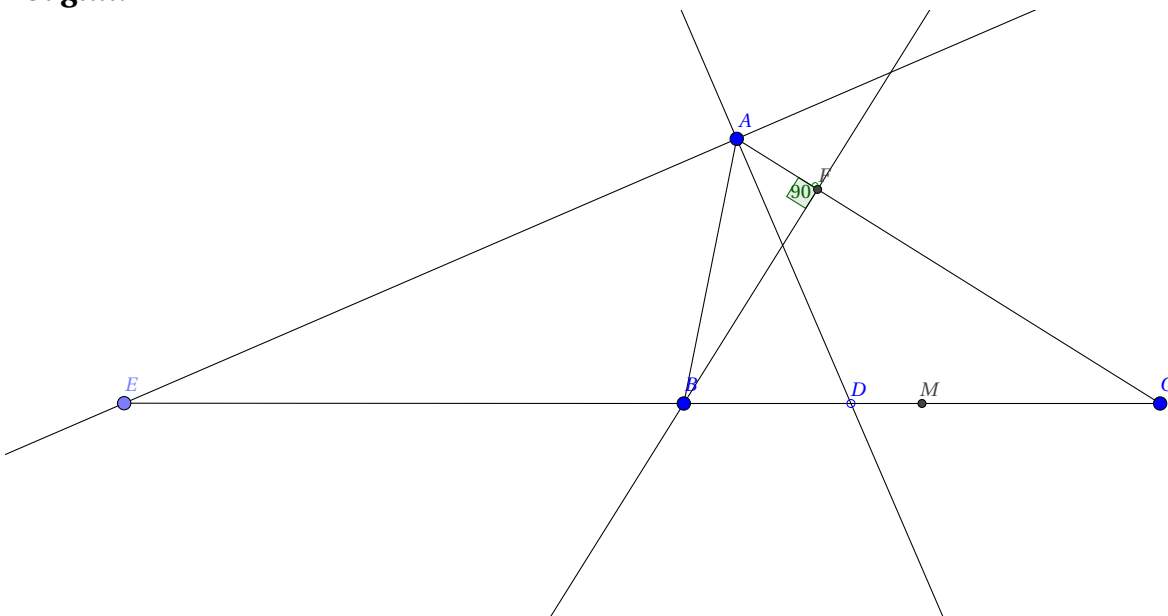
Mở rộng bài toán HMD?

Bài toán 116. Cho tam giác ABC có H là chân đường cao, D là chân đường phân giác, M là trung điểm một cạnh. Cho tọa độ cụ thể các điểm M, D, H , hãy xác định tọa độ 3 đỉnh của tam giác? Câu trả lời là tùy vào vị trí các điểm mà ta có thể giải được hoặc không giải được. Cụ thể:

Bài toán 117. H, D thuộc cùng một cạnh và M thuộc cạnh khác. Đây là bài toán tương tự như bài D-2013.

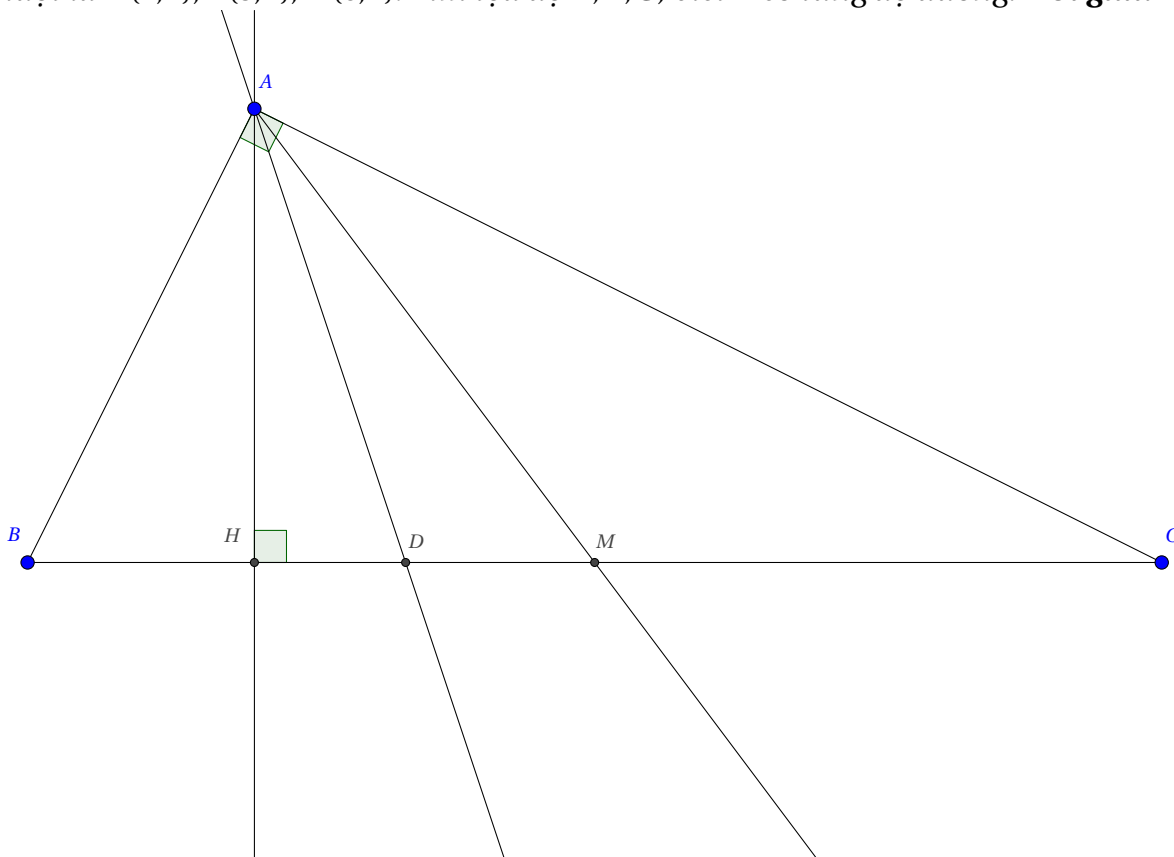
Bài toán 118. M, D thuộc cùng một cạnh và H thuộc cạnh khác.

Lời giải:



Khi H, M, D cùng thuộc một cạnh thì như trên đã nói, bài toán không giải được. Nhưng trong trường hợp đặt biệt ta vẫn có thể giải được, chẳng hạn như sau:

Bài toán 119. Cho tam giác ABC vuông tại A . Chân đường cao, phân giác, trung tuyến xuất phát từ A lần lượt là $H(1;1), D(3;1), M(6;1)$. Tìm tọa độ A, B, C , biết A có tung độ dương. **Lời giải:**



Ta có $\angle A_2 = \angle DAB - \angle A_1 = \angle DAC - \angle ACB = \angle DAC - \angle A_4 = \angle A_3$. Nên AD là phân giác góc $\angle HAM$ (hoặc do M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên AH, AM đẳng giác hay AD là phân giác góc $\angle HAM$). Do đó

$$\frac{AH}{AM} = \frac{HD}{MD} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

Ta có $BC: y=1, AH: x=1, A(1; a), a > 0$. Thế thì

$$(1) \Leftrightarrow 9(a-1)^2 = 4(25 + (a-1)^2) \Leftrightarrow a = 1 + 2\sqrt{5}.$$

Do đó $A(1; 1 + 2\sqrt{5})$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình

$$(S): (x-6)^2 + (y-1)^2 = 45.$$

Vì B, C là giao điểm của BC với (S) nên tọa độ của B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-1)^2 = 45 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 3\sqrt{5} \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = 6 + 3\sqrt{5} \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó $B(6 - 3\sqrt{5}; 1), C(6 + 3\sqrt{5}; 1)$ hoặc $B(6 + 3\sqrt{5}; 1), C(6 - 3\sqrt{5}; 1)$.

Chương 3

GIẢI ĐỀ THI THỬ THÔNG QUA PHÁT HIỆN TÍNH CHẤT

Bài toán 120. Cho hình chữ nhật ABCD có điểm $A(-3; 1)$ và C thuộc đường thẳng $d: x - 2y - 5 = 0$. Điểm E là giao điểm thứ hai của DC và đường tròn tâm B bán kính BD (E khác D). Hình chiếu vuông góc của D xuống BE là điểm $N(6; -2)$. Tìm tọa độ điểm B và C.

Lời giải:

Bài toán 121. Tam giác ABC vuông tại A, $B(-3; 1)$, điểm C thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 1 = 0$, điểm D đối xứng với B qua trung điểm AC, điểm E đối xứng với D qua C, điểm $H\left(\frac{13}{5}; \frac{9}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của E trên AD. Tìm tọa độ các điểm A, C.

Lời giải:

Gọi M là giao điểm của BC với EH.

- Ta có $AB \parallel EC$, $AB = CD = EC$, $\angle ABD = 90^\circ$ nên tứ giác ABEC là hình chữ nhật. Suy ra $\angle BEC = 90^\circ$. Điểm C là trung điểm của ED và $CM \parallel HD$ nên CM là đường trung bình của tam giác EDH. Do đó M là trung điểm của EH. Lại có $EH \perp BC$ nên E và H đối xứng qua BC. Suy ra $\angle BHC = \angle BEC = 90^\circ$.

- $C \in d \Rightarrow C(1 - 2c; c)$, $\vec{BH} = \left(\frac{28}{5}; \frac{4}{5}\right)$, $\vec{HC} = \left(-2c - \frac{8}{5}; c - \frac{9}{5}\right)$.

$$BH \perp HC \Leftrightarrow \vec{BH} \cdot \vec{HC} = 0 \Leftrightarrow -13c - 13 = 0 \Leftrightarrow c = -1.$$

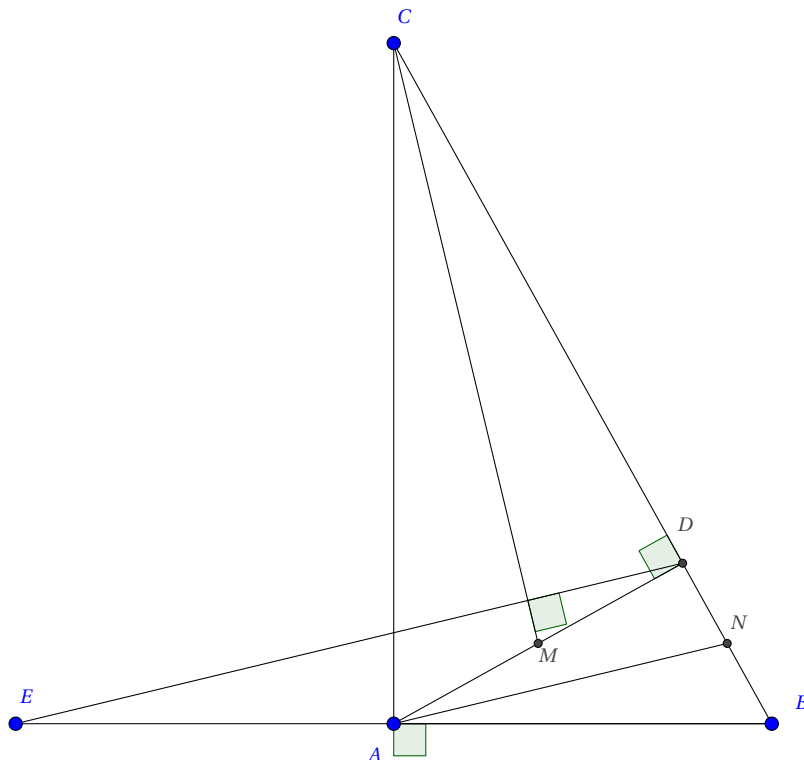
Do đó $C(3; -1)$.

- Ta có $BC: x + 3y = 0$, $EH: 3x - y - 6 = 0$. M là giao điểm của EH với BC nên $M\left(\frac{9}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. Điểm M là trung điểm của EH nên $E(1; -3)$, điểm C là trung điểm của ED nên $D(5; 1)$.
- Điểm F là trung điểm BD nên $F(1; 1)$, F là trung điểm AC nên $A(-1; 3)$

Vậy $A(-1; 3)$, $C(3; -1)$.

Tính chất 43. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AD là đường cao. M là trung điểm AD. Gọi E là điểm đối xứng của B qua A. Khi đó $ED \perp CM$.

Lời giải:



Gọi N là trung điểm BD . Khi đó áp dụng tính chất hình chữ nhật tổng quát ta có $CM \perp AN$. Vì AN là đường trung bình của tam giác EBD nên $ED \parallel AN$ suy ra $CM \perp ED$.

Bài toán 122. Tam giác ABC cân tại A , điểm A thuộc đường thẳng $d: 3x - 5y + 15 = 0$, D là trung điểm của BC , E là hình chiếu vuông góc của D trên AC , $F(7, -3)$ là trung điểm của DE , đường thẳng $BE: 2x - 9y - 36 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có $AF \perp BE$.

Đường thẳng AF qua A vuông góc với BE nên có phương trình $AF: 9x + 2y - 57 = 0$. A là giao điểm của d với AF nên $A(5; 6)$. Ta có

$$BE: \begin{cases} x = 9t \\ y = -4 + 2t. \end{cases}$$

Điểm $E \in BE \Rightarrow E(9e; -4 + 2e)$, $\overrightarrow{AE} = (9e - 5; 2e - 10)$, $\overrightarrow{FE} = (9e - 7; 2e - 1)$. Ta có

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \Leftrightarrow e \in \left\{ 1; \frac{9}{17} \right\}.$$

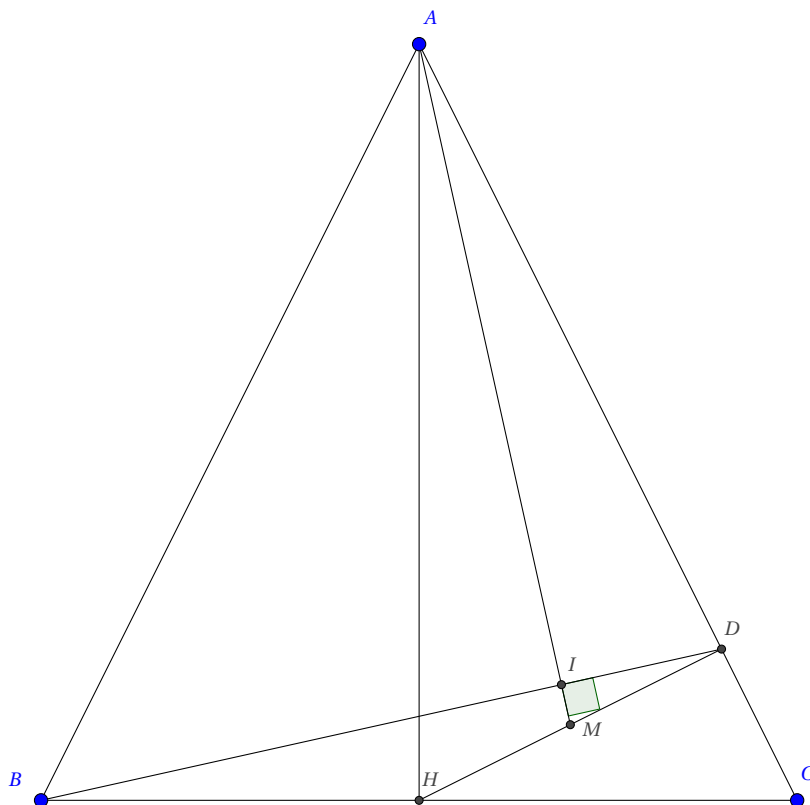
Trường hợp 1: $e = 1$. Ta có $E(9; -2) \Rightarrow D(5; -4)$. Từ đó có $BC: y = -4$. Do đó $B(0; -4)$ và $C(10; -4)$.

Trường hợp 2: $e = \frac{9}{17}$. Ta có $E\left(\frac{81}{17}; -\frac{50}{17}\right) \Rightarrow D\left(\frac{157}{17}; -\frac{52}{17}\right)$. Từ đó có $BC: 77x + 36y - 601 = 0$. Do đó $B\left(\frac{149}{17}; -\frac{314}{153}\right)$ và $C\left(\frac{165}{17}; -\frac{622}{153}\right)$.

Bài toán 123. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm BC , $D(2; -3)$ là hình chiếu của H lên AC , M là trung điểm HD và $I\left(\frac{16}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ là giao điểm của AM và BD . Đường thẳng AC có phương trình $x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(Tĩnh Gia lần 1)

Lời giải:

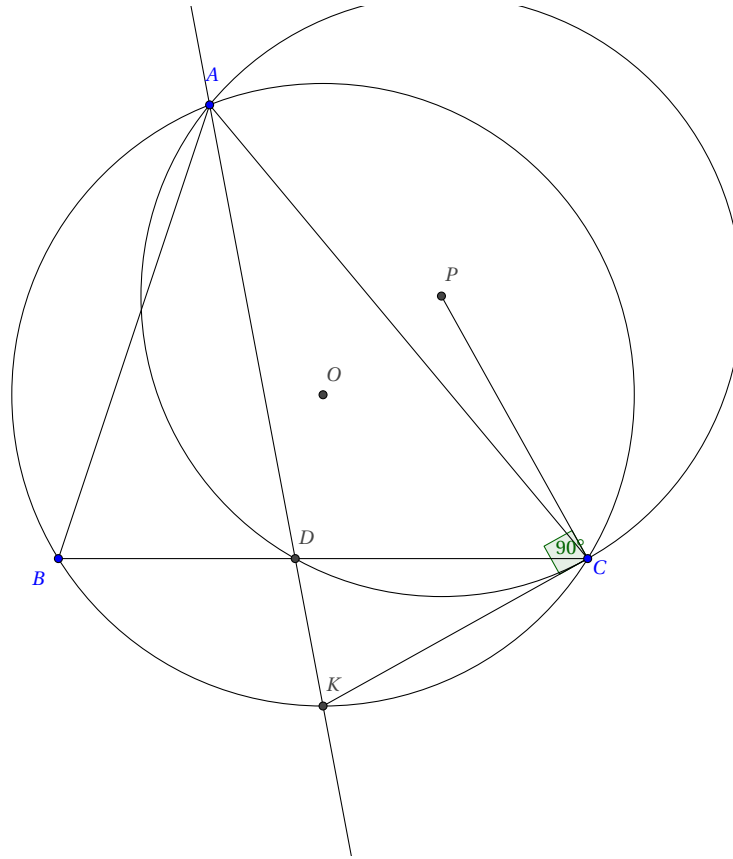


Bài toán 124. Trong Oxy cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H lên AC. Gọi E là trung điểm của HD. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $AH = BC$, $D(1; 1)$, $x_H > 2$ và đường thẳng $AE : x + y - 3 = 0$

(chuyên Huỳnh Mẫn Đạt lần 1)

Tính chất 44. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác AD cắt (O) tại K. Khi đó EC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC. Hay $KC \perp PC$, ở đây P là tâm ngoại tiếp tam giác ADC.

Lời giải:

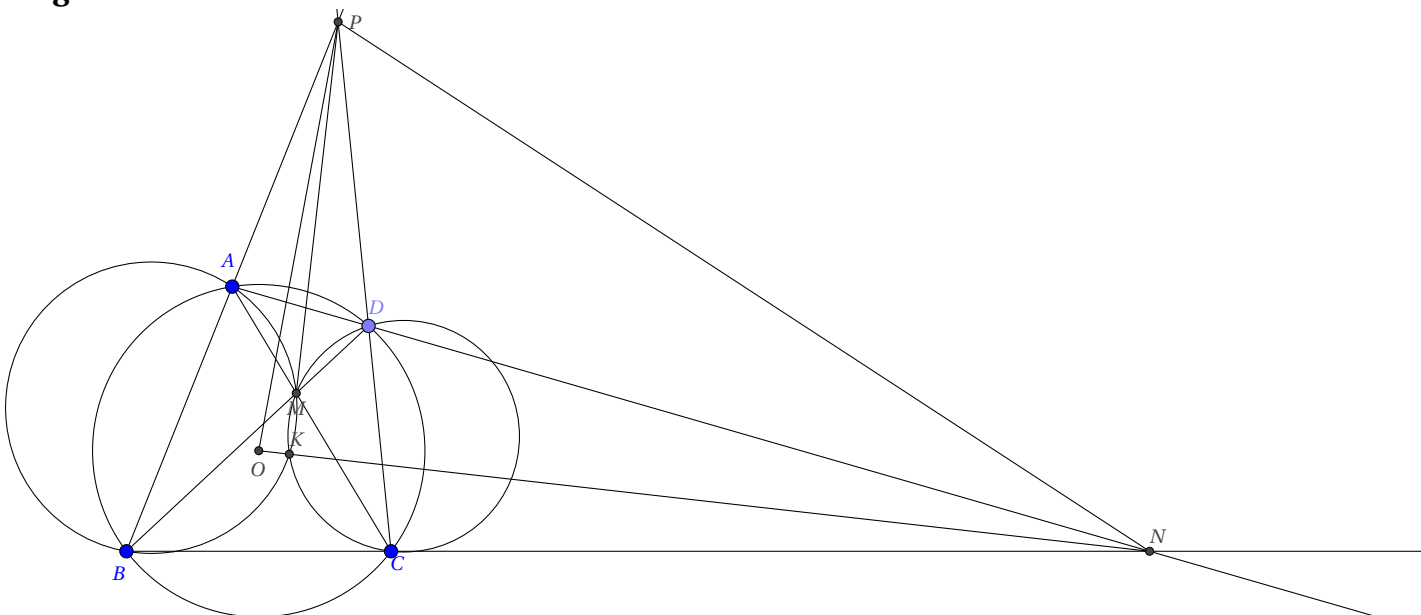


Ta có $\angle KCD = \angle DAB = \angle DAC$ do đó KC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC, suy ra $KC \perp PC$.

Bài toán 125. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (S) có tâm $I(3;4)$, phân giác trong góc A cắt BC và đường tròn (S) lần lượt tại D và E (E khác A), điểm $J\left(\frac{14}{3}; \frac{17}{3}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD, $CE: x - 2y - 5 = 0$. Tìm A, B, C.

Định lý Brocard: Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối không song song nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AC và BD; AD và BC; AC và BD. Chứng minh rằng O là trực tâm tam giác NMP.

Lời giải:



Gọi K là giao điểm (ABM) và (CDM) Vì P nằm trên trục đẳng phương của 2 đường tròn này nên P, K, M thẳng hàng. Xét tứ giác OADK có: $\angle AKD = \angle AKM + \angle MDK = \angle ABD + \angle ACD = \angle AOD$ Nên

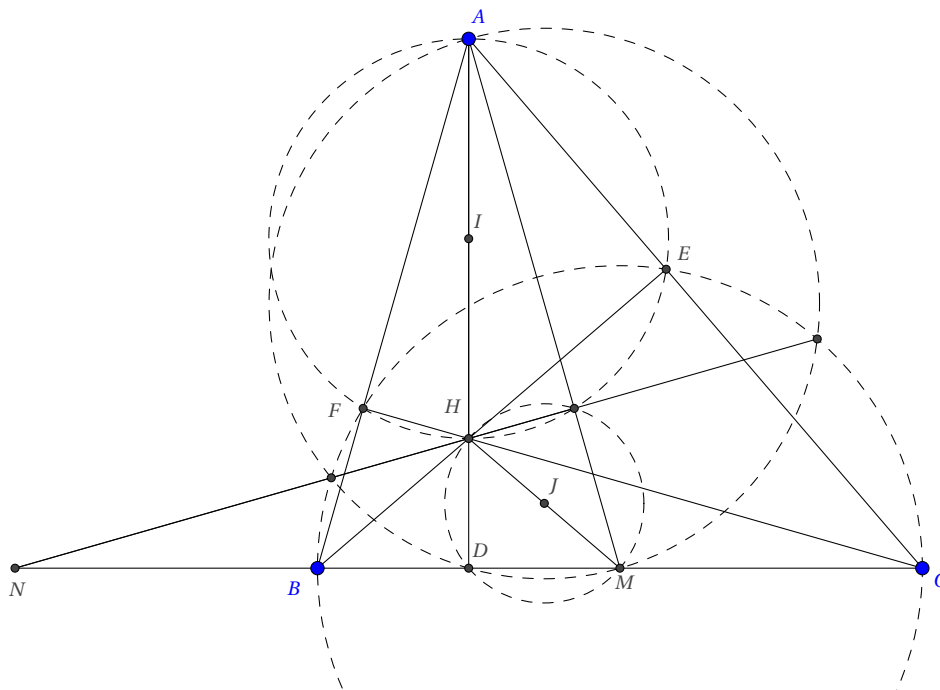
$OADK$ là tứ giác nội tiếp, tương tự với $OKCB$ Suy ra O, K, N cũng thẳng hàng (cùng nằm trên trục đẳng phương của (OAD) và (OBC)). Mặt khác: $\angle PKN = \angle PKD + \angle DKN = \angle MCD + \angle OAD = \angle ABM + \angle OAD = \angle AKM + \angle AKO = \angle OKP$ Suy ra $ON \perp MP$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $OP \perp MN$. Suy ra O là trực tâm tam giác MNP . $\square$

Cách 2: Dùng cực và đối cực.

Chú ý MP là đường đối cực của N đối với (O) . Nên $MP \perp ON$. Ta có hệ quả sau:

Tính chất 45. Cho $\triangle ABC$ với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm BC và $N = EF \cap BC$ Khi đó $NH \perp AM$ hay H là trực tâm tam giác AMN .

Lời giải:



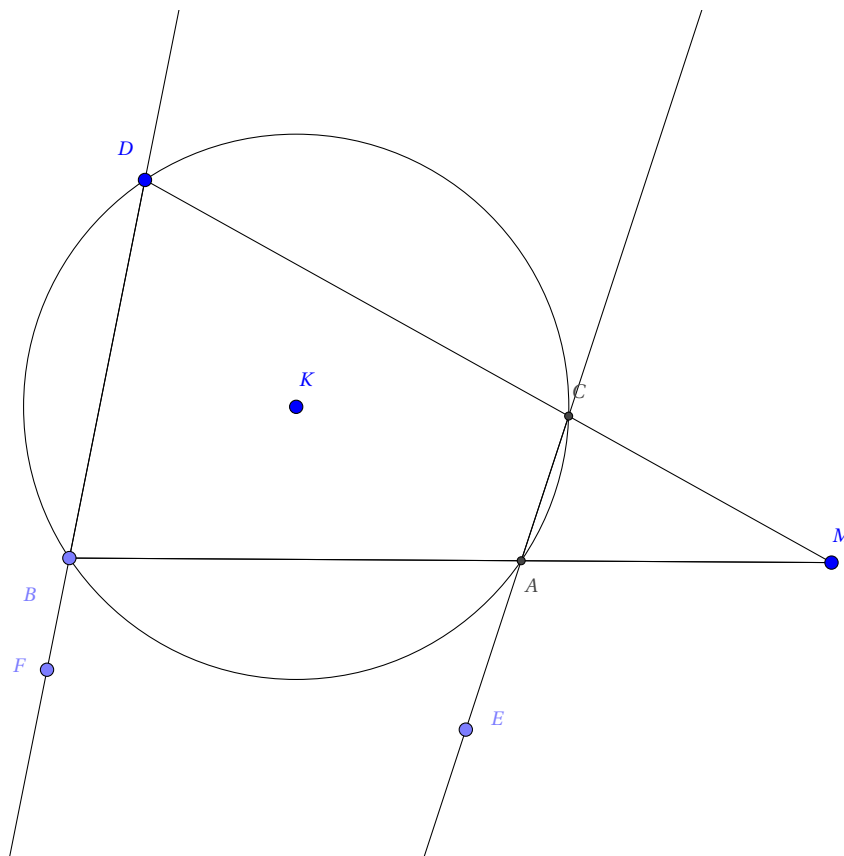
cách 1: hệ quả định lý Brocard.

cách 2: Gọi I, J lần lượt là trung điểm AH, HM Gọi $(\omega_1), (\omega_2)$ lần lượt là đường tròn $(I, \frac{AH}{2}), (J, \frac{HM}{2})$ vì $(NDBC) = -1$ và M là trung điểm BC nên $\overline{ND} \cdot \overline{NM} = \overline{NB} \cdot \overline{NC} = \overline{NE} \cdot \overline{NF}$ do đó N thuộc trục đẳng phương của (ω_1) với (ω_2) mà $H = (\omega_1) \cap (\omega_2) \Rightarrow NH \perp IJ \Rightarrow NH \perp AM$ $\square$

Cách 3: Chứng minh tứ giác $FEMD$ nội tiếp, N, H thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AM và đường tròn đường kính BC do đó $NH \perp AM$.

Bài toán 126. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(S): (x-5)^2 + (y-3)^2 = 5$. Từ điểm $M(3;0)$ kẻ các đường thẳng d_1 và d_2 . Đường thẳng d_1 cắt (S) tại hai điểm A và B ; đường thẳng d_2 cắt (S) tại hai điểm C và D . Tìm tọa độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ biết $E(\frac{33}{7}; -\frac{8}{7})$ thuộc đường thẳng AC ; $F(-1;0)$ thuộc đường thẳng BD .

Lời giải:

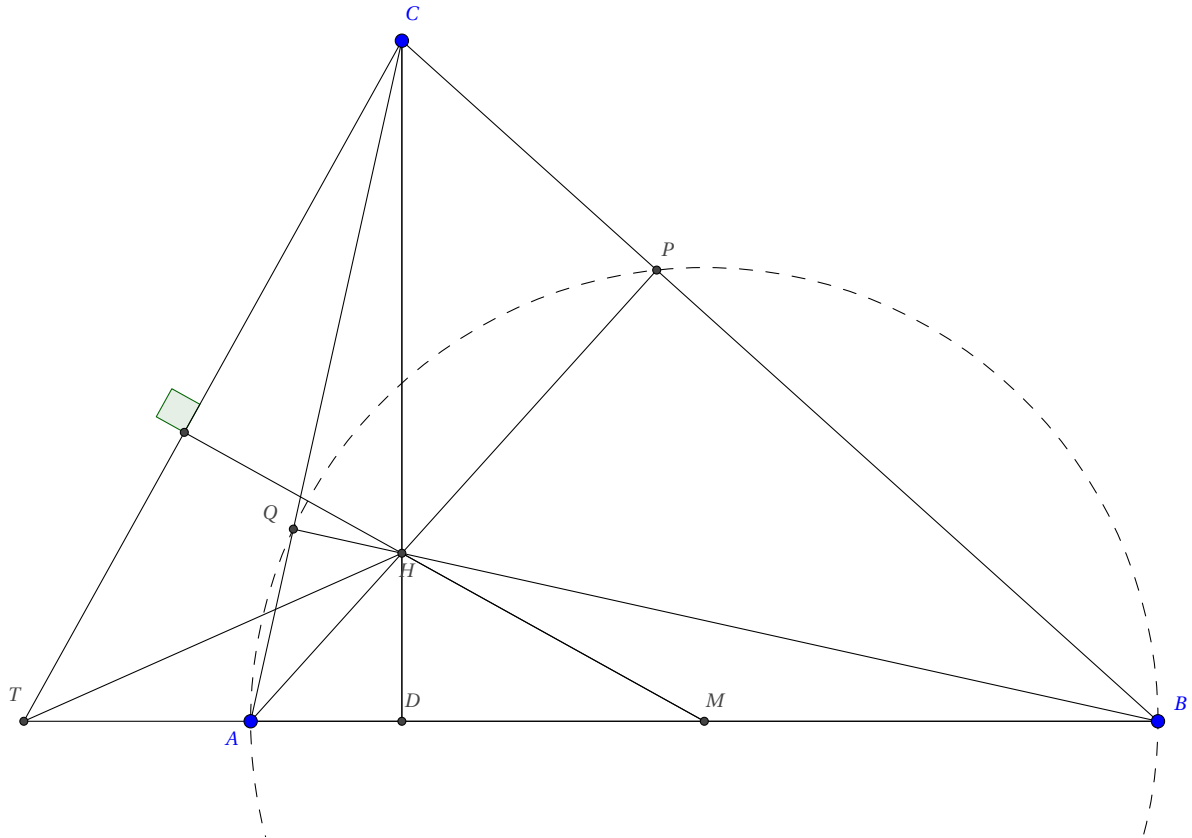


Đường tròn (S) có tâm $K(5;3)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$. Nhận xét M, E, F nằm ngoài đường tròn (S).

Bài toán 127. Cho $\triangle ABC$ với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm BC và N là giao điểm EF và BC . Cho $C(5; -4), N(-\frac{65}{2}; \frac{7}{2})$ và đường thẳng $AM: 9x - y - 3 = 0, H$ thuộc đường thẳng $d: x - 37 - 3 = 0$.
(sưu tầm trên face)

Bài toán 128. Cho tam giác ABC đường cao AP và BQ cắt nhau tại H . PQ và cắt đường thẳng AB tại T tìm tọa độ $A; B$ biết $C(5;3)$. M là trung điểm của $AB, M(3; -1) T(-1; 3)$.

Lời giải:



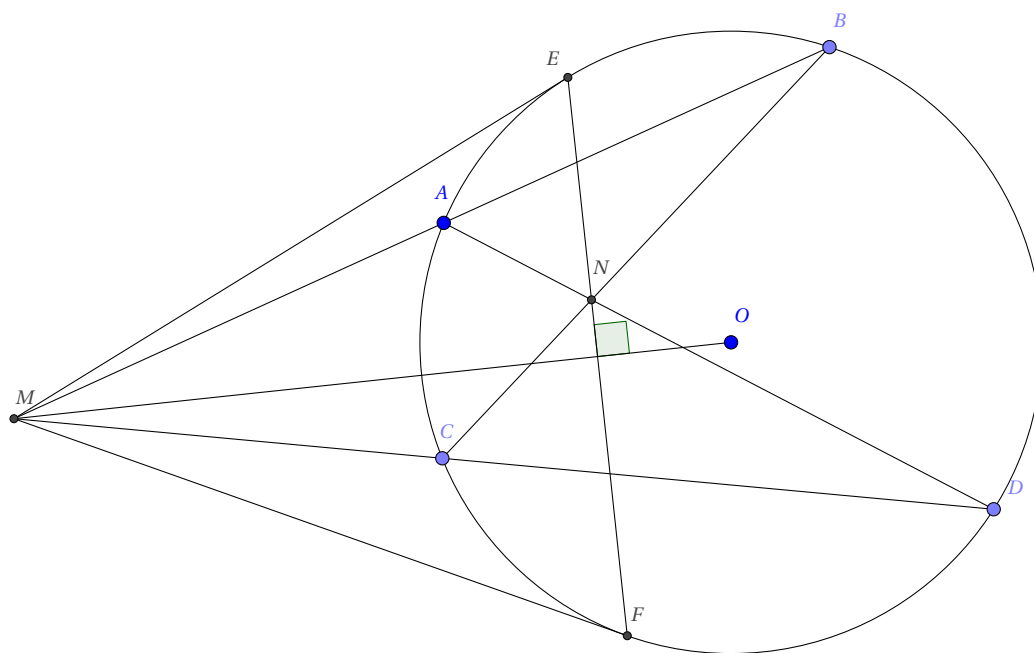
Áp dụng tính chất trên ta suy ra $MH \perp CT$ hay H là trực tâm của tam giác CTM . Do đó $H(1;3)$. Gọi E là điểm đối xứng của H qua trung điểm M . Khi đó $E(5;-5)$. Gọi K là trung điểm CE suy ra $K(4;0)$ và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác (ABC) : $(x-4)^2 + y^2 = 26$, đường thẳng TM đi qua T, M có phương trình $TM: x + y = 2$.

Vậy tọa độ B, C là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 26 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Hệ quả 4. Cho đường tròn (O) . M là điểm nằm ngoài đường tròn (O) . Từ M kẻ hai cát tuyến MAB, MCD . Giả sử AD, BC cắt nhau tại N . Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với MO cắt đường tròn tại E, F . Khi đó ME, MF là hai tiếp tuyến của (O) .

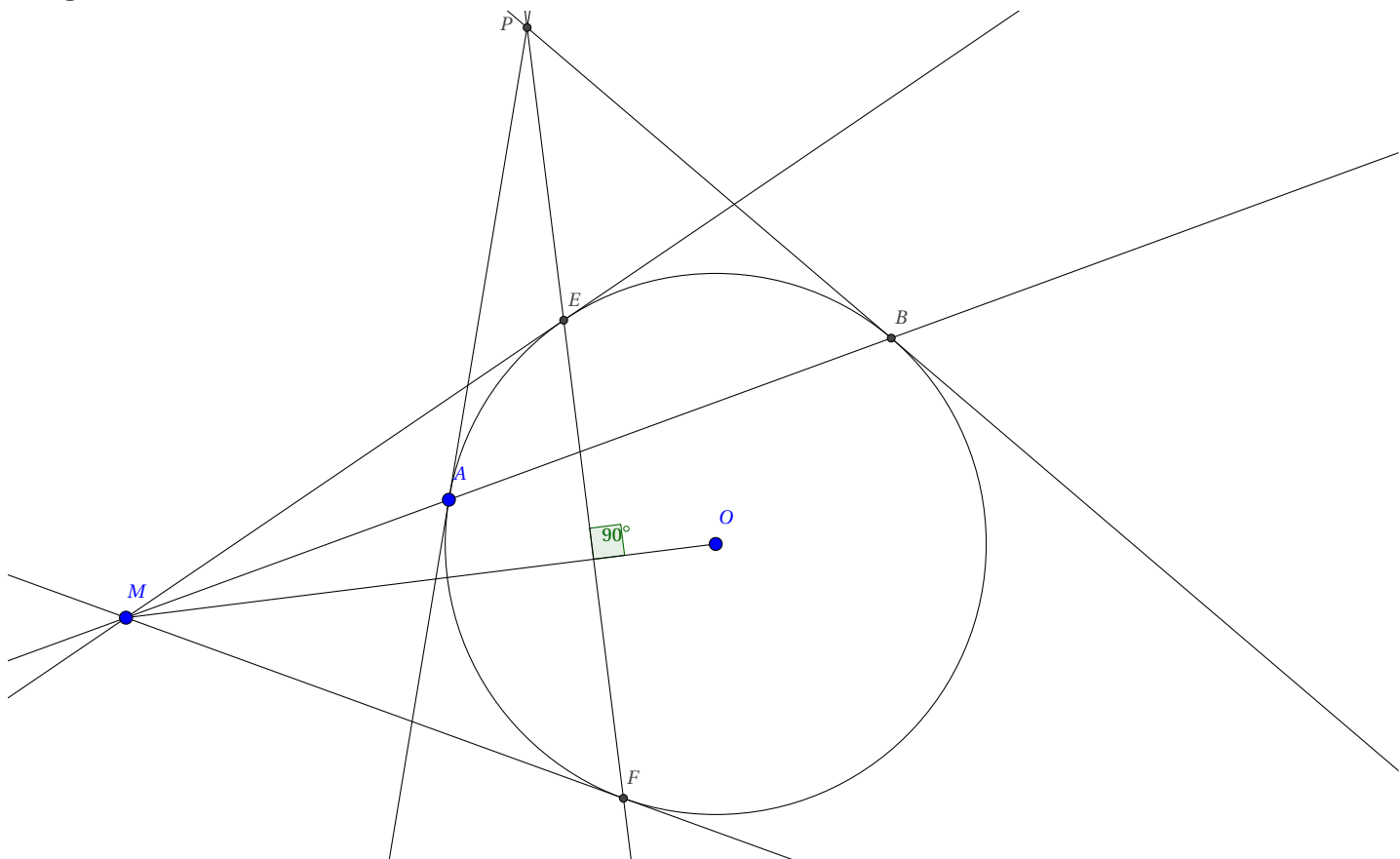
Lời giải:

Giả sử AC cắt BD tại P . Chú ý theo định lý Brocard ta có EF đi qua P .



Hệ quả 5. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O) . Từ M kẻ cát tuyến MAB . Từ A, B kẻ hai tiếp tuyến cắt nhau tại P . Qua P kẻ đường thẳng vuông góc với MO cắt đường tròn tại hai điểm E, F . Khi đó ME, MF là hai tiếp tuyến của (O) .

