SỞ GD&ĐT QUẢNG TRỊ	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG LỚP 12 CẤP TỈNH NĂM HỌC: 2019 - 2020**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN	**Môn thi: Toán**
(Đề thi gồm có 01 trang)	*Thời gian làm bài: 150 phút*

Câu 1 (6 điểm)

a) Giải phương trình $(x-2)^2+\sqrt{x+6}=67+\sqrt{11-x}$

b) Từ các chữ số 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 lập được bao nhiêu số chẵn, có ba chữ số khác nhau.

Câu 2 (4 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD và các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$; $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

a) Chứng minh tam giác BMN vuông cân.

b) *Tìm tọa độ điểm A, biết N(2;2), đường thẳng BM có phương trình* $x-2y-3=0$ và điểm A có hoành độ nhỏ hơn 2.

Câu 3 (4 điểm).

a) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c\geq 1$. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

b) Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $f(x)=x(10+\sqrt{12-x^2})$

Câu 4 (4 điểm).

Cho hình chóp S.ABC, có SA = SB = SC và đáy là tam giác vuông cân với cạnh huyền AB = $a\sqrt{2}$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy một góc φ sao cho $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{13}}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Câu 5 (2điểm). Tìm tất cả các hàm số $f:(0,+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn đẳng thức

$$f(x+y)+f(xy)=x+y+xy\ ,\ \forall x,y\in(0;+\infty)$$

Họ và tên .... SBD: ....

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG DỰ THI HSG CẤP TỈNH

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>1
(6đ)</td><td>

a) Giải phương trình $(x-2)^2+\sqrt{x+6}=67+\sqrt{11-x}$ (1), $x\in[-6;11]$

$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+6}-4\right)+\left(1-\sqrt{11-x}\right)+x^2-4x-60=0$

$\Leftrightarrow(x-10)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{11-x}}+x+6\right)=0$

$\Leftrightarrow x=10$ (Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{11-x}}+x+6>0, x\in[-6;11]$).

</td><td>1

1

1</td></tr>
<tr><td></td><td>

b) Gọi $\overline{abc}$ là số cần tìm: a,b,c đôi một khác nhau, $a\neq 0$, c là số chẵn.

$\{a,b,c\}\subset\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$.

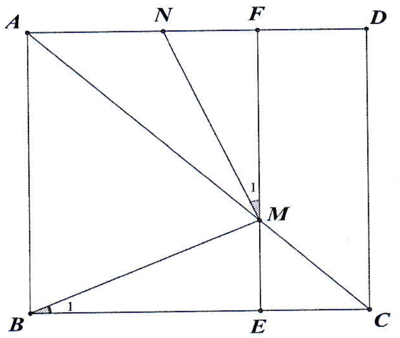
- $c=0$, mỗi cách chọn c sẽ có 7 cách chọn a (khác $c=0$), mỗi cách chọn c,a sẽ có 6 cách chọn b (khác c,a), nêncó $7.6=42$ số loại này.
- $c\neq 0$, có 3 cách chọn c chẵn, mỗi cách chọn c sẽ có 6 cách chọn a ($a\neq 0, a\neq c$), mỗi cách chọn c,a có 6 cách chọn b (khác c,a) nên có: $3.6.6=108$ số loại này.

Vậy, tổng cộng có: $42+108=150$ số thỏa mãn đề bài.

</td><td>1

1

1</td></tr>
<tr><td>2
(4đ)</td><td>



a) Đặt cạnh hình vuông bằng 3m. Qua M kẻ đường vuông góc với BC cắt BC, AD lần lượt tại E, F. Khi đó, từ đề bài ta có: $\begin{cases}\text{ME}=\text{NF}=\text{m}\\ \text{BE}=\text{MF}=2\text{m}\end{cases}\Rightarrow\Delta\text{BEM}=\Delta\text{MFN}.$

$\Rightarrow\widehat{\text{B}_1}=\widehat{\text{M}_1}$, MB=MN $\Rightarrow\widehat{\text{BME}}+\widehat{\text{M}_1}=90^0$. Vậy ΔBMN vuông cân tại M.

</td><td>1

1</td></tr>
<tr><td></td><td>

b) $(BM): x-2y-3=0\Rightarrow(MN): 2x+y-6=0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-3=0\\ 2x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow M(3;0)$.

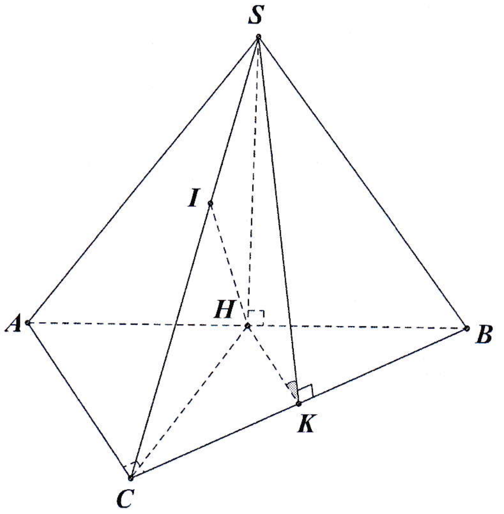
$\text{MF}^2+\text{FN}^2=\text{MN}^2\Leftrightarrow 4m^2+m^2=5\Leftrightarrow m=1\Rightarrow \text{AN}=1, \text{AM}=2\sqrt{2}$.

