§BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

A. LÝ THUYẾT.

I. HAI ĐỒ THỊ TIẾP XÚC

1. Định nghĩa: Hai đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gọi là tiếp xúc nhau tại điểm M nếu tại M chúng có cùng tiếp tuyến.

2. Định lí 1: Hai đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ có nghiệm và nghiệm của hệ là tọa độ tiếp điểm.

Ví dụ 1. Tìm m để (C_m): $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x^2+2mx+1$ tiếp xúc với đường thẳng $y=1$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

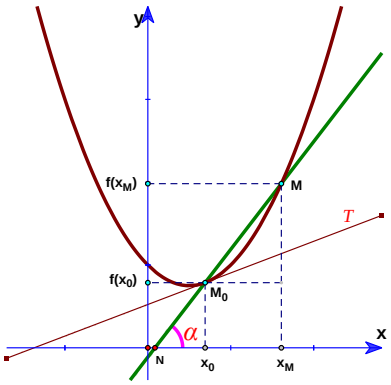
.....

.....

.....

II. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

3. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$. Một cát tuyến MM_0 được giới hạn bởi đường thẳng M_0T khi M dần tới M_0 thì M_0T gọi là tiếp tuyến của đồ thị, M_0 gọi là tiếp điểm.



4. Định lí 2: Đạo hàm của $f(x)$ tại $x=x_0$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(x_0;f(x_0))$.

Nhận xét: Hệ số góc của mọi tiếp tuyến đều có dạng $f'(x_0)$.

Khi đó: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$ là:

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ với $y_0=f(x_0)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+11x-1$ tại điểm có tung độ bằng 5.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Tìm m để tiếp tuyến của $(C_m): y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1;2)$?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x+1}$ (1). Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2;5)$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-3x+2015$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-3x^2-\frac{1}{3}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x-4y+2016=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+9x-5\ (C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1\ (C)$.

Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

1. Phương pháp.

Bước 1. Tính $y'=f'(x)$ suy ra hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $\boxed{k=f'(x_0)}$.

Bước 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng

$$\Delta:\ \boxed{y-y_o=k(x-x_o)}$$

① ② ③

Trong đó: Điểm $\boxed{M_0(x_0;y_0)\in(C)}$ được gọi là *tiếp điểm*. (với $y_0=f(x_0)$).

$k=f'(x_0)$ là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến.

Nhận xét: Để viết phương trình tiếp tuyến Δ, ta cần tìm ba thành phần x_o, y_o, k.

- ☞ Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0=f(x_0)$.
- ☞ Nếu đề cho y_0 ta thay vào hàm số để giải ra x_0.

2. Bài tập minh họa .

Bài tập 1. Cho hàm số $(C):y=x^3+3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài tập 2. Cho hàm số $y=-2x^3+6x^2-5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài tập 3. Cho hàm số (C): $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0>0$, biết $y''(x_0)=-1$ là

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 4. Cho đường cong $(C): y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau:

a). Tại điểm $M_0(1;-2)$.

b). Tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0 = -1$.

c). Tại giao điểm của (C) với trục hoành .

d). Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;-4)$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 5. Cho đồ thị (C): $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với Ox.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Câu hỏi trắc nghiệm .

Mức độ 1. Nhận Biết

Câu 1. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm $(-1;-1)$.

A. $y=-3x-4$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x+2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $x+y+2=0$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y=8$. **B.** $y=-12x+16$. **C.** $y=12x-24$. **D.** $y=12x-16$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y=2x$. **B.** $y=2$. **C.** $y=0$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y=-2$.

A. $y=-9x+7;\ y=-2$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=9x+7;\ y=-2$. **D.** $y=9x+7;\ y=2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+3$ tại điểm $M(1;2)$.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=3x-1$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=2-x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $y=-x-3$. **B.** $y=-x+2$. **C.** $y=x-1$. **D.** $y=x+2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^2+5$ tại điểm có tung độ bằng -1 và hoành độ âm.

A. $y=2\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)-1$. **B.** $y=-2\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)-1$.