Lời giải:

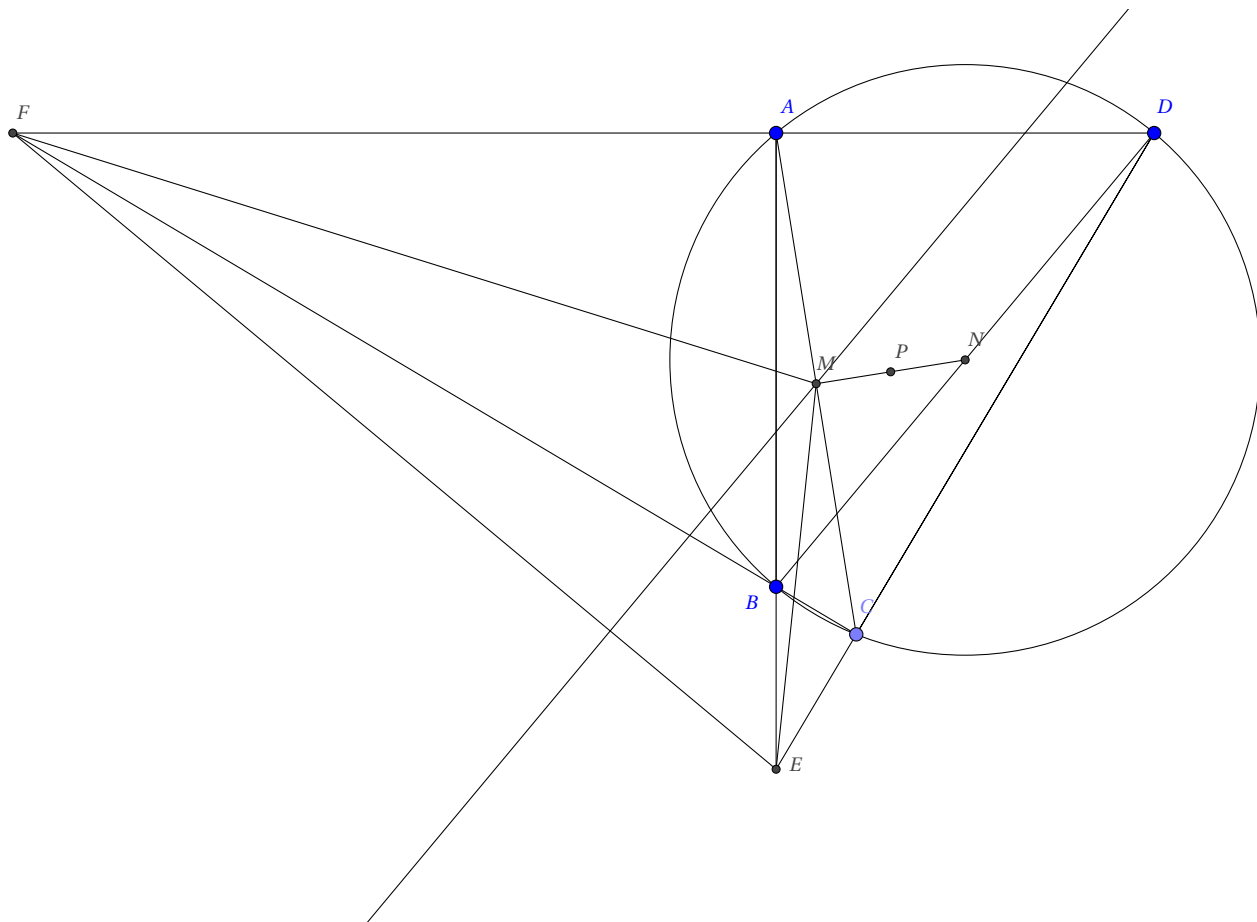


Cách 2: Từ M kẻ hai tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn (O) . Ta có EF là đường đối cực của M và AB là đường đối cực của P . Do AB đi qua M nên theo định lý La Hire ta có EF đi qua P . Mà đường đối cực của M vuông góc với OM . vậy nếu từ P kẻ đường thẳng vuông góc với OM và cắt (O) tại E, F thì ta có ME, MF là tiếp tuyến của (O) .

Bài toán 129. Trong mp tọa độ Oxy cho đường tròn $(T) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ với tâm I và điểm $A(4, 5)$. Từ A kẻ đường thẳng cắt (T) tại 2 điểm B, C . Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại K . Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với IA cắt (T) tại E, F . Xác định tọa độ E, F .

Bài toán 130. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $\angle A = 90^\circ$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại $E(-\frac{11}{2}; -3)$ và đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại F . Gọi M, N là trung điểm AC, BD . Đường cao hạ từ M của tam giác MEF có phương trình $d : 10x + 48y + 5 = 0$ và $P(\frac{3}{4}; -1)$ là trung điểm $MN, x_A < 0$. Tìm tọa độ A, B, C, D .

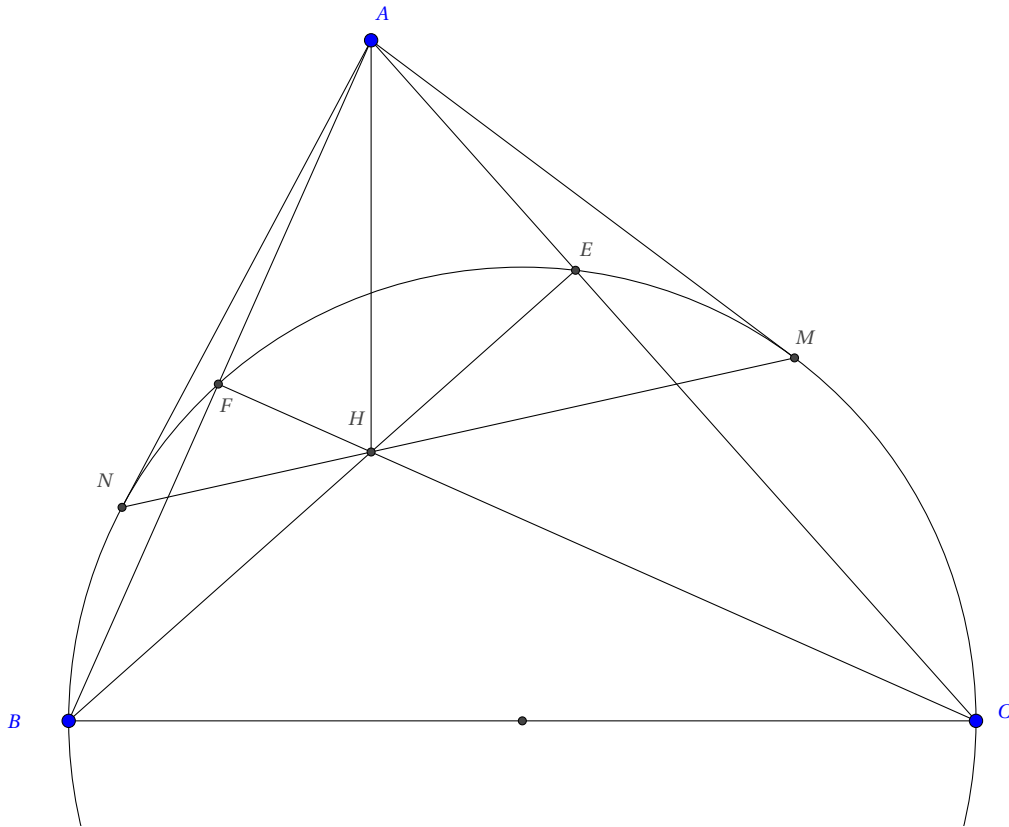
Lời giải:



Bài toán 131. Trong Oxy cho tam giác ABC . Gọi M, N là tiếp điểm của tiếp tuyến từ A đến đường tròn đường kính BC . Tìm tọa độ trực tâm H , biết phương trình đường cao $AH : x - 2y - 1 = 0$ và đường thẳng $MN : 2x + 3y + 5 = 0$.

(Sưu tầm trên face)

Lời giải:



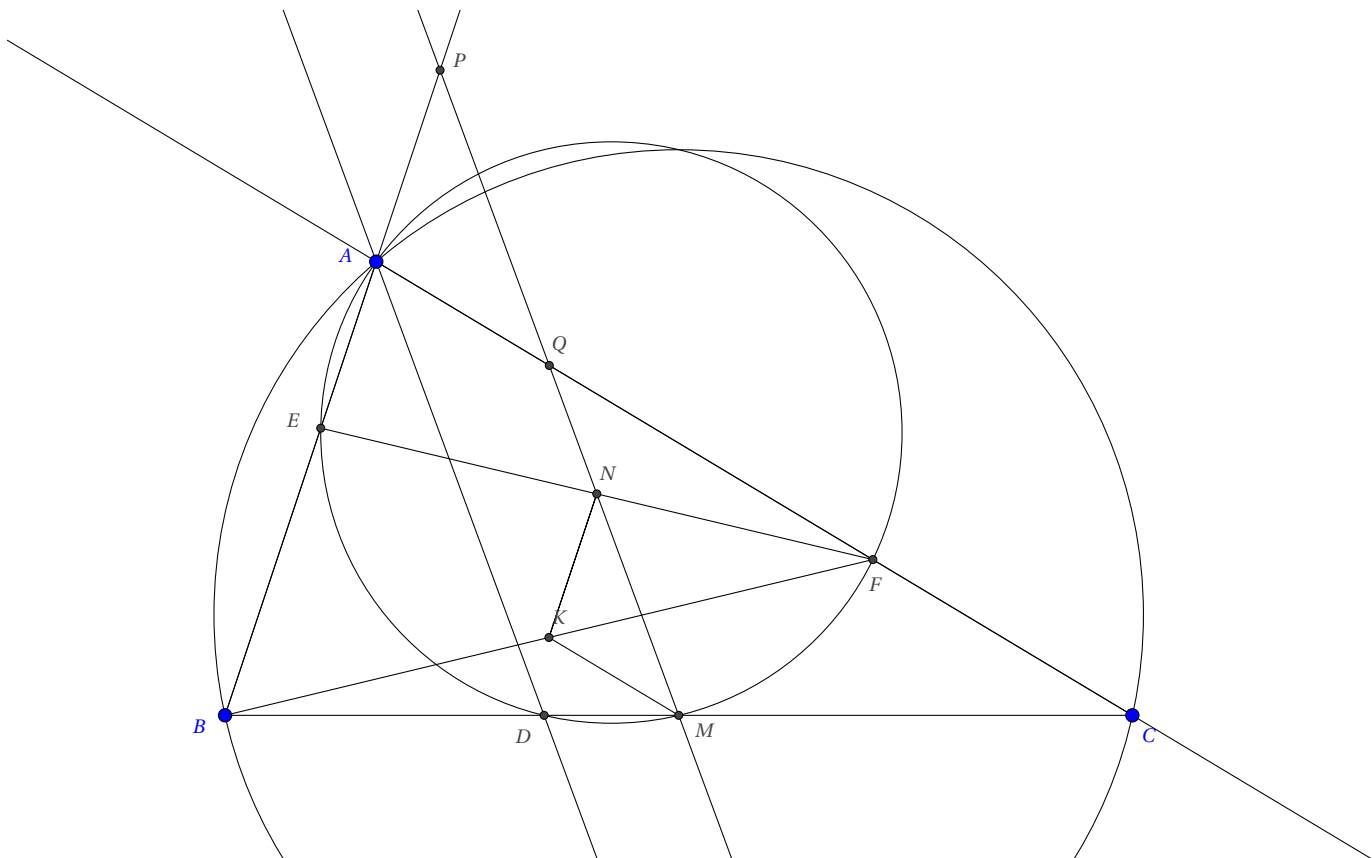
Chú ý bài này là hệ quả của các tính chất trên và MN đi qua H. Do đó Tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(-1; -1).$$

Tính chất 46. Cho tam giác ABC không cân tại A có phân giác AD. M là trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB, AC lần lượt tại E, F. Khi đó:

1. $BE = CF$.
2. Gọi N là trung điểm EF. Ta có $AD \parallel MN$.

Lời giải:

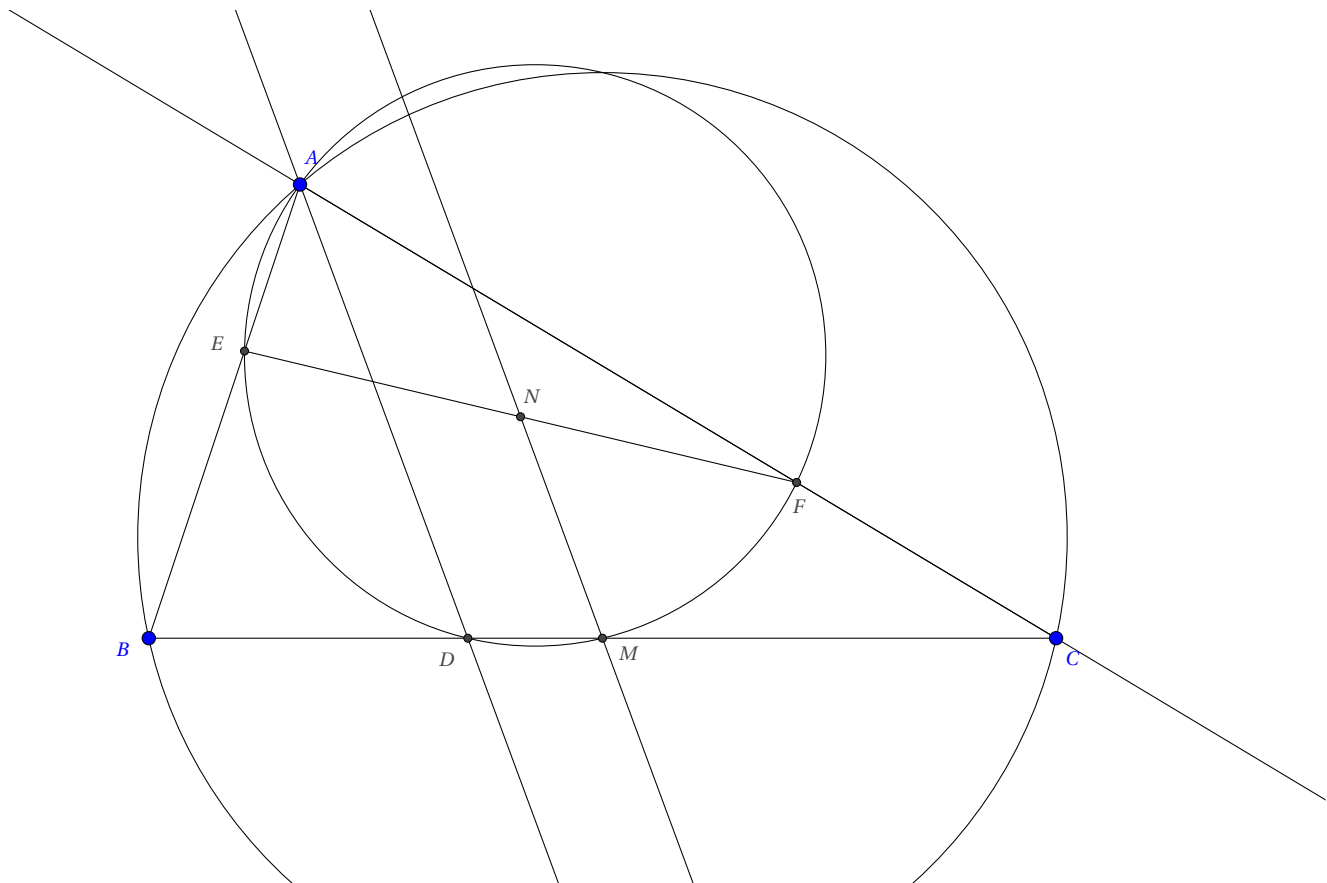


Không mất tính tổng quát ta giả sử $AB < AC$.

1. Theo tính chất phương tích ta có $BE.BA = BD.BM$, $CD.CM = CF.CA$ và theo tính chất đường phân giác $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$. Từ đây dễ dàng suy ra $BE = CF$.
2. Kéo dài MN cắt AB, AC tại P, Q . Gọi K là trung điểm BF . Theo Thalet dễ dàng thấy tam giác MKN cân tại K và $\angle MKN = 180^\circ - \angle A$, do đó tam giác PAQ cân tại A và $\angle AQP = \angle \frac{A}{2} = \angle DAC$. Vậy $AD \parallel MN$.

Bài toán 132. Cho tam giác ABC , đỉnh $B(-3;4)$ đường thẳng $AC: 2x + y - 10 = 0$. Gọi D, M lần lượt là chân đường phân giác từ A của tam giác ABC , trung điểm của BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB, AC tại E, F . Trung tuyến kẻ từ M của tam giác MEF là $x - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C (K2pi lần 4)

Lời giải:



Theo tính chất ta $(AB, MN) = (MN, AC)$ và AB không song song với MN . Nên dễ dàng viết được phương trình đường thẳng $AB: 2x - y + 2 = 0$. Tọa độ của A là nghiệm của hệ

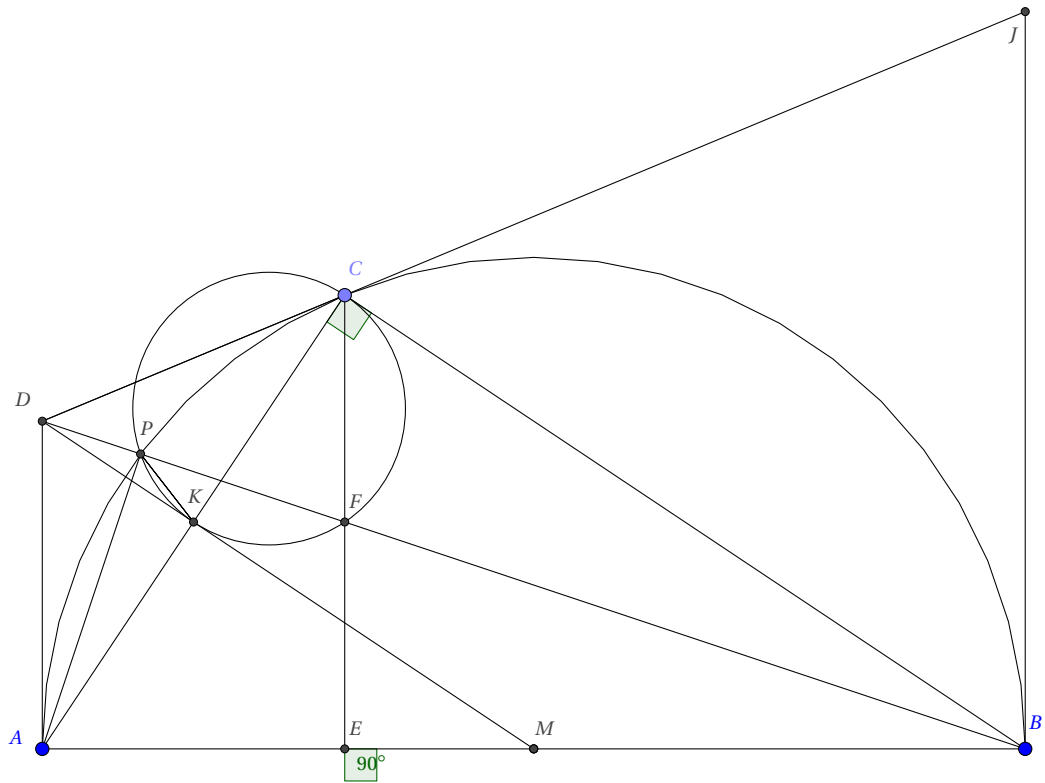
$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2; 6)$$

Gọi $C(c; 10 - 2c)$ thuộc AC vì trung điểm M của BC thuộc $x - 1 = 0$ nên $C(5; 0)$.

Tính chất 47. Cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao CE . Tiếp tuyến tại A, C cắt nhau tại D . Khi đó

1. BD đi qua trung điểm F của CE .
2. Giả sử AC cắt DM tại K và BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $P \neq B$. Ta có bốn điểm C, F, K, P nội tiếp đường tròn.

Lời giải:



1. Dùng Thalet và tính chất tiếp tuyến. Dựng tiếp đường tròn tại B cắt CD tại J. Ta có

$$\frac{EF}{AD} = \frac{EB}{AB} = \frac{CJ}{DJ} = \frac{JB}{DJ} = \frac{CF}{DC} = \frac{CF}{AD}.$$

Vậy $CF = FE$, hay BD đi qua trung điểm của CE.

2. Để thấy $AP \perp DP$ và $AK \perp DK$ nên tứ giác ADPK nội tiếp. Suy ra $\angle KPF = \angle KAD = \angle ACE$ (do $AD \parallel CE$) do đó tứ giác KPCF nội tiếp.

Chú ý ta có thể chứng minh DB qua trung điểm CE thông qua 2. như sau: Thật vậy do tứ giác KPCF nội tiếp nên $\angle FKC = \angle BPC = \angle BAC$ nên $KF \parallel AB$ mà K là trung điểm AC nên F là trung điểm CE.

Bài toán 133. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại C nội tiếp đường tròn tâm I, chân đường cao hạ từ đỉnh C là điểm H. Tiếp tuyến của đường tròn (I) tại A, C cắt nhau tại M, đường thẳng BM cắt CH tại N. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết $H(\frac{1}{5}; \frac{12}{5})$, $N(\frac{13}{5}; \frac{6}{5})$ và điểm $P(0; -\frac{5}{2})$ thuộc đường thẳng AC

Đáp số $A(-3; -4)$, $B(2; 6)$ và $C(5; 0)$.

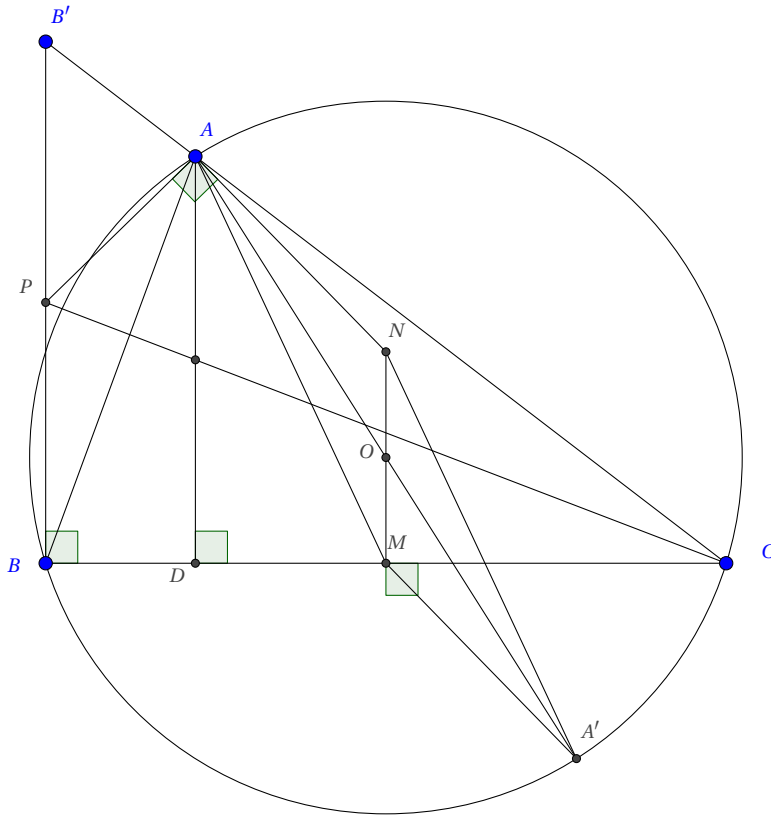
Bài toán 134. Trong Oxy cho tam giác ABC vuông tại C nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I(2; 1)$ và H là bình chiếu vuông góc của C lên AB. Gọi K là trung điểm của CH. Tiếp tuyến của (T) tại A, C cắt nhau tại M. Phương trình đường thẳng MK: $27x + 14y - 93 = 0$ và $B \in x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Chuyên Hạ Long lần 1)

Tổng quát ta có tính chất mạnh như sau.

Tính chất 48. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AD . Gọi M là trung điểm của BC , giả sử N là điểm đối xứng của M qua O . Đường thẳng qua A vuông góc AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D . Khi đó ta có PC đi qua trung điểm của AD .

Lời giải:

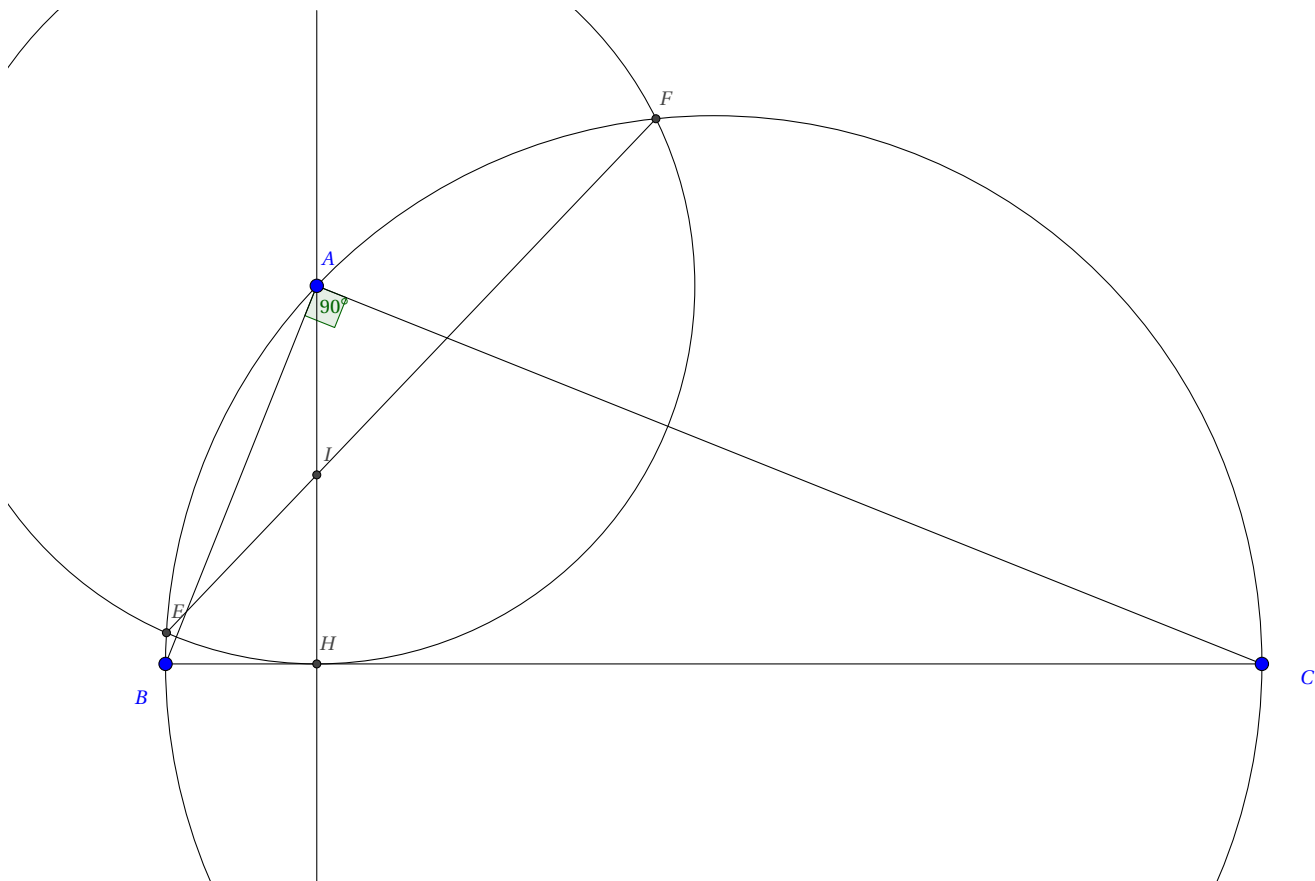


Dựng đường kính AA' , khi đó $ANA'M$ là hình bình hành nên $A'M \perp AP$. Chú ý $AB \perp BA'$ nên $\triangle BAP \sim \triangle BA'M$. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua P . Ta suy ra $\triangle BAB' \sim \triangle BA'C$ hay B', A, C thẳng hàng. Trong tam giác BCB' có CP là trung tuyến mà $AD \parallel BB'$ nên CP đi qua trung điểm AD .

Bài toán 135. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(-2;1)$, gọi $H(-1;-1)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A , và M là trung điểm cạnh BC , N là điểm đối xứng của M qua I . Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D , đường thẳng CD cắt AH tại điểm $E(0;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết B có hoành độ dương.

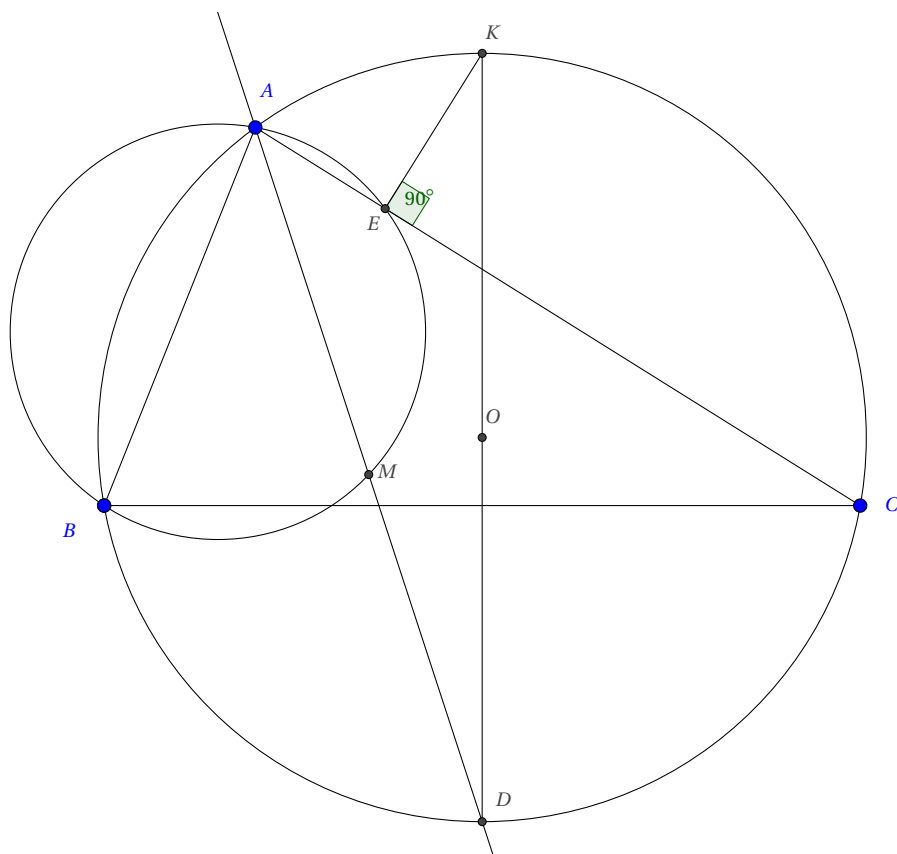
Tính chất 49. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AH , đường tròn tâm A bán kính AH cắt (O) tại E, F . Gọi I là giao điểm của AH và EF . Khi đó I là trung điểm AH .

Lời giải:



Tính chất 50. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có tâm O . Đường phân giác góc A cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là D , gọi M là trung điểm AD , đường tròn qua A, M, B cắt AC tại E , DK là đường kính của đường tròn (C) . Chứng minh $EK \perp AC$.

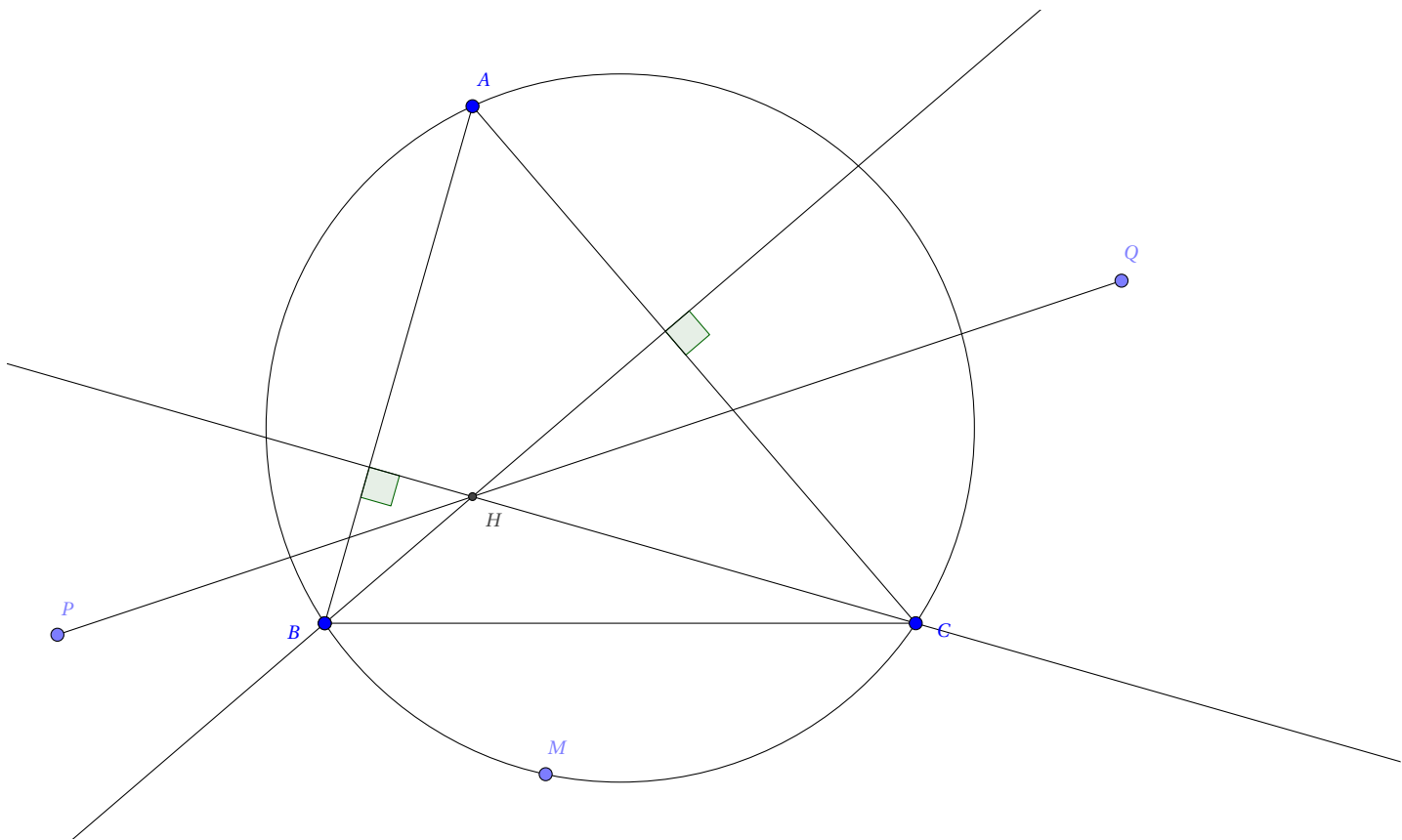
Lời giải:



Tính chất 51. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm trên cung BC . Gọi P, Q, R lần lượt là ảnh của M qua các cạnh AB, AC, BC . Khi đó

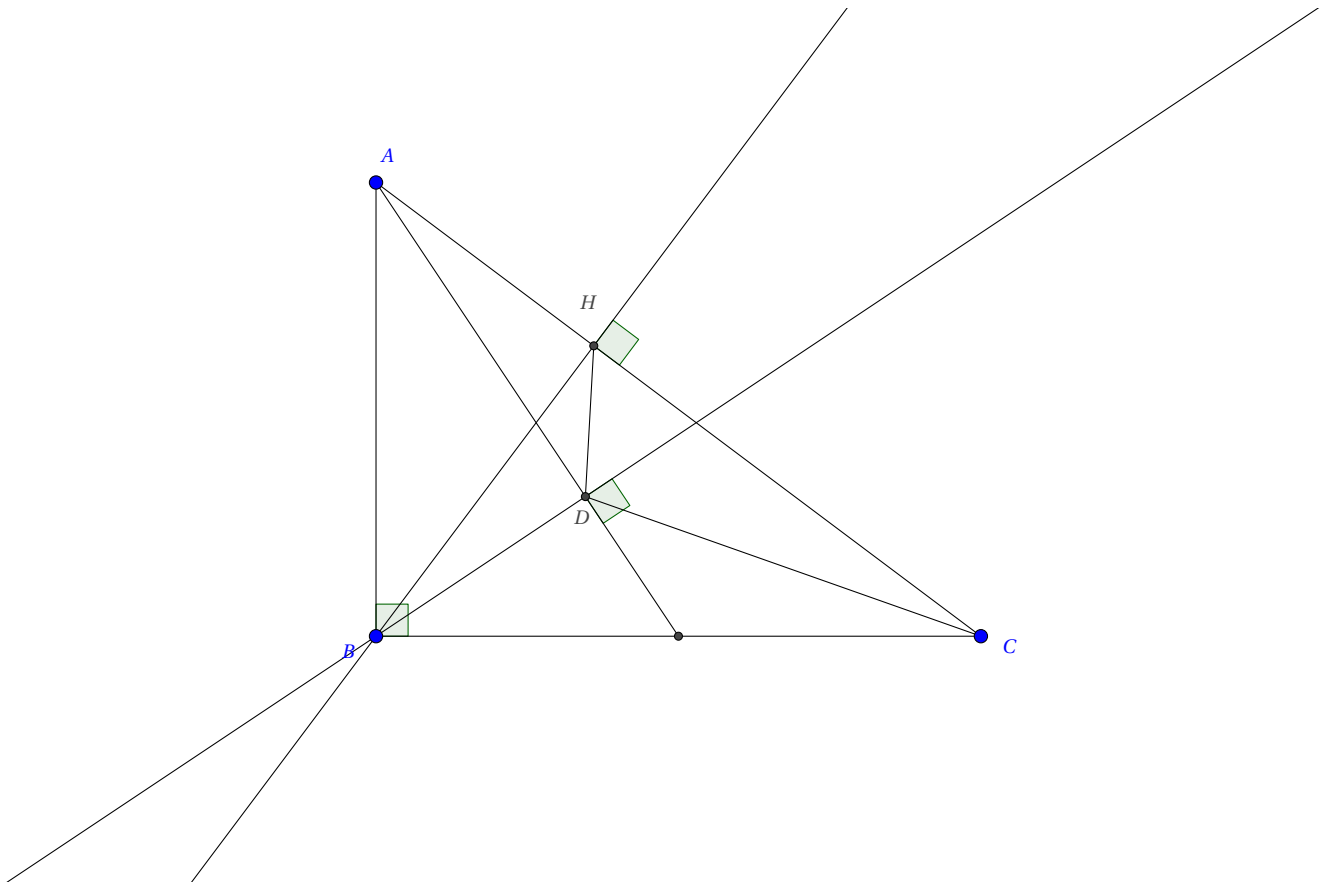
1. P, Q, R thẳng hàng.
2. PQ đi qua trực tâm H của tam giác ABC .

