

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\ln x$ trên $[1; e]$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình $\log_2^2 x = \log_2 \frac{x}{4} + 4$. ($x \in \mathbf{R}$)

b) Tìm môđun của số phức $\bar{z}$ biết $(2 + i^3)z + 1 + 3i = z + i^4$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sqrt{\cos x}) \sin x dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(1; 2; 1)$ và mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z - 4 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ hình chiếu H của I trên (P).

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2}{(\sin \alpha - \cos \beta)^2 + (\cos \alpha + \sin \beta)^2}$.

b) Một hộp chứa 6 bi màu vàng, 5 bi màu đỏ và 4 bi màu xanh có kích thước và trọng lượng như nhau, lấy ngẫu nhiên 8 bi trong hộp. Tính xác suất sao cho trong 8 bi lấy ra có số bi màu vàng bằng với số bi màu đỏ.

Câu 7 (1,0 điểm). Trong không gian cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{10}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC theo a, biết M là điểm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, có $M(3; -1)$ là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng chứa đường cao đỉnh B đi qua $E(-1; -3)$. Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua $F(1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính AD với $D(4; -2)$.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1-xy \\ (2x-7xy)(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3xy}) = 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^3}{b^2 + (a+c)^2} + \frac{c^3}{c^2 + (a+b)^2}$$

-----HẾT-----

I. LƯU Ý CHUNG:

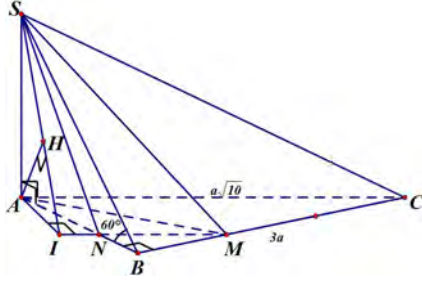
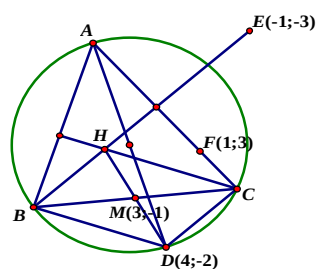
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học không gian nếu thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm																														
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.	1,0đ																														
	TXĐ: $D = \mathbb{R}$	0,25																														
	$y' = x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.	0,25																														
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		y	$+\infty$				3				$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$																						
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$																								
y	$+\infty$				3				$+\infty$																							
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$ - Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$ - Hàm số đạt CĐ tại $(0; 3)$ và đạt CT tại $(-2; -1); (2; -1)$ - Hàm số đạt cực đại $x = 0, y_{cd} = 3$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 2, y_{ct} = -1$.																																
		0,25																														
2	Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\ln x$ trên $[1; e]$.	1,0đ																														
	Hàm số $y = x - 2\ln x$ liên tục trên $[1; e]$	0,25																														
	Ta có $f(x) = x - 2\ln x \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$	0,25																														
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (1; e)$	0,25																														
	$f(1) = 1; f(2) = 2 - 2\ln 2; f(e) = e - 2$ Vậy, $\min_{[1; e]} y = 2 - 2\ln 2; \max_{[1; e]} y = 1$	0,25																														

3	a) Giải phương trình $\log_2^2 x = \log_2 \frac{x}{4} + 4. \quad (x \in R)$	0,5đ
	+ Điều kiện của phương trình (1) là: $x > 0$ (*) + Với điều kiện (*), (1) $\Leftrightarrow \log_2^2 x = \log_2 x - \log_2 4 + 4$ $\Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ + Kết hợp với điều kiện (*), ta có tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \left\{4; \frac{1}{2}\right\}$.	0,25
	b) Tìm môđun của số phức $\bar{z}$ biết $(2 + i^3)z + 1 + 3i = z + i^4$.	
	Ta có $(2 + i^3)z + 1 + 3i = z + i^4$ $\Leftrightarrow (2 - i)z - z = -1 - 3i + 1$ $\Leftrightarrow z = \frac{-3i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$	0,25
4	Do đó $ \bar{z} = z = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.	0,25
	Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sqrt{\cos x}) \sin x dx$.	1,0đ
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = A + B$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow A = -x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 1$	0,25
	Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \cdot dx \Rightarrow B = \int_0^1 \sqrt{t} \cdot dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big _0^1 = \frac{2}{3}$	0,25
	$I = A + B = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.	0,25

5	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với (P) . Tìm tọa độ hình chiếu H của I trên (P) .	1,0đ
	Bán kính mặt cầu $r = d(I, (P)) = \frac{ 1.1 + 2.2 + 2.1 - 4 }{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1$.	0,25
	Phương trình mặt cầu là $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$	0,25
	Đường thẳng IH qua I và vuông góc với $mp(P) \Rightarrow IH$ có vtcp $\vec{n} = (1; 2; 2)$ Pt $IH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in R).$ tọa độ $H: \begin{cases} x + 2y + 2z = 4 \\ x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}, H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$	0,25
6	a) Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2}{(\sin \alpha - \cos \beta)^2 + (\cos \alpha + \sin \beta)^2}$.	0,5đ
	$P = \frac{2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{2 + 2(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta)} = \frac{1 + \cos(\beta - \alpha)}{1 + \sin(\beta - \alpha)}$.	0,25
	$= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$.	0,25
	b) Một hộp chứa 6 bi màu vàng, 5 bi màu đỏ và 4 bi màu xanh có kích thước và trọng lượng như nhau, lấy ngẫu nhiên 8 bi trong hộp. Tính xác suất sao cho trong 8 bi lấy ra có số bi màu vàng bằng với số bi màu đỏ.	0,5đ
	Gọi A : “trong 8 bi lấy ra có số bi màu vàng bằng với số bi màu đỏ” Trường hợp 1: Chọn được 2 bi vàng, 2 bi đỏ và 4 bi xanh. Trường hợp 2: Chọn được 3 bi vàng, 3 bi đỏ và 2 bi xanh. Trường hợp 3: Chọn được 4 bi vàng, 4 bi đỏ. $\Rightarrow n(A) = C_6^2 C_5^2 C_4^4 + C_6^3 C_5^3 C_4^2 + C_6^4 C_5^4 = 1425$	0,25
	Kg mẫu Ω : “lấy ngẫu nhiên 8 bi trong hộp chứa 15 bi” $\Rightarrow n(\Omega) = C_{15}^8 = 6435$ Vậy xác suất sao cho trong 8 bi lấy ra có số bi màu vàng bằng với số bi màu đỏ là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1425}{6435} = \frac{95}{429}$	0,25