C. $y=2\sqrt{6}\left(x-\sqrt{6}\right)+1$. **D.** $y=2\sqrt{6}\left(x-\sqrt{6}\right)-1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10.(THPT Chuyên ĐH Vinh 2018) Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y=-1$ là

A. -10. **B.** $\dfrac{9}{5}$. **C.** $-\dfrac{5}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 11.(THPT Chuyên Lương Thế Vinh 2018) Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (H). Tiếp tuyến của (H) tại giao điểm của (H) với trục hoành có phương trình là:

A. $y=3x$. **B.** $y=x-3$. **C.** $y=3x-3$. **D.** $y=\dfrac{1}{3}(x-1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12.(Sở GD & ĐT Kiên Giang 2018) Cho hàm số $y=\cos x+m\sin 2x(C)$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=\pi$, $x=\dfrac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

A. $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $m=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=-2\sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 13.(THPT Xuân Trường Nam Định 2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3+3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 có phương trình là:

A. $y=-12x-7$. **B.** $y=12x-7$. **C.** $y=-12x+17$. **D.** $y=12x+17$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 14.(THTT Số 4-487 2018) Cho hàm số $y=x^4-6x^2-3$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A có hoành độ $x=1$ cắt đồ thị hàm số tại điểm B (B khác A). Tọa độ điểm B là

A. $B(-3;24)$. **B.** $B(-1;-8)$. **C.** $B(3;24)$. **D.** $B(0;-3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15.(THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội 2018)

Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y=20x-35$. **B.** $y=-20x-35$ và $y=20x+35$.

C. $y=20x-35$ và $y=-20x-35$. **D.** $y=-20x+35$.

Lời giải

.....

.....

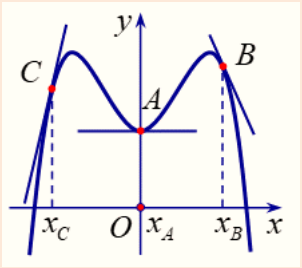
.....

.....

.....

.....

Câu 16. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Biết rằng tại các điểm A, B, C đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(x_C)<f'(x_A)<f'(x_B)$. **B.** $f'(x_B)<f'(x_A)<f'(x_C)$.

C. $f'(x_A)<f'(x_C)<f'(x_B)$. **D.** $f'(x_A)<f'(x_B)<f'(x_C)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 17.(THPT Lê Xoay Vĩnh phúc 2018) Gọi đường thẳng $y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x=1$. Tính $S=a-b$.

A. $S=\dfrac{1}{2}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 18. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:x=1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và d song song với đường thẳng $\Delta:y=-12x+4$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d:y=4x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$.

A. $m=0;\ m=4$. **B.** $m=1;\ m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không có giá trị của m.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$, biết khoảng cách từ điểm $I(-1;1)$ đến tiếp tuyến là lớn nhất.

A. $y=-x+2;\ y=-x-2.$ **B.** $y=-x+2;\ y=-x-1.$

C. $y=x+2;\ y=x-2.$ **D.** $y=-x+1;\ y=-x-1.$

Lời giải

Câu 21. Tìm giá trị của tham số a để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua $M(0;a)$.

A. $a=10.$ **B.** $a=9.$ **C.** $a=3.$ **D.** $a=1.$

Lời giải

Câu 22. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+2}{bx+3}$ tại điểm $M(-2;-4)$ song song với đường thẳng $d:7x-y+5=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b-2a=0.$ **B.** $a-2b=0.$ **C.** $b-3a=0.$ **D.** $a-3b=0.$

Lời giải

Câu 23. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+b}{ax-2}$ tại điểm $M\left(1;-2\right)$ song song với đường thẳng $d:3x+y-4=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=2.$ **B.** $a+b=1.$ **C.** $a+b=4.$ **D.** $a+b=0.$

Lời giải

Câu 24. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{2x+3}$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1)$. Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng -2 có hệ số góc bằng 5. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a=2;b=3.$ **B.** $a=3;b=2.$ **C.** $a=2;b=-3.$ **D.** $a=3;b=-2.$