Lời giải:



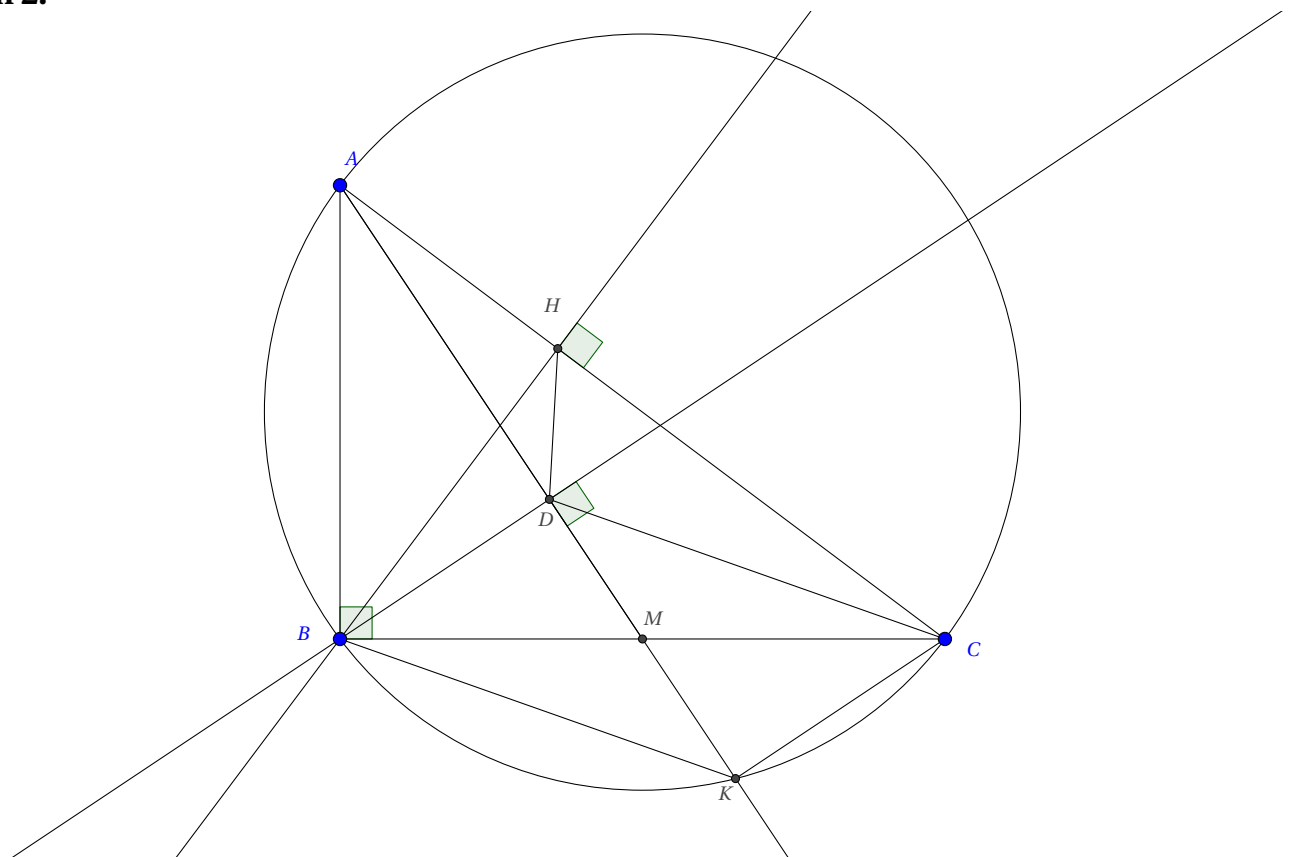
Tính chất 52. Cho tam giác ABC vuông tại B . Đường cao BH , M là trung điểm BC . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AM và cắt AM tại D . Khi đó BD là phân giác của góc $\angle HDC$.

Lời giải:



Ta có tứ giác AHDB nội tiếp nên $\angle HDA = \angle HBA = \angle ACB$ (1) do đó tứ giác HDMC cũng nội tiếp. Suy ra $\angle MDC = \angle MHC = \angle MCH$ (2) (do HM là trung tuyến của tam giác vuông BHC). Từ (1), (2) suy ra $\angle HDA = \angle MDC$ do đó BD là phân giác góc $\angle MDC$.

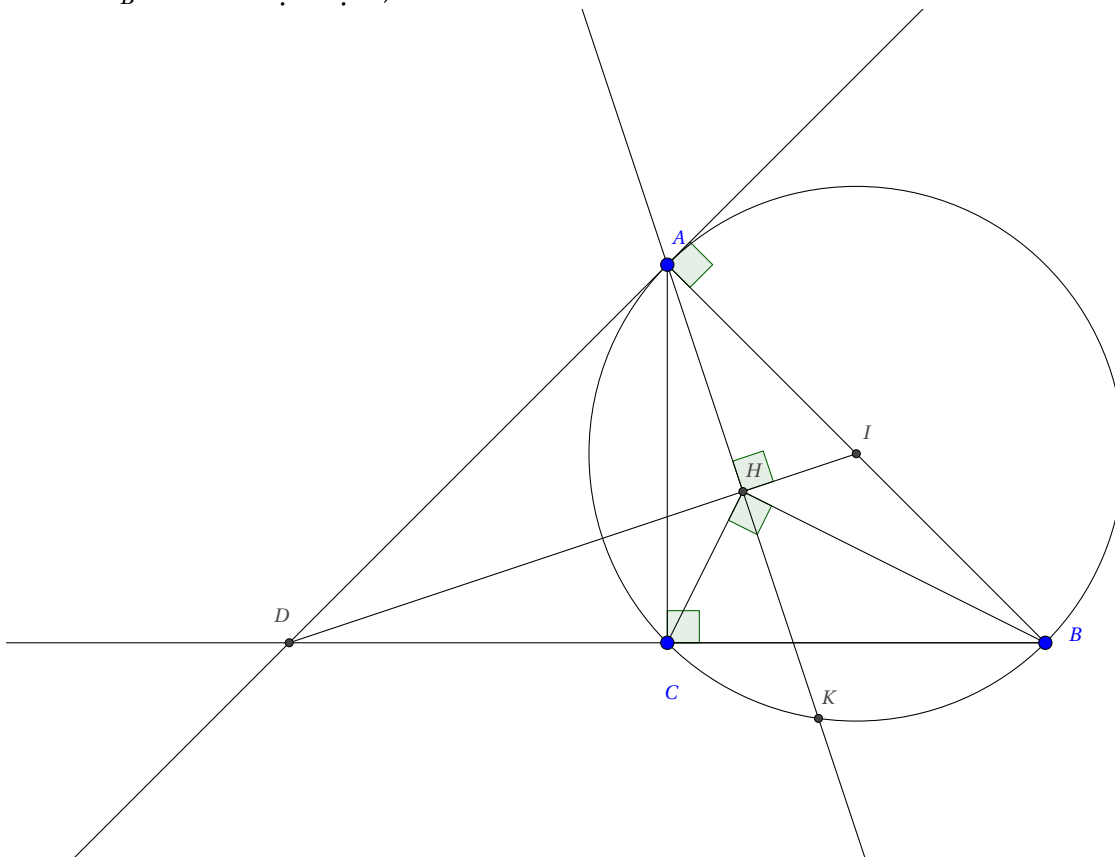
Cách 2:



Kéo dài AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K. Khi đó $BD \parallel CK$ vì cùng vuông góc với AK, do M là trung điểm BC nên BDCK là hình bình hành. Suy ra $\angle CDK = \angle DKB = \angle C =$

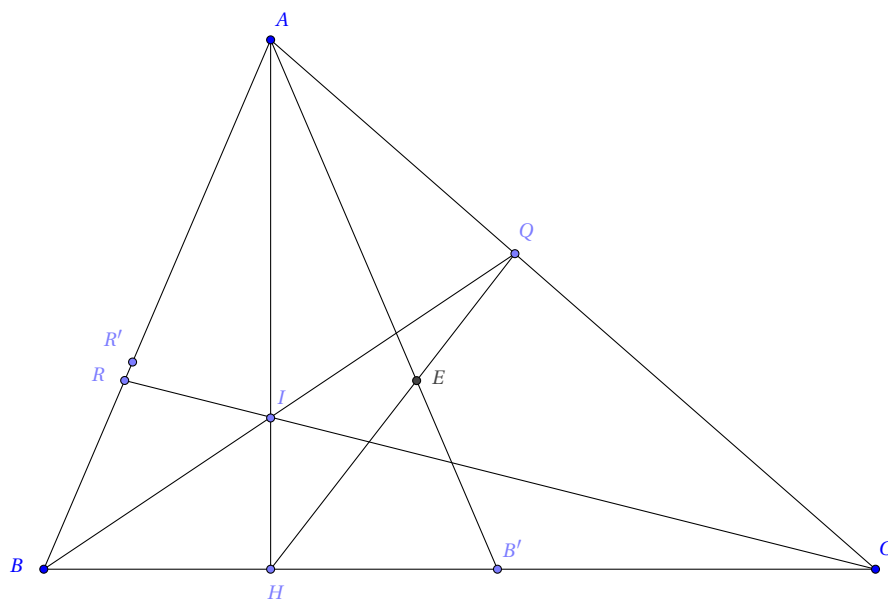
$\angle ABH = \angle ADH$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 136. Cho tam giác ABC vuông tại $C(2;2)$ nội tiếp đường tròn tâm (I) . Tiếp tuyến tại A cắt BC tại D , đường thẳng qua A vuông góc DI cắt DI tại H . Biết $AH : x - y - 2 = 0$. $E(1;0)$ thuộc HB và $x_B < 0$. Tìm tọa độ A, B .
(K2pi lần 1)



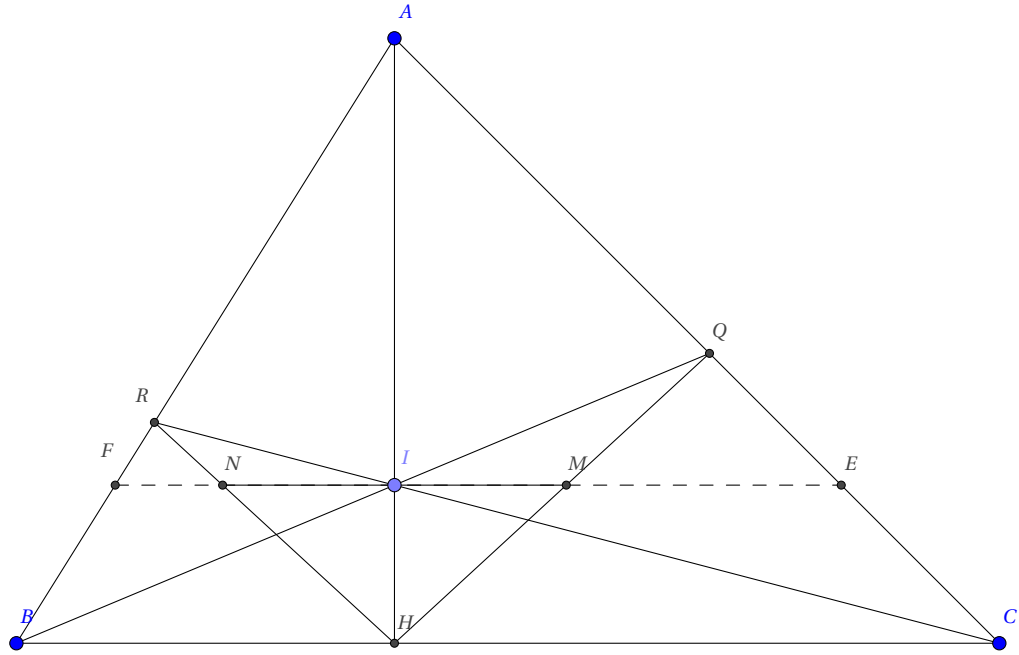
Tính chất 53. Cho tam giác ABC với AH là đường cao. I là điểm tùy ý trên AH . BI cắt AC tại Q , CI cắt AB tại R . Chứng minh AH là phân giác $\angle RHQ$.

Lời giải:



Cách 1: Trường hợp tam giác ABC cân tại A là hiển nhiên. Không mất tính tổng quát ta giả sử $AB < AC$. Bội B' là điểm đối xứng của B qua H. HQ cắt AB' tại E. Gọi R' là đối xứng của E qua AH. Ta sẽ chứng minh R' trùng R. Để thấy AH là phân giác góc $\angle R'HQ$. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACB' cho 3 điểm H, Q, E ta có: $\frac{HB'}{HC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{EA}{EB'} = 1$ Từ đó suy ra $\frac{HB}{HC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{R'A}{R'B} = -1$. Theo định lý đảo của Ceva ta suy ra AH, BQ, CR' đồng quy suy ra R trùng R'. Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BI, CI tại D, E. Dùng định lý Ceva trong tam giác ABC suy ra AD = AE. Do đó AH là phân giác $\angle RHQ$. Chú ý ta có thể chứng minh bằng cách dùng sơ cấp như sau:



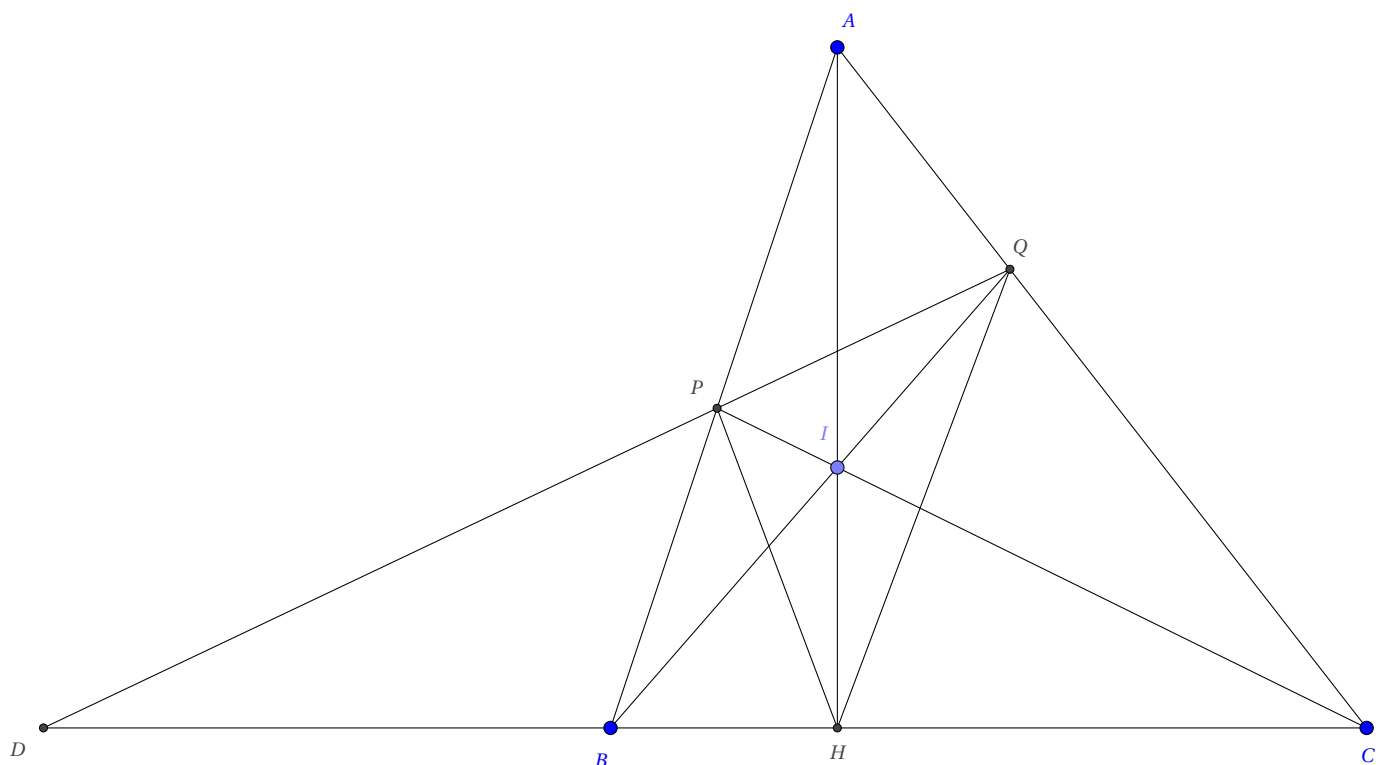
Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC, RH, QH tại F, E, N, M . Ta có

$$\frac{IN}{IF} = \frac{CH}{CB}, \frac{IM}{IE} = \frac{BH}{BC}$$

Chú ý $\frac{IF}{BH} = \frac{IE}{HC}$ do đó ta có $IM = IN$. Do $MI \perp MN$ nên MI là phân giác $\angle QHR$.

Bài toán 137. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là điểm $H(2; -1)$. Gọi I là điểm trên đoạn AH , đường thẳng CI cắt AB tại điểm $P(-2; 2)$ và đường thẳng BI cắt AC tại điểm $Q(2; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết đỉnh B nằm trên đường thẳng $x + y + 8 = 0$.
 $A(-1; 5), B(-4; -4), C(4; 0)$.

Lời giải:



Áp dụng tính chất ta có AH là phân giác trong góc $\angle PHQ$ và BC là phân giác ngoài của $\angle PHQ$. Ta có phân giác trong và ngoài của $\angle PHQ$ có phương trình $\begin{cases} AH: 2x + y - 3 \\ BC: x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$. Do đó tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ x = y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B(-4; -4).$$

Đường thẳng BP đi qua B, P có phương trình BP: $3x - y + 8 = 0$. Do đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ 2x + y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow A(-1; 5).$$

Đường thẳng AQ đi qua A, Q có phương trình AQ: $x + y - 4 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

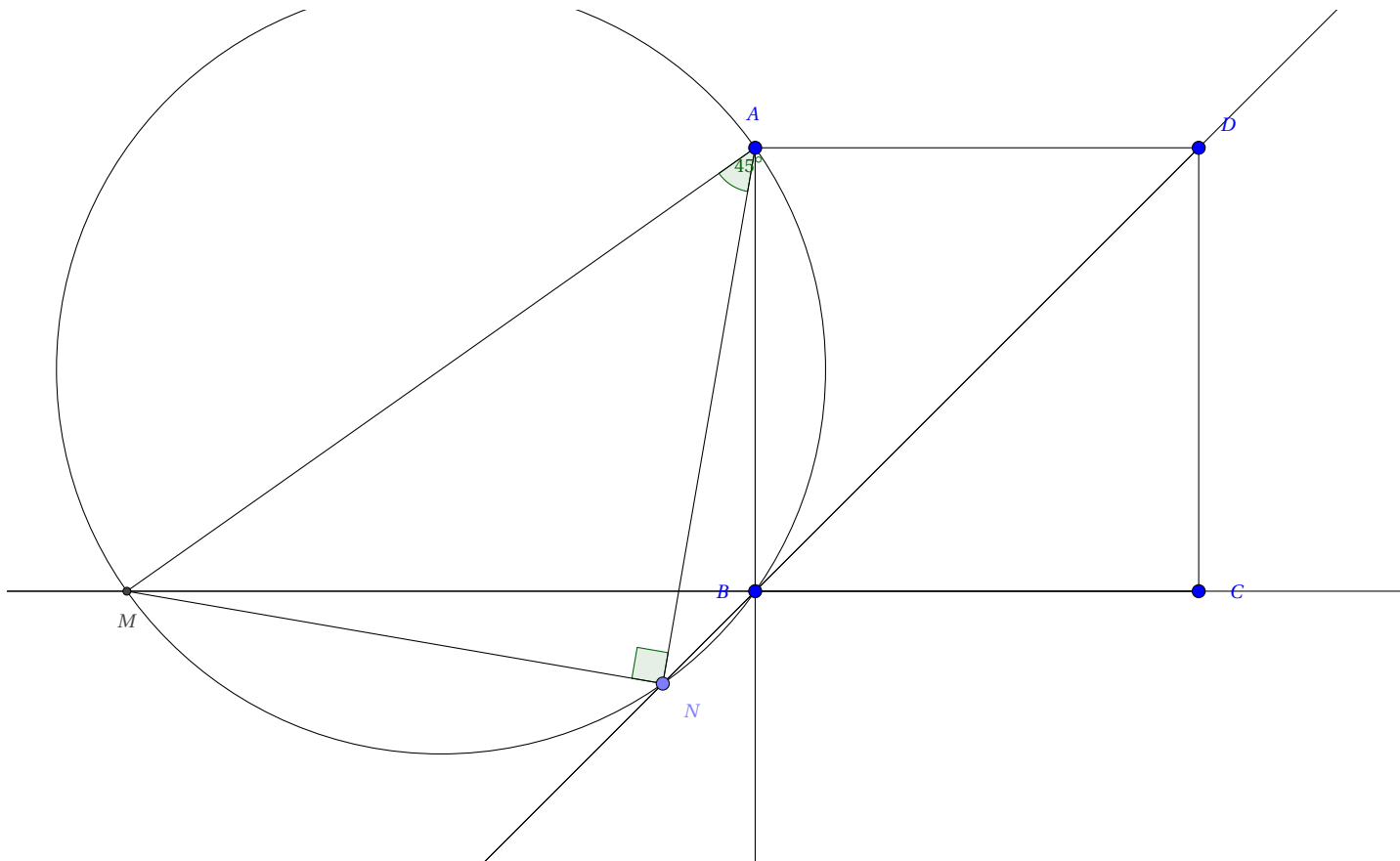
$$x + y - 4 = 0 \quad x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow C(4; 0).$$

Bài tập tương tự

Bài toán 138. Cho tam giác nhọn ABC đường cao AD. Trên cạnh AD lấy điểm E. Đường thẳng BE, CE cắt AC, AB tại H, G. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết $D(\frac{124}{65}; \frac{87}{65})$, $H(\frac{223}{49}; \frac{164}{49})$, $G(\frac{246}{109}; \frac{469}{109})$ và $B \in x + y - 2 = 0$.

Tính chất 54. Cho hình vuông ABCD. M, N lần lượt trên đường thẳng BC, BD. Khi đó tam giác AMN vuông tại N khi và chỉ khi bốn điểm A, B, M, N nội tiếp đường tròn. Từ đó suy ra tam giác AMN vuông cân tại N.

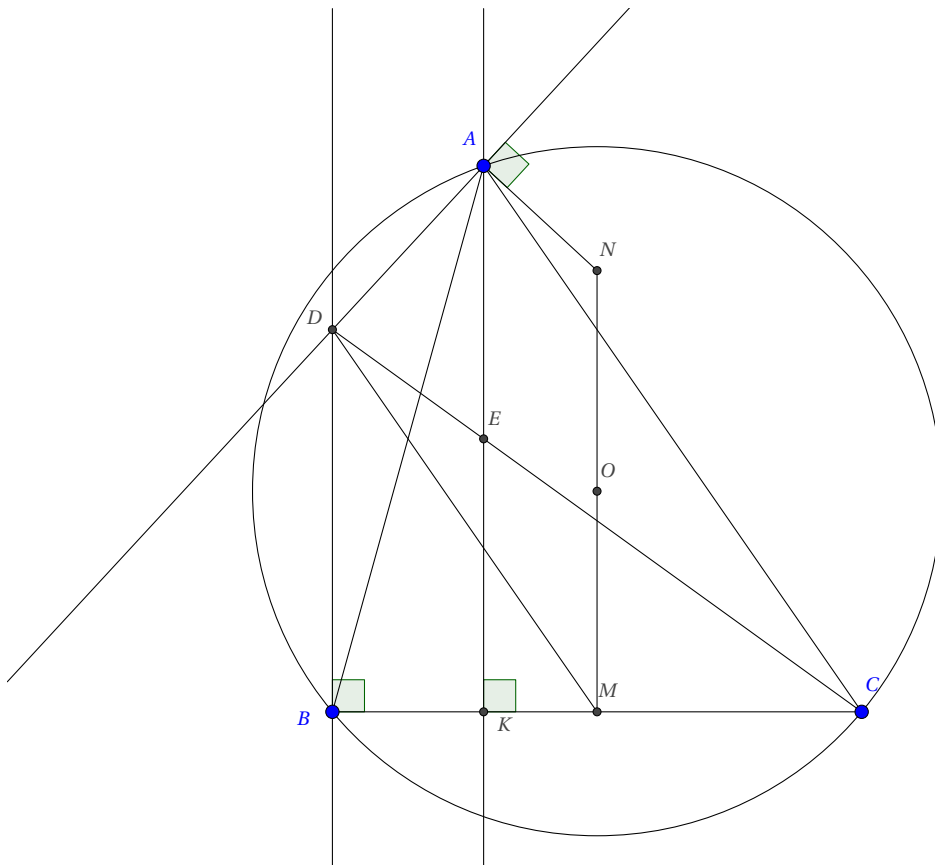
Lời giải:



Bài toán 139. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm $M(5;7)$ nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AM cắt BC tại B và cắt BD tại $N(6;2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ đỉnh A bé hơn 2.

Tính chất 55. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy N đối xứng với M qua O, K là hình chiếu của A lên BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D. CD cắt AK tại E. Khi đó

1. $DM \parallel AC$.
2. E là trung điểm của AK.



Tính chất 56.

Lời giải:

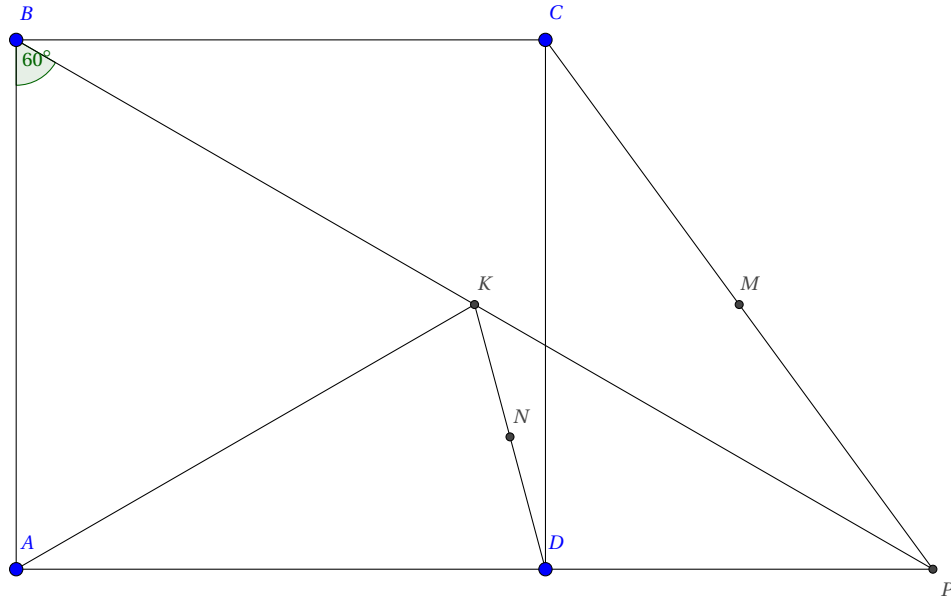
Bài toán 140. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm G thuộc đường tròn $(C) : \left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$ và trực tâm H thuộc đường thẳng $x - 3y - 1 = 0$. Tìm C , biết $A(2; -1)$, $B(6; 1)$.

Tính chất 57.

Lời giải:

Bài toán 141. Trong oxy , cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm P sao cho góc $\angle ABP = 60^\circ$. Gọi $K; M(1; 2); N(1; 1)$ thứ tự là trung điểm của $BP; CP$ và KD . Tìm tọa độ đỉnh D .

Lời giải:



Lời giải:

Xét $\triangle ABP$ có $\begin{cases} AK = BK = KB \\ \angle ABP = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABK$ đều Suy ra $AK = AD \Rightarrow \triangle ADK$ cân tại A $\Rightarrow \angle AKD = \angle NKM = \angle KNM = 75^\circ \Rightarrow \triangle KNM$ cân tại M.

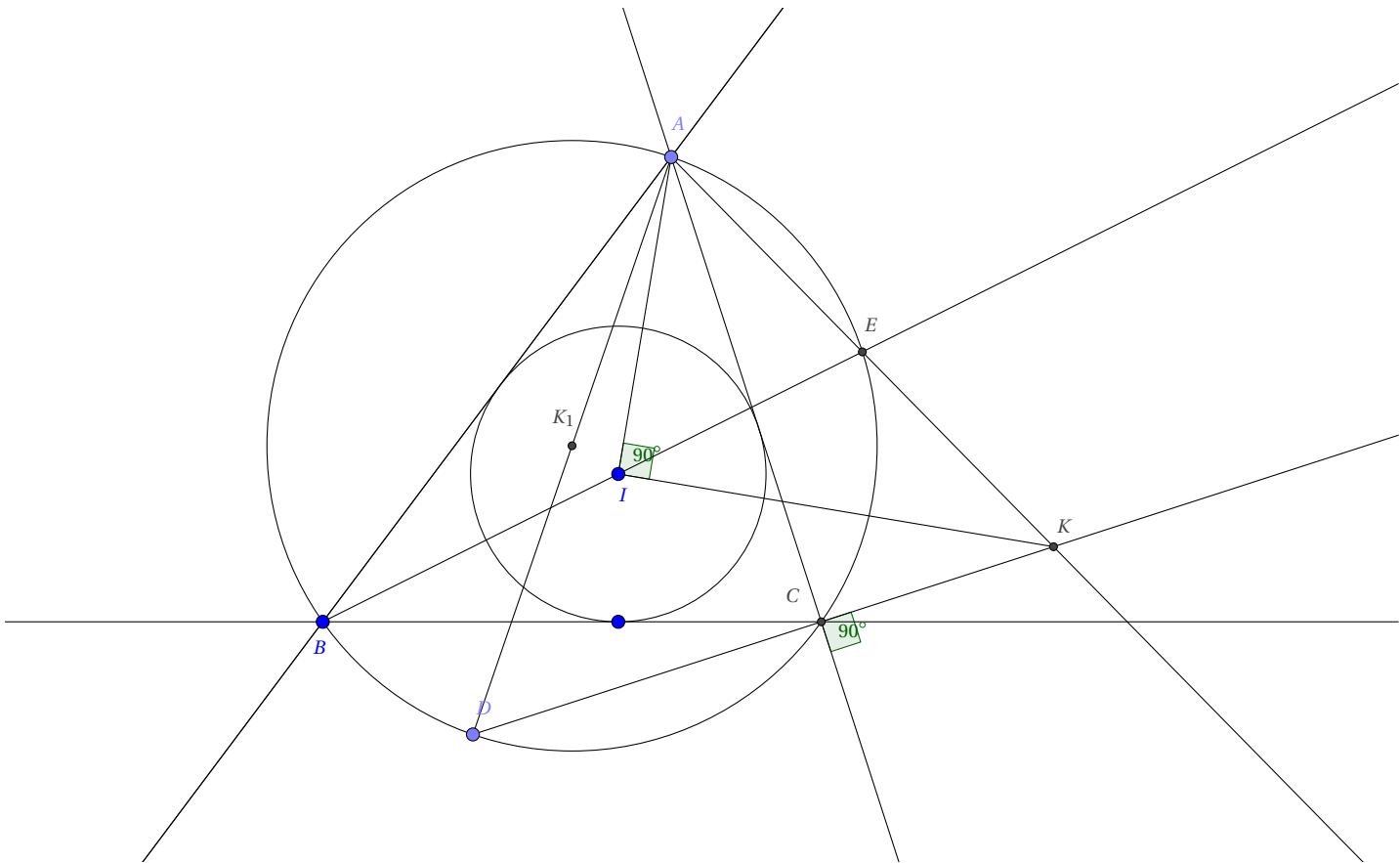
- Mặt khác ta có $\begin{cases} KM = \frac{BC}{2} \\ AK = AB = BC \end{cases} \Rightarrow KM = \frac{AK}{2}$

- Chứng minh $AK \parallel MN$

- Công việc đến đây có thể giải quyết theo hướng sau + Viết phương trình DK + Tham số hóa K. Có $MK = NK$ suy ra tọa độ K và suy ra tọa độ D (N là tung điểm DK)

Tính chất 58. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn I. Đường kính AD, BI cắt (O) tại E. AE cắt CD tại K. Khi đó tứ giác AICK nội tiếp đường tròn tâm E.

Lời giải:

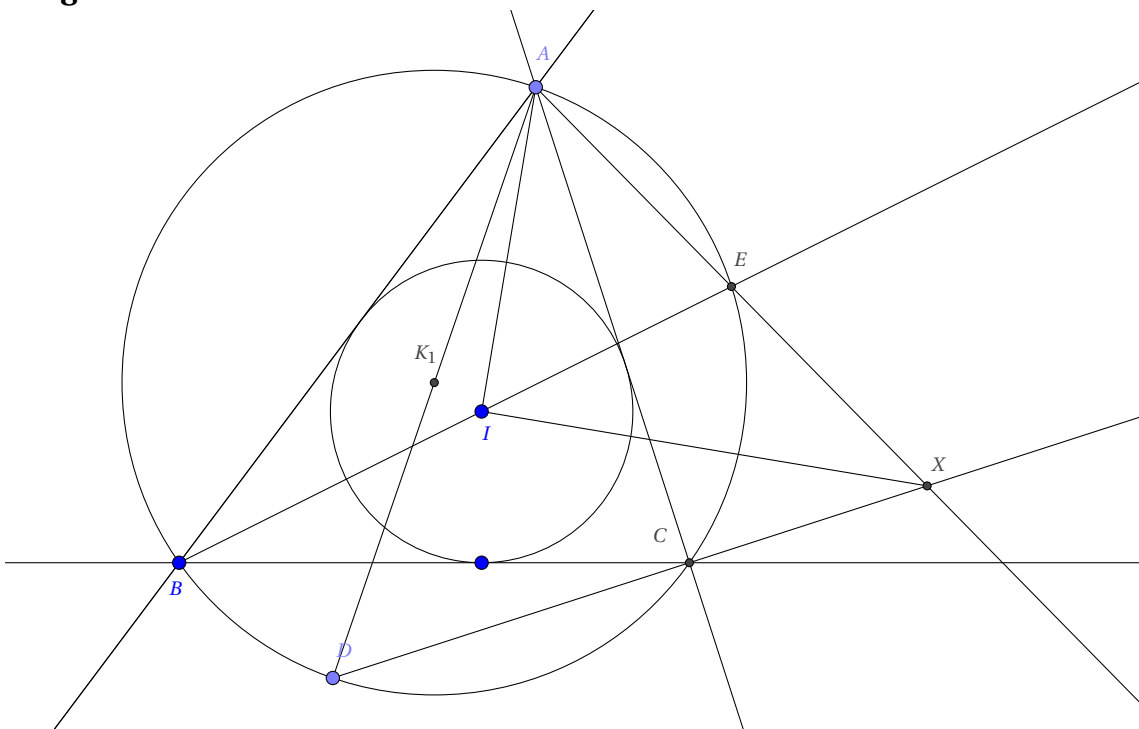


Các em xem lại tính chất cũ đã chứng minh được $EA = EI = EC$ suy ra E là trung điểm AK . Do đó $EA = EI = EC = EK$, vậy tứ giác $AICK$ nội tiếp đường tròn tâm E .

Bài toán 142. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn $I(1;1)$. Đường kính AD , BI cắt (O) tại E . AE cắt CD tại $X(-2;4)$. Giả sử $C(-2;2)$. Tìm tọa độ đỉnh A, B .

(Vted lần 1)

Lời giải:



Đường tròn ngoại tiếp tam giác ICX có phương trình $x^2 + (y-3)^2 = 5$. Áp dụng tính chất ta suy ra E là tâm ngoại tiếp đường tròn ngoại tiếp tam giác ICX, do đó E(0;3) và A(2;2) vì E là trung điểm

AX. Đường tròn nội tiếp (I) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Và dễ dàng tính được $AB : x = 2, BC : 3x + 4y - 2 = 0$. Suy ra tọa độ B là nghiệm của hệ

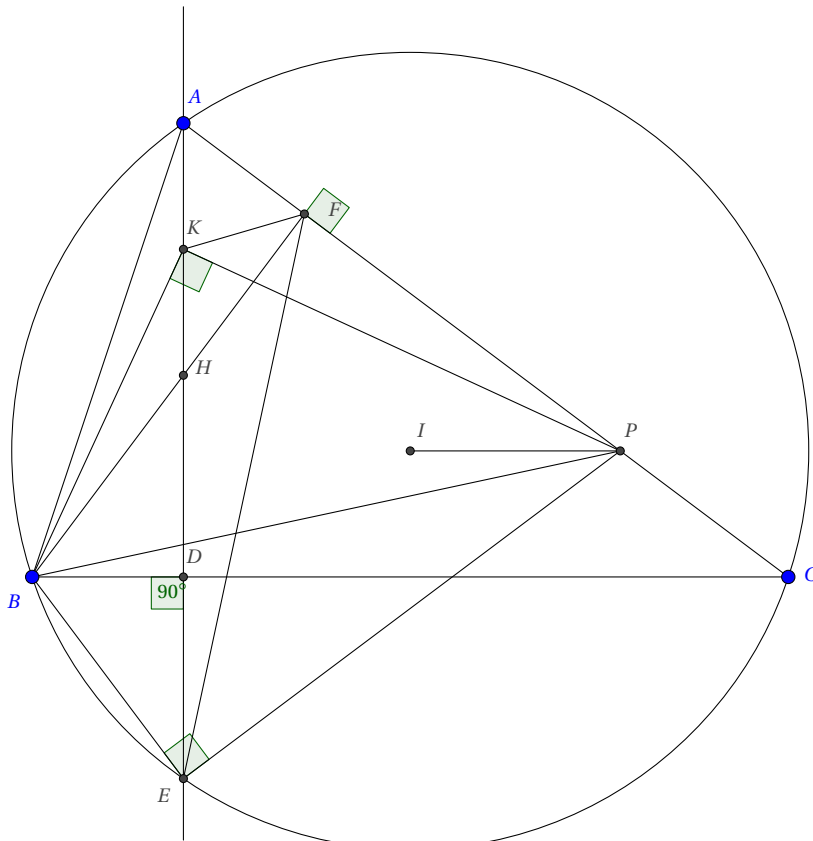
$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B(2; -1)$$

Tính chất 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I. Gọi K là trung điểm AH, đường thẳng qua K vuông góc BK cắt AC tại P. Giả sử AH cắt (I) tại E. Khi đó

1. $BE \perp EP$.

2. PI là trung trực của AE.

Lời giải:



1. Hạ đường cao BF. Áp dụng các tính trước, ta chú ý H và E đối xứng nhau qua BC và tam giác AKF cân tại K nên ta có

$$\angle EBF = 2\angle EBC = 2\angle EAF = \angle EKF$$

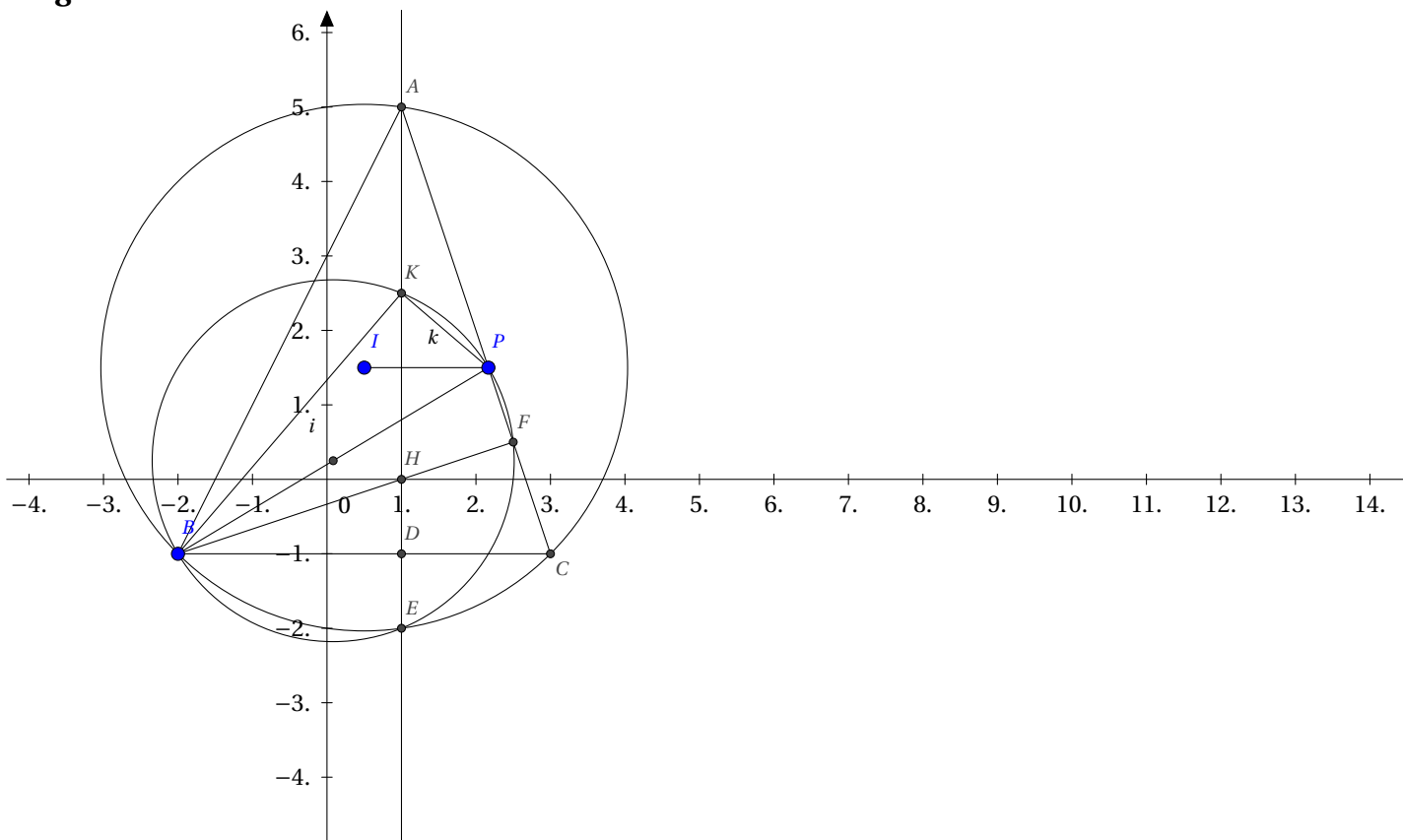
Do đó tứ giác EBKF nội tiếp. Mà tứ giác BKFP cũng nội tiếp nên năm điểm B, K, F, P, E nằm trên một đường tròn đường kính BP. Vậy $\angle BEP = 90^\circ$ hay $BE \perp EP$.

