

MỤC LỤC

PHẦN I ĐẠI SỐ

5

CHƯƠNG 1 MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

7

1 MỆNH ĐỀ

7

A Tóm tắt lý thuyết

7

B Các dạng toán và ví dụ

9

Dạng 1.1. Xác định mệnh đề. Tính đúng sai của mệnh đề

9

Dạng 1.2. Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề

10

Dạng 1.3. Phát biểu định lý dạng điều kiện cần, điều kiện đủ

10

C Câu hỏi trắc nghiệm khách quan

17

2 TẬP HỢP

21

A Tóm tắt lý thuyết

21

B Các dạng toán và ví dụ

21

Dạng 2.1. Cách biểu diễn tập hợp

21

Dạng 2.2. Tập con - hai tập bằng nhau

22

Dạng 2.3. Các phép toán trên tập hợp

24

Dạng 2.4. Tập con của tập số thực

26

C Câu hỏi trắc nghiệm khách quan

30

CHƯƠNG 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

41

1 HÀM SỐ

41

A Tóm tắt lý thuyết

41

B Các dạng toán và ví dụ

42

Dạng 1.1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

42

Dạng 1.2. Đồ thị hàm số

42

Dạng 1.3. Tìm tập xác định của hàm số

43

Dạng 1.4. Sự biến thiên của hàm số

46

Dạng 1.5. Hàm số chẵn - Hàm số lẻ

47

C	Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	51
2	HÀM SỐ BẬC NHẤT	64
A	Tóm tắt lý thuyết	64
B	Các dạng toán và ví dụ	65
	Dạng 2.1. Xét tính đồng biến, nghịch biến	65
	Dạng 2.2. Đồ thị hàm số $y = ax + b$	65
	Dạng 2.3. Đồ thị hàm số $y = ax + b $	67
C	Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	68
3	HÀM SỐ BẬC HAI	75
A	Tóm tắt lý thuyết	75
B	Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	78
CHƯƠNG 3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH		87
1	ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH	87
A	Tóm tắt lý thuyết	87
B	Phương pháp giải	88
C	Bài Tập Tự Luyện	89
D	Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	96
2	Phương trình quy về phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai	107
A	Các dạng toán thường gặp - Ví dụ - Bài tập rèn luyện	107
	Dạng 2.1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn	107
	Dạng 2.2. Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn	109
	Dạng 2.3. Định lí Vi-ét	112
	Dạng 2.4. Phương trình vô tỷ	114
B	Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	123
3	HỆ PHƯƠNG TRÌNH	139
A	Các dạng toán và ví dụ	139
	Dạng 3.1. Phương pháp thế	139
	Dạng 3.2. Hệ phương trình đối xứng loại 1	140

Dạng 3.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2	142
Dạng 3.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP	144
B Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	147
Dạng 3.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2	154
Dạng 3.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP	156

CHƯƠNG 4 BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH 159

1 BẤT ĐẲNG THỨC	159
A Tóm tắt lý thuyết	159
B Bài tập tự luận	159
C Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	160

PHẦN II HÌNH HỌC 165

CHƯƠNG 5 VEC-TƠ 167

1 VEC-TƠ	167
A Tóm tắt lý thuyết	167
B Các ví dụ	167
C Bài tập tự luận	169
D Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	172
2 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ	179
A Tóm tắt lý thuyết	179
B Các dạng toán và ví dụ	179
Dạng 2.1. Chứng minh đẳng thức vectơ	179
Dạng 2.2. Tính độ dài của vectơ tổng	181
C Bài tập tự luận	181
D Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	184
3 TÍCH CỦA VEC-TƠ VỚI MỘT SỐ	190
A Tóm tắt lý thuyết	190
B Các dạng toán và ví dụ	190
Dạng 3.1. Chứng minh đẳng thức vec-tơ	190

Dạng 3.2. Xác định điểm thỏa điều kiện cho trước	191
Dạng 3.3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng	191
C Bài tập tự luận	193
D Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	198