Lời giải

Câu 25.(THPT Can Lộc Hà Tĩnh 2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left[f\left(2x+1\right)\right]^2+\left[f\left(1-x\right)\right]^3=x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y=\dfrac{1}{7}x-\dfrac{6}{7}.$ **B.** $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{6}{7}.$ **C.** $y=\dfrac{1}{7}x-\dfrac{5}{7}.$ **D.** $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{6}{7}.$

Lời giải

Câu 26.(THPT Chuyên Hà Tĩnh 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

Lời giải

Câu 27.(THPT Yên Định Thanh Hóa 2018) Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$?

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. **B.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$. **C.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. **D.** $y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$.

Lời giải

Câu 28.(THPT Đặng Thúc Hứa Nghệ An 2018) Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ có đồ thị (C). Biết rằng khi $m=m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0=-1$ đi qua $A(1;3)$. Khẳng định nào sâu đây đúng?

A. $-1<m_0<0$. **B.** $0<m_0<1$. **C.** $1<m_0<2$. **D.** $-2<m_0<-1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29.(Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc 2018) Trên đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M cắt (C) tai điểm thứ hai N thỏa mãn $MN=\sqrt{333}$.

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$, biết tiếp tuyến có hệ số góc k.

1. Phương pháp.

Bước 1. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm và tính $y'=f'(x)$.

Bước 2. Hệ số góc tiếp tuyến là $k=f'(x_0)$. Giải phương trình này tìm được x_0, thay vào hàm số được y_0.

Bước 3. Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng $d: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Chú ý: Đối với bài toán này ta cần lưu ý một số vấn đề sau:
Số tiếp tuyến của đồ thị chính là số nghiệm của phương trình : $f'(x)=k$.
Cho hai đường thẳng $d_1: y=k_1x+b_1$ và $d_2: y=k_2x+b_2$. Khi đó

i) $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1.k_2}\right|$, trong đó $\alpha=(d_1,d_2)$.

ii) $d_1//d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1\neq b_2 \end{cases}$

iii) $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2=-1$.

iv) Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc α thì hệ số góc của tiếp tuyến d là $k=\pm\tan\alpha$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 6. Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng : $y=2x-2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y-1=0$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 8. Cho hàm số $(C): y=x^3-3x+2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9 là:

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 9. Cho hàm số $(C): y=\frac{2x+1}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $\Delta: 3x-y+2=0$.

Lời giải.

.....

Bài tập 10. Cho đường cong $(C): y=\dfrac{3x+1}{1-x}$.

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với $(d): x-4y-21=0$.

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $(\Delta): 2x+2y-9=0$.

c). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với $(d): x-2y+5=0$ một góc 30^0.

Lời giải.

Bài tập 11. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ (C)

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2;4)$.

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

Lời giải.

Bài tập 12. Cho hàm số (C): $y=\sqrt{1-x-x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a). Tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{2}$.

b). Song song với đường thẳng $(d): x+2y=0$.

Lời giải.

Bài tập 13. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5\ (C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 14. Lập phương trình tiếp tuyến của $(C): y=x^3-3x^2+1$, biết nó song song với đường thẳng $d: 9x-y+6=0$?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 15. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=-x^4-x^2+6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=\frac{1}{6}x-1$?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 16. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x+3m\ (C_m)$ (m là tham số).

Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) của hàm số đã cho vuông góc với đường thẳng $d: x-y+2=0$.

Lời giải.

.....

.....

.....

Bài tập 17. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$ $(*)$ (m là tham số).

Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1.

Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x-y=0$.

Lời giải.

Bài tập 18. Tìm các điểm M trên đường thẳng $d: y=-2x+19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=(x+2)(x-1)^2$ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng $d': x+9y-8=0$?

Lời giải.

Bài tập 19. Tìm các điểm $A, B\in(C): y=-x^3+3x$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $AB=4\sqrt{2}$?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.Câu hỏi trắc nghiệm .