2. Chú ý $\angle EBF = 2\angle EAP$ và $\angle EBF + \angle APE = 180^\circ$. Do đó $\angle EAP = \angle EAP$ hay tam giác APE cân tại P. Vì vậy P nằm trên trung trực của AE, mặt khác I cũng nằm trên trung trực AE. Suy ra IP là trung trực của AE.

Bài toán 143. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I($\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$). Gọi K là trung điểm AH, đường thẳng qua K vuông góc BK cắt AC tại P. Giả sử $B(-2; -1), P(\frac{13}{6}; \frac{3}{2})$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C.

Vted lần 2

Lời giải:



Áp dụng tính chất trên ta có E nằm trên đường tròn đường kính BP và do IP là trung trực của AE nên $IP \parallel BC$.

Đường tròn đường kính BP có phương trình

$$(x - \frac{2}{25})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = 5.$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I, bán kính IBI có phương trình

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2}.$$

Tọa độ của E là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} (x - \frac{2}{25})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = 5 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow E(1; -2)$$

Đường thẳng BC qua B song song với IP nên có phương trình $y = -1$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow C(3; -1)$$

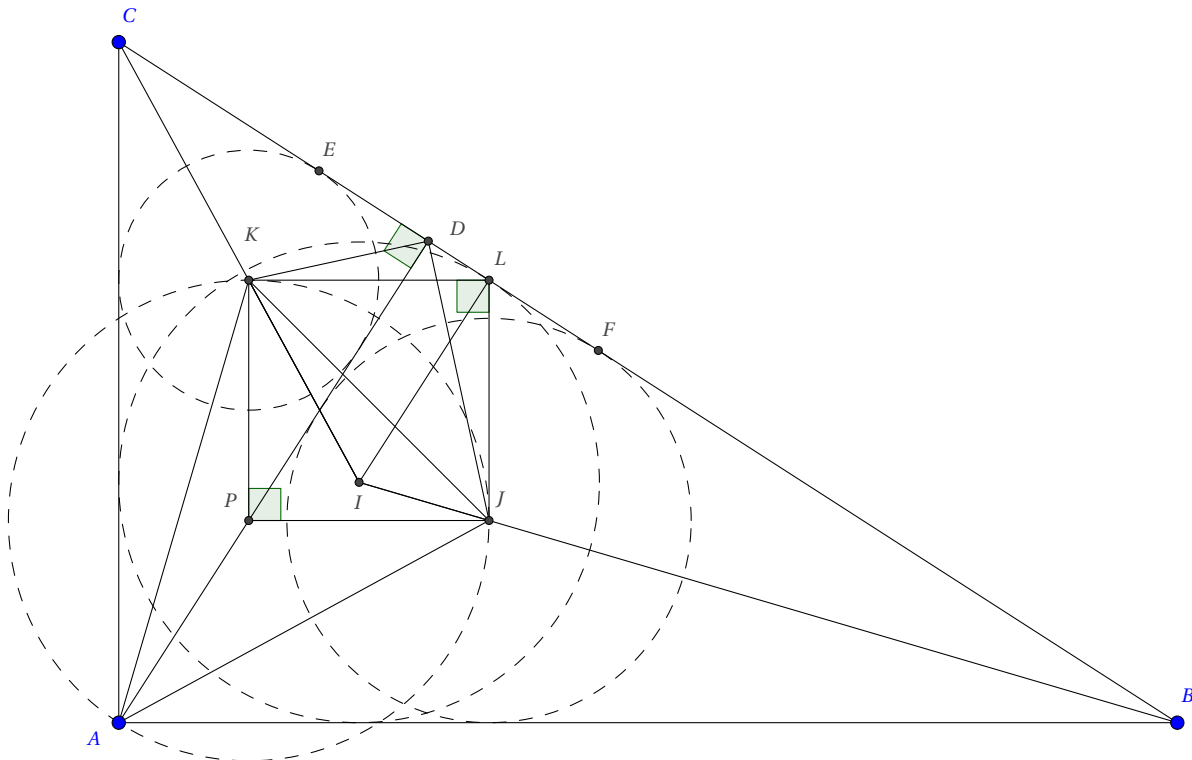
Đường thẳng AE đi qua E và vuông góc BC nên có phương trình $x = 1$. Tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A(1; 5)$$

Tính chất 60. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AD. Gọi I, J, K lần lượt là tâm nội tiếp của các tam giác ABC, ABD, ACD. Khi đó

1. $CI \perp AI, BI \perp AK, AI \perp KJ$ hay I là trực tâm tam giác AKJ và A là trực tâm tam giác KIJ.
2. Tâm P đường ngoại tiếp của tam giác AKJ nằm trên AD.
3. Hạ IL vuông góc xuống BC. Ta có $LK = LI = LJ$ và tam giác KLJ vuông cân tại L, suy ra bốn điểm K, D, L, J nội tiếp và PKLJ là hình vuông.

Lời giải:



1. Để thấy $\angle KAD = \angle IBA = \frac{\angle B}{2}$ do đó $BI \perp AK$. Tương tự $CI \perp AJ$. Từ đó suy ra $AI \perp KJ$.

2.

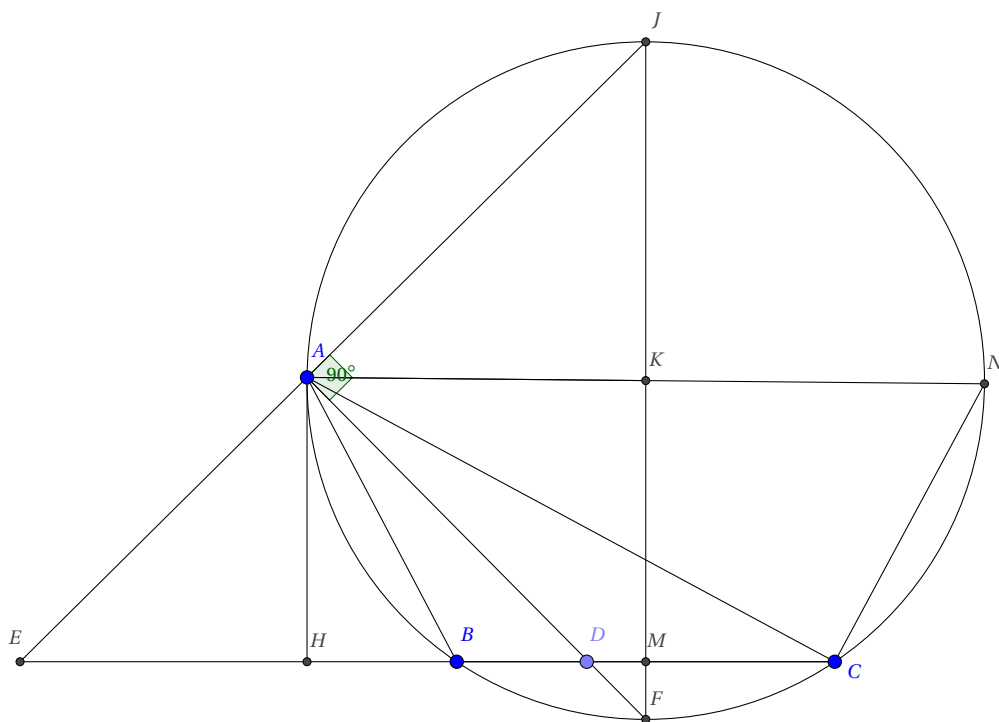
3.

Bài toán 144. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi $I(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}), J(-1; 1), K(\frac{4}{3}; \frac{4}{3})$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH. Tìm tọa độ A, B, C.

Tính chất 61. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm K. Các phân giác trong, ngoài của góc $\angle A$ cắt cạnh BC tại D, E sao cho $AD = AE$. Khi đó

1. $AK \parallel BC$.
2. Hạ AH vuông góc BC, ta có AKMH là hình chữ nhật.
3. Dựng AN là đường kính. Ta có tứ giác ABCN là hình thang cân.

Lời giải:



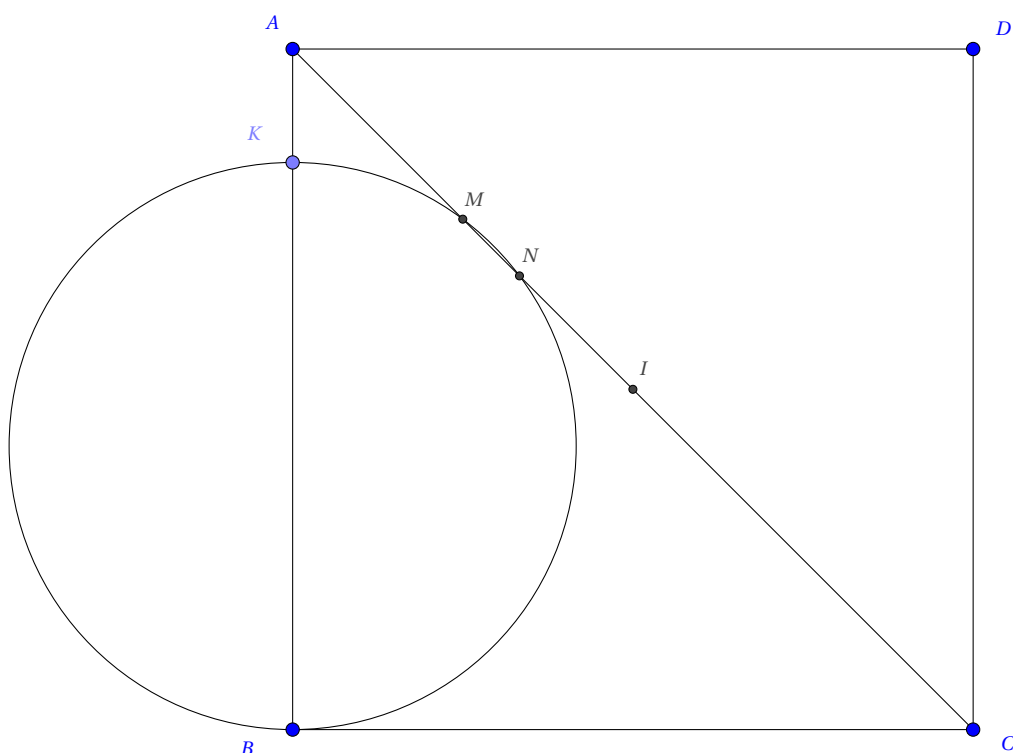
Gọi M là trung điểm BC . F là chính giữa cung BC không chứa A . Ta có A, D, F thẳng hàng. Đường FJ là đường kính. Do tam giác ADE vuông cân tại A nên tam giác JME cũng vuông cân tại M . Suy ra $AK \perp MK$, mặt khác $KK \perp BC$. Do đó $AK \parallel BC$ hay $AKMH$ là hình chữ nhật. Vì $ABCN$ nội tiếp đường tròn, có hai cạnh $AN \parallel BC$ nên $ABCN$ là hình thang cân.

Bài toán 145. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm K bán kính $R = 2\sqrt{5}$, $BC = 4$. Cho $A(2;3)$, $BC \parallel d: y = -1$. Các phân giác trong, ngoài của góc $\angle A$ cắt cạnh BC tại D, E sao cho $AD = AE$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C , biết $x_B > 0$.

Lời giải:

Tính chất 62. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AC lấy điểm M, N sao cho $AC = 4AM = 3AN$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN cắt cạnh AB tại K . Khi đó $BK = 5AK$.

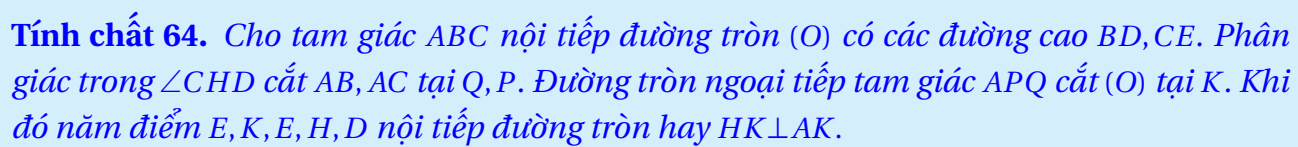
Lời giải:



Bài toán 146. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AC lấy điểm M, N sao cho $AC = 4AM = 3AN$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN có phương trình: $(x+1)^2 + (y-\frac{7}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông, biết $x_C > 0$.

Tính chất 63. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có M, N là trung điểm AD, CB . Trên tia đối DC lấy điểm E bất kỳ. Kéo dài EM cắt AC tại F . Khi đó NM là phân giác của $\angle ENF$.

Lời giải:

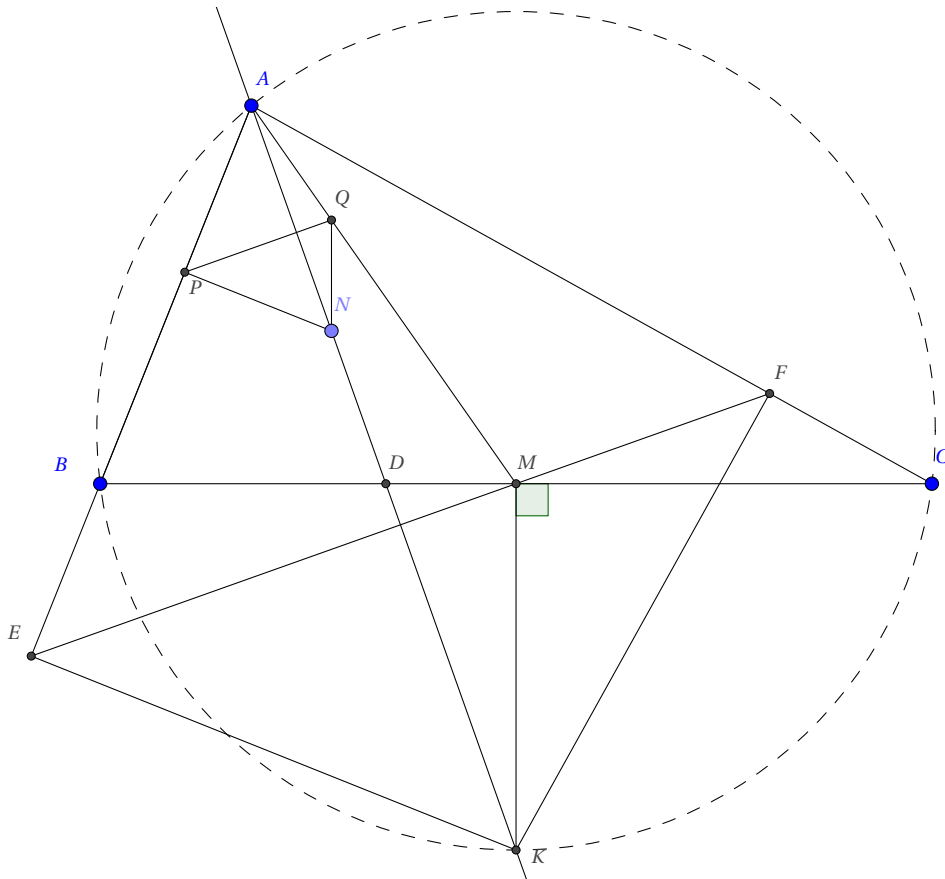


The diagram illustrates a geometric construction involving a circle and several points. Points A , B , and C are marked on the circumference of the circle. Point H is located inside the circle. Lines connect A to B , B to C , C to A , and A to H . Other points D , E , K , Q , and P are also marked on the circle or inside. Lines connect H to D , H to E , H to K , H to Q , and H to P . Dashed lines connect A to D , A to E , and A to K . Right angle symbols are shown at points D , E , and K .

Gọi K là giao điểm (O) với đường tròn đường kính AH . Ta sẽ chứng minh K cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ là xong. Thật vậy dễ thấy $\triangle KEB \sim \triangle KDC$, $\triangle EHB \sim \triangle DHC$ và theo tính chất phân giác trong tam giác EHB, DHC ta suy ra $\triangle KEQ \sim \triangle KDP$. Do đó A, K, Q, P nội tiếp. Vậy ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác ABC, AED, APQ đồng quy tại một điểm K hay $AK \perp HK$.

Tính chất 65. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM , đường phân giác trong AD . Cho N trên AD hạ NP vuông góc với AB , trên AM lấy điểm Q sao cho $PQ \perp AD$. Khi đó $QN \perp BC$.

Lời giải:

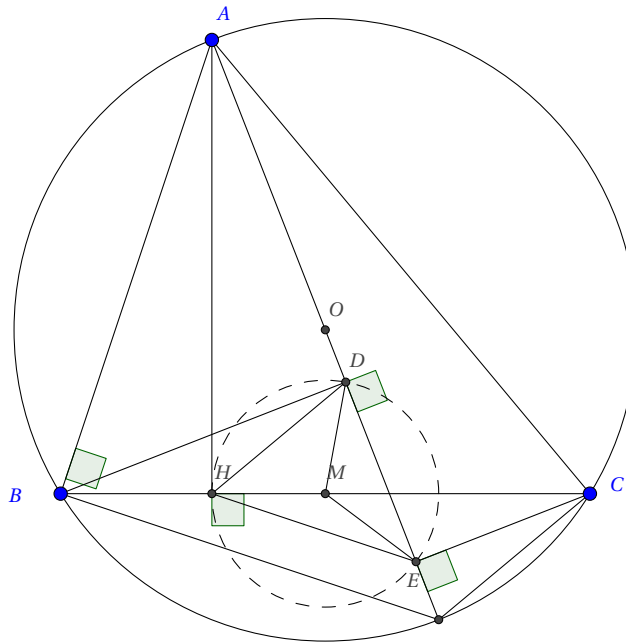


Kéo dài AD cắt (O) tại K . Hạ KE, KF vuông góc với AB, AC . Theo định lý Simson ta có E, M, F thẳng hàng. Do AD là phân giác góc $\angle A$ nên $AK \perp EM$. Hay $PN \parallel KE, PQ \parallel EM$ do đó theo Thalet ta suy ra $\frac{AN}{AK} = \frac{AP}{AE} = \frac{AQ}{AM}$. Vậy $QN \parallel MK$ hay $QN \perp BC$.

Tính chất 66. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , chân đường cao AH . Hạ BD, CE vuông góc với AO . Gọi M là trung điểm của BC . Khi đó

1. $HD \perp AC, HE \perp AB$.
2. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDE .
- 3.

Lời giải:



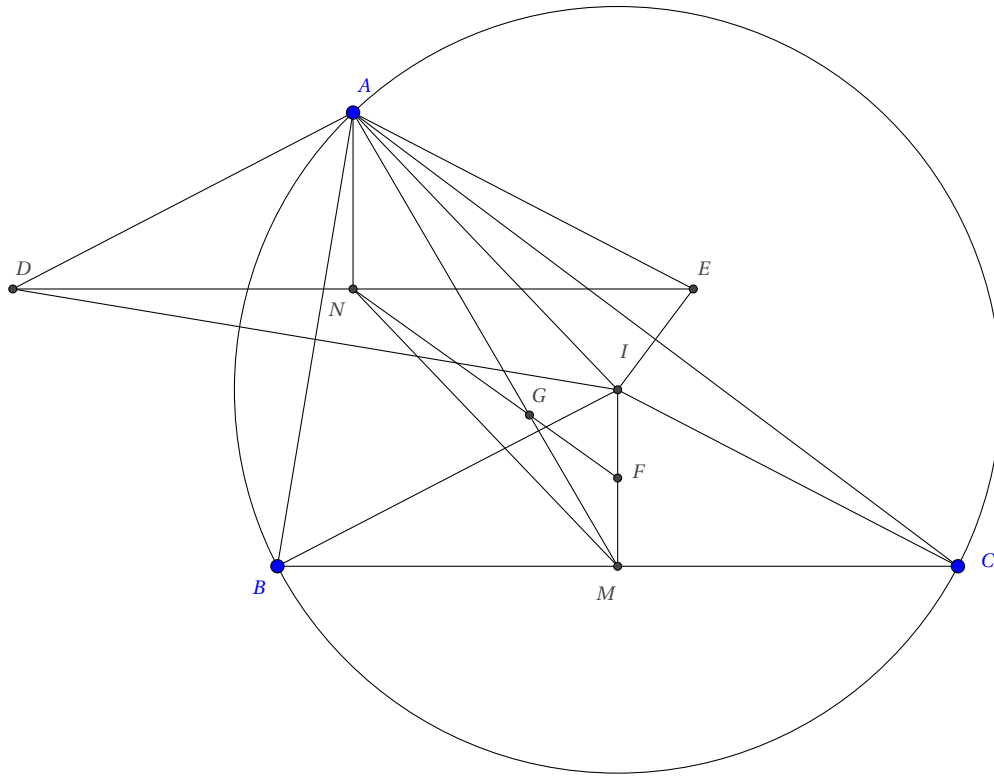
Bài toán 147. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm I có trọng tâm $G(\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$. Cho $E(1; 1), F(\frac{8}{5}; -\frac{4}{5})$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên AI . Tìm tọa độ điểm A .

Lời giải:

Tính chất 67. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E là điểm đối xứng của I qua các đường thẳng AB, AC . Khi đó

1. $BDEC$ là hình bình hành.
2. Gọi N là trung điểm DE , ta có $ANMI$ là hình bình hành và $AN \perp DE$.
3. Gọi F là trung điểm MI , ta có trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên NF sao cho $\overrightarrow{NF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{NG}$.

Lời giải:



1. Ta có $ADBI, AICE$ là hình thoi nên dễ dàng suy ra $BDEC$ là hình bình hành.
2. Ta có $\angle DAE = 2\angle BAC = \angle BIC$ suy ra hai tam giác cân ADE và IBC bằng nhau. Do đó

$$\begin{cases} AN = IM \\ AN \perp DE \end{cases} \quad \text{mà } DE \parallel BC \text{ nên } AN \parallel IM \text{ hay } ANMI \text{ là hình bình hành.}$$
3. Vì F là trung điểm IM nên NF cắt AM tại G thỏa mãn $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ hay G là trọng tâm tam giác ABC .

Bài toán 148. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G(\frac{8}{3}; 0)$ và có đường tròn ngoại tiếp là (C) tâm I . Biết rằng các điểm $D(0; 1)$ và $E(4; 1)$ lần lượt là các điểm đối xứng của I qua các đường thẳng AB và AC , đường thẳng BC đi qua điểm $K(2; -1)$. Viết phương trình đường tròn (C) .

(Chuyên Vinh 2015 lần 3)

Lời giải:

Theo tính chất trên ta có $MNCB$ là hình bình hành hay đường thẳng BC đi qua $K(2; -1)$ và song song với MN nên $BC : y + 1 = 0$. Gọi N là trung điểm DE , khi đó $N(2; 1)$. Do $G(\frac{8}{3}; 0)$ và $\overrightarrow{NF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{NG}$ nên $F(3; -\frac{1}{2})$. Đường thẳng MF đi qua F và vuông góc với BC nên có phương trình $MF : x - 3 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

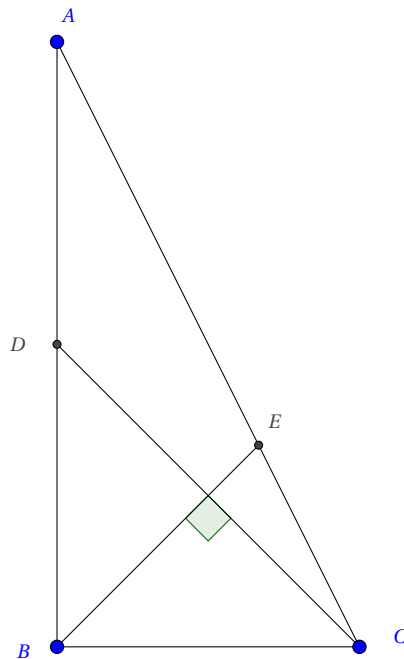
$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(3; -1).$$

Do F là trung điểm MI nên $I(3; 0)$, bán kính $R = IA = NM = \sqrt{5}$. Vậy $(C) : (x - 3)^2 + y^2 = 5$.

Tính chất 68. Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 2BC$, D là trung điểm của AB , E thuộc đoạn AC sao cho $AC = 3EC$. Khi đó

1. BE là phân giác góc B .
2. $BE \perp CD$.

Lời giải:



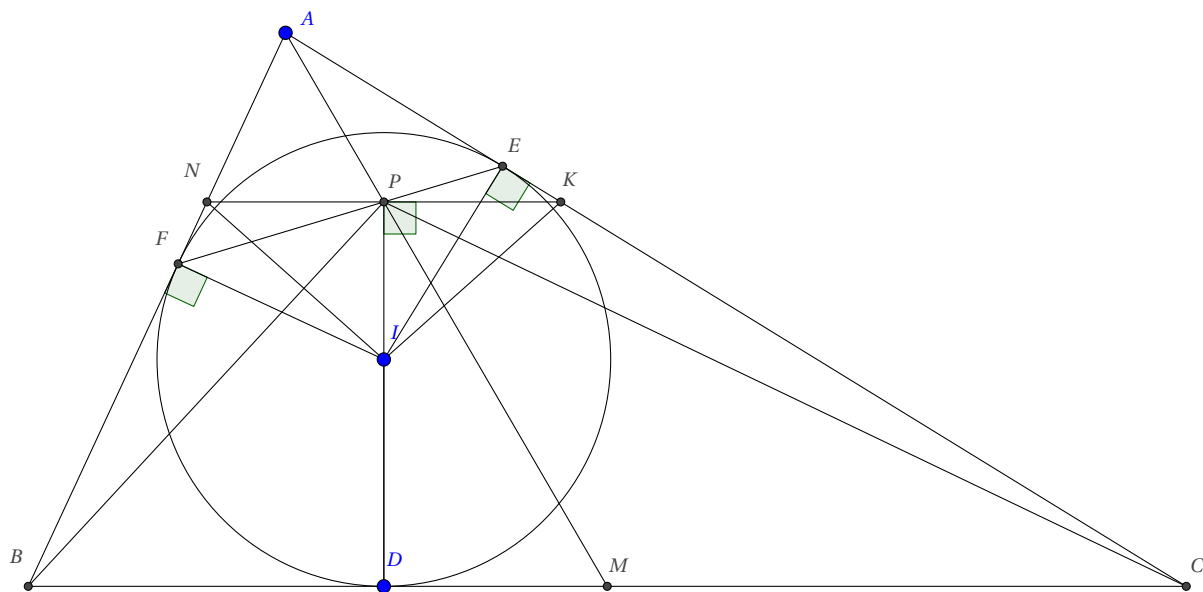
Bài toán 149. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 2BC$, D là trung điểm của AB , E thuộc đoạn AC sao cho $AC = 3EC$, biết phương trình đường thẳng CD : $x - 3y + 1 = 0$, $E(\frac{16}{3}; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC .

(Tam Đảo lần 1)

Lời giải:

Tính chất 69. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm của các cạnh BC, CA, AB là D, E, F . Đường thẳng ID cắt EF tại P . Khi đó AP đi qua trung điểm M của BC .

Lời giải:



Qua P kẻ đường thẳng song song với BC , cắt AB, AC tại N, K . Xét tam giác ANK có $IF \perp AN, IP \perp NK, IE \perp AK$ và E, P, F thẳng hàng nên theo định lý đảo Simson ta có tứ giác $ANIK$ nội tiếp, hay $\angle FNI = \angle EKI$. Do $IF = IE$ nên $\triangle IFN = \triangle IEK$. Do đó $IN = IK$ suy ra tam giác NIK cân tại N có IP là đường cao nên P là trung điểm NK . Vậy AP đi qua trung điểm M của BC .

Cách 2: Không dùng định lý đảo Simson, ta có thể dùng cộng góc cũng ra.
Ta có tứ giác $IFNP, IPEK$ nội tiếp. Suy ra $\angle INP = \angle IFP = \angle IEF = \angle IKP$ do đó tam giác NIK cân tại N .

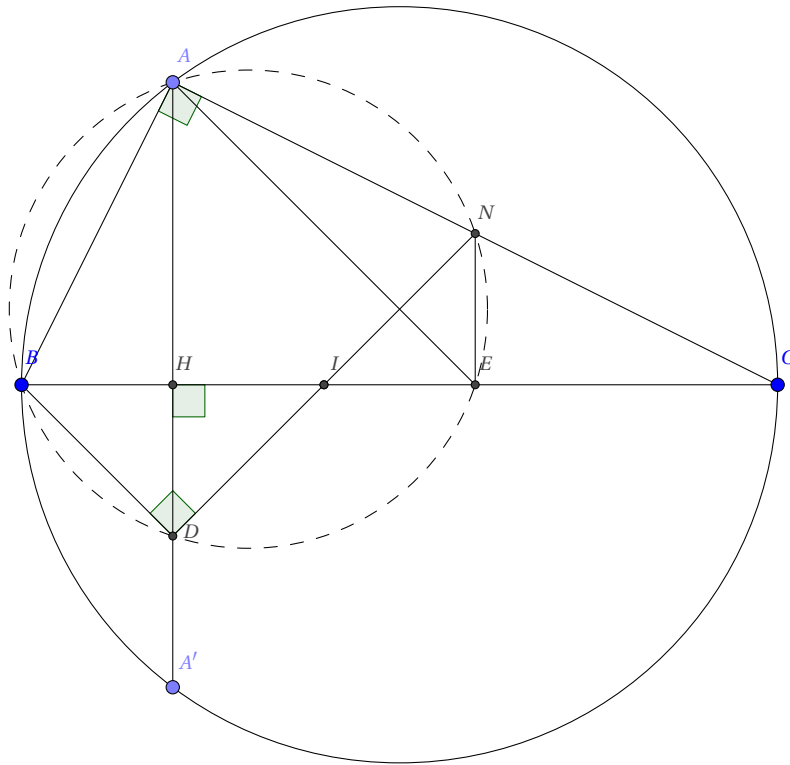
Cách 3: Dùng hàng điểm điều hòa (tuyệt chiêu).

Bài toán 150. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $r = 2$ và các tiếp điểm với các cạnh BC, CA, AB là D, E, F . Đường thẳng DI cắt EF tại P . Giả sử $AP: 2x - y + 1 = 0$, trực tâm $H(-1;3)$, trọng tâm G thuộc đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Tính chất 70. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Trên tia đối HA lấy điểm D sao cho $HA = 2HD$. Gọi N là trung điểm AC . Khi đó

1. BC đi qua trung điểm DN
2. $BD \perp DN$
3. Gọi E là trung điểm HC . Ta có năm điểm A, B, D, E, N nằm trên một đường tròn.

Lời giải:



1. Gọi N là trung điểm AC , hạ $NE \perp BC$. Nối DN cắt BC tại I . Để thấy NE là trung bình của tam giác AHC nên $NE = HD$ và $NE \parallel HD$ hay tứ giác $DHNE$ là hình bình hành. Do đó I là trung điểm của DN và HE . Suy ra BC đi qua trung điểm DN
2. Do $AH = 2HD, HE = 2HI$ nên $\triangle DHI \sim \triangle AHE$. Suy ra $\angle IDH = \angle AEH$ (1). Mặt khác $\triangle AHC \sim \triangle BHA'$ nên $\triangle AHE \sim \triangle BHD$ do đó $\angle HAE = \angle DBH$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra $\angle BDH + \angle HDI = 90^\circ$. Vậy $BD \perp DN$.
3. Để thấy năm điểm A, B, D, E, N nằm trên một đường tròn đường kính BN .

Bài toán 151. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Trên tia đối HA lấy điểm D sao cho $HA = 2HD$. Giả sử $B(2; -2), D(\frac{21}{2}; -\frac{5}{2})$ và trung điểm AC thuộc đường thẳng $x - y - 5 = 0$. Tìm tọa độ A, C .

(Vted lần 3)

Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có $ND \perp BD$ nên $DN: 17x - y - 181 = 0$. Do đó tọa độ N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 17x - y - 181 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N(11; 6).$$

Do đó trung điểm I của DN có tọa độ $I(\frac{43}{4}; \frac{7}{4})$. Đường thẳng $BI: 15x - 35y - 100 = 0$. Đường thẳng NE đi qua N và vuông góc với BI nên có phương trình $NE: 7x + 3y - 95 = 0$. Do đó tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x + 3y - 95 = 0 \\ 15x - 35y - 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E(\frac{25}{2}; \frac{5}{2}).$$

Đường tròn tam giác DNE có phương trình $(x - \frac{13}{2})^2 + (y - 2)^2 = 145$. Đường thẳng DA đi qua D và vuông góc BI có phương trình $35x + 15y - 330 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{13}{2})^2 + (y - 2)^2 = 145 \\ 35x + 15y - 330 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(6; 8).$$

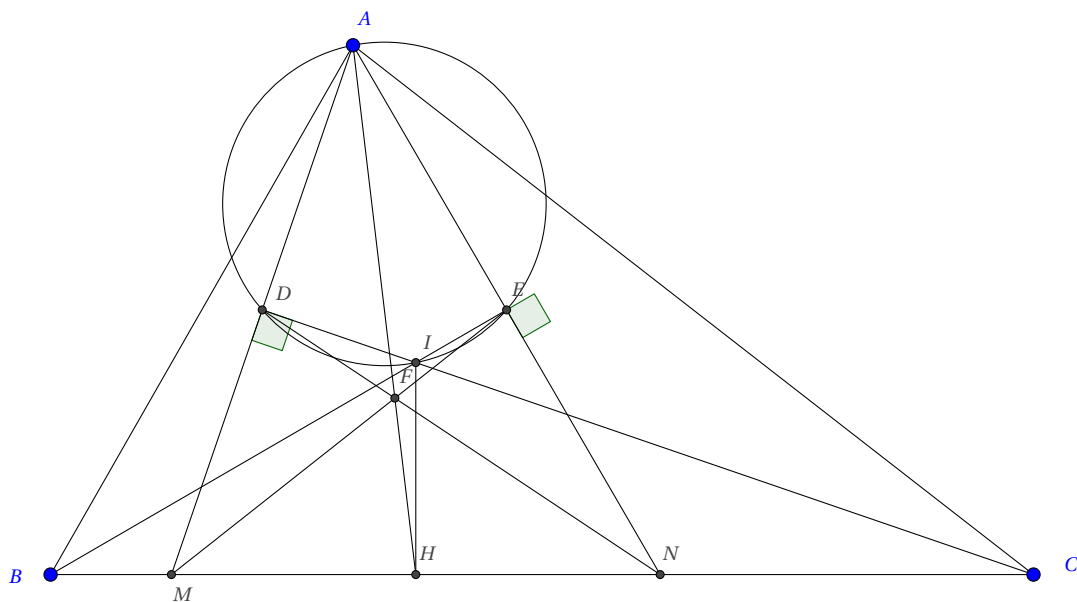
Đường thẳng AC qua A và vuông góc BA nên có phương trình $2x + 5y - 52 = 0$. Do đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 5y - 52 = 0 \\ 15x - 35y - 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(16; 4)$$

Tính chất 71. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Hạ AD, BE vuông góc với CI, BI cắt BC tại M, N. Giả sử ND cắt ME tại F. Khi đó

1. F là trọng tâm tam giác AMN.
2. Tứ giác ADIE nội tiếp đường tròn.
3. Hạ IH xuống BC. Ta có H là trung điểm MN hay A, F, H thẳng hàng.

Lời giải:



1. Để thấy D, E là trung điểm AM, AN. Do đó F là trọng tâm tam giác AMN
2. Tứ giác ADIE nội tiếp qua đơn giản.
3. Vì M, N là điểm đối xứng của A qua CI, BI nên ta có $IM = IA = IN$ hay tam giác IMN cân tại I suy ra H là trung điểm của MN và A, F, H thẳng hàng.

Bài toán 152. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(0; 3), đỉnh C thuộc đường thẳng $x + 3y = 0$, các đường phân giác trong của B, C cắt nhau tại I. Kẻ AD vuông góc với CI cắt BC tại M, kẻ AE vuông góc BI cắt BC tại N. Biết DN cắt ME tại F(1; 1), và đường thẳng qua I vuông góc với BC có phương trình $d: x = 2$. Tìm tọa độ đỉnh B, C.

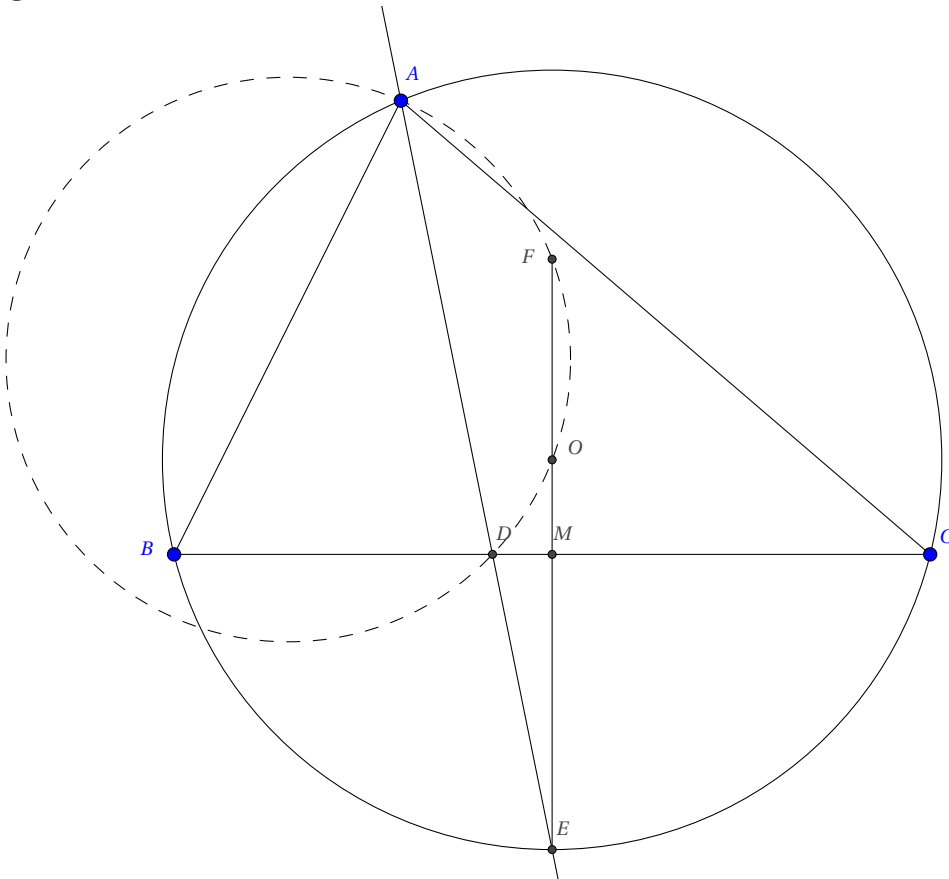
(nhóm thi thử 13)

Gọi K là trung điểm MN. Do F là trọng tâm tam giác AMN nên $K(1; 1)$. Đường thẳng BC đi qua K và vuông góc với d nên có phương trình BC: $x + 3y = 6$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(6; -2)$$

Tính chất 72. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác AD cắt (O) tại E. Gọi F là điểm đối xứng của E qua BC. Khi đó bốn điểm A, F, O, D nội tiếp.