Gọi $\text{A}(a;b)$, với $a<2$, ta có hệ: $\begin{cases}(a-2)^2+(b-2)^2=1\\ (a-3)^2+b^2=8\end{cases}$

Giải hệ, với $a<2$, ta được $\text{A}(1;2)$

</td><td>1

1</td></tr>
</table>

3 **(4đ)**	**a)** $\forall x,y\in\mathbb{R}$, ta có $x^4+y^4\ge x^3y+xy^3$ (*) $\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^2+xy+y^2\right)\ge 0$, đúng $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Áp dụng (*), ta được $a^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4\ge\frac{1}{3}a^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3a$ $b^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4\ge\frac{1}{3}b^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3b$ $c^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4\ge\frac{1}{3}c^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3c$ (gt) $\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^3(a+b+c)\ge\left(\frac{1}{3}\right)^3$, cộng vế theo vế ta có: $a^4+b^4+c^4\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$	0,5 1 0,5
	b) TXĐ: $D=\left[-\sqrt{12},\sqrt{12}\right]$, $f(-x)=-f(x),\forall x\in D$. $f(x)\ge 0$ trên $\left[0,\sqrt{12}\right]$, $f(x)\le 0$ trên $\left[-\sqrt{12},0\right]$. $\underset{x\in D}{max}\,f(x)=\underset{x\in\left[0,\sqrt{12}\right]}{max}f(x)\Rightarrow\underset{x\in D}{\min}f(x)=-\underset{x\in\left[0,\sqrt{12}\right]}{max}f(x)$ Theo BĐT C-B, ta có $f(x)\le x.\sqrt{10+1}.\sqrt{10+\left(12-x^2\right)}=x.\sqrt{11}.\sqrt{22-x^2}\le\sqrt{11}.\frac{x^2+22-x^2}{2}=11\sqrt{11}$ $\Rightarrow f(x)\le 11\sqrt{11}$, dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=\sqrt{11}$ Vậy $\underset{x\in D}{max}\,f(x)=11\sqrt{11}$, khi $x=\sqrt{11}$. $\underset{x\in D}{\min}f(x)=-11\sqrt{11}$, khi $x=-\sqrt{11}$	0,5 1 0,5
4 **(4đ)**	 $\begin{cases}SH\perp(ABC)\\SA=SB=SC\end{cases}\Rightarrow H$ là tâm đường tròn (ABC). Mà ΔABC vuông cân tại $C\Rightarrow H$ là trung điểm AB. Gọi K là trung điểm của BC. Suy ra HK là đường trung bình của ΔABC. Do đó $\begin{cases}HK\,//\,AC\\HK=\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}\left(Do\ AB=a\sqrt{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}HK\perp BC\\SH\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHK)\Rightarrow\widehat{SKH}=\varphi.$ $Cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{13}}\Rightarrow\tan\varphi=2\sqrt{3}\Rightarrow SH=HK.\tan\varphi=a\sqrt{3}.$ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}a^2\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$	 1 1

	Gt $\Rightarrow \begin{cases} CH \perp AB \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCH).$ Trong ΔSCH kẻ đường cao $HI \Rightarrow d\left(SC, AB\right) = HI.$ Ta có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{CH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow d\left(AB; SC\right) = HI = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$	1 1
5 **(2đ)**	$f(x+y) + f(xy) = x + y + xy, \forall x, y > 0$ (1) . $x = y = 2 \Rightarrow f(4) = 4.$ Lần lượt thay $(x; y) \in \{(1;1); (2;1); (3;1)\}$ vào (1), ta có: $\begin{cases} f(2) + f(1) = 3 \\ f(3) + f(2) = 5 \\ f(4) + f(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 3 \\ f(2) = 2. \\ f(1) = 1 \end{cases}$ Thế $x = t, y = \frac{1}{t}(t > 0)$ vào (1) ta thu được: $f(t + \frac{1}{t}) + f(1) = t + \frac{1}{t} + 1 \Rightarrow f(t + \frac{1}{t}) = t + \frac{1}{t} \Rightarrow f(x) = x, \forall x \geq 2\left(Do\ t + \frac{1}{t} \geq 2\right).$ Tiếp tục thế $y = 2.$ Từ (1) ta suy ra $\begin{cases} f(x+2) + f(2x) = x + 2 + 2x \\ f(x+2) = x + 2, \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(2x) = 2x, \forall x > 0$ hay $f(x) = x, \forall x > 0$ Thử lại $f(x) = x, \forall x > 0$ thỏa mãn điều kiện bài toán.Vậy $f(x) = x, \forall x \in (0; +\infty).$	0.5 0.5 0.5 0.5