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 30. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$ là

A. $x+4y-1=0$; $x+4y+1=0$.

B. $x+4y-4=0$; $x+4y+4=0$.

C. $y=-\frac{1}{4}x-4$; $y=-\frac{1}{4}x+4$.

D. $y=-\frac{1}{4}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$.

A. $y=9x+7$; $y=9x-25$. **B.** $y=9x-25$. **C.** $y=9x-7$; $y=9x+25$. **D.** $y=9x+25$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x$.

A. $y=45x-173$; $y=45x+83$.

B. $y=45x-173$.

C. $y=45x+173$; $y=45x-83$.

D. $y=45x-83$.

Lời giải

.....

Câu 33.(THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Trên đồ thị $(C): y=\dfrac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x+y=1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Câu 34.(THPT Lê Qúy Đôn-2018) Cho hàm số $y=x^3-\dfrac{5}{2}x^2-6x+\dfrac{481}{27}$. Tìm số các tiếp tuyến với đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y=2x-\dfrac{7}{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Câu 35. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x-3y=0$ bằng $\frac{3}{5}$.

A. $y=2;\ y=1.$ **B.** $y=-2;\ y=1.$ **C.** $y=-2;\ y=-1.$ **D.** $y=2;\ y=-2.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 36. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 12.

A. $y=12x\pm16.$ **B.** $y=12x\pm8.$ **C.** $y=12x\pm2.$ **D.** $y=12x\pm4.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 37. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=9x.$

A. $y=9x+40.$ **B.** $y=9x-40.$ **C.** $y=9x+32.$ **D.** $y=9x-32.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 38. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+x$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x+5y=0.$

A. $y=5x-3.$ **B.** $y=3x-5.$ **C.** $y=2x-3.$ **D.** $y=x+4.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 39.(THPT Nguyễn Khuyến 2018) Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng $y=-3x+15$.

A. $y=-3x+1,\ y=-3x-7$.
B. $y=-3x-1, y=-3x+11$.
C. $y=-3x-1$.
D. $y=-3x+11,\ y=-3x+5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 40.(THPT Hai Bà Trưng 2018) Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(\zeta): y=x^3-3x^2+2$ song song với đường thẳng $\Delta: y=9x-25$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 41.(THPT Bình Xuyên 2018) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+1$ có bao nhiêu tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{3}$

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 42.(THPT Cổ Loa Hà Nội 2018) Tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2$ song song với đường thẳng $(d): y = 9x + 3$ có phương trình là

A. $y = 9x - 29$ và $y = 9x + 3$. **B.** $y = 9x - 29$.

C. $y = 9x - 25$. **D.** $y = 9x - 25$ và $y = 9x + 15$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 43.(Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc 2018) Cho hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với Ox là

A. $4x + y - 15 = 0$. **B.** $9x + 4y + 3 = 0$. **C.** $9x + 8y + 3 = 0$. **D.** $4x + y + 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 44.(THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh 2018) Cho đồ thị (C): $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là

A. $4x + 3y - 2 = 0$. **B.** $4x - 3y - 2 = 0$. **C.** $4x + 3y + 2 = 0$. **D.** $4x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 45.(THPT Hà Huy Tập 2018) Cho đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2017$. Khi đó x_1+x_2 bằng

A. -1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{-4}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 46.(THPT Chuyên Quốc Học-Huế 2018) Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3x+1$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y=3x+2018$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 47.(THPT Hoài Ân-Hải Phòng 2018) Tìm số tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+10$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 48.(THPT Ninh Giang Hải Dương 2018) Cho hàm số: $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: y=x+1$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 49.(Sở GD & ĐT Đà Nẵng 2018) Cho hàm số $y=-x^3+4x^2+2x-3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=7x-5$

A. $y=7x-\dfrac{499}{27}$. **B.** $y=7x-5$. **C.** $y=7x-\dfrac{131}{27}$. **D.** $y=7x+\dfrac{131}{27}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 50.(THPT Phan Đăng Lưu-Huế 2018) Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}x-5$ và tiếp điểm có hoành độ dương.