Lời giải:



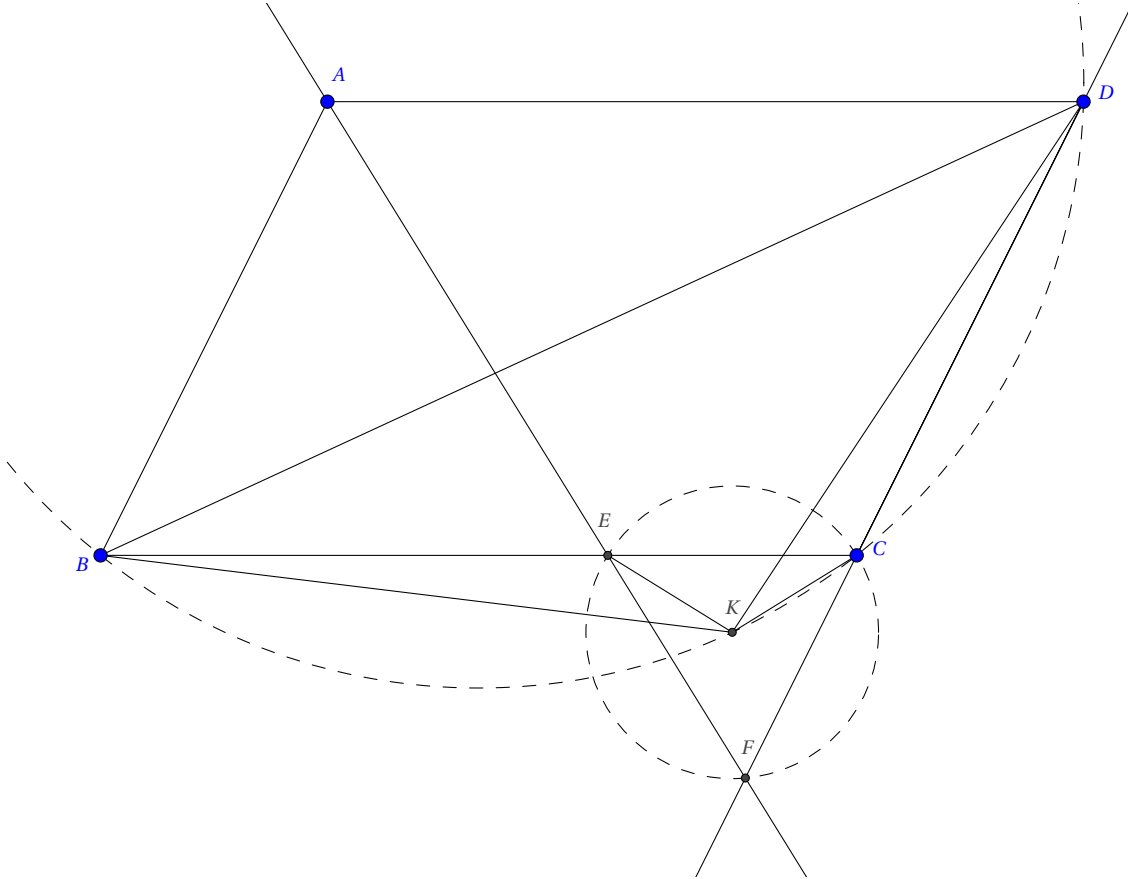
Ta có tam giác AOE cân tại O và tam giác EDF cân tại D nên $\angle DAO = \angle OED = \angle DFO$ do đó tứ giác AFOD nội tiếp.

Bài toán 153. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn có đỉnh C(4;0) nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, F là điểm đối xứng của E qua BC, đường thẳng AE cắt BC tại điểm D, phương trình đường thẳng EF là $2x + y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết A và I có hoành độ nguyên, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF là $(x - 9 + \frac{5\sqrt{5}}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{275}{2} - 50\sqrt{5}$.

Đáp số A(-1;5)

Tính chất 73. Cho hình bình hành ABCD. Phân giác trong góc A cắt các đường thẳng BC, CD tại E, F. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF. Khi đó tứ giác BKCD nội tiếp.

Lời giải:



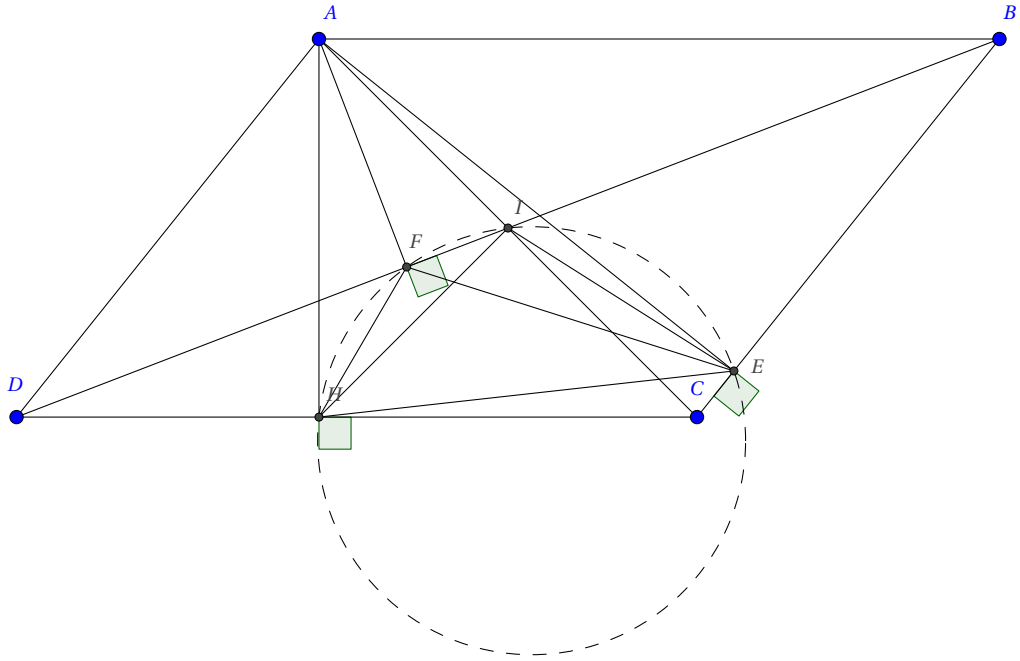
Ta có tam giác ABE cân tại B nên $BE = BA = CD$ (1). Do tam giác ECF cân tại C và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF nên hai tam giác cân $\triangle EKC = \triangle FKC$ hay $\angle KEC = \angle KCF$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra $\triangle BEK = \triangle CDK$ hay $\angle KBE = \angle KDC$. Vậy tứ giác BKCD nội tiếp.

Bài toán 154. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có điểm $H(4;3)$ thuộc đường thẳng AD. Đường phân giác trong góc $\angle BAD$ cắt cạnh CD tại I, cắt BC tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ICE. Cho biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác KCD là $(x - \frac{9}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$, và phương trình đường thẳng AI là $x - y - 3 = 0$, đỉnh B nằm trên đường thẳng $x + 3y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết B, D là các điểm có tọa độ nguyên.

Đáp số $A(2; -1), B(6; 1), C(7; 3)$ và $D(3; 1)$.

Tính chất 74. Cho hình bình hành ABCD với tâm I. Hạ AE, AF, AH lần lượt xuống BC, BD, CD. Khi đó bốn điểm E, F, H, I nội tiếp.

Lời giải:

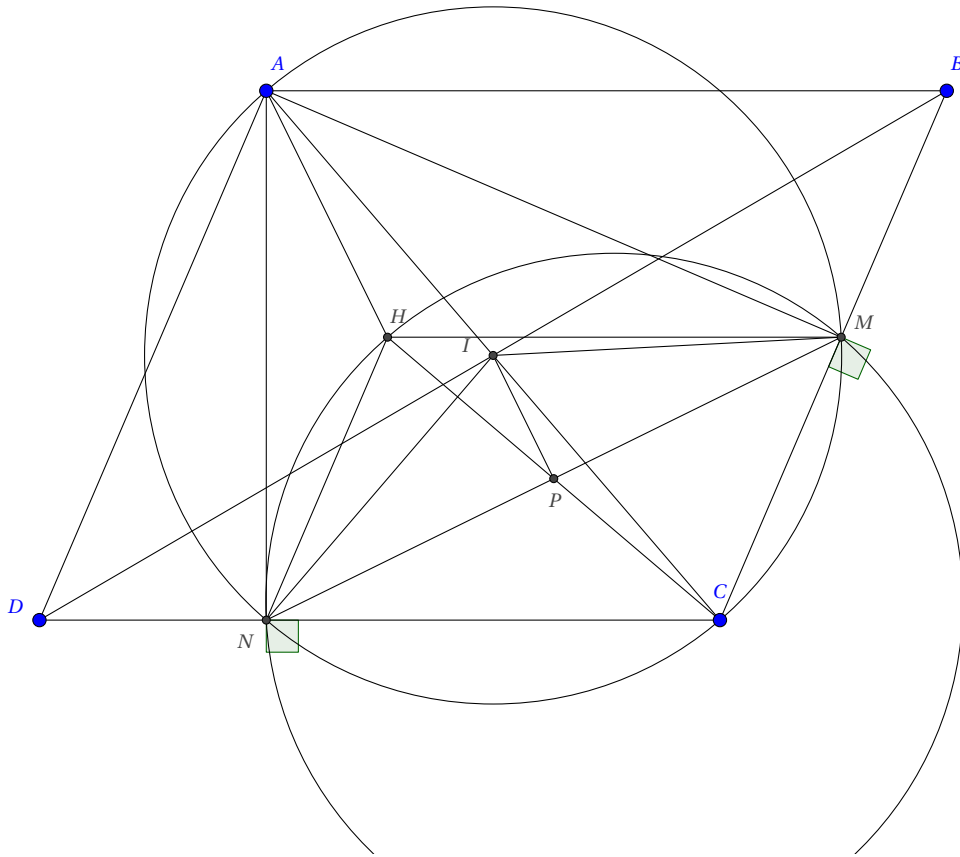


Ta xét trường hợp góc A tù, còn trường hợp ngược lại làm tương tự. Ta có tứ giác ADHF, AFEB nội tiếp nên $\angle HFE = 180^\circ - \angle DFH - \angle BFE = 180^\circ - \angle DAH - \angle BAE = 2\angle B = 2(180^\circ - \angle C) = 2\angle HAE = \angle HIE$ (do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE). Vậy bốn điểm E, F, H, I nội tiếp.

Bài toán 155. Trong mặt phẳng Oxy cho hình bình hành ABCD với góc B nhọn. Cho $A(-2; -1)$. Gọi H, K, E là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BC, BD, DC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác (HKE): $x^2 + y^2 + x + 4y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình bình hành, biết $x_H < 0$, $x_C > 0$ và $C \in x - y - 3 = 0$.

Bài toán 156. Trong Oxy cho hình bình hành ABCD có $A(1; 2)$, $C(4; 6)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên CB, CD. Viết phương trình đường thẳng MN, biết trục tâm H có hoành độ dương thuộc đường thẳng $x + y + 1 = 0$ và $MN = 3$.

Lời giải:

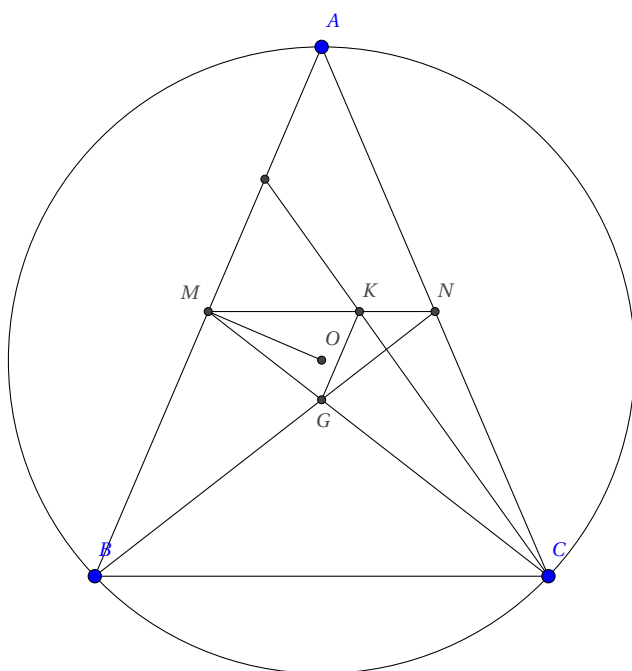


Cách 1: Gọi I, P là trung điểm của AC, MN . Điểm $I(\frac{5}{2}; 4)$. Gọi $H(a; -a-1) \in x+y+1=0$. Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IP}$ nên $P(\frac{a+4}{2}; \frac{a+5}{2})$. Sử dụng $IP^2 = IN^2 - \frac{MN^2}{4} = \frac{AC^2 - MN^2}{4}$ giải theo tham số a ta được

$$\begin{cases} a=1 \\ a=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(\frac{5}{2}; 3) \\ P(\frac{1}{2}; -1) \end{cases}. \text{ Đường thẳng } MN \text{ là đường thẳng đi qua } P \text{ và vuông góc với } IP.$$

Tính chất 75. Cho tam giác ABC cân tại A . M là trung điểm AB . Gọi K, G là trọng tâm tam giác ACM, ABC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó O là trực tâm tam giác MGK .

Lời giải:



Chú ý K nằm trên đường trung bình MN và $\frac{NK}{NM} = \frac{NG}{NB}$ do đó ta có $GK \parallel BM$ mà $OM \perp BM$ suy ra $OM \perp GK$. Mặt khác A, O, G thẳng hàng (do tam giác ABC cân tại A) nên $OG \perp MK$. Vậy O là trực tâm tam giác MKG.

Bài toán 157. Cho tam giác ABC cân tại A, gọi D là trung điểm của AB, D có tung độ dương, điểm $I(\frac{11}{3}; \frac{5}{3})$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Điểm $E(\frac{13}{3}; \frac{5}{3})$ là trọng tâm ADC. Điểm $M(3; -1)$ thuộc DC, $N(-3; 0)$ thuộc AB. Tìm tọa độ A, B, C.

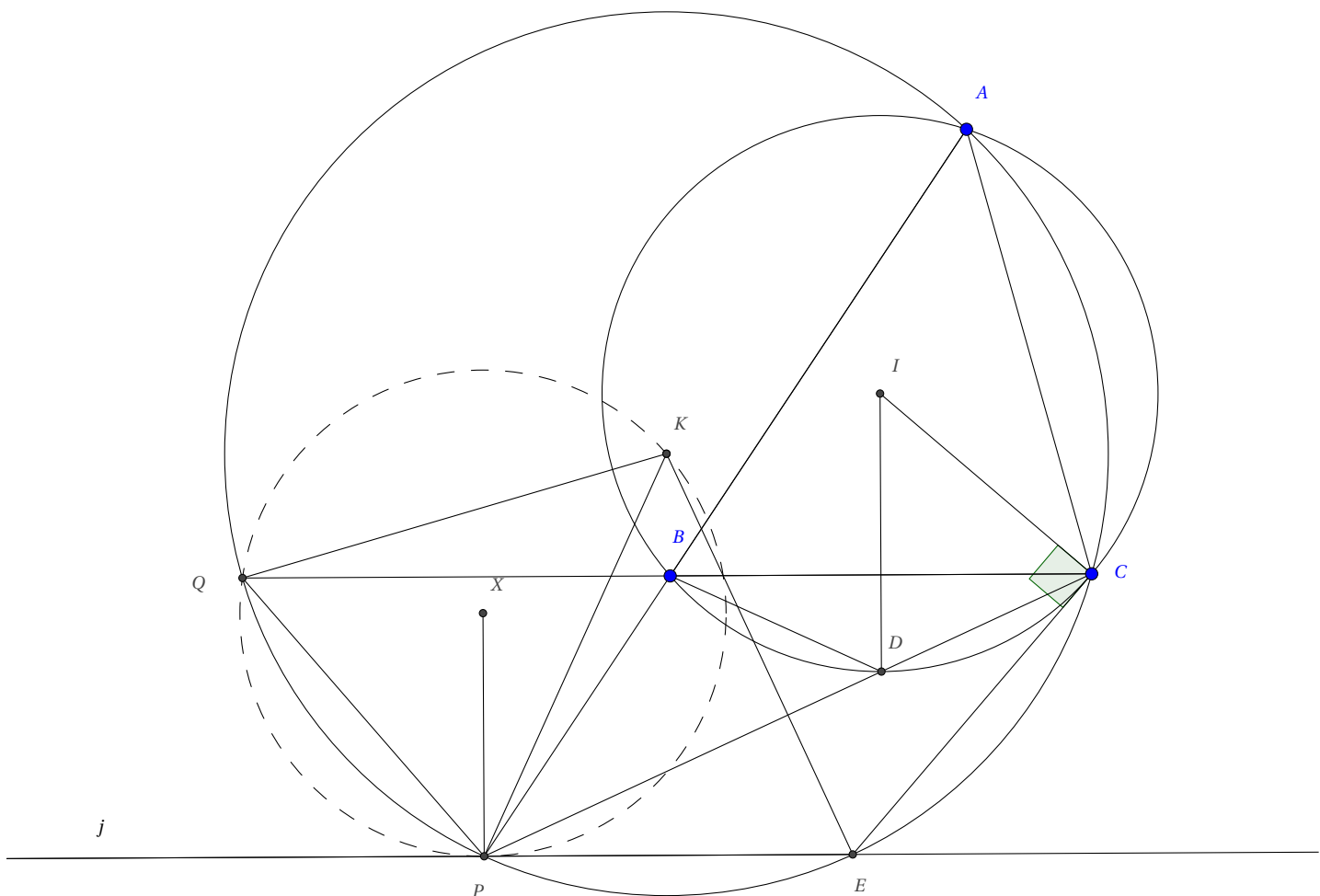
Bài toán 158. Cho tam giác ABC cân tại A. M là trung điểm AB. Đường thẳng CM: $y - 3 = 0$. $K(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3})$ là trọng tâm tam giác ACM. Đường thẳng AB đi qua $D(-\frac{1}{2}; 4)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết $x_M \geq 0$ và tâm J đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thuộc đường thẳng $2x - y + 4 = 0$.

(Hocmai)

Tính chất 76. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I). D là chính giữa cung BC không nhất thiết chứa A. P là giao điểm của AB và DC. Giả sử BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APC tại Q. Gọi K, X lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APC, PKQ. Khi đó

1. Qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E. Ta có tứ giác QPEC là hình thang cân, từ đó suy ra $IC \perp EC$.
2. Tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PKQ song song với BC hay $PX \perp BC$.
3. PK là phân giác $\angle QPE$.

Lời giải:

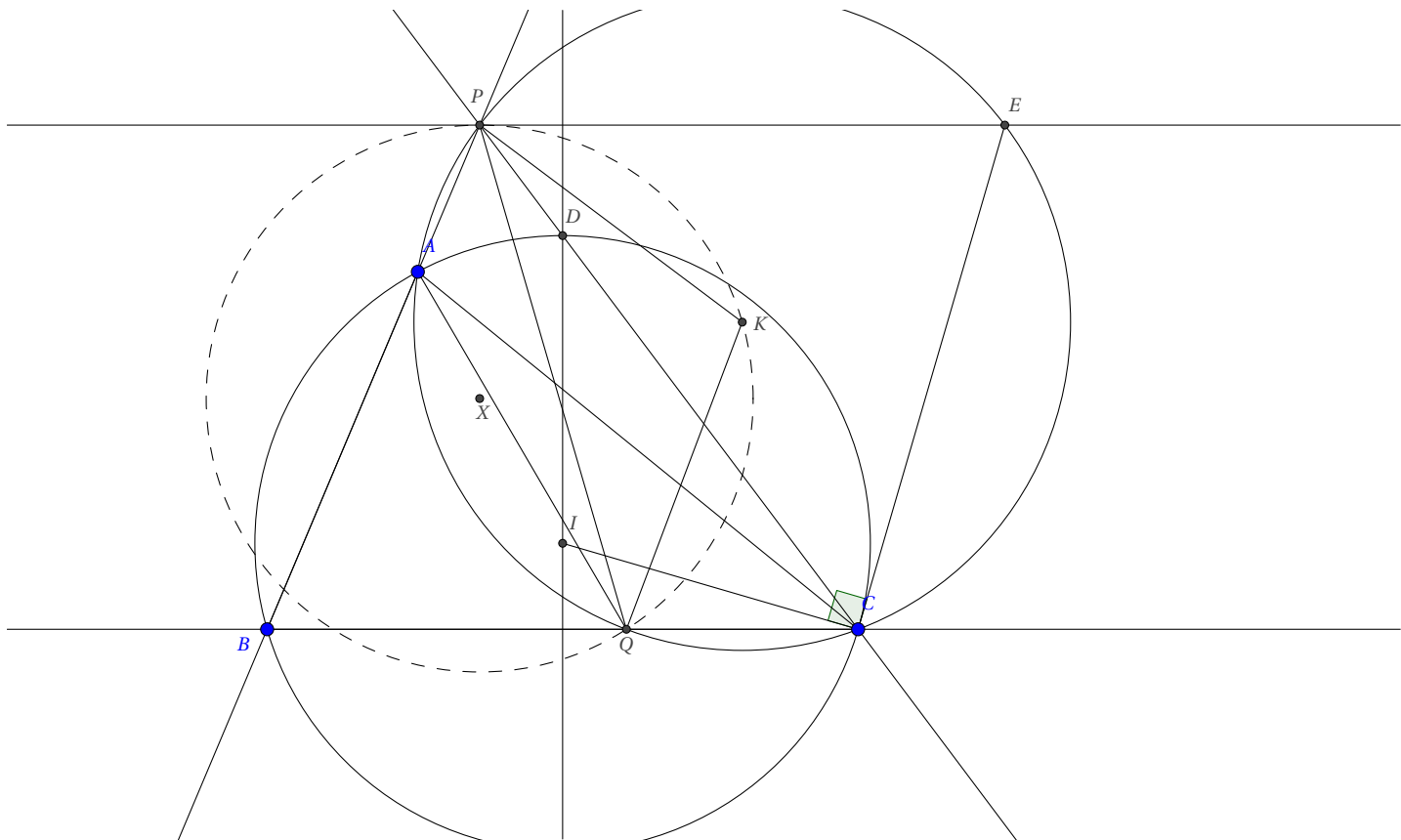


Trường hợp 1: D chính giữa cung BC không chứa A.

1. Tứ giác QPEC là hình thang và nội tiếp nên là hình thang cân. Khi đó $\angle ECB = \angle PQB = \angle BAC = \angle DIC$, suy ra $IC \perp EC$.
2. Qua P kẻ đường thẳng song song với BC. Do tứ giác QPCA nội tiếp nên

$$\angle QKP = 2\angle QCP = \angle A = \angle PQC = \angle QPj$$

hay Pj là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác QPK do đó $PX \perp Pj$. Vậy $PX \perp BC$.



Trường hợp 2: làm tương tự.

Bài toán 159. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I). D là chính giữa cung BC không chứa A. $P(4;5)$ là giao điểm của AB và DC. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác APC có phương trình $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Đường thẳng DI có phương trình $x+2y-10=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C. (hocmai2)

Lời giải:

Đường tròn ngoại tiếp tam giác có tâm $K(0;2)$ và bán kính $R=5$. Áp dụng tính chất ta có PX song song với DI nên $DX: x+2y-14=0$. Trung trực $PK: 8x-6y-37=0$. Do đó tọa độ X là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-14=0 \\ 8x-6y-37=0 \end{cases} \Rightarrow X(-1; \frac{15}{2}).$$

Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác PKQ có phương trình $(x+1)^2 + (y-\frac{15}{2})^2 = \frac{125}{4}$. Do đó tọa độ của Q là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-\frac{15}{2})^2 = \frac{125}{4} \\ x^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow Q(-\frac{24}{5}; \frac{17}{5})$$

Đường thẳng BC đi qua Q vuông góc với DI nên có phương trình $BC: 2x-y+13=0$. Do đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x-y+13=0 \\ x^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow C(-4;5).$$

Tọa độ B đối xứng với C qua đường thẳng DI nên $B(-\frac{12}{5}; \frac{41}{5})$. Đường thẳng PB đi qua P, B nên có

phương trình BP : $x + 2y - 14 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

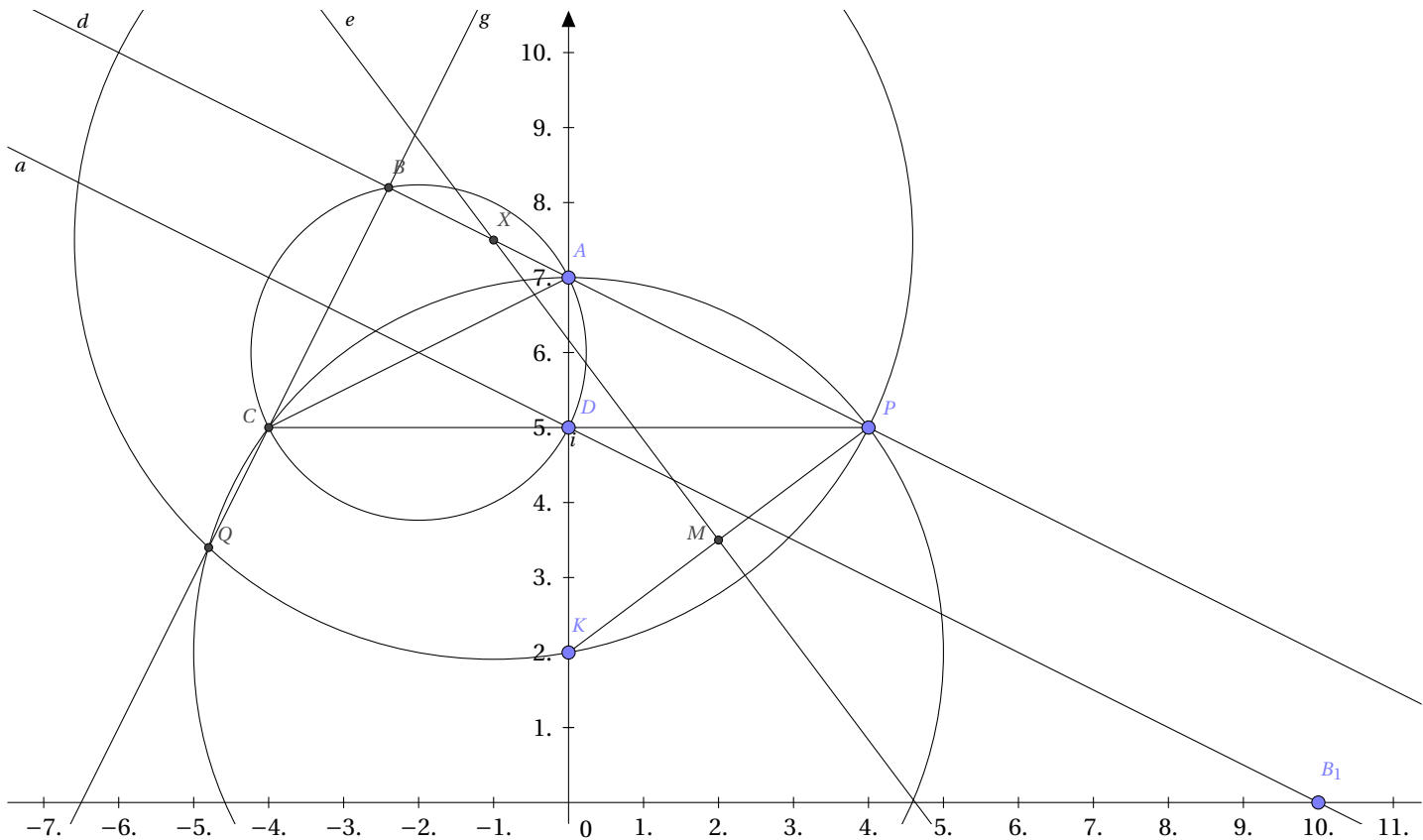
$$\begin{cases} x + 2y - 14 = 0 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow A(0; 7).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 5$. Đường thẳng CP : $y - 5 = 0$, do đó tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 5 = 0 \\ (x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow D(0; 5).$$

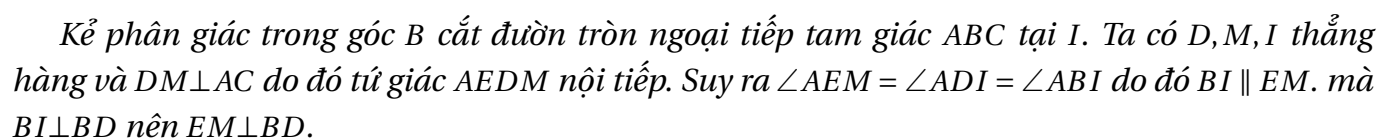
Kiểm tra lại thấy A, D cùng phía đối với BC. Vậy không tồn tại tam giác ABC thỏa mãn đề cho.

Một điều bất ngờ thấy bài toán đúng khi D là chính giữa cung BC chứa A. Kiểm tra hình vẽ:



Tính chất 77. Cho tam giác ABC. Phân giác ngoài góc B cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Hạ DE vuông góc xuống đường thẳng AB. Gọi M là trung điểm AC. Khi đó ta có $ME \perp BD$.

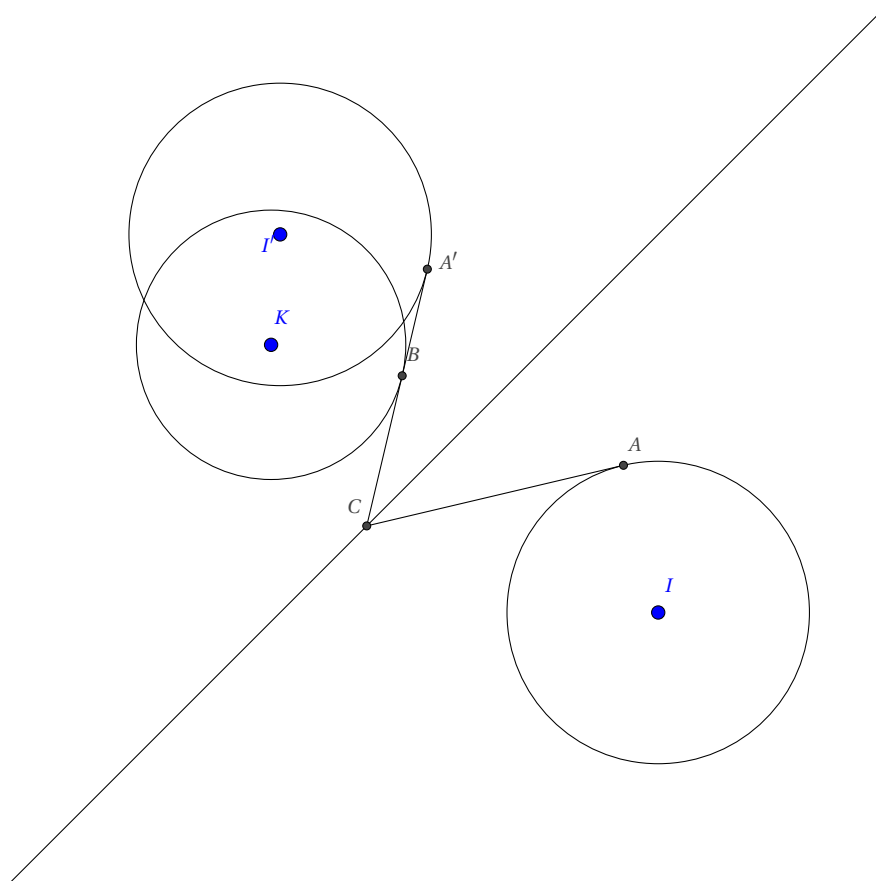
Lời giải:



(sienghoc lần 2)

(Vted lần 4)

133



Tính chất quan trọng là tính đối xứng!

Gọi (C'_1) , A' lần lượt là ảnh của đường tròn (C_1) , A qua đường thẳng Δ . Khi đó ta có CA' là tiếp tuyến của (C'_1) và Δ là phân giác của $\angle ACA'$. Do CB là tiếp tuyến của (C_2) và Δ là phân giác $\angle ACB$ nên CB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C'_1) và (C_2) . Vậy tọa độ C là giao của tiếp tuyến chung (C'_1) và (C_2) với đường thẳng Δ .

Áp dụng tính chất ta có $C'_1 : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$. Khi đó tiếp tuyến chung của C'_1 và C_2 có phương trình

$$\begin{cases} d_1 : y = 1 \\ d_2 : 4x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $d_1 : y = 1$.

Tiếp điểm $B(-4; 1)$, $A'(-2; 1)$. Điểm A đối xứng của A' qua Δ nên $A(-1; 0)$. Tọa độ C là nghiệm của

$$\text{hệ} \begin{cases} y = 1 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{nên } C(-1; 1)$$

Trường hợp 2: làm tương tự.

Bài toán 162. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2; 1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình $2x + y - 10 = 0$ và $D(2; -4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$. Đáp số $A(2; 6)$, $B(-3; -4)$, $C(5; 0)$

(chuyên Vĩnh Phúc 2016 lần 1)

Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIA .

Phương trình đường thẳng AD đi qua $J(2; 1)$ và $D(2; -4)$ nên có phương trình $x - 2 = 0$. Tọa độ của

A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2; 6).$$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BJC tâm D bán kính DJ nên có phương trình $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$. Do đó tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(-3; -4) \\ B(2; -9) \end{cases} \text{ (loại)}$$

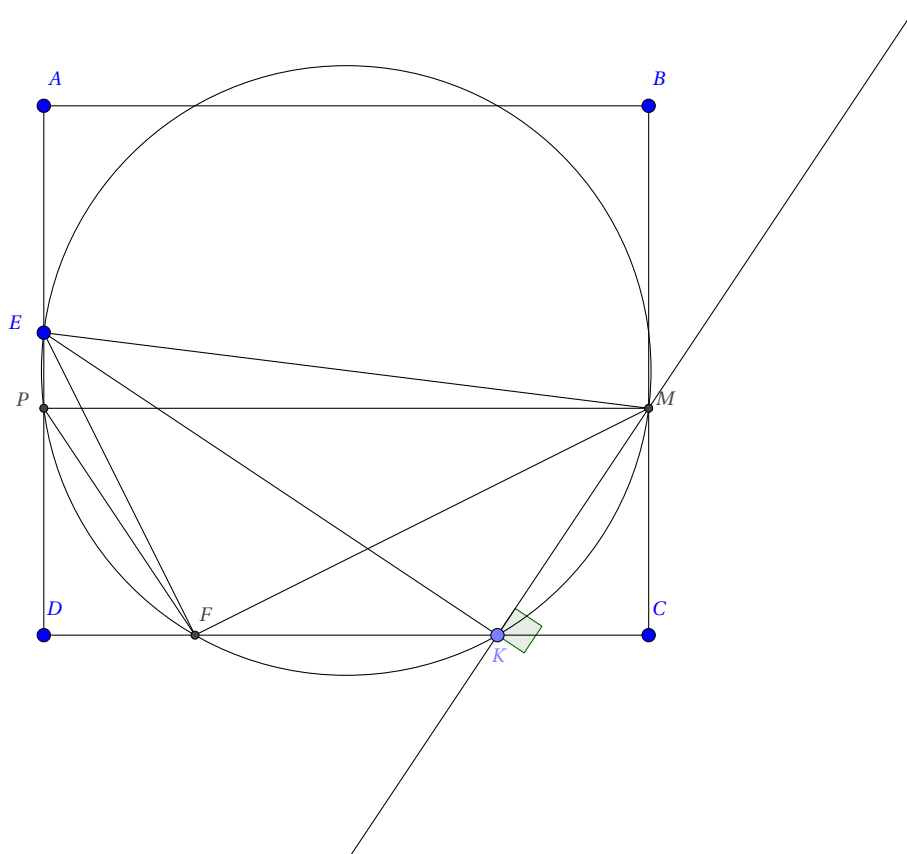
Đường thẳng BC đi qua $B(-3; -4)$ vuông góc với đường cao đỉnh A nên có phương trình $BC: x - 2y - 5 = 0$. Do đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow C(5; 0)$$

Tính chất 78. Cho hình chữ nhật $ABCD$, điểm E thuộc cạnh AD . Trên cạnh CD lấy điểm K đường thẳng vuông góc với EK tại K cắt BC tại M . Giả sử F trên cạnh CD . Khi đó ta có

$$EF \perp FM \Leftrightarrow DF = CK.$$

Lời giải:

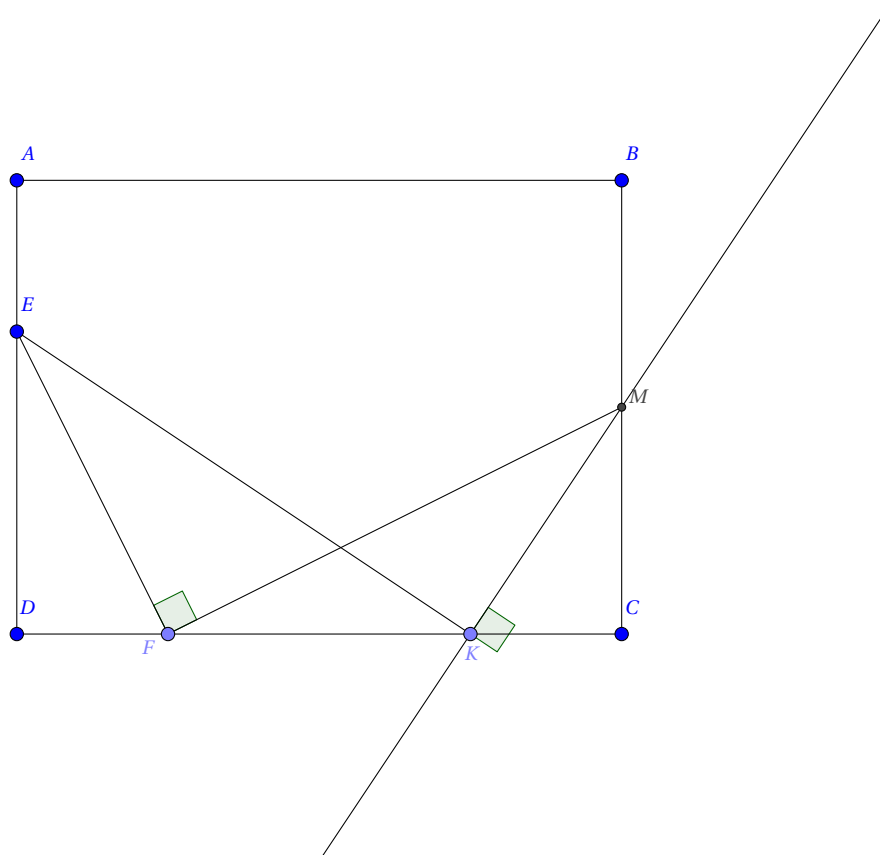


Hạ $MP \perp AD$. Dễ thấy bốn điểm E, P, K, M nội tiếp. Khi đó $EF \perp FM$ khi và chỉ khi tứ giác $MPFK$ nội tiếp, mà tứ giác $MPFK$ là hình thang nên $EF \perp FM$ khi và chỉ khi tứ giác $MPFK$ là hình thang cân hay $\Leftrightarrow \triangle DPF = \triangle CMK \Leftrightarrow DF = CK$.

Bài toán 163. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$, điểm $E(2;2)$ thuộc cạnh AD sao cho $DE = 2AE$. Trên cạnh CD lấy 2 điểm $F(3;5)$ và K sao cho $DF = CK$ (F nằm giữa D và K), đường thẳng vuông góc với EK tại K cắt BC tại M . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết điểm M thuộc đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$ và đường thẳng BC đi qua $J(4;4)$.