CHƯƠNG 6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ 205

1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC	205
A Tóm tắt lý thuyết	205
B Ví dụ	206
2 TÍCH VÔ HƯỚNG	207
A Tóm tắt lý thuyết	207
B Các dạng toán	207
Dạng 2.1. Tính tích vô hướng và tính góc	207
Dạng 2.2. Chứng minh vuông góc	208
Dạng 2.3. Các điểm đặc biệt trong tam giác	209
C Bài tập tự luận	211
D Câu hỏi trắc nghiệm khách quan	213

Phần I

ĐẠI SỐ

BÀI 1. MỆNH ĐỀ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mệnh đề

Mệnh đề là một khẳng định hoặc là **đúng** hoặc là **sai** và không thể vừa đúng vừa sai.

VÍ DỤ 1.

.....
.....
.....

2. Mệnh đề chứa biến

Mệnh đề chứa biến là một câu chứa biến, với mỗi giá trị của biến ta được một mệnh đề.

VÍ DỤ 2.

.....
.....
.....

3. Phủ định của một mệnh đề

Phủ định của mệnh đề P ký hiệu là $\overline{P}$ là một mệnh đề thỏa mãn tính chất

P	$\overline{P}$
Đúng	Sai
Sai	Đúng

VÍ DỤ 3.

.....
.....
.....

Để phủ định mệnh đề P , thông thường ta thêm “không phải” hoặc “không” vào những vị trí phù hợp trong mệnh đề P để có câu tròn ý.

VÍ DỤ 4.

.....
.....
.....

4. Mệnh đề kéo theo

Mệnh đề “Nếu P thì Q ” gọi là mệnh đề kéo theo, ký hiệu $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng đồng thời Q sai.

Tóm tắt:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Đúng	Sai	Sai
Sai	Đúng	Đúng
Sai	Sai	Đúng
Đúng	Đúng	Đúng

VÍ DỤ 5. — Mệnh đề “ $-10 < -1 \Rightarrow (-10)^2 < (-1)^2$ ” là mệnh đề sai.

— Mệnh đề “ $\sqrt{3} < 2 \Rightarrow 3 < 4$ ” là mệnh đề đúng.

 Định lý trong toán học là mệnh đề **đúng** có dạng $P \Rightarrow Q$.

— P : gọi là giả thiết (hay P là điều kiện đủ để có Q).

— Q : gọi là kết luận (hay Q là điều kiện cần để có P).

VÍ DỤ 6.

.....

5. Mệnh đề đảo - Hai mệnh đề tương đương

Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

 Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng chưa hẳn là một mệnh đề đúng.

Nếu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ **đều đúng** thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương.

Ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

Tóm tắt:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Đúng	Đúng	Đúng
Sai	Sai	Đúng
Sai	Đúng	Sai
Đúng	Sai	Sai

Cách phát biểu khác: + P khi và chỉ khi Q .
 + P là điều kiện cần và đủ để có Q .
 + Q là điều kiện cần và đủ để có P .

VÍ DỤ 7. Tam giác ABC cân có một góc 60° là **điều kiện cần và đủ** để tam giác ABC đều.

VÍ DỤ 8. Tam giác ABC là tam giác vuông **khi và chỉ khi** có một góc bằng tổng hai góc còn lại.

VÍ DỤ 9.

.....

6. Ký hiệu $\forall, \exists, \exists!$

Ký hiệu $\forall$: đọc là với mọi; ký hiệu $\exists$: đọc là tồn tại; ký hiệu $\exists!$: đọc là tồn tại duy nhất.

Xét câu “Bình phương của mọi số thực đều lớn hơn hoặc bằng 0” là một mệnh đề.

Ta viết: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ hay $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

VÍ DỤ 10.

Câu	Mệnh đề	Đọc là	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
1	$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > 1$			
2		Có một số nguyên nhỏ hơn 0		
3	$\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = x$			
4		Có một số tự nhiên n mà $2n + 1 = 0$		
5	$\exists! x \in \mathbb{Z} : x < 1$			

7. Phủ định của mệnh đề với mọi, tồn tại

Mệnh đề $P : \forall x \in X, T(x)$ có mệnh đề phủ định là $\exists x \in X, \overline{T(x)}$.