A. $y=-3x+10$. **B.** $y=-3x+2$. **C.** $y=-3x+6$. **D.** $y=-3x-2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 51.(THPT Thanh Miện 2018) Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$. **D.** $M(-2;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 52.(THPT Kim Liên 2018) Cho hàm số $y=-x^3+2x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y=x$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 53.(THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa 2018) Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ tại $x=2$ và thỏa mãn $k_1=k_2=2k_3\neq 0$ khi đó

A. $f(2)<\frac{1}{2}$. **B.** $f(2)\leq\frac{1}{2}$. **C.** $f(2)\geq\frac{1}{2}$. **D.** $f(2)>\frac{1}{2}$.

Lời giải

.....

Câu 54.(THPT Hồng Bàng 2018) Cho đường cong $(C): y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ và đường thẳng $d: 3x - y + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng tiếp xúc với (C) và song song với d ?

A. $y = 3x + \frac{268}{27}$. **B.** $y = 3x + 4$. **C.** $81x - 27y + 32 = 0$. **D.** $81x - 27y + 140 = 0$.

Lời giải

Câu 55.(THPT Chuyên Lương Thế Vinh 2017) Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. **C.** $x = \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Câu 56.(Toán Học Tuổi Trẻ 2018) Trên đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x + y = 1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Câu 57.(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2018). Cho hàm số $y=x^3-3x^2+6x+5$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y=3x+9$. **B.** $y=3x+3$. **C.** $y=3x+12$. **D.** $y=3x+6$.

Lời giải

Câu 58. Cho hàm số $y=2x^3+3x^2-4x+5$ có đồ thị là (C). Trong số các tiếp tuyến của (C), có một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng:

A. $-3,5$. **B.** $-5,5$. **C.** $-7,5$. **D.** $-9,5$.

Lời giải

Câu 59.(THPT Hồng Bàng 2018) Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C):y=2x^3-6x^2+3$ có hệ số góc nhỏ nhất là

A. $6x+y-5=0$. **B.** $6x+y+5=0$. **C.** $6x-y+3=0$. **D.** $6x+y-7=0$.

Lời giải

Câu 60.(Sở GD & ĐT Bình Thuận 2018) Cho hàm số $y=x^3-6x^2+x+1$ có đồ thị (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y=16x-19$. **B.** $y=-11x+9$. **C.** $y=-8x+5$. **D.** $y=37x+87$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 61. Gọi d là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-4x^2+9x-11$. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $M\left(-5;\frac{2}{3}\right)$. **B.** $P\left(5;-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $N\left(2;-\frac{5}{3}\right)$. **D.** $Q\left(-2;\frac{5}{3}\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 62.(Trường BDVH218LTT 2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có hệ số góc nhỏ nhất là đường thẳng

A. $y=0$. **B.** $y=-3x-2$. **C.** $y=x$. **D.** $y=-3x+2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 63.(THPT Chuyên ĐH Vinh 2018) Cho hàm số $y=-x^3+mx^2+mx+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của (C) đi qua gốc tọa độ O?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.....

Câu 64.(THPT Đức Thọ Hà Tĩnh 2018) Cho hàm số $y=\dfrac{x+b}{ax-2}$ $(ab\neq -2)$. Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;-2)$ song song với đường thẳng $d:3x+y-4=0$. Khi đó giá trị của $a-3b$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Câu 65. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H). Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tính tổng $S=x_1+x_2$.

A. $S=0$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Câu 66.(THPT Hồng Lĩnh 2018) Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB=4\sqrt{2}$. Tính $S=3x_A-5x_B$

A. $S=-16$. **B.** $S=16$. **C.** $S=15$. **D.** $S=-9$.

Lời giải

Câu 67. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H). Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tính độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB.