(moon lần 3)

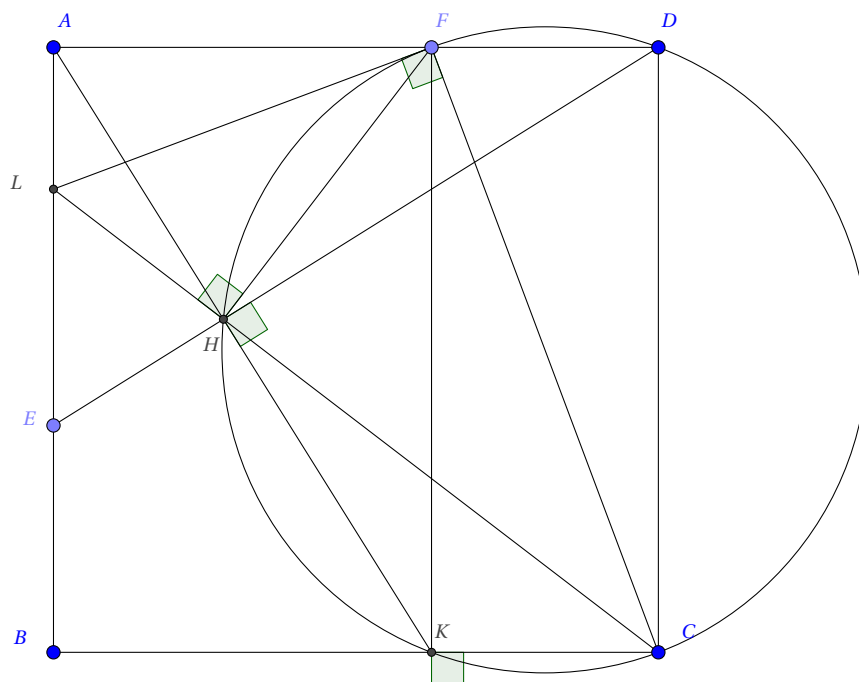
Lời giải:



Tính chất 79. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, AD lấy điểm E, F sao cho $AE = AF$. Hạ đường cao $AH \perp ED$ cắt BC tại K . Kéo dài CH cắt AB tại L . Khi đó

1. năm điểm H, K, C, D, F nằm trên đường tròn.
2. bốn điểm A, L, H, F nội tiếp đường tròn.
3. $LF \perp FC$.

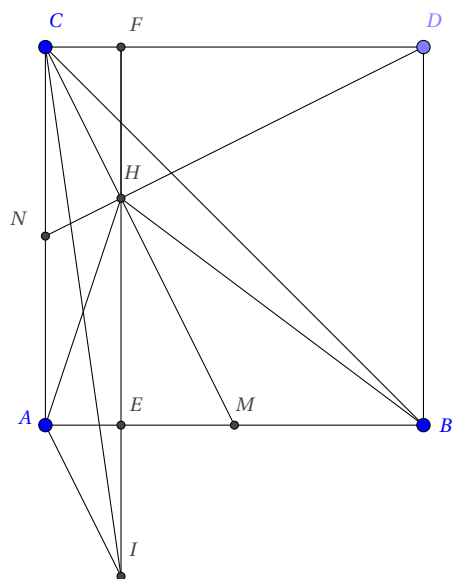
Lời giải:



Bài toán 164. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, AD lấy điểm E, F sao cho $AE = AF$. Hạ đường cao $AH \perp ED$ cắt BC tại K . Kéo dài CH cắt AB tại $L(\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}), F(2; 0), C \in x - 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ C .

Tính chất 80.

Lời giải:

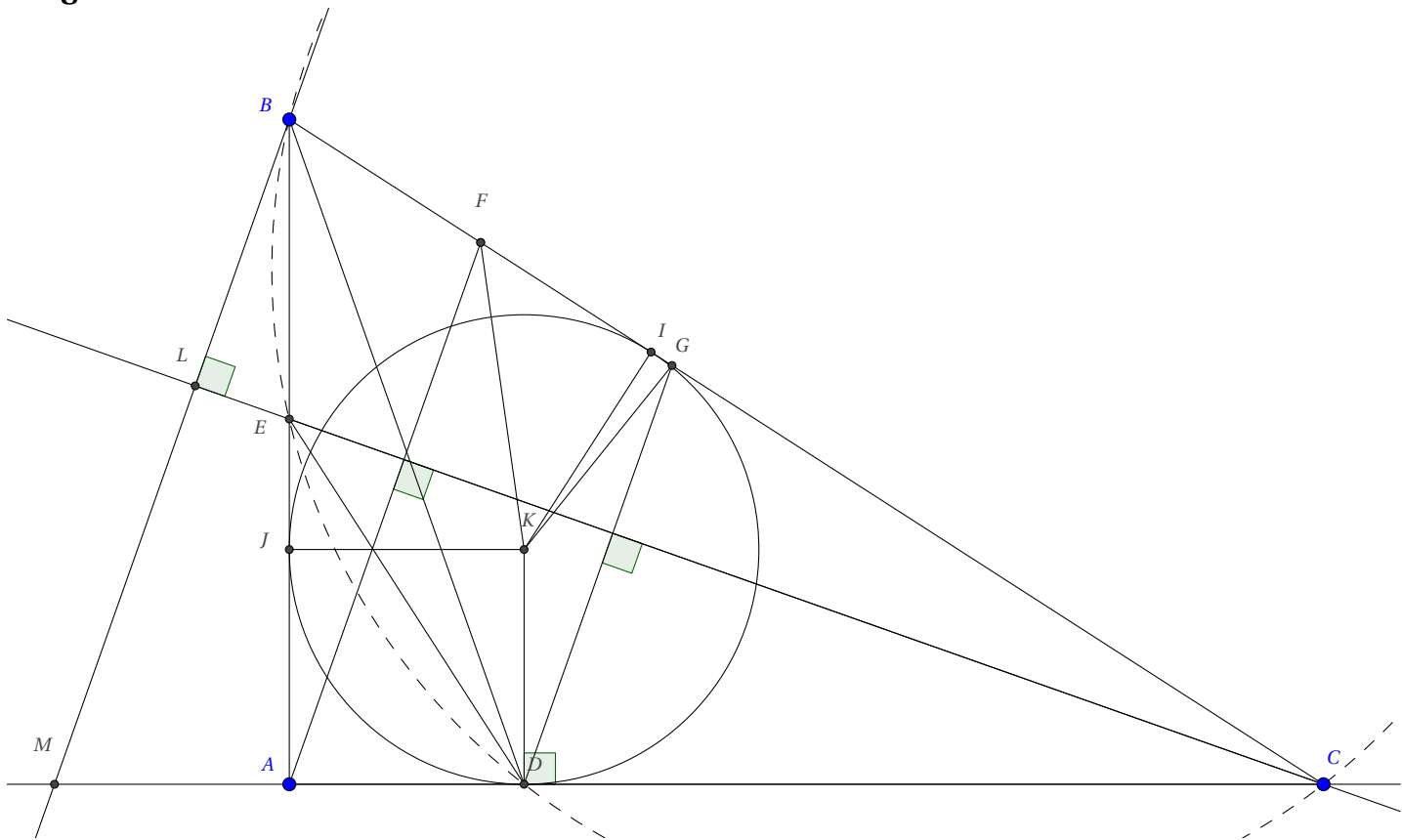


Bài toán 165. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M, N là trung điểm AB, AC . Hạ $NH \perp CM$ tại H và $HE \perp AB$ tại E . Đường thẳng qua B vuông góc CM cắt HE tại $I(8;1)$, trung trực HA có phương trình $x + 3y - 21 = 0$; $B \in x + y - 11 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

Tính chất 81. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm (K) có D là tiếp điểm của (K) với cạnh AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt cạnh AB tại điểm $E \neq B$. Các đường thẳng qua A, D và vuông góc với CE cắt cạnh BC tại F và G . Khi đó

1. Hạ $KI \perp FG$ ta có $AJKD$ là hình vuông và $KI = KJ = KD$.
2. F là trung điểm BG .

Lời giải:



1. Dễ dàng thấy $AJKD$ là hình vuông. Hạ $KI \perp FG$ khi đó $KI = KJ = KD$ hay đường tròn nội tiếp (K) có bán kính bằng chiều cao BI của tam giác KEG .
2. Hạ $KL \perp CE$ cắt AC tại M . Ta có tứ giác $BLAC, BEDC, MLEA$ nội tiếp nên $\angle BMA = 90^\circ - \angle LBE = 90^\circ - \angle ACE = 90^\circ - \angle ABD = \angle BDA$. Do đó tam giác BMD cân tại B , mà BA là đường cao nên A là trung điểm MD . Chú ý $BM \parallel AF \parallel DG$ suy ra F là trung điểm BG .

Bài toán 166. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (C) tâm K có D là tiếp điểm của (C) trên cạnh AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt cạnh AB tại điểm $E \neq B$. Các đường thẳng qua A, D và vuông góc với CE cắt cạnh BC tại F và G . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $F(-3; -4); G(1; -1); K(-2; 3)$.

(THTT tháng 11)

Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có B đối xứng của G qua F nên $B(-7; -7)$. Phương trình đường thẳng FG đi qua $F(-3; -4), G(1; -1)$ nên có phương trình $FG: 3x - 4y - 7 = 0$. Gọi I là hình chiếu của K lên đường thẳng FG suy ra $I(1; -1) \equiv G$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC chính là đường tròn tâm $K(-2; 3)$ và bán kính $KI = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$ nên có phương trình (C): $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$. Phương trình tiếp tuyến của B đối với (C) có dạng

$$\begin{cases} x+7=0 \\ 3x-4y-7=0 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

và khi đó tiếp điểm J của AB với (C) là nghiệm của hệ

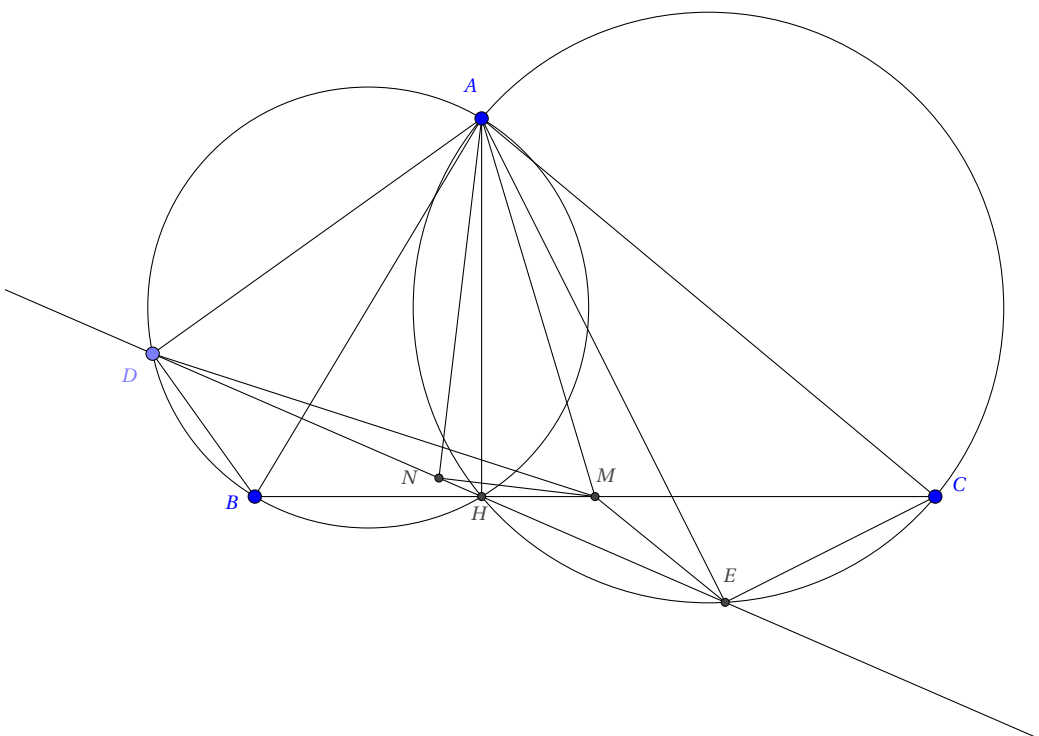
$$\begin{cases} x+7=0 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow J(-7; 3).$$

Điểm $A \in x+7=0$ và nằm trên tia đối JB và $JA = KI = 5$ suy ra $A(-7; 8)$. Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc với AB nên có phương trình $AC: y-8=0$. Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y-8=0 \\ 3x-4y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow C(13; 8)$$

Tính chất 82. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Một đường thẳng bất kỳ qua H cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB, AHC tại điểm thứ hai D, E. Gọi M, N là trung điểm BC, DE. Khi đó ta có $AN \perp MN$.

Lời giải:



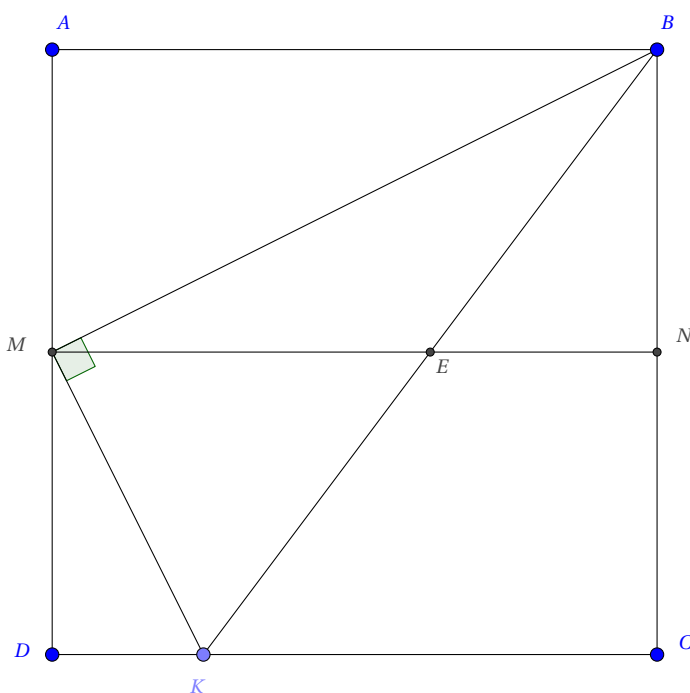
$$\begin{aligned} & \text{Ta có tứ giác } ADBH, ACEH \text{ nội tiếp nên } \begin{cases} \angle ADH = \angle ABH \\ \angle ACH = \angle AEH \end{cases} \text{ do đó } \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ suy ra} \\ & \begin{cases} \angle DAB = \angle NAM \\ \frac{DA}{BA} = \frac{NA}{MA} \end{cases} . \text{ Vậy } \triangle ADB \sim \triangle ANM \text{ suy ra } \angle ANM = \angle ADB = 90^\circ \text{ hay } AN \perp MN. \end{aligned}$$

Bài toán 167. Trong Oxy cho tam giác ABC, đường cao AH. Một đường thẳng bất kỳ qua H cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB, AHC tại điểm thứ hai D, E. Giả sử $D(0; 3)$, $E(\frac{22}{5}; -\frac{1}{5})$ và $M(4; \frac{1}{2})$ là trung điểm BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $A \in x + y - 9 = 0$ và A có tọa độ nguyên.

Tính chất 83. cho hình vuông ABCD. Điểm M là trung điểm AD, điểm K thuộc cạnh DC sao cho $KC = 3KD$. Gọi N, E là trung điểm của BC, BK. Khi đó

1. M, E, N thẳng hàng và $\overrightarrow{MN} = \frac{8}{5}\overrightarrow{ME}$.
2. $MK \perp MB$.

Lời giải:



1. Dễ dàng thấy M, E, N thẳng hàng và ME là đường trung bình của hình thang ABKD suy ra $ME = \frac{1}{2}(DK + AB)$ do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{8}{5}\overrightarrow{ME}$.
2. Ta có $\frac{DM}{DK} = 2 = \frac{AB}{AM}$ do đó $\triangle MDK \sim \triangle BAM$ hay $\angle DMK + \angle AMB = \angle ABM + \angle AMB = 90^\circ$.
Vậy $MK \perp MB$.

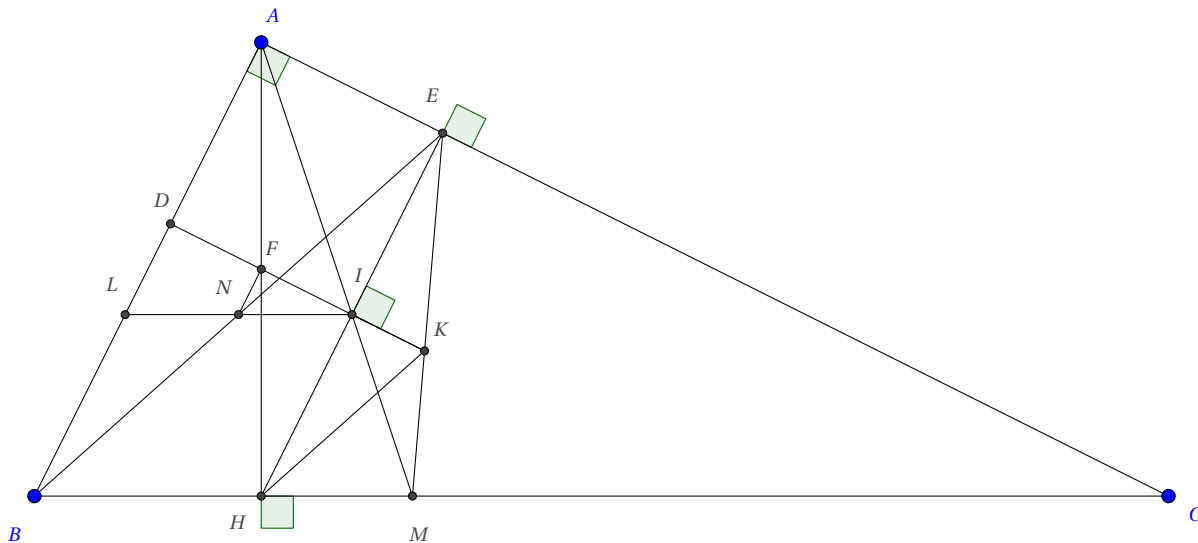
Bài toán 168. Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có $B \in 2x - y = 0$. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm AD, điểm $K(-2;-2)$ thuộc cạnh DC sao cho $KC = 3KD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định lần 2)

Tính chất 84. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, E là hình chiếu vuông góc của A lên BC và hình chiếu của H lên AC. Gọi I là trung điểm HE. Đường thẳng AI cắt BC tại M. Trung trực HE cắt EM tại K. Gọi N là trung điểm của BE. Kéo dài IK cắt AB, AH tại D, F. Khi đó

1. F là trung điểm DI và AH hay DAIH là hình bình hành.
2. Kéo dài IN cắt AB tại L. Ta có N là trung điểm LI.
3. $NF \perp FK$.
4. EH là phân giác $\angle BEM$.

Lời giải:

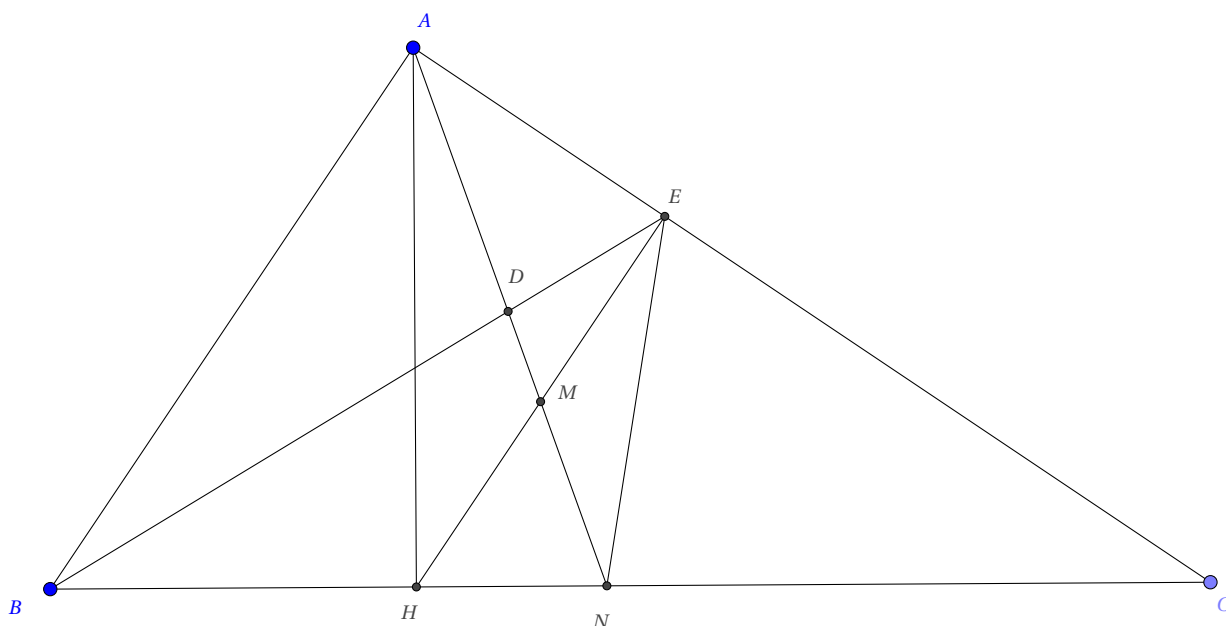


Chú ý ta có EH là phân giác trong của $\angle BEM$. Thật vậy xét hai tam giác EAB, KIE có $\frac{IK}{AE} = \frac{MI}{MA} = \frac{BL}{BA} = \frac{HI}{BA} = \frac{IE}{BA}$ do đó $\triangle KIE \sim \triangle EAB$ suy ra $\angle KEI = \angle ABE = \angle BEI$ hay EH là phân giác $\angle BEM$.

Bài toán 169. Trong Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, E là hình chiếu vuông góc của A lên BC và hình chiếu của H lên AC. Gọi $I(2; \frac{15}{4})$ là trung điểm HE. Đường thẳng AI cắt BC tại M. Trung trực HE cắt EM tại $K(\frac{15}{8}; 4)$. Trung điểm của BE có tọa độ $N(\frac{7}{4}; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài toán 170. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH . Hạ $HE \perp AC$. Gọi M là trung điểm EH , AM cắt BC tại N . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $BE: 5x-2y-13=0$, $M(\frac{23}{5}; \frac{17}{5})$, $N(\frac{17}{3}; \frac{7}{3})$ và E có tung độ nguyên dương.

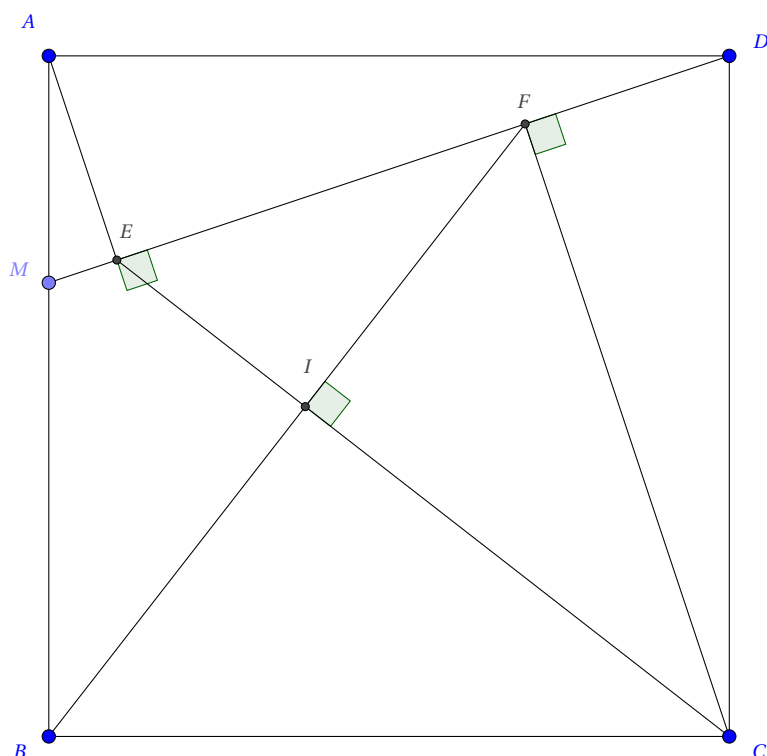
Lời giải:



Gọi D là giao điểm của MN với BE do đó $D \in BE$. Vì EM là phân giác trong góc DEN nên $\frac{ED}{EN} = \frac{DM}{MN}$ suy ra E, H, N thẳng hàng. Vì H đối xứng E qua M nên $H \in EN$. Đường thẳng BC đi qua H, N có phương trình . Đường thẳng AC đi qua E vuông góc ME có phương trình . Đường cao AH đi qua H vuông góc với BC . Đường thẳng AB đi qua A vuông góc AC .

Tính chất 85. Cho hình vuông $ABCD$. M là điểm bất kỳ trên AB . Hạ AE, CF vuông góc với DM . Gọi I là giao điểm của CE, BF . Khi đó $BF \perp CE$.

Lời giải:



Chú ý $\triangle AED = \triangle DFC$ nên suy ra $\triangle BCF = \triangle CDE$ do đó $\angle CBF = \angle DCE$ hay $CE \perp BF$.

Bài toán 171. Trong Oxy cho hình vuông $ABCD$ có $C(-4; -3)$ và M là điểm trên cạnh AB . Gọi E, F là hình chiếu của A, C lên DM . Gọi $I(2; 3)$ là giao điểm của CE và BF . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết $B \in x - 2y + 10 = 0$.

Bài toán 172. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có phương trình đường thẳng CD là $x + 2y + 5 = 0$ và M là một điểm nằm trên cạnh $AB, M \neq A, B$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, C lên DM và I giao điểm của CE và BF . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC là $x^2 + y^2 = 5$ và A có hoành độ dương.

Lời giải:

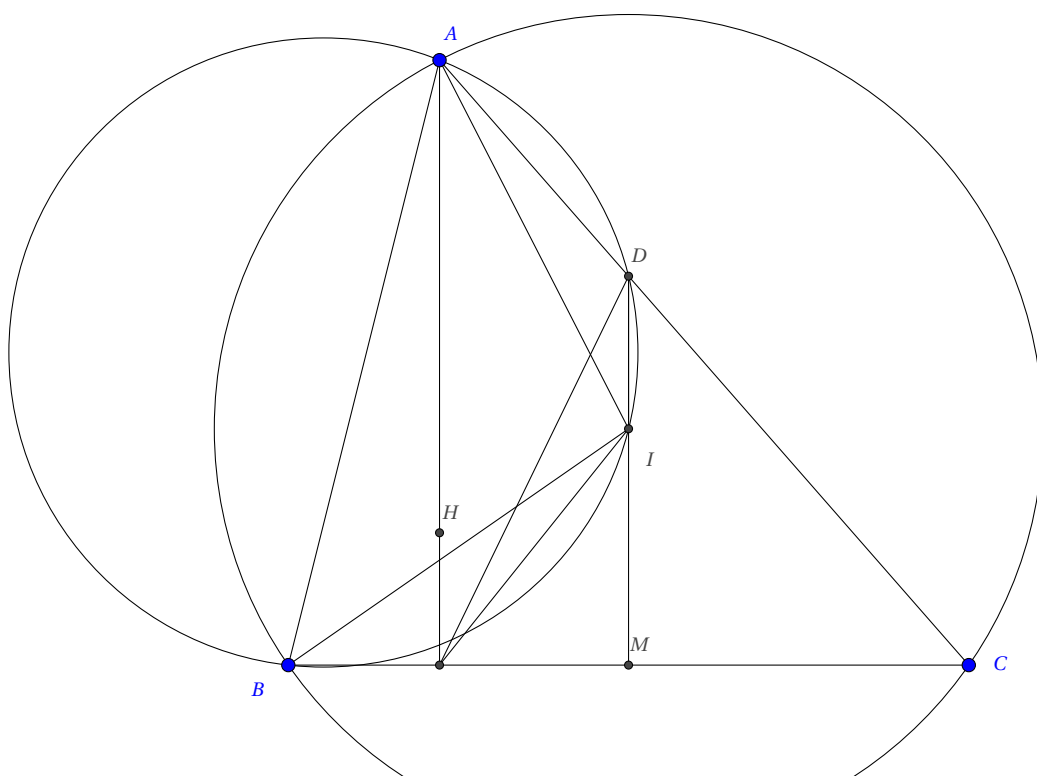
Áp dụng tính chất ta có tam giác BIC vuông tại I do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC chính là đường tròn đường kính BC . Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(-1; -2).$$

Đường tròn đường kính BC tâm $I(0; 0)$ và đường kính $2R = 2\sqrt{5}$. Điểm B là đối xứng của C qua I nên $B(1; 2)$. Đường thẳng AB qua B và song song CD nên có phương trình $AB: x + 2y - 5 = 0$. Gọi $A(5 - 2a; a) \in x + 2y - 5 = 0$. Vì $AB = 2R = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} A(-3; 4) \text{ (loại)} \\ A(5; 0) \end{cases}$. Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra $D(3; -4)$.

Tính chất 86. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I và trực tâm H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB cắt AC tại điểm thứ hai D . Khi đó $ID \parallel AH$

Lời giải:



Ta có tứ giác ABID nội tiếp và tam giác AIB cân tại I nên

$$\angle IDC = \angle ABI = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AIB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle ACB) = 90^\circ - \angle C = \angle HAC$$

suy ra $DI \parallel AH$.

Bài toán 173. Trong Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I và có $B(-5;9)$ và trực tâm $H(-5;19)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB cắt AC tại điểm thứ hai D. Giả sử $ID: x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ A, C.

(Vted lần 5)

Lời giải:

Áp dụng tính chất ta có $DI \parallel AH$. Đường thẳng BC đi qua $B(-5;9)$ và vuông góc với DI nên có phương trình $BC: x - y + 14 = 0$. Điểm C đối xứng B qua DI nên $C(-10;4)$. Đường thẳng AB đi qua $B(-5;9)$ và vuông góc với CH nên có phương trình $AB: x + 3y - 22 = 0$. Đường thẳng AC đi qua C và vuông góc với BH nên có phương trình $AC: y = 4$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 22 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow A(10;4)$$

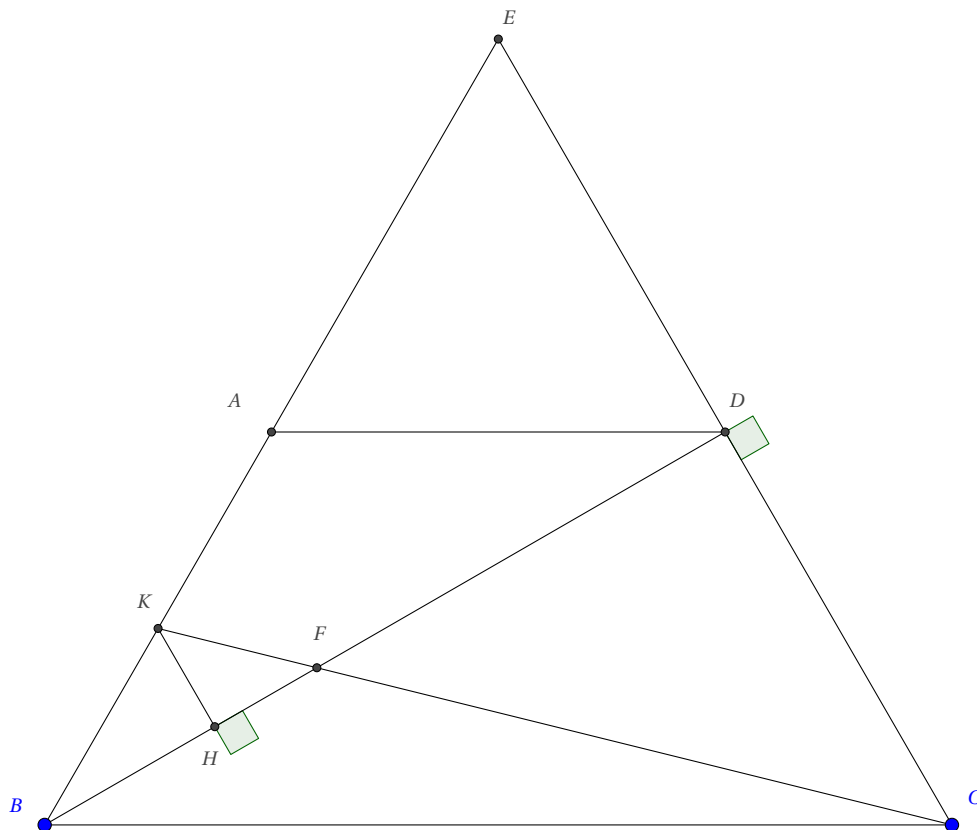
Điểm C đối xứng với B qua DI nên $C(-10;4)$.

Tính chất 87. Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn $BC = 2AD$. Đường chéo BD là phân giác trong $\angle ABC$ và trung điểm của AB là K. Gọi E là giao điểm của AB và CD. Hạ KH vuông góc xuống BD. Khi đó

1. Tam giác EBC đều và $BD \perp DC$.

2. $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

Lời giải:



1. Do $AD = \frac{1}{2}BC$ nên AD là đường trung bình của tam giác EBC hay A, D là trung điểm của EB, EC . Vì BD là phân giác $\angle EBC$ nên $BD \perp DC$ hay tam giác EBC cân tại B . Mặt khác $ABCD$ là hình thang cân nên tam giác BEC cân tại E . Từ đó suy ra tam giác EBC đều.
2. Vì $KH \parallel ED$ và $BK = \frac{1}{4}BE$ nên $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

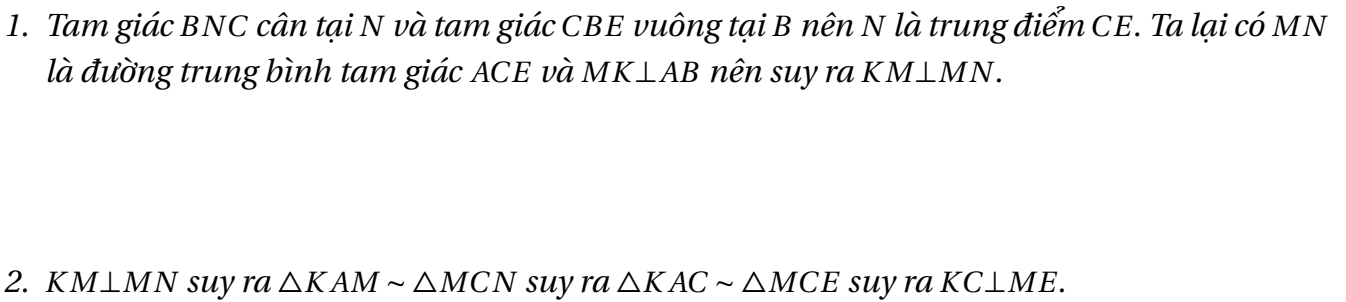
Bài toán 174. Trong Oxy cho hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $BC = 2AD$. Đường chéo BD là phân giác trong $\angle ABC$ và có phương trình $BD: 2x + y = 0$. Biết $C \in x - 3y - 3 = 0$ và trung điểm của AB là $K(-\frac{5}{2}; 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$.

(Moon lần 4)

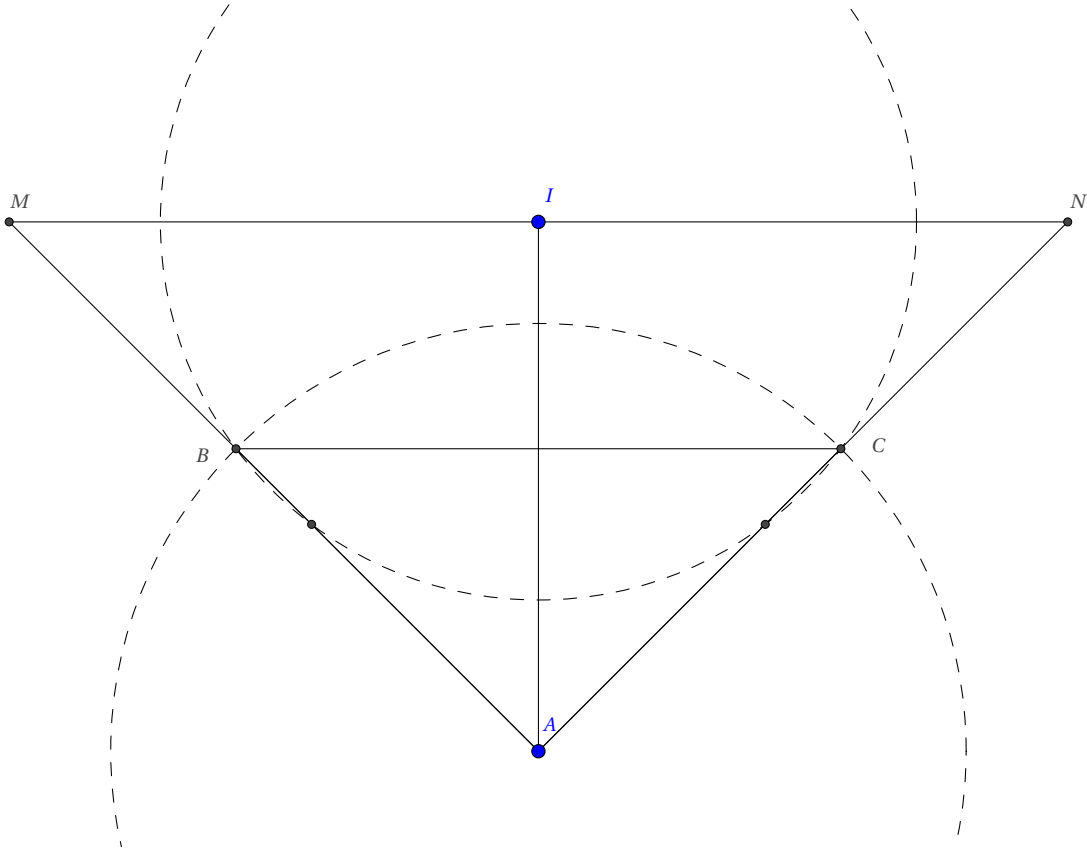
Tính chất 88. Cho tam giác ABC tại vuông B , M là trung điểm AC . Tiếp tuyến tại A, B cắt nhau tại K . Tiếp tuyến tại C cắt AB tại E . Khi đó

1. Giả sử KB cắt CE tại N . Ta có N là trung điểm EC và $KM \perp MN$.
2. $KC \perp EM$.

Lời giải:



Bài toán 176. Cho $A(0;5)$ và đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 10$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại B, C sao cho tam giác BAC vuông cân tại A . **Lời giải:**



Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt AB, AC tại M, N. Chú ý tam giác BAC vuông cân khi và chỉ khi tam giác MAN vuông cân tại A $\Leftrightarrow IA = IM = IN$. Đường thẳng IM : $y = 1$. Đường tròn tâm I bán kính IA có phương trình $x^2 + (y - 1)^2 = 16$. Tọa độ M, N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 16 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(4; 1) \\ N(-4; 1) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} M(-4; 1) \\ N(4; 1) \end{cases}.$$

Vì vai trò đối xứng ta xét đường thẳng AB đi qua A và M nên AB : $x + y - 5 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(1; 4) \\ B(3; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta : y = 4 \\ \Delta : y = 2 \end{cases}$

Cách 2: Chú ý tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\begin{cases} BC \perp AI \\ \angle BAI = 45^\circ \end{cases}$. Đường thẳng AB đi qua A và tạo với AI một góc 45° nên có phương trình $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$. Vì vai trò đối xứng ta xét

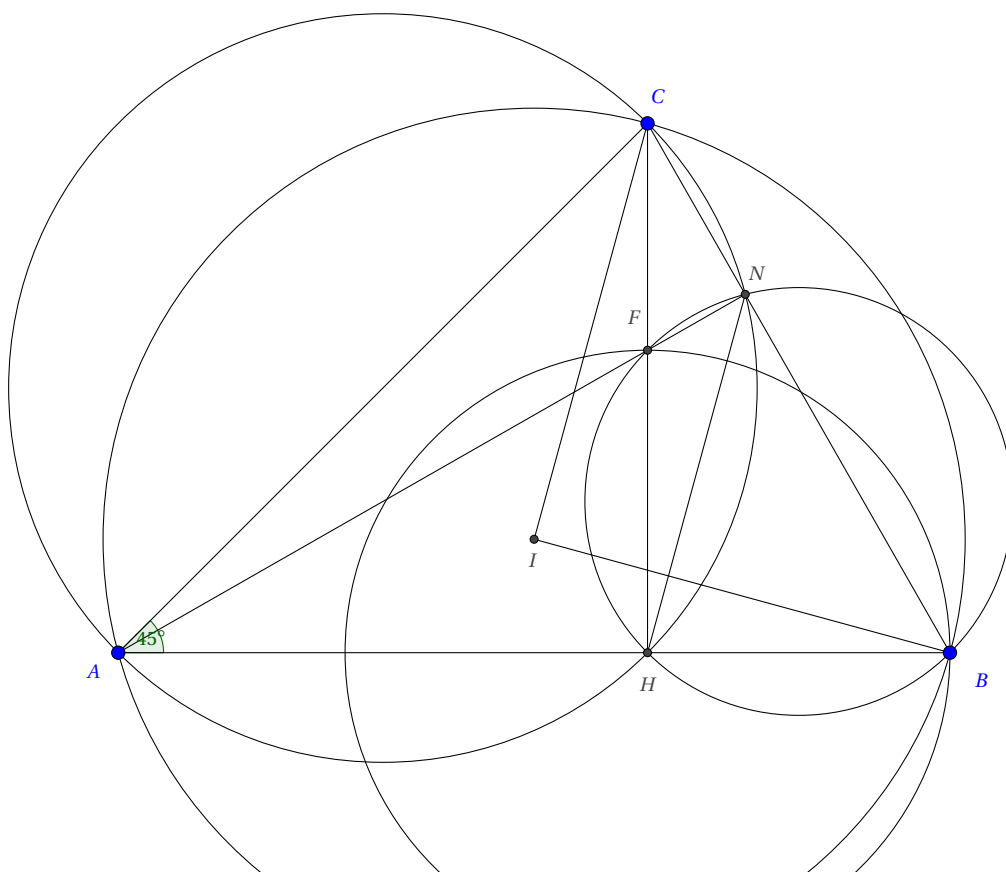
AB : $x + y - 5 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(1; 4) \\ B(3; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta : y = 4 \\ \Delta : y = 2 \end{cases}$

Tính chất 89. Cho tam giác nhọn ABC không cân có $\angle A = 45^\circ$. Trên đường cao CH lấy điểm F sao cho $HF = HB$. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn đường kính BF tại $N \neq H$. Khi đó

1. $\angle HNB = 45^\circ$.