	Trong không gian cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{10}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC theo a, biết M là điểm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.	1,0đ
7	Vì $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$. Vậy góc giữa mp (SBC) và mp (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a$. Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{3a^2}{2}$. 	0,25
	$SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$	0,25
	Kẻ MN song song AC cắt AB tại N, $\Rightarrow AC \parallel (SMN)$. Vậy $d(SM, AC) = d(A, (SMN))$. Gọi I là hình chiếu của điểm A lên MN, H là hình chiếu của A lên SI, $\Rightarrow MI \perp (SAI)$, $\Rightarrow MI \perp AH$. Mặt khác $AH \perp SI$ nên $AH \perp (SMI)$. Vậy $d(A, (SMN)) = AH$.	0,25
	$\triangle AIN$ đồng dạng với $\triangle MBN$, $\Rightarrow AI = \frac{AN \cdot MB}{MN} = \frac{2a}{\sqrt{10}}$. Xét $\triangle SAI$ vuông tại A và có AH là đường cao $\Rightarrow AH = \frac{AI \cdot SA}{SI} = \frac{a\sqrt{102}}{17}$. Vậy $d(SM, AC) = \frac{a\sqrt{102}}{17}$.	0,25
8	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, có $M(3; -1)$ là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng chứa đường cao đỉnh B đi qua $E(-1; -3)$. Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua $F(1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính AD với $D(4; -2)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC thì tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. M là trung điểm BC nên M cũng là trung điểm DH, suy ra $H(2; 0)$. Đường thẳng AC qua $F(1; 3)$ vuông góc với HE $\Rightarrow$ pt AC: $x + y - 4 = 0$ Đường thẳng DC qua $D(4; -2)$ vuông góc với AC $\Rightarrow$ pt DC: $x - y - 6 = 0$ C là giao điểm của AC và $DC \Rightarrow C(5; -1)$. M là trung điểm $BC \Rightarrow B(1; -1)$ Đường thẳng AB qua $B(1; -1)$ vuông góc với $CH \Rightarrow AB$: $3x - y - 4 = 0$ A là giao điểm của AC và $AB \Rightarrow A(2; 2)$. 	1,0đ 0,25 0,25 0,25 0,25

9	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1-xy & (1) \\ (2x-7xy)(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3xy}) = 5 & (2) \end{cases}$	1,0đ
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x+3xy \geq 0 \end{cases}$. Dễ thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ. $x \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} + y = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \frac{1}{x}$. Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+1} + t; f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{t^2+1} + t}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{ t +t}{\sqrt{t^2+1}} > 0$ Suy ra hàm số $f(y); f\left(\frac{1}{x}\right)$ đơn điệu tăng nên $f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$	0,25
	Thay vào (2) ta được: $(2x-7)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\frac{5}{2x-7} = 0$. Xét hàm số: $g(x) = \sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\frac{5}{2x-7} \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{10}{(2x-7)^2} > 0$ $\forall x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ nên hàm số $g(x)$ đơn điệu tăng trên hai nửa khoảng này vì vậy có không quá 1 nghiệm thuộc mỗi khoảng này.	0,25
	Mặt khác có $g(1) = 0; g(6) = 0; 1 \in \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{2}\right); 6 \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(6; \frac{1}{6}\right) \right\}$	0,25
	(Chú ý : Nếu HS chỉ tìm ra 1 nghiệm của hệ cho 0,5 điểm)	0,25
10	Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^3}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^3}{b^2+(a+c)^2} + \frac{c^3}{c^2+(a+b)^2}$	1,0đ
	Ta có $P = \frac{a^3}{a^2+(3-a)^2} + \frac{b^3}{b^2+(3-b)^2} + \frac{c^3}{c^2+(3-c)^2}$ Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2+(3-x)^2} - \frac{17}{25}x + \frac{12}{25}; x \in (0; 3)$	0,25
	Ta có: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+(3-x)^2} - \frac{17}{25}x + \frac{12}{25} = -\frac{9(x-12)(x-1)^2}{25(2x^2-6x+9)} \geq 0, \forall x \in (0; 3)$.	0,25
	Mặt khác $P = f(a) + f(b) + f(c) - \frac{17}{25}(a+b+c) + \frac{36}{25}$. Suy ra $P \geq \frac{17}{25}(a+b+c) - \frac{36}{25} = \frac{3}{5}$.	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{5}$ khi $a=b=c=1$.	0,25