A. $AB_{\min}=3\sqrt{2}$. **B.** $AB_{\min}=\sqrt{3}$. **C.** $AB_{\min}=\sqrt{6}$. **D.** $AB_{\min}=2\sqrt{6}$.

Lời giải

Câu 68. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$, có đồ thị (C). Tìm tập hợp tất cả giá trị thực của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại điểm $x_0=-\dfrac{b}{3a}$ có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $a<0$. **B.** $a>0$. **C.** $-1<a<0$. **D.** $0<a<1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 69. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$, có đồ thị (C). Tìm điều kiện của $a,\ b,\ c$ để mọi tiếp tuyến của (C) đều có hệ số góc âm.

A. $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 70. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$, có đồ thị (C). Gọi $A\left(a;y(a)\right)$, $B\left(b;y(b)\right)$ là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại $A,\ B$ có cùng hệ số góc. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 71. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2-bx}{x-2}$ đi qua điểm $A\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại gốc tọa độ có hệ số góc bằng -3. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4a-b=1$. **B.** $a-4b=1$. **C.** $4a-b=0$. **D.** $a-4b=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 72. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ với $x_A>x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến tại A, B có cùng hệ số góc k. Hỏi đường thẳng đi qua hai điểm A và B là đường thẳng nào dưới đây ?

A. $y=\frac{1}{3}(6-k)x+1$. **B.** $y=\frac{1}{3}(k-6)x-1$. **C.** $y=\frac{1}{3}(6-k)x-1$. **D.** $y=\frac{1}{3}(k-6)x+1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 73. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3$ có đồ thị (C). Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B sao cho tiếp tuyến tại A, B có cùng hệ số góc k và ba điểm O, A, B thẳng hàng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $-3<k<0$. **B.** $0<k<3$. **C.** $8<k<12$. **D.** $4<k<8$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 74. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ với $x_A>x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB=6\sqrt{37}$. Tính $S=2x_A-3x_B$.

A. $S=15$. **B.** $S=90$. **C.** $S=-15$. **D.** $S=-90$.

Lời giải

Câu 75.(Sở GD & ĐT Bắc Ninh 2018) Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+m-2$ có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox. Tìm tổng các phần tử của S.

A. -2. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 3.

Lời giải

Dạng 3. Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y=f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A;y_A)$.

1. Phương pháp.

Cách 1.

Bước 1. Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A;y_A)$ hệ số góc k có dạng $d: y=k(x-x_A)+y_A$ (*)

Bước 2. d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Bước 3. Thay (2) vào (1) ta được: $\boxed{f(x)=f'(x)(x-x_A)+y_A}$, giải phương trình này ta tìm được các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$. Thay vào (2) ta tìm được k từ đó suy ra phương trình tiếp tuyến.

Cách 2.

Bước 1. Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k=y'(x_0)=f'(x_0)$ theo x_0.

Bước 2. Phương trình tiếp tuyến có dạng: $d: y=y'(x_0).(x-x_0)+y_0$ (**).

Do điểm $A(x_A;y_A)\in d$ nên $y_A=y'(x_0).(x_A-x_0)+y_0$ giải phương trình này ta tìm được x_0.

Bước 3. Thế x_0 vào (**) ta được tiếp tuyến cần tìm.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 20. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

1). $y=\frac{x^3}{3}+x^2+3x-1$ đi qua điểm $A\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

2). $y=-x^4+4x^2-3$ đi qua điểm cực tiểu của đồ thị.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 21. Cho hàm số $(C): y=-4x^3+3x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;2)$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(-6;5)$ của đồ thị.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 23. Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ (1).
Viết phương trình tiếp tuyến của (1), biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$.

Lời giải.

Bài tập 24. Cho hàm số $y=2x^4-4x^2-1$ có đồ thị là (C).

1). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với $(d):x-48y+1=0$.

2). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(1;-3)$.

3). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Bài tập 25. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x-2$ tại điểm M, biết M cùng 2 điểm cực trị của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

Lời giải.

Bài tập 26. Tìm $m\in\mathbb{R}$, để tiếp tuyến của đồ thị hàm số : $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{5}$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài tập 27. Cho hàm số $y=-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x-2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

1). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

2). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(2;9)$.