2. N thuộc cạnh BC và $AN \perp BC$.

Lời giải:



Chú ý tam giác ABC nhọn và không cân nên H, N nằm giữa đoạn AB, BC và $\angle HCB < \angle HBC$ nên luôn tồn tại F trên cạnh CH để $HF = HB$.

1. Ta có tứ giác FHBN nội tiếp nên $\angle HFB = \angle HNB = 45^\circ$.
2. Vì $\angle HFB = \angle HNB = 45^\circ$ nên suy ra tứ giác ACNH nội tiếp do đó $\angle ANC = 90^\circ$. Mà $\angle FNC = 90^\circ$ nên A, F, N thẳng hàng và C, N, B thẳng hàng hay N thuộc cạnh BC và $AN \perp BC$.

Bài toán 177. Cho tam giác nhọn ABC không cân có $\angle A = 45^\circ$. Trên đường cao CH lấy điểm F sao cho $HF = HB$. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn đường kính BF tại $N \neq H$. Biết $C(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$, $B(1; 0)$ và đường thẳng NH cắt trục tung tại $K(0; -\frac{3}{2})$. tìm tọa độ điểm A.

Lời giải:

Hạ $KP \perp BC$. Đường thẳng BC: $3x + y - 3 = 0$. Gọi $N(n; 3 - 3n) \in 3x + y - 3 = 0$. Ta có $(\overrightarrow{NH}; \overrightarrow{NB}) = 45^\circ$
suy ra $\begin{cases} N(\frac{9}{10}; \frac{3}{10}) \\ N(\frac{9}{5}; -\frac{12}{5}) \end{cases}$ (loại vì N không thuộc cạnh BC) (chú ý ta có thể tìm N thông qua gọi P là hình chiếu của N lên đường thẳng BC, N đồng thời nằm trên đường tròn tâm P bán kính NP và đường thẳng BC nên $N(\frac{9}{10}; \frac{3}{10})$ hoặc $N(\frac{9}{5}; -\frac{12}{5})$).

Đường thẳng AN đi qua N và vuông góc với BC nên có phương trình $AN: x - 3y = 0$. Đường thẳng $KN: 2x - 2y - 3 = 0$. Đường tròn đường kính BC có phương trình $(x - \frac{7}{8})^2 + (y - \frac{3}{8})^2 = \frac{10}{64}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ

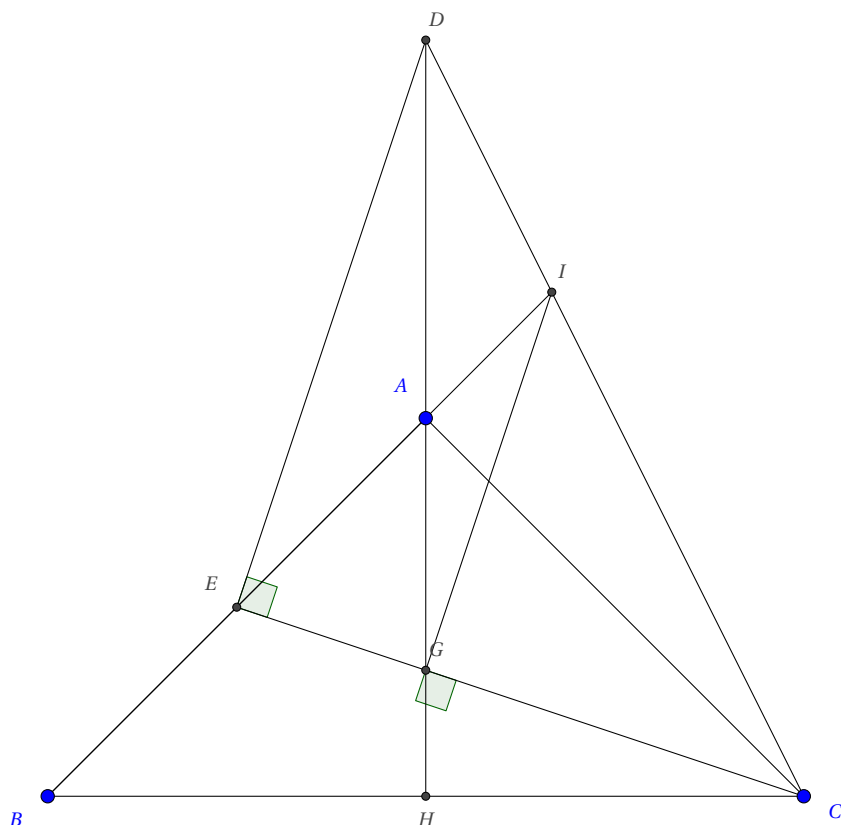
$$(x - \frac{7}{8})^2 + (y - \frac{3}{8})^2 = \frac{10}{64} \Leftrightarrow \begin{cases} H(\frac{3}{4}; 0) \\ H(\frac{11}{10}; \frac{7}{10}) \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng BH có phương trình $\begin{cases} BH: y = 0 \\ BH: 7x - y - 7 = 0 \end{cases}$ Tọa độ A là giao của hai đường thẳng AN và BH suy ra $\begin{cases} A(0;0) \\ A(\frac{21}{20}; \frac{21}{60}) \end{cases}$ (loại vì $\angle A = 135^\circ$).

Tính chất 90. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có trọng tâm G. Gọi E, H lần lượt là trung điểm AB, BC. Gọi D là điểm đối xứng của H qua A. I là giao điểm của AB và CD. Khi đó

1. $DI = \frac{1}{3}DC$
2. $DE \parallel IG, DE \perp EC$ suy ra $IG \perp EC$.
3. Tam giác DEC vuông cân tại E.

Lời giải:



1. Qua H kẻ đường thẳng song song với BI cắt IC tại N suy ra N là trung điểm IC. Mặt khác AI là đường trung bình tam giác AHN nên I là trung điểm DN. Do đó $DI = \frac{1}{3}DC$.
2. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $EG = \frac{1}{3}EC$ do đó $GI \parallel DE$. Áp dụng tính chất cũ ta có $DE \perp EC$ nên suy ra $IG \perp EC$.
3. Chú ý Gọi M là trung điểm HC khi đó $AM \parallel IC$ suy ra $AI = \frac{1}{3}AB$ hay $AI = \frac{1}{3}AC$. Mà $HG = \frac{1}{3}HC$ do đó $\triangle GHC \sim \triangle IAC$ suy ra $\angle HCG = \angle ACI$ hay $\angle GCI = 45^\circ$ suy ra tam giác DEC vuông cân tại E.

Bài toán 178. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có trọng tâm G. Gọi E, H lần lượt là trung điểm AB, BC. Gọi D là điểm đối xứng của H qua A. I là giao điểm của AB và CD. Biết $D(-1; -1)$, đường thẳng IG: $6x - 3y - 7 = 0$, $x_E = 1$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Hoàng Hóa-Thanh Hóa lần 1) Áp dụng tính chất ta có $DE \parallel IG$ nên $DE: 6x - 3y + 3 = 0$. Vì $x_E = 1$ nên $E(1; 3)$. Đường thẳng EC đi qua E và vuông góc với DE nên $EC: 3x + 6y - 21 = 0$. Tọa độ G là nghiệm của hệ

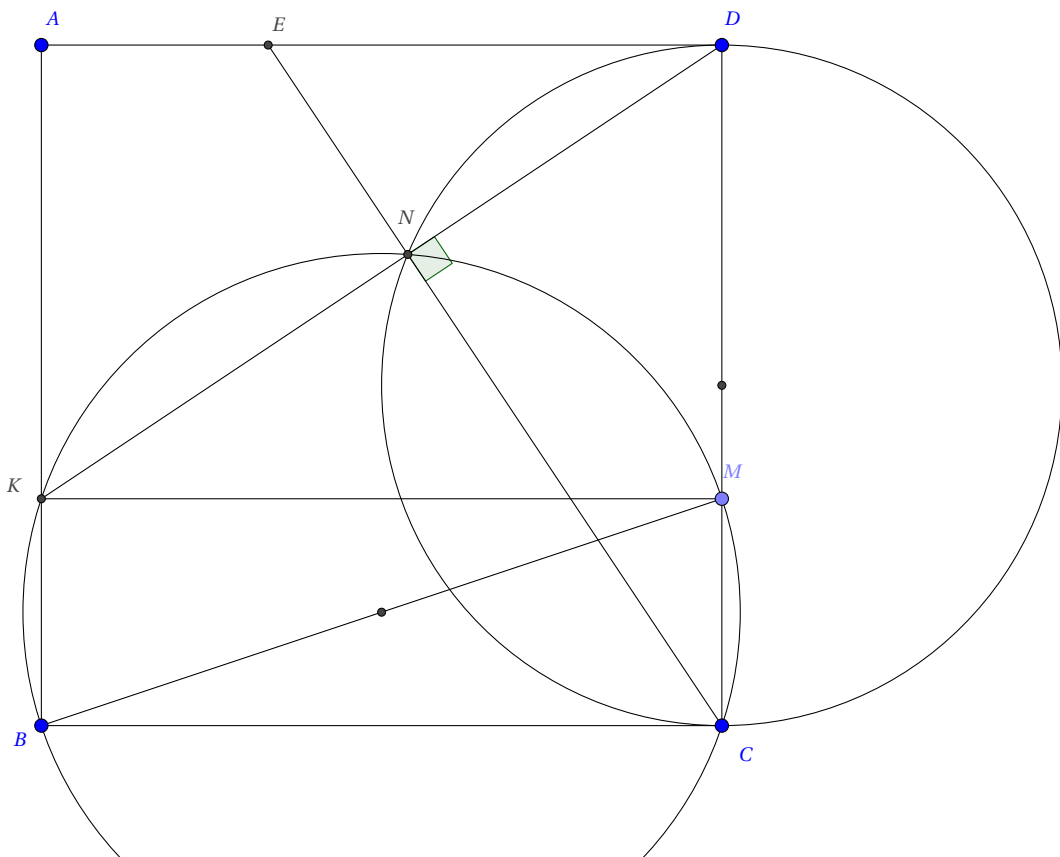
$$\begin{cases} 3x + 6y - 21 = 0 \\ 6x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow G\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EG}$ do đó $C(5; 1)$. Chú ý $\overrightarrow{DA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DG}$ do đó $A(1; 1)$. Vì E là trung điểm AB nên $B(5; 1)$.

Tính chất 91. Cho hình vuông ABCD, trên cạnh CD lấy điểm M. Đường tròn đường kính BM cắt đường tròn đường kính DC tại $N \neq C$ và cắt cạnh AB tại K. Khi đó

1. K, N, D thẳng hàng và $CN \perp DK$.
2. Giả sử CN cắt AD tại E, ta có $EC = DK$ hay $AE = BK$.

Lời giải:



1. Chú ý năm điểm B, K, N, M, C nằm trên đường tròn đường kính BM nên cũng nằm trên đường tròn đường kính KC do đó $KN \perp NC$. Mặt khác $CN \perp ND$ suy ra K, N, D thẳng hàng và $CN \perp KD$.
2. Chú ý AKMD là hình chữ nhật nên ta có $\angle = \angle EDN = \angle ECD$ do đó $\triangle DMK = \triangle EDC$ suy ra $EC = KD$ và $ED = MD$ hay $AE = BK$.

Bài toán 179. Cho hình vuông ABCD, trên cạnh CD lấy điểm M. Đường tròn đường kính BM cắt đường tròn đường kính DC tại $N \neq C$ và cắt cạnh AB tại K. Biết $D(3; -2), K(3; 3)$ và N thuộc trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

Lời giải:

Đường thẳng KD: $x = 3$ và $KD = 5$. Tọa độ N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow N(3; 0)$. Đường thẳng EC đi qua N và vuông góc KD nên EC: $y = 0$. Gọi $I(a; 0)$ là trung điểm EC, theo tính chất trên ta có $ID = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}KD = \frac{5}{2}$ suy ra $\begin{cases} I(\frac{3}{2}; 0) \\ I(\frac{9}{2}; 0) \end{cases}$.

- $I(\frac{3}{2}; 0)$

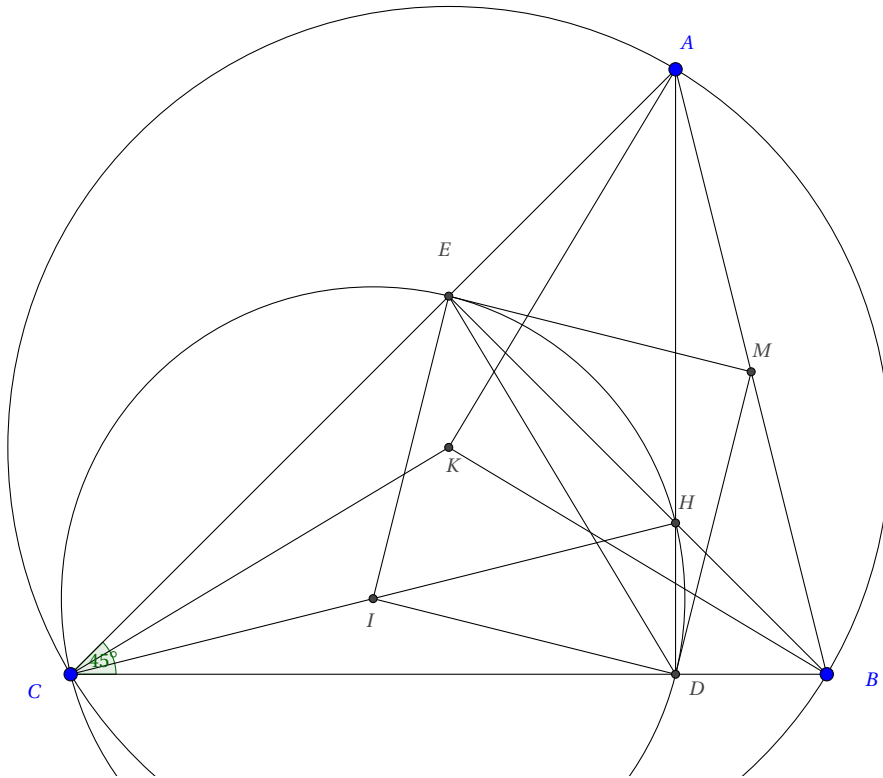
E, C nằm trên đường tròn tâm I bán kính $ID = \frac{5}{2}$ có phương trình $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}$. Tọa độ E, C là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(-1; 0), C(4; 0) \\ E(4; 0), C(-1; 0) \end{cases}$ (loại vì $DC < DE$) Đường thẳng qua K song song với CD có phương trình: $x + 2y - 9 = 0$, đường thẳng BC: $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng AC: $2x - y - 8 = 0$. do đó tọa độ $A(5; 2), B(1; 4)$.

- $I(\frac{9}{2}; 0)$ làm tương tự.

Tính chất 92. Cho tam giác ABC có $\angle ACB = 45^\circ$ và hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Tam giác HDE, ABC nội tiếp đường tròn tâm I, K. Khi đó

1. K là trực tâm tam giác ABC.
2. Tam giác EID, AKB vuông cân tại I, K.
3. $CK = \sqrt{2}CI$ và $AB = \sqrt{2}ED$.
4. Gọi M là trung điểm AB ta có EIDM là hình vuông.
5. ME, MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Lời giải:



Bài toán 180. Cho tam giác ABC có $\angle ACB = 45^\circ$ và hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Tam giác HDE nội tiếp đường tròn $I(7;0)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết A thuộc trục $Oy, y_A > 0, DE: 7x - y - 24 = 0$.

Lời giải:

Ta có $d(I; MN) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Do $IEMD$ là hình vuông nên M đối xứng với I qua ED suy ra $M(0; 1)$ và $ME = \sqrt{2}d(I; MN) = 5 = MA = MB$. Phương trình đường tròn đường kính $(AB): x^2 + (y - 1)^2 = 25$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(0; 6) \\ A(0; -4) \quad (\text{loại}) \end{cases}.$$

Điểm B đối xứng A qua M nên $B(0; -4)$. Tọa độ D, E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ 7x - y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(4; 4), E(3; -3) \\ D(3; -3), E(4; 4) \end{cases}.$$

- $D(4; 4), E(3; -3)$

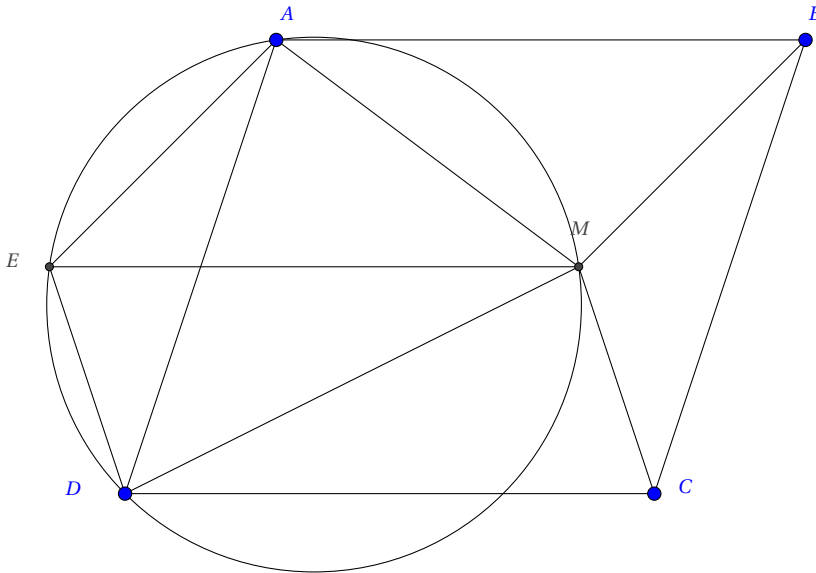
Đường thẳng $AD: x + 2y - 12 = 0$ và đường thẳng $BE: x - 3y - 12 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ x - 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(12; 0)$. Kiểm tra $\angle ACB = 45^\circ$ nên thỏa mãn.

- $D(3; -3), E(4; 4)$

Đường thẳng $AD: 3x + y - 6 = 0$ và đường thẳng $BE: 2x - y - 4 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + y - 6 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(7; 0)$. Kiểm tra $\angle ACB = 135^\circ$ nên không thỏa mãn.

Tính chất 93. Cho hình bình hành ABCD với điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\angle MAB = \angle MCB$. Dựng hình hành DCME. Khi đó tứ giác DEAM nội tiếp.

Lời giải:



Ta có $\angle MAB = \angle MCB \Leftrightarrow \angle DAM = \angle DCM$. Mà DEMC là hình bình hành do đó $\angle DEM = \angle DAM$ hay tứ giác DEAM nội tiếp.

Bài toán 181. Cho hình bình hành ABCD có $D(4;0)$. Cho điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\angle MAB = \angle MCB$. Phương trình đường thẳng MB: $2x - y - 8 = 0$, MC: $3x + y - 7 = 0$. Biết $A \in x - 2y + 4 = 0$, $x_A \in \mathbb{Z}$. Tìm tọa độ điểm A.

(Hocmai lần 4)

Tọa độ M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3; -2).$$
 Ta có góc giữa hai đường thẳng

$(MC, MB) = 45^\circ$. Áp dụng tính chất tứ giác DEAM nội tiếp nên
$$\begin{cases} \angle DMA = 45^\circ \\ \angle DMA = 135^\circ \end{cases}$$
 do đó góc giữa hai

đường thẳng MD, MA là $(MD, MA) = 45^\circ$. Suy ra phương trình đường thẳng ND là
$$\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ x - 3y - 9 = 0 \end{cases}.$$

- $3x + y - 7 = 0$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_A \notin \mathbb{Z} \quad (\text{loại}).$$

- $x - 3y - 9 = 0$.

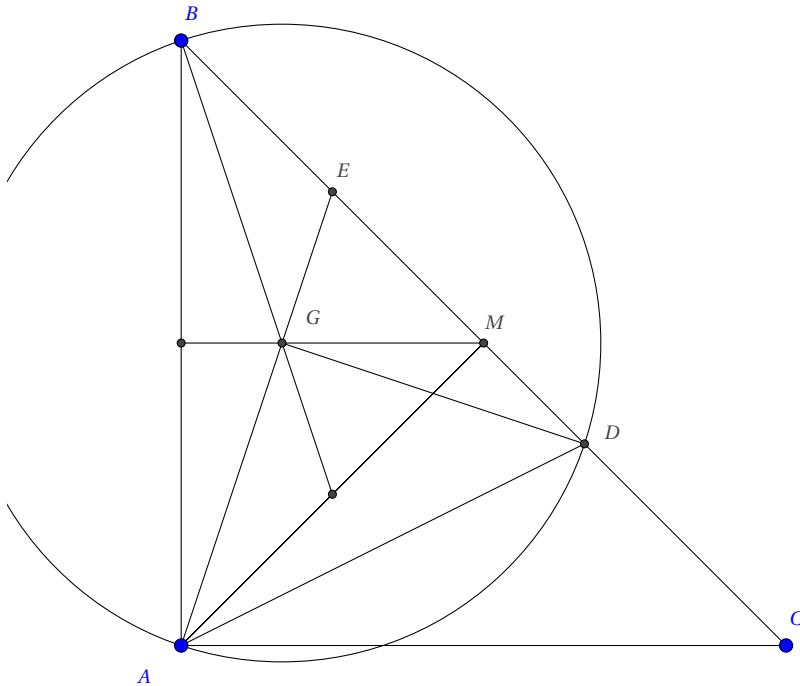
Tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x - 3y - 9 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-30; -13).$$

Tính chất 94. Cho tam giác ABC vuông cân tại A với M là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABM, D là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Khi đó

1. tam giác AGD vuông cân tại G.

2.

Lời giải:



1. Ta có tam giác ABD nội tiếp đường tròn tâm G mà $\angle ABD = 45^\circ$ nên $\angle AGD = 90^\circ$ hay tam giác AGD vuông cân tại G.

2.

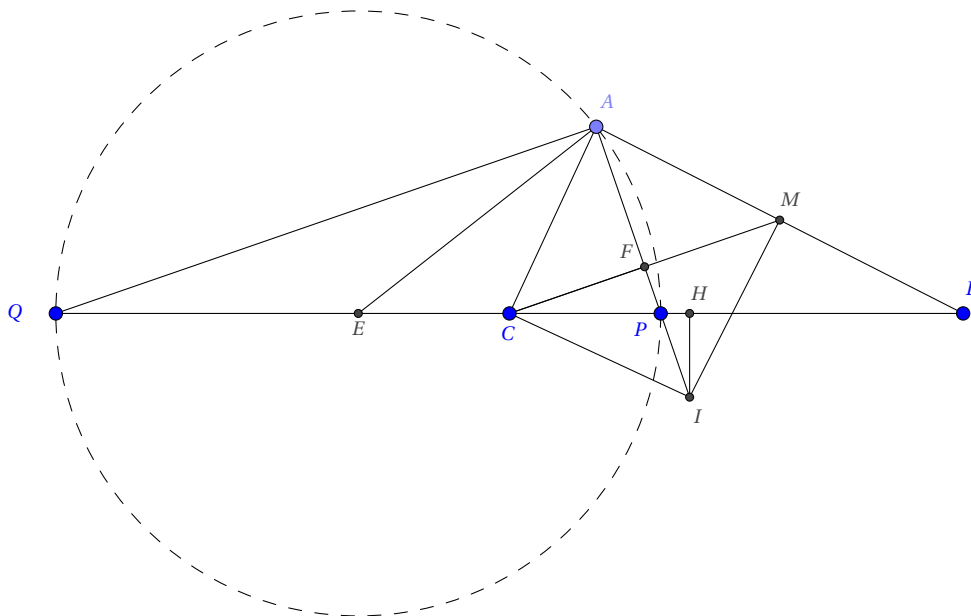
Bài toán 182. Cho tam giác ABC vuông cân tại A với M là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABM, $D(7; -2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình đường thẳng AB biết $x_A < 4$; $AG : 3x - y - 13 = 0$.

(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa lần 1)

Áp dụng tính chất ta có $DG \perp AG$, gọi $G(a; 3a - 13 = 0)$ suy ra $G(4; -1)$. Gọi $A(b; 3b - 13)$ ta có tam giác AGD cân tại G nên $GA = GD$ suy ra $\begin{cases} A(3; -4) \\ A(5; 2) \end{cases}$ loại. Gọi E là trung điểm BM ta có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GE}$ suy ra $E(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$ do đó đường thẳng BC đi qua D, E có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tọa độ M là hình chiếu của A lên đường thẳng BC suy ra $M(6; -1)$. E là trung điểm BM suy ra $B(3; 2)$.

Bài toán 183. Cho tam giác ABC có $AB = 2AC$ và M là trung điểm AB. Cho $I(1; -8)$ là tâm đường tròn tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt tại M, C. Biết $BC : x - 9y + 5 = 0$ và $A \in x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Lời giải:



Cách 1: làm hình học pha thêm đại số

$$\begin{cases} (a-11)(x-1) + (a-1)(y+8) = 0 \\ x-9y+5=0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{-34a+11}{5(a-10)}; \frac{-a-29}{5(a-10)}\right).$$
$$\begin{cases} x-9y+5=0 \end{cases} \Rightarrow C0.$$

Cách 2: làm hình học theo tính chất suy đoán

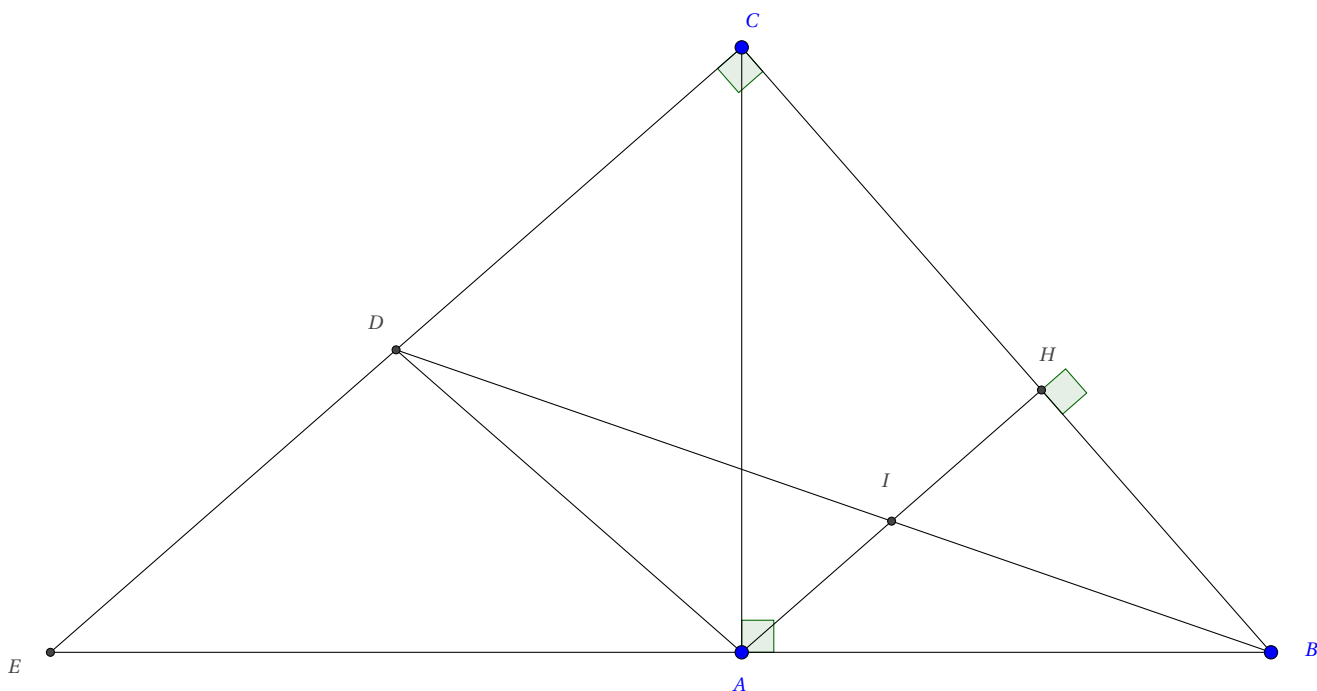
A geometric diagram illustrating a construction. It features two dashed circles. The left circle is centered at point E and passes through point Q . The right circle is centered at point I and passes through point A . A horizontal line contains points $Q, E, C, P, H, D, I, M, B$ in order from left to right. Point A is located above the line, and point I is located below it. Solid lines connect Q to A and I ; E to A and I ; C to A and I ; P to A and I ; H to A and I ; D to A and I ; M to A and I ; and B to A and I . A dashed line segment connects C and F , where F is a point on the line segment AI . Another dashed line segment connects I and G , where G is a point on the line segment AM .

$$\begin{cases} \overrightarrow{CACI} = 0 \\ AB = 2AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A0.C0 \\ A0, C0 \end{cases}$$

$$V_{\hat{a}y} \left[\begin{array}{c} A(1;2), B(-5;0), C(4;1) \\ A_0, B_0, C_0 \end{array} \right].$$

(Lê Văn Thinh- Bắc Ninh lần 1)

Facebook: Võ Quang Mẫn



Ta sẽ chứng minh $DA = DC$, thật vậy kéo dài CD cắt đường thẳng AB tại E . Chú ý $AH \parallel EC$ và I là trung điểm AH nên theo Thales ta có D là trung điểm của EC . Mặt khác tam giác EAC vuông tại A nên $DA = DC = DE$.

Đường thẳng DC vuông góc BC có phương trình $2x - y - 12 = 0$. Do đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 12 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6; 0).$$

Khi đó $A \in x + y - 2 = 0$ và $DA = DC$ suy ra $\begin{cases} A(2; 0) \\ A(8; -6) \end{cases}$

- $A(2; 0)$

Đường thẳng AB vuông góc AC có phương trình $x = 2$ do đó $B(2; 2)$.

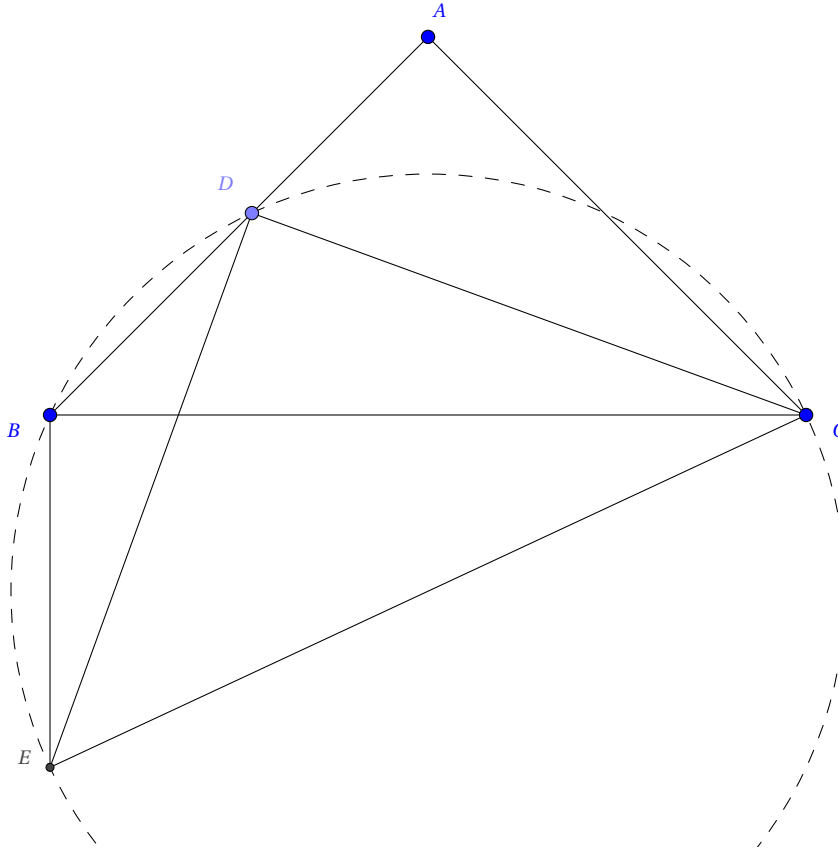
- $A(8; -6)$

Đường thẳng AB vuông góc AC có phương trình $x - 3y - 26 = 0$ do đó $B(14; -4)$ (loại vì $AB = AC$).

Bài toán 185. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A , có điểm $D(0; 1)$ thuộc cạnh AB . Đường thẳng qua D vuông góc với CD cắt đường thẳng vuông góc với BC tại B tại điểm $E(-1; 8)$. Xác định tọa độ các điểm của tam giác ABC biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: 5x + 7y - 25 = 0$ và đỉnh C có hoành độ dương.

(Toanhoc247 lần 1)

Lời giải:



Chú ý tứ giác EBDC nội tiếp nên $\angle DBC = \angle DEC$ do đó tam giác EDC vuông cân tại D và B, E cùng phía đối với DC. Đường thẳng DC đi qua D và vuông góc DE nên có phương trình $DC: x - 7y + 7 = 0$. Đường tròn tâm D bán kính DE có phương trình $x^2 + (y - 1)^2 = 50$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 7y + 7 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(7; 2) \\ C(-7; 0) \end{cases} \quad (I)$$

Khi đó trung điểm EC có tọa độ $M(3; 5)$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác EDC có phương trình $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25 \\ 5x + 7y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-2; 5) \\ B(;) \end{cases} \text{ vì } B, E \text{ khác phía } DC$$

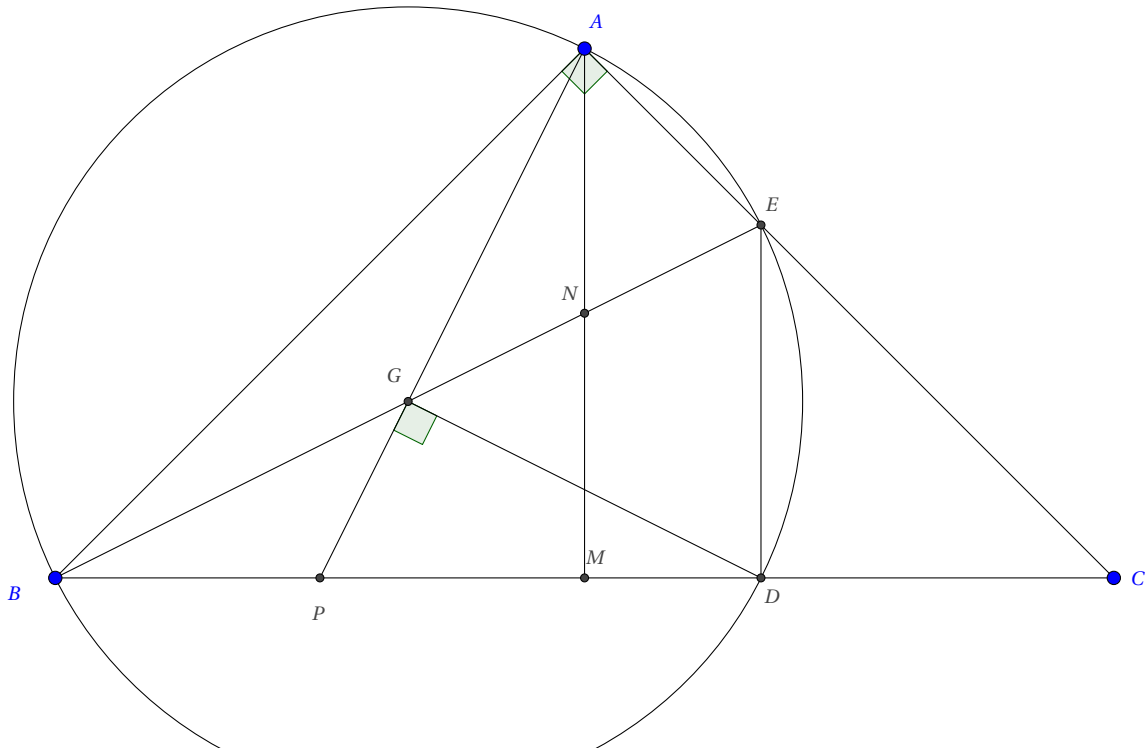
Đường thẳng BD: $2x + y - 1 = 0$ và trung trực BC: $3x - y - 4 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1)$$

Tính chất 96. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm của tam giác ABM. D là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Khi đó

1. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt AC tại E, ta có BE là đường kính.
2. $ED \perp BC$
3. $DG \perp AG$ hay tam giác AGD vuông cân tại G.

Lời giải:



1. Vì tam giác ABD nội tiếp đường tròn tâm G nên $GB = GA = GE$. Mặt khác $\angle BAE = 90^\circ$ nên BE là đường kính.
2. Vì BE là đường kính nên $\angle BDE = 90^\circ$ hay $DE \perp BC$.
3. Ta có $\angle DGA = 2\angle MBA = 2.45^\circ = 90^\circ$ hay $GD \perp GA$ hay tam giác AGD vuông cân tại G.

Bài toán 186. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm của tam giác ABM. $D(7; -2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Biết phương trình AG: $3x - y - 13 = 0$, $0, x_A, x_B < 4$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Nguyễn Siêu lần 1)

Áp dụng tính chất ta có tam giác AGD vuông cân tại G. Đường thẳng DG đi qua G vuông góc với AG có phương trình GD: $x + 3y - 1 = 0$. Tọa độ G là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(4; -1).$$

Tam giác AGD vuông cân suy ra $\begin{cases} A(3; -4) \\ A(5; 2) \end{cases}$ (loại).