Mệnh đề $P : \exists x \in X, T(x)$ có mệnh đề phủ định là $\forall x \in X, \overline{T(x)}$.

 — Phủ định của “ $a < b$ ” là “ $a \geq b$ ”.

— Phủ định của “ $a = b$ ” là “ $a \neq b$ ”.

— Phủ định của “ $a > b$ ” là “ $a \leq b$ ”.

— Phủ định của “ a chia hết cho b ” là “ a không chia hết cho b ”.

VÍ DỤ 11. $P : \exists n \in \mathbb{Z}, n < 0$ phủ định của P là $\overline{P} : \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.

VÍ DỤ 12.

.....

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

DẠNG 1.1. Xác định mệnh đề. Tính đúng sai của mệnh đề

Căn cứ trên định nghĩa mệnh đề và tính đúng sai của chúng. Lưu ý rằng:

— $P, \overline{P}$ không cùng tính đúng sai.

— $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng, Q sai.

— $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q đều đúng hay đều sai.

— $\forall x \in X, P(x)$ đúng khi $P(x_0)$ đúng với mọi $x_0 \in X$.

— $\exists x \in X, P(x)$ đúng khi có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng.

VÍ DỤ 13. Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay sai?

① Số 1 là số nguyên tố.

② Hà Nội là thủ đô nước nào?

③ Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

④ Hình học là môn học khó thật!

⑤ $x + 4$ là một số âm.

⑥ Nếu n là số chẵn thì n chia hết cho 4.

⑦ Nếu n chia hết cho 4 thì n là số chẵn.

⑧ n là số chẵn nếu và chỉ nếu n^2 chia hết cho 4.

⑨ $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không là bội của 3.

⑩ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

Lời giải.

a) “Số 1 là số nguyên tố” là một mệnh đề sai vì số nguyên tố là số lớn hơn 1.

b) “Hà Nội là thủ đô nước nào?” không phải là mệnh đề đây là câu hỏi.

c) “Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.” là mệnh đề đúng.

d) “Hình học là môn học khó thật!” không phải là mệnh đề vì đây là câu cảm thán.

e) “ $x + 4$ là một số âm.” là mệnh đề chứa biến.

f) “Nếu n là số chẵn thì n chia hết cho 4.” là mệnh đề sai vì $n = 2$ là số chẵn nhưng không chia hết cho 4.

g) “Nếu n chia hết cho 4 thì n là số chẵn.” là mệnh đề đúng.

h) “ n là số chẵn nếu và chỉ nếu n^2 chia hết cho 4.” là mệnh đề đúng.

- i) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không là bội của 3.” là mệnh đề sai vì $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ chia hết cho 3.
- j) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.” là mệnh đề đúng vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

☐

☐ DẠNG 1.2. Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề

- Mệnh đề phủ định của P là “không phải P ”.
- Mệnh đề phủ định của “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Mệnh đề phủ định của “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

VÍ DỤ 14. Tìm mệnh đề đảo của mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo đúng hay sai: “Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau”.

Lời giải.

Mệnh đề đã cho có dạng $P \Rightarrow Q$ trong đó P là “hai góc đối đỉnh”, Q là “hai góc bằng nhau”. Vậy mệnh đề đảo là “Nếu hai góc bằng nhau thì chúng đối đỉnh”. Mệnh đề này sai.

☐

VÍ DỤ 15. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai?

- a) $P: \forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \geq 0$.
- b) $Q: \text{“Có một tam giác không có góc nào lớn hơn } 60^\circ\text{”}.$

Lời giải.

- a) Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$: “ $\exists x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 < 0$ ”. Đây là mệnh đề sai.
- b) Mệnh đề phủ định của Q là $\overline{Q}$: “Mọi tam giác luôn có một góc lớn hơn 60° ”. Đây là mệnh đề sai vì tam giác đều không có góc lớn hơn 60° ”.

☐

VÍ DỤ 16. Phát biểu thành lời và phủ định các mệnh đề sau.