3). Gọi M,N là hai điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 ($x_1\neq x_2$), tìm hệ thức giữa x_1, x_2 sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M,N song song với nhau, khi đó chứng minh rằng đường thẳng M_1M_2 đi qua một điểm cố định .

Lời giải.

3.Câu hỏi trắc nghiệm .

Câu 76. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=4x^3-6x^2+1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$.

A. $y=24x+15.$

B. $y=\frac{15}{4}x+\frac{21}{4}.$

C. $y=24x+15;\ y=\frac{15}{4}x-\frac{21}{4}.$

D. $y=24x+33.$

Lời giải

Câu 77. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}-x+1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(2;-1)$.

A. $y=-x+1;\ y=x-3$.
B. $y=-x+3;\ y=x+1$.
C. $y=-x-3;\ y=x-1$.
D. $y=-x-1;\ y=x+3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 78. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C), biết d đi qua điểm $A(4;-1)$. Gọi M là tiếp điểm của d và (C), tọa độ điểm M là:

A. $M(2;5),\ M(0;-1)$.
B. $M(2;5),\ M(-2;1)$.
C. $M(0;-1),\ M(-2;1)$.
D. $M\left(-1;\frac{3}{2}\right),\ M(-2;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 79.(THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;0)$?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 80.(Sở GD & ĐT Sóc Trăng 2018) Từ điểm $M(-1;-9)$ có thể vẽ được bao nhiêu tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y=4x^3-6x^2+1$

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 81.(THPT Nguyễn Khuyến 2018) Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-1}(C)$ đi qua điểm $A(9;0)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

A. $-\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{9}{64}$. **D.** $-\dfrac{9}{64}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 4. Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích $S_{\Delta OAB}$ cho trước.

1. Phương pháp.

① Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o.

② Đề cho $\left[\begin{array}{ll} \Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với } Ox \text{ một góc } 45^o \text{ và} & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = 2S & (ii) \end{array}\right.$

③ Giải (i) hoặc $(ii) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 28. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 29. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ (C). Tìm điểm $M \in (C)$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 30. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\frac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến này cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa: $OA=4OB$?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 31. Tìm các điểm trên $(C): y=\frac{2x-3}{x+1}$, sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{18}{5}$ $(đvdt)$?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 32. Tìm tọa độ điểm $M \in (C): y=\frac{2x-1}{x+1}$, sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất ?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 33 Tìm $M \in (C): y = x^3 - 3x + 2$ để tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt đồ thị (C) tại điểm thức hai là N thỏa mãn $|x_M - x_N| = 6$?

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.Câu hỏi trắc nghiệm .

Câu 82.(THPT Lục Ngạn Bắc Ninh2018) Cho đồ thị (C): $y = \dfrac{x+2}{x-1}$, tiếp tuyến với đồ thị (C) tại một điểm bất kì thuộc (C) luôn tạo với hai đường $x-1=0$ và $y-1=0$ một tam giác có diện tích không đổi. Diện tích đó bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 83.(THPT Kinh Môn Hải Dương 2018) Gọi d là tiếp tuyến của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3. Khi đó d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là

A. $S = \dfrac{169}{6}$. **B.** $S = \dfrac{121}{6}$. **C.** $S = \dfrac{25}{6}$. **D.** $S = \dfrac{49}{6}$.

Lời giải

Câu 84.(THPT Yên Định Thanh Hóa 2018) Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}(H)$.Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (H), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

A. $y=-x-2$. **B.** $y=-x+1$.

C. $y=-x+2$. **D.** $y=-x-2$ và $y=-x-2$.

Lời giải

Câu 85.(THPT Chuyên KHTN 2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục tung và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân là

A. $y=-x-2$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Lời giải

Câu 86. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H). Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B có cùng hệ số góc k. Biết diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $k<-9$. **B.** $-9\le k<-6$. **C.** $-6\le k<-3$. **D.** $-3\le k<0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 5. Tìm những điểm trên đường thẳng $d:ax+by+c=0$ mà từ đó vẽ được $1,2,3,\ldots,n$ tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C):y=f(x)$

1. Phương pháp.

① Gọi $M(x_M;y_M)\in d:ax+by+c=0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

② PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta:y=k(x-x_M)+y_M$.

③ Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (i)\\ f'(x)=k & (ii)\end{cases}$

④ Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x)=f'(x).(x-x_M)+y_M$ (iii)

Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M số nghiệm x của (iii).

Nhận xét:

★ Nếu hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1\Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1$.

★ Nếu hai tiếp tuyến đó song song $\Leftrightarrow k_1=k_2\Leftrightarrow y'(x_1)=y'(x_2)$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 34. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Tìm trên đường thẳng $y=-2$ những điểm mà từ đó kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 87. Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$ đi qua $A(3;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: y=2x-4$.

A. $(a;b)=(2;4)$; $(a;b)=(10;28)$.

B. $(a;b)=(2;-4)$; $(a;b)=(10;-28)$.

C. $(a;b)=(-2;4)$; $(a;b)=(-10;28)$.

D. $(a;b)=(-2;-4)$; $(a;b)=(-10;-28)$.

Lời giải

.....

.....

Câu 88.(Sở GD & ĐT Gia Lai 2018) Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;2)$. Tìm tập hợp S là tập tất cả các giá trị thực của m để có ba tiếp tuyến của (C) đi qua A.

A. $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.

B. $S=(-\infty;-2)\cup\left(\frac{5}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.

D. $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{3};3\right)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 89.(THPT Hai Bà Trưng 2018) Trên đường thẳng $y=2x+1$ có bao nhiêu điểm kẻ được đến đồ thị (ξ) của hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 90.(THPT Chuyên Hạ Long 2018) Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+6x^2+2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;2)$. Gọi S là tập các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng các phần tử của S là

A. $\frac{12}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $\frac{23}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 91.(ĐHQG TPHCM 2018) Cho đồ thị $(C): y=x^3-3x^2-9x+10$ và điểm $A(m;-10)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để có đúng 2 tiếp tuyến của (C) qua A. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 92.(THPT Hồng Lĩnh Ha Tĩnh 2018) Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ có đồ thị (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng nào dưới đây luôn kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đến đồ thị (C)

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Câu 93.(THPT Chuyên Bắc Ninh 2018) Cho hàm số $y=f(x)=x^3+6x^2+9x+3\,(C)$. Tồn tại hai tiếp tuyến của (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA=2017.OB$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn yêu cầu bài toán?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Câu 94.(Đề tham khảo BGD năm 2018) Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Câu 95.(Sở GD & ĐT Hà Nội 2018) Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d: y=9x-14$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C).

A. 3 điểm. **B.** 4 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** 1 điểm.

Lời giải

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để từ điểm $A\left(\frac{2}{3};0\right)$ kẻ đến đồ thị hàm số $y=\frac{5}{6}x^3+mx-\frac{2m}{3}$ hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

A. $m=\frac{1}{2};\ m=2$. **B.** $m=-\frac{1}{2};\ m=-2$. **C.** $m=\frac{1}{2};\ m=-2$. **D.** $m=-\frac{1}{2};\ m=2$.

Lời giải

Câu 97.(THPT Phan Châu Trinh 2018) Cho hàm số $y=x^3+3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;0)$ sao cho từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C), trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng.

A. $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $m\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 98.(THPT Chuyên Bắc Ninh 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị (H) của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $P=k_1^{2018}+k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất, với k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B của đồ thị (H).

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Câu 99.(THPT Kiến An Hải Phòng 2018) Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+1$, M là điểm di động trên (C); Mt, Mz là các đường thẳng đi qua M sao cho Mt song song với trục tung đồng thời tiếp tuyến tại M là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt, Mz. Khi M di chuyển trên (C) thì Mz luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $M_0\left(-1;\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $M_0\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $M_0(-1;1)$. **D.** $M_0(-1;0)$.

Lời giải