Ta có $\vec{AG} = 2\vec{GP}$ suy ra $P(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2})$. Đường thẳng BC đi qua D, P nên có phương trình $x - 7y - \frac{21}{2} = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có phương trình $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 10$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 7y - \frac{21}{2} = 0 \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow B(\frac{7}{5}; -\frac{14}{5}).$$

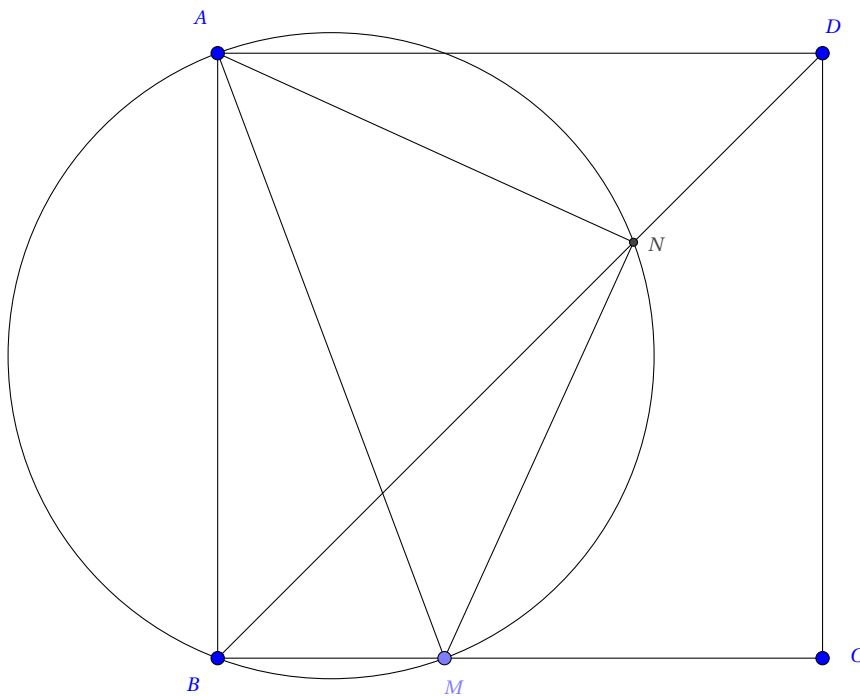
Đường thẳng AC vuông góc AB và đi qua A nên có phương trình AC : $3x + 4y - 23 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 23 = 0 \\ x - 7y - \frac{21}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{40}{5}; -\frac{8}{5}\right).$$

Bài toán 187. Cho hình vuông ABCD, điểm $M(5;7)$ nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AM cắt BD tại $N(6;2)$, $C \in 2x - y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết $x_C \in \mathbb{Z}$, $x_A < 5$.

(Khoái Châu-Hưng Yên lần 2)

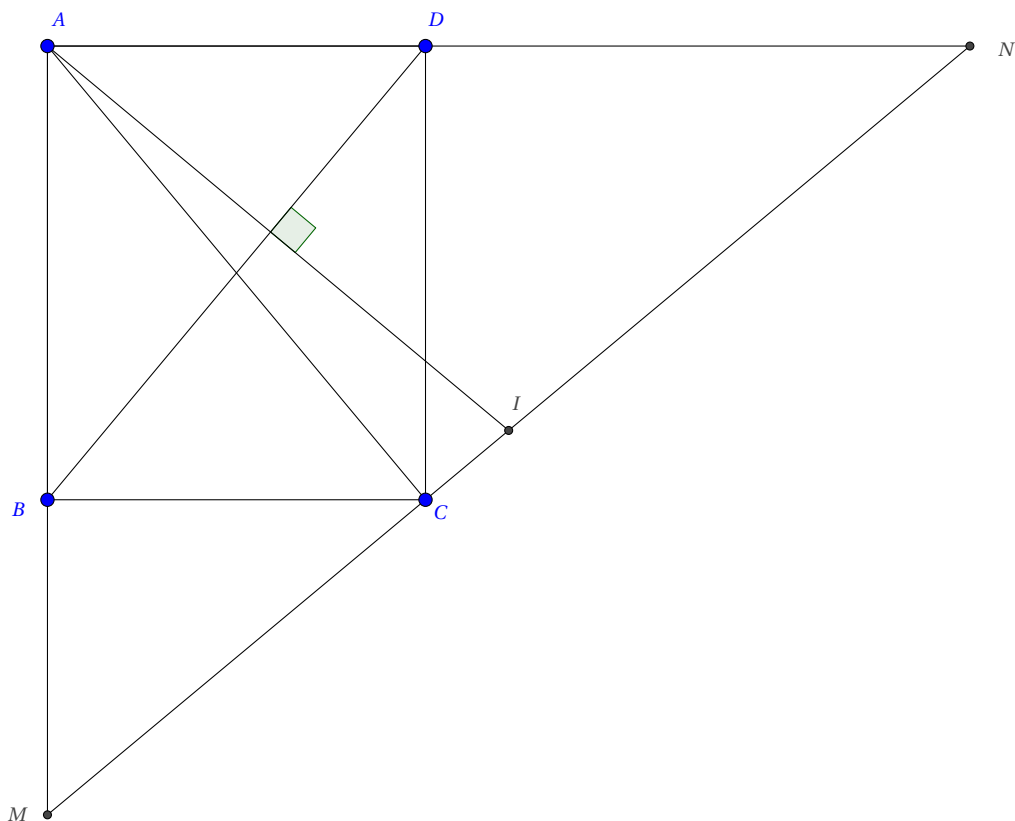
Lời giải:



Bài toán 188. Cho hình chữ nhật ABCD với đường chéo BD : $20x - 10y - 9 = 0$. Đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt AB, AD tại M, N. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN có phương trình $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$, tìm tọa độ điểm C.

(Cẩm Xuyên-Hà Tĩnh lần 1)

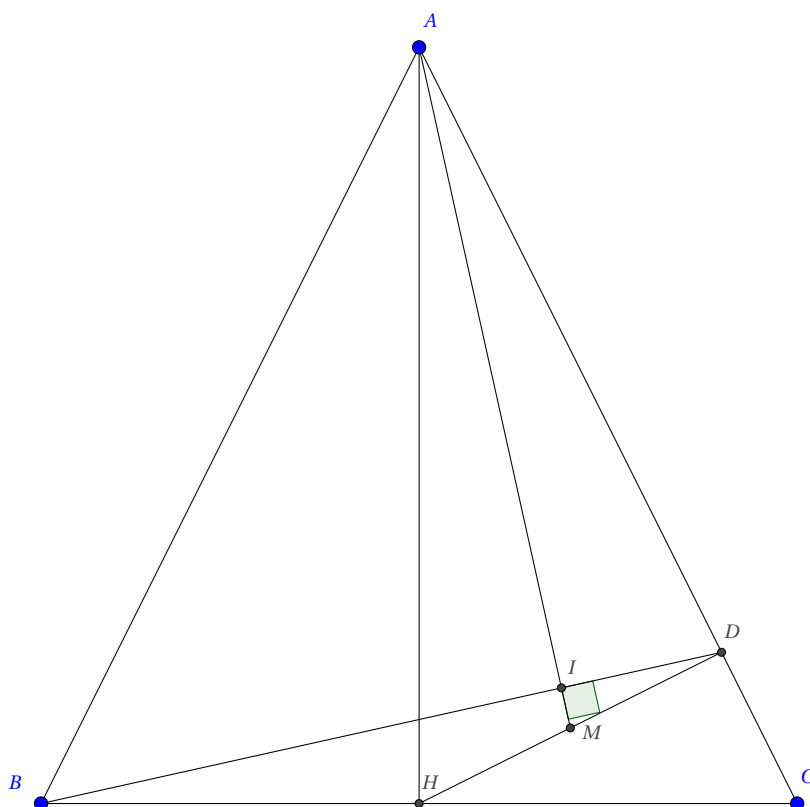
Lời giải:



Bài toán 189. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm BC, $D(2; -3)$ là hình chiếu của H lên AC, M là trung điểm HD và $I(\frac{16}{5}; -\frac{13}{5})$ là giao điểm của AM và BD. Đường thẳng AC có phương trình $x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Tĩnh Gia lần 1)

Lời giải:



Bài toán 190. Trong Oxy cho tam giác ABC cân tại A. Gọi N là trung điểm AB, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B, C của tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm A biết $E(7;1), F(\frac{11}{5}; \frac{13}{5})$ và đường thẳng CN: $2x + y - 13 = 0$.

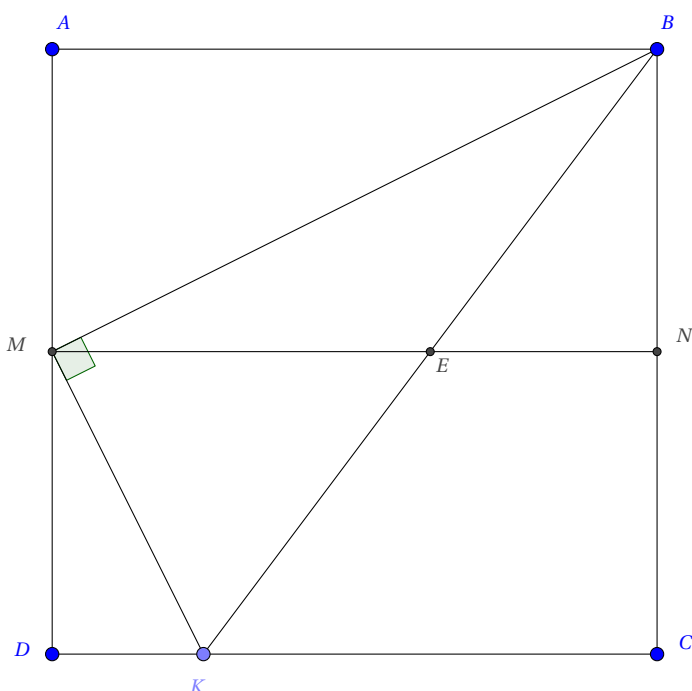
(Định Hóa lần 2)

Tính chất 97. cho hình vuông ABCD. Điểm M là trung điểm AD, điểm K thuộc cạnh DC sao cho $KC = 3KD$. Gọi N, E là trung điểm của BC, BK. Khi đó

1. M, E, N thẳng hàng và $\overrightarrow{MN} = \frac{8}{5} \overrightarrow{ME}$.

2. $MK \perp MB$.

Lời giải:



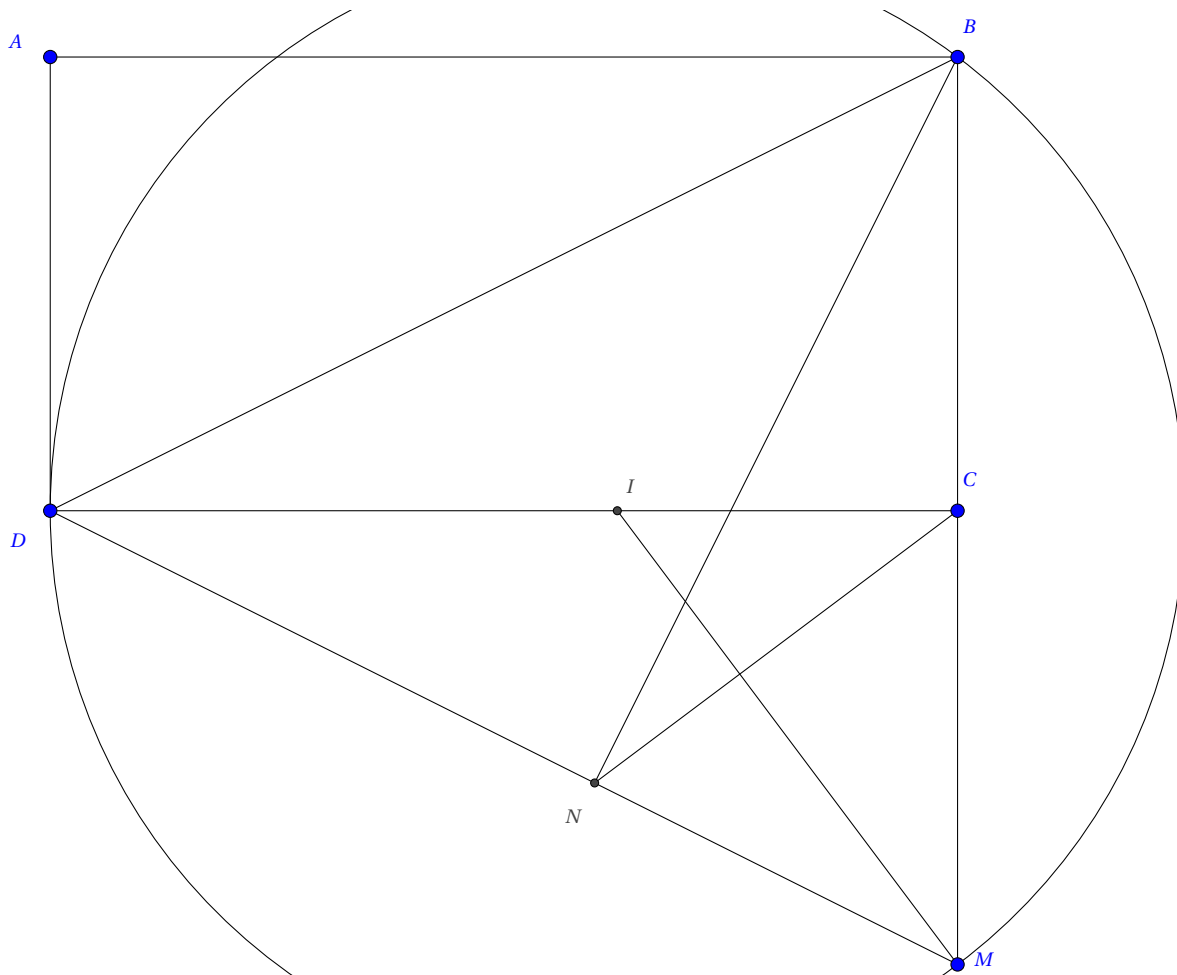
Bài toán 191. Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có $B \in 2x - y = 0$. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm AD, điểm $K(-2;-2)$ thuộc cạnh DC sao cho $KC = 3KD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định lần 2)

Bài toán 192. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x - 4y - 17 = 0$; đường thẳng BC đi qua điểm $E(7;0)$ và điểm M có tung độ âm.

(Xuân Trường - Nam Định lần 1)

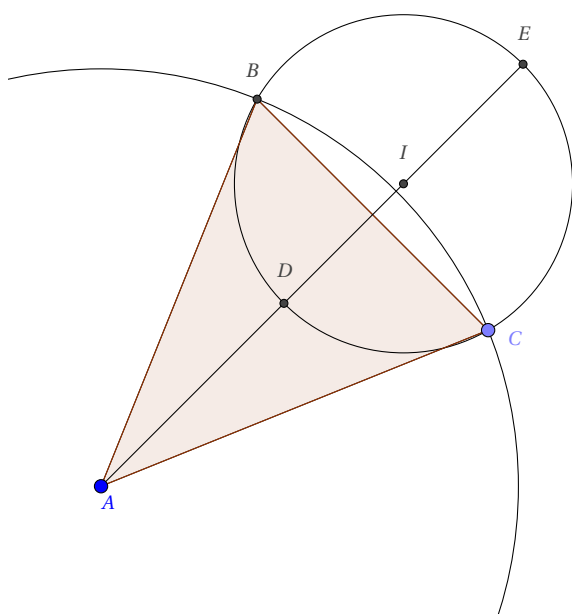
Lời giải:



Bài toán 193. Trong Oxy cho $A(-2;2)$ và đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 5$. Đường tròn (K) có tâm A cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt B,C. Biết tung độ B,C đều âm và $S_{ABC} = \frac{1}{2}$. Viết phương trình đường tròn (K).

(Vted lần 7)

Lời giải:



Bài toán 194. Cho tam giác ABC vuông tại B, $BC = 2BA$. Gọi E,F là trung điểm của BC, AC. Trên

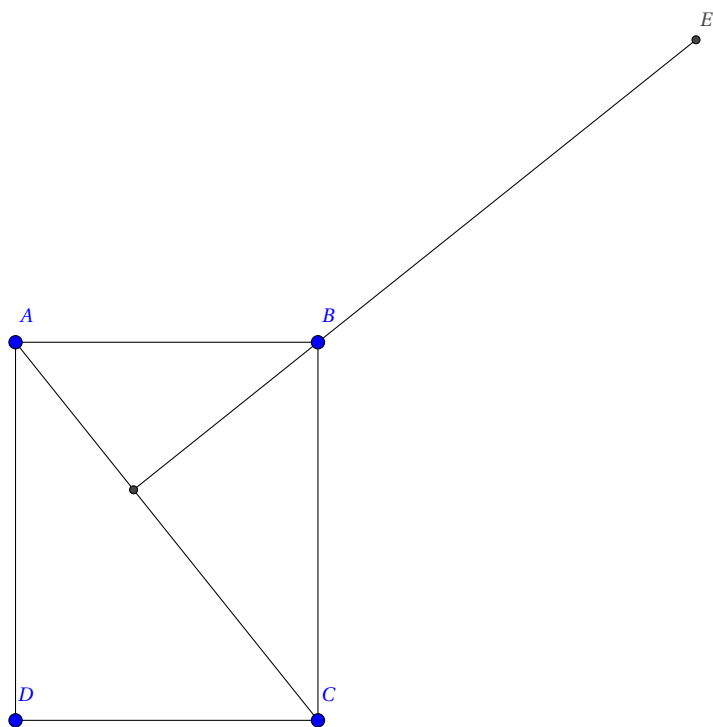
tia đối FE lấy điểm M sao cho $FM = 3FE$. Biết tọa độ điểm $M(5; -1)$, $AC : 2x + y - 3 = 0, x_A \in \mathbb{Z}$. Xác định tọa độ tam giác ABC.

(Tính Giá 3 lần 1)

Bài toán 195. Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng $AD : x - 2y + 3 = 0$. Trên đường thẳng qua B vuông góc với đường chéo AC lấy điểm E sao cho $BE = AC$ (D, E khác phái so với AC). Xác định tọa độ hình chữ nhật biết $E(2; -5)$ và đường thẳng AB đi qua điểm $F(4; -4)$.

(Yên Định lần 1)

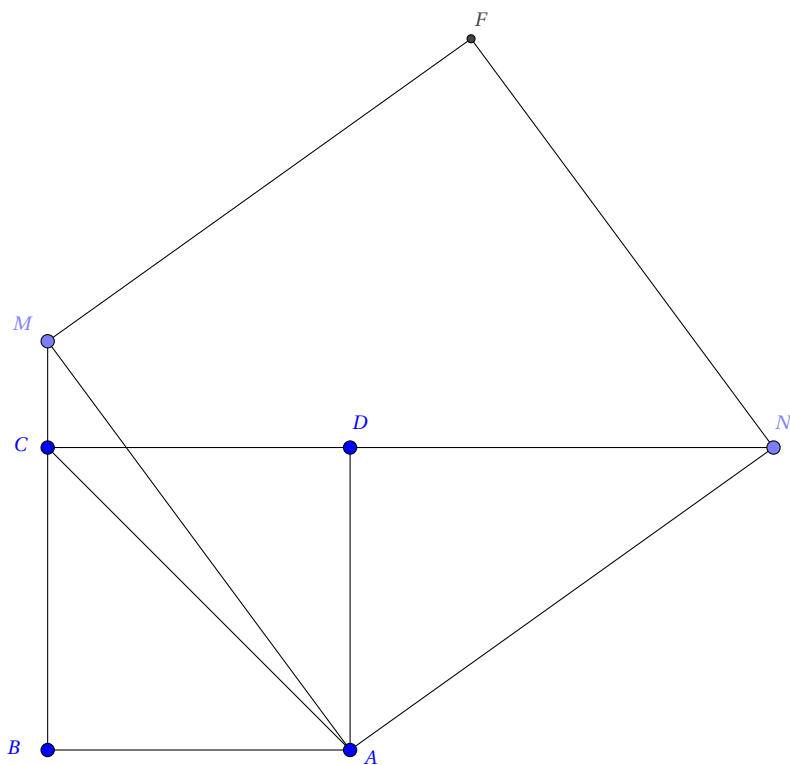
Lời giải:



Bài toán 196. Cho hình vuông ABCD có đường chéo $AC : x + y - 5 = 0$. Trên tia đối CB lấy điểm M và trên tia đối DC lấy điểm N sao cho $DN = BM$. Đường thẳng song song AN kẻ từ M và đường thẳng song song AM kẻ từ N cắt nhau tại $F(0; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết $M \in Ox$.

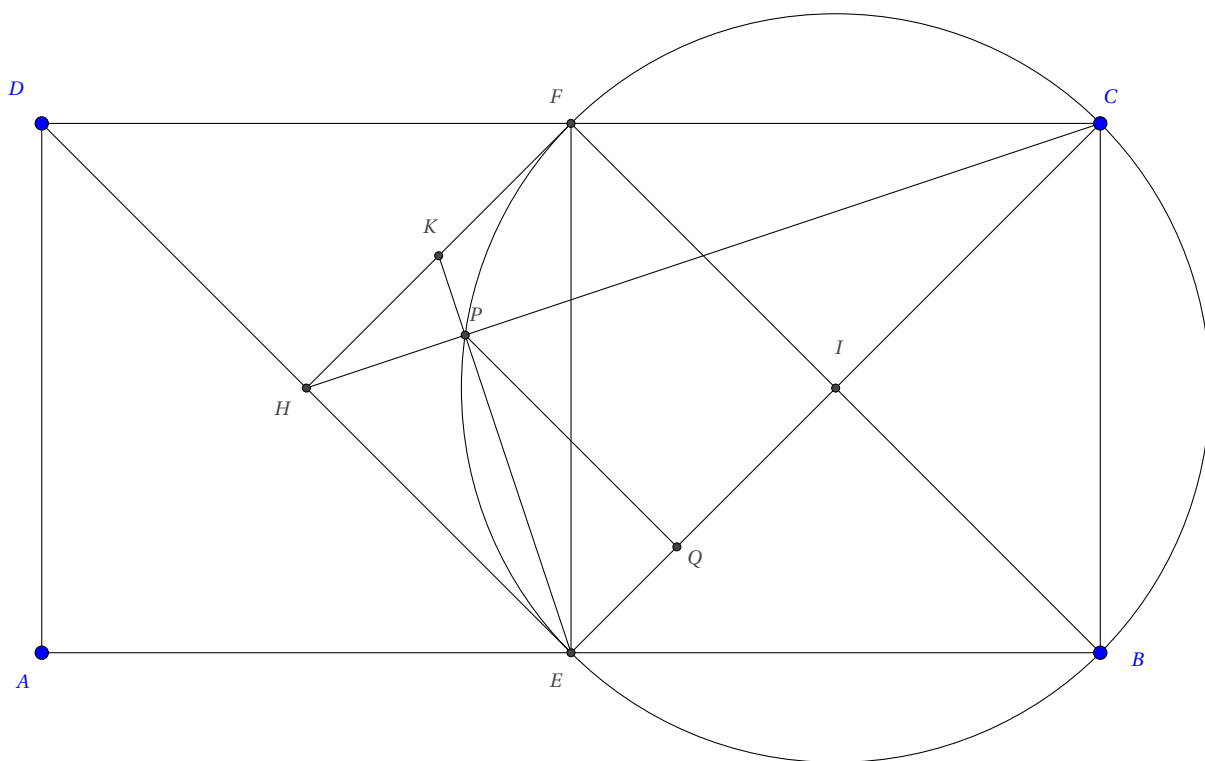
(Tứ Kỳ-Hải Dương lần 1)

Lời giải:



Bài toán 197. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AB = 2BC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD , H và K lần lượt là trung điểm của hai cạnh DE và CF , điểm $P(0; -1)$ là giao điểm của EK và CH . Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết trung điểm của đoạn BF là điểm $I(5; -1)$ và đỉnh B thuộc đường thẳng $d: 4x + 3y - 42 = 0$.
(Toanhoc247 lần 2)

Lời giải:



Áp dụng tính chất ta có P nằm trên đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $EFCB$ tâm I . Ta có

$IP = 5 = IB$ mà $b \in 4x + 3y - 42 = 0$ nên $B(9; 2)$ suy ra $F(1; -4)$. Vì $EFCB$ là hình vuông và $CP = 2EP$ nên ta suy ra $C(8; -5), E(2; 3)$. Điểm D, A đối xứng C, B qua F, E nên $D(-6; -3), A(-5; 4)$.

Chương 4

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

4.1 Bài tập rèn luyện cơ bản bổ sung

- Bài tập 1.**
1. Tam giác ABC có trọng tâm $G(1;2)$; $h_a: 4x - y - 1 = 0$; $h_b: x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
 2. Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(4;0)$; $h_a: x + y - 2 = 0$; $m_a: x + 2y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
 3. Tam giác ABC có $l_a: x + y - 3 = 0$; $m_b: x - y + 1 = 0$; $h_c: 2x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
 4. Tam giác ABC cân tại A có $AB: 3x - y + 5 = 0$, $BC: x + 2y - 1 = 0$. Lập phương trình AC biết AC qua $M(1;-3)$.
 5. Cho $A(1;1)$. Tìm $B \in Ox$, $C \in \Delta: y = 3$ sao cho tam giác ABC đều.
 6. Hình thoi ABCD có $A(0;1)$; $BD: x + 2y - 7 = 0$; $AB: x + 7y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.
 7. Tam giác ABC có $l_a: x - y = 0$; $h_c: 2x + y + 3 = 0$; AC qua $M(0,-1)$; $AB = 2AM$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.
 8. Cho $d_1: 2x - y + 1 = 0$, $d_2: x + 2y - 7 = 0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ sao cho đường thẳng này cùng với d_1, d_2 tạo thành 1 tam giác cân.
 9. Cho $A(2;1)$, $B(0;1)$, $C(3;5)$, $D(-3;-1)$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông có 2 cạnh song song đi qua A, C và 2 cạnh song song còn lại đi qua B, D.
 10. Hình chữ nhật ABCD có $AB: x - 2y - 1 = 0$, $BD: x - 7y + 14 = 0$, AC qua $M(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.
 11. Tam giác ABC có A thuộc $d: x - 4y - 2 = 0$, cạnh BC song song với d, $h_b: x + y + 3 = 0$, M(1;1) là trung điểm AC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
 12. Hình chữ nhật ABCD có AB song song với $\Delta: 2x + y = 0$; AB qua $M(2;-1)$; BC qua $N(-2;0)$; giao điểm hai đường chéo là gốc tọa độ. Xác định tọa độ các đỉnh.
 13. Hình thoi ABCD có $A(0;4)$; $B(2;0)$; hai đường chéo cắt nhau tại gốc tọa độ. Tìm tọa độ các đỉnh C, D.

14. Cho tam giác ABC có trục tâm $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$, trung điểm các cạnh AB, AC lần lượt là $M(1;4)$, $N(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
15. Tam giác ABC có $A(5;2)$, $m_c: 2x - y + 3 = 0$ và đường trung trực của cạnh BC là $\Delta: x + y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.
16. Tam giác ABC có A thuộc $d: x - 4y - 2 = 0$, BC song song với d , $h_b: x + y + 3 = 0$, trung điểm của AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
17. Tam giác ABC có $A(-3;6)$, trục tâm $H(2;1)$ và trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.
18. Hình thoi ABCD có cạnh bằng 5; $A(1;5)$; hai đỉnh B, D nằm trên đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.
19. Hình thoi ABCD có tâm $I(1;0)$; trung điểm của AB là $M(0;3)$; CD qua $N(8;-3)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.
20. Hình chữ nhật ABCD có tâm $I(1;2)$, $AB = 3AD$; đường thẳng AB qua $M(-2;4)$; đường thẳng CD qua $N(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.
21. Tam giác ABC vuông tại $A(1;0)$; $BC: y - 2 = 0$; đường tròn tâm A tiếp xúc với BC và cắt AC tại trung điểm M. Xác định tọa độ các đỉnh B, C.
22. Tam giác ABC vuông tại $A(-3;2)$; B, C thuộc đường thẳng $d: x - y - 3 = 0$. Tìm các điểm B, C sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.
23. Hình vuông ABCD có tâm $I(4;-2)$; đường thẳng AB qua $H(-2;-9)$, đường thẳng CD qua $K(4;-7)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.
24. Tam giác ABC có trục tâm $H(3;4)$, trung điểm của BC là $M(5;4)$ và chân đường vuông góc hạ từ đỉnh C là $F(3;2)$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C.
25. Cho tam giác ABC vuông tại A có $B(1;1)$, đường tròn đường kính AB là $(S): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, (S) cắt BC tại điểm thứ hai H, $BC = 4BH$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C.
26. Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(4;0)$, $h_a: x + y - 2 = 0$, $h_b: x - 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.
27. Hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12; tâm $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$; trung điểm của AD là $M(3;0)$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C, D.
28. Tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp lần lượt là $K(4;5)$, $I(6;6)$, đỉnh $A(2;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.
29. Cho $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, $\Delta: 2x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với Δ sao cho d cắt (E) tại 2 điểm A, B mà diện tích tam giác OAB bằng 1.
30. Hình vuông ABCD có $A(-2;6)$, điểm B thuộc đường thẳng $d: x - 2y + 6 = 0$. Hai điểm M, N lần lần thuộc cạnh BC, CD sao cho $BM = CN$. Hai đường thẳng AM và BN cắt nhau tại $I\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

31. Hình thang ABCD vuông tại A và D có diện tích bằng 24, đáy lớn CD, $AD : 3x - y = 0$, $BD : x - 2y = 0$, đường thẳng BC tạo với đường thẳng AB một góc 45° . Viết phương trình đường thẳng BC biết điểm B có hoành độ dương.
32. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) : $(x - 4)^2 + y^2 = 4$, với A, B là các tiếp điểm sao cho AB qua E(4;1).
33. Tam giác ABC vuông cân tại A, đường thẳng BC : $x + 7y - 31 = 0$, đường thẳng AC qua E(7;7), đường thẳng AB qua F(2;-3) và F không thuộc đoạn thẳng AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
34. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm I, $\Delta : x - y + 1 = 0$. Từ điểm M thuộc đường thẳng Δ vẽ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là các tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm M sao cho diện tích tứ giác MAIB bằng $4\sqrt{3}$.
35. Tam giác ABC có trục tâm H(-1;4), tâm đường tròn ngoại tiếp I(-3;0) và trung điểm cạnh BC là M(0;-3). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết B có hoành độ dương.
36. Đường tròn (C) có tâm I(2;2) cắt đường tròn (S) : $x^2 + y^2 = 1$ tại 2 điểm A, B phân biệt sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.
37. Hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 16, các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt qua M(4;5), N(6;5), P(5;2), Q(2;1). Viết phương trình cạnh AB.
38. Cho điểm K(3;2) và đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ có tâm I. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\angle IMK = 60^\circ$.
39. Cho A(1;4) và 2 đường tròn (C) : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$, (S) : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Tìm điểm M thuộc (C) và điểm N thuộc (S) sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.
40. Hình chữ nhật ABCD có tâm I(1;4), A thuộc $d_1 : x + y = 0$, C thuộc $d_2 : 2x - y + 7 = 0$ và đường thẳng AB qua M(0;-4). Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.
41. Tìm điểm I thuộc đường thẳng $d : x - y - 1 = 0$ sao cho đường tròn tâm I bán kính 1 tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
42. Tam giác ABC có diện tích bằng 2, A(1;0), B(0;2) và trung điểm AC thuộc đường thẳng $d : x - y = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C.
43. Hình vuông ABCD có AC : $x + 2y - 3 = 0$, điểm D thuộc $d : x - y - 2 = 0$ và đường thẳng BC qua M(7;-7). Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết D có hoành độ âm.
44. Tam giác ABC có chân 3 đường cao ứng với các đỉnh A, B, C lần lượt là D(1;1), E(-2;3), F(2;4). Viết phương trình cạnh BC.
45. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (S) : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$ biết A có hoành độ dương và đường thẳng AB qua điểm E(-3;-2).
46. Tam giác ABC có $l_a : 2x - y - 3 = 0$, hình chiếu vuông góc của B trên AC là E(-6;0) và hình chiếu vuông góc của C trên AB là F(-4;4). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

47. Cho (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ có tâm I và đường thẳng d : $mx - 4y + 3m + 1 = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A, B phân biệt sao cho $\angle AIB = 120^\circ$.
48. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A(2;3) sao cho Δ cắt 2 đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 = 13$, $(C_2) : (x-6)^2 + y^2 = 25$ theo 2 dây cung có độ dài bằng nhau.
49. Hình vuông ABCD có CD : $4x - 3y + 4 = 0$, điểm M(2;3) thuộc BC, điểm N(1;1) thuộc AB. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AD.
50. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ mà góc giữa 2 tiếp tuyến đó bằng 60° .
51. Tìm m để trên đường thẳng d : $x + y + m = 0$ có duy nhất điểm A để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ sao cho tam giác ABC vuông.
52. Cho tam giác ABC vuông tại A, M(3;1) là trung điểm của AB, đỉnh C thuộc d : $x - y + 6 = 0$ và $h_a : 2x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
53. Cho (C) : $(x+3)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 25$, $\Delta : 2x - y + 1 = 0$. Từ điểm A thuộc Δ vẽ 2 tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (C) với M, N thuộc (C). Tìm tọa độ điểm A biết $MN = 6$.
54. Cho M(2;1), d : $x - y = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d tại A và cắt trục hoành tại B sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.
55. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng d : $x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ngoại tiếp đường tròn (C) biết rằng có một đỉnh của hình vuông thuộc đường thẳng d.
56. Cho đường thẳng d : $3x - 4y + 5 = 0$ và đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$. Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) và điểm N thuộc đường thẳng d sao cho độ dài MN nhỏ nhất.
57. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(1;0), cắt đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ tại A và cắt đường tròn $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ tại B sao cho $MA = 2MB$.
58. Cho hình thoi ABCD có tâm I(2;1), $AC = 2BD$, điểm M $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm N(0;7) thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.
59. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $(C_1) : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ và cắt đường tròn $(C_2) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ theo một dây cung có độ dài $2\sqrt{2}$.
60. Tam giác ABC có diện tích bằng 2, AB : $x - y = 0$, điểm E(2;1) là trung điểm của cạnh BC. Tìm tọa độ trung điểm F của cạnh AC.
61. Cho M(2;-1), (S) : $x^2 + y^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính bằng 4 và cắt (S) theo 1 dây cung qua điểm M có độ dài nhỏ nhất.
62. Cho (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$ và (S) : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) và (S) theo các dây cung có độ dài lần lượt là $2\sqrt{7}$ và 8.

63. Cho $\Delta : x - y + 1 = 0$; $(C) : x^2 + y^2 - 2x = 0$. Tìm điểm M thuộc (C) và điểm N thuộc Δ sao cho M đối xứng với N qua trục tung.
64. Cho $(C) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; $(S) : x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta \parallel d : x + 2y + 1 = 0$ sao cho Δ cắt (C) , (S) theo các dây cung có độ dài bằng nhau.
65. Cho $A(3; 1)$, $d : x - y + 1 = 0$, $(S) : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. Tìm B thuộc d , C thuộc (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .
66. Cho $\Delta : x + y - 3 = 0$ cắt $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ tại 2 điểm M, N . Tìm điểm A thuộc (C) sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.
67. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn $(C) : (x - 4)^2 + y^2 = 4$, với A, B là các tiếp điểm sao cho AB qua $E(4; 1)$.
68. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với $(C_1) : x^2 + (y + 1)^2 = 4$ đồng thời cắt $(C_2) : (x - 1)^2 + y^2 = 2$ theo một dây cung có độ dài 2.
69. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính bằng 6 và tiếp xúc với $(S) : x^2 + y^2 = 25$ tại $A(3; 4)$.
70. Lập phương trình đường tròn (C) qua $B(1; 6)$ và tiếp xúc với $(S) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$ tại $A(1; 2)$.
71. Cho Elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $M(0; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho $3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$
72. Cho Elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $\Delta : 3x + 4y - 12 = 0$. Chứng minh rằng Δ cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt và tìm điểm C thuộc (E) sao cho diện tích tam giác ABC bằng 6.
73. Cho Elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $d : 2x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d , cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.
74. Cho F_1, F_2 là các tiêu điểm elip $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ (F_1 có hoành độ âm). Đường thẳng Δ qua F_2 song song với $d : x - y = 0$ cắt (E) tại A, B . Tính diện tích tam giác ABF_1 .
75. Cho Elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, hai điểm A, B thuộc (E) sao cho tam giác OAB vuông tại O . Chứng minh rằng $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$

4.2 Các bài hình oxy trong đề thi thử 2015

Bài toán 198. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh C thuộc đường thẳng $d : x + 2y - 6 = 0$, điểm $M(1; 1)$ thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta : x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C . (Chu Văn An, An Giang 2015)

Bài toán 199. Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $BD = \frac{\sqrt{10}}{5} AC$. Biết rằng $M(-2; -1)$, $N(2; -1)$ lần lượt là hình chiếu của D xuống các đường thẳng AB, BC và đường thẳng $x - 7y = 0$ đi qua A, C. Tìm tọa độ điểm A, C. (Chi Linh, Hai Duong 2015)

Bài toán 200. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD với $(\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ)$ có đỉnh $D(2; 2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D lên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C, biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 4 = 0$. (Nguyễn Viết Xuân, Phú yên 2015)

Bài toán 201. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Các điểm $K(-1; 1)$, $H(2; 5)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh C có hoành độ dương. (Lương Ngọc Quyên, Thái Nguyên 2015)

Bài toán 202. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Trên hai đoạn thẳng AB, AC lần lượt lấy hai điểm E, D sao cho $\angle ABD = \angle ACE$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB cắt tia CE tại $M(1; 0)$ và $N(2; 1)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt tia BD tại $I(1; 2)$ và K. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNK. (Tĩnh Gia 1 lần 3 năm 2015)

Bài toán 203. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0; 3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1; 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$. (Ngô Gia Tự, Vĩnh Phúc 2015)

Bài toán 204. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, $D(2; 2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định các tọa độ các điểm A, B, C của hình thang biết B thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 4 = 0$. (Quảng Xương 4, Thanh Hóa 2015)

Bài toán 205. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác đường cao AA' có phương trình $x + 2y - 2 = 0$ trực tâm $H(2; 0)$ kẻ các đường cao BB' và CC' đường thẳng $B'C'$ có phương trình $x - y + 1 = 0$. $M(3; -2)$ là trung điểm BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C. (Nghĩa Hưng C 2015)

Bài toán 206. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; -2)$, trọng tâm $G(0; 1)$ và trực tâm $H\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (Nguyễn Hiền, Đà Nẵng 2015)

Bài toán 207. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy Cho hình vuông ABCD có $C(2; -2)$. Gọi điểm I, K lần lượt là trung điểm của DA và DC; $M(-1; -1)$ là giao của BI và AK. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD biết điểm B có hoành độ dương. (Hiền Đa 2105)

Bài toán 208. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân đỉnh A, D là trung điểm cạnh AC. $K(1; 0)$, $E\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và trọng tâm tam giác ABD. $P(-1; 6)$, $Q(-9; 2)$ lần lượt thuộc đường thẳng AC, BD. Tìm tọa độ điểm A, B, C biết D có hoành độ dương. (Nam Đàn và lần 3 Quỳ Châu 2015)

Bài toán 209. Trong mặt phẳng Oxy, gọi $H(3; -2)$, $I(8; 11)$, $K(4; -1)$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C. (sở thành phố HCM 2015)

Bài toán 210. Trong mặt phẳng (Oxy), cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(3; -1)$, đường thẳng chứa đường cao vẽ từ B đi qua $E(-1; -3)$ và đường thẳng chứa cạnh AC qua $F(1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $D(4; -2)$ là điểm đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (Núi Thành 2015)

Bài toán 211. Trong mặt phẳng với tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $AB = AD < CD$, điểm $B(1; 2)$, đường thẳng BD có phương trình $y = 2$. Biết rằng đường thẳng $(d): 7x - y - 25 = 0$ lần lượt cắt các đoạn thẳng AD và CD theo thứ tự tại M và N sao cho $BM \perp BC$ và tia BN là tia phân giác của góc MBC. Tìm tọa độ đỉnh D (với hoành độ của D là số dương). (Quỳnh Lưu, Nghệ An 2015)

Bài toán 212. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $E(3; -4)$. Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M(7; 4)$ và trung điểm N của đoạn CD thuộc đường thẳng $d: 4x + y - 10 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB. (chuyên Quốc Học Huế)

Bài toán 213. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC. A', B', C' là các điểm sao cho $ABA'C, BCB'A$ và $CAC'B$ và là hình bình hành. Biết $H_1(0; -2)$, $H_2(2; -1)$ và $H_3(0; 1)$ và là trực tâm của các tam giác BCA', CAB', ABC' . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. (THPT chuyên ĐHKHTN)