- $$\textcircled{1} \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0. \qquad \qquad \qquad \textcircled{2} \exists! n \in \mathbb{N}, n^2 + n = 0.$$

Lời giải.

- Bình phương của một số thực là số dương.
Mệnh đề phủ định là “Tồn tại bình phương của một số thực là số không dương”.
- Có một số tự nhiên n mà tích của nó với số liền sau nó bằng 0.
Mệnh đề phủ định là “Với mọi số tự nhiên n mà tích của nó với số liền sau nó khác 0”.

☐

📁 DẠNG 1.3. Phát biểu định lí dạng điều kiện cần, điều kiện đủ

- Một định lý thường có dạng “ $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ”. Xác định $P(x)$, $Q(x)$.
- Lấy $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng, chứng minh $Q(x)$ đúng.
- $P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$ hay $Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$.

VÍ DỤ 17. Sử dụng khái niệm “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” phát biểu các định lí sau.

- a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
b) Nếu $a + b > 0$ thì ít nhất có một số a hay b dương.

Lời giải.

- a) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có diện tích bằng nhau.
Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau.
- b) $a + b > 0$ là điều kiện đủ để ít nhất có một số a hay b dương.
Ít nhất có một số a hay b dương là điều kiện cần để $a + b > 0$.

□

VÍ DỤ 18. Sử dụng khái niệm “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” phát biểu các định lí sau.

- a) Một số có tổng chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và ngược lại.
- b) Một hình bình hành có các đường chéo vuông góc là một hình thoi và ngược lại.
- c) Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi biệt thức của nó dương.

Lời giải.

- a) Một số có tổng chia hết cho 9 là điều kiện cần và đủ để số đó chia hết cho 9.
- b) Một hình bình hành có các đường chéo vuông góc là điều kiện cần và đủ để hình đó là một hình thoi.
- c) Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt là điều kiện cần và đủ để biệt thức của nó dương.

□

Bài 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề? Phát biểu nào là mệnh đề chứa biến?

- a. $2009 + 1 > 2020$.
- b. $2x + 3 = 0$.
- c. $x^2 + 1 > 0$.
- d. Mọi tam giác đều đều là tam giác cân.
- e. Số π có lớn hơn 3 hay không?
- f. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
- g. 3 là một số nguyên tố.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Phát biểu thành lời, xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề dưới đây:

- a. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -10$. c. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$. e. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 5 > 0$.
- b. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 12 \neq -10$. d. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$. f. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 5 > 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến?

- a. $10 < 1$. b. $2 + x > x + 1$. c. $x - y = 1$. d. $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

- a. Không được đi lối này. b. Bây giờ là mấy giờ? c. 7 không là số nguyên tố. d. $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Bài 5. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

- a. Số π có lớn hơn 3 hay không?
 b. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
 c. Mọi tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc nhau.
 d. Phương trình $x^2 + 2020x - 2021 = 0$ vô nghiệm.

Bài 6. Tìm hai giá trị thực của x để từ mỗi câu sau ta được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

- a. $x^2 < x$. b. $x = 5x$. c. $x^2 > 0$. d. $x > \frac{1}{x}$.

Bài 7. Cho mệnh đề chứa biến " $P(x) : x > x^3$ ", xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a. $P(1)$. b. $P\left(\frac{1}{3}\right)$. c. $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$. d. $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$.

Bài 8. Dùng các ký hiệu $\forall, \exists$ trước các mệnh đề chứa biến để được mệnh đề đúng

- a. $x + 2 > 3$. e. $x + y > 1$. i. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
 b. $a + 3 = 3 + a$. f. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. j. $(x - 2)^2 = 1$.
 c. 15 là bội của x . g. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$. k. $x^2 - 5x + 6 = 0$.
 d. $(x - 2)^2 > -1$. h. $x^2 > 0$. l. $(x + y)z = xz + yz$.

Bài 9. Lập mệnh đề phủ định và xét tính đúng sai của chúng.

- a. $\exists x \in \mathbb{Q} : 9x^2 - 3 = 0$. c. $\forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \neq x - 1$.
 b. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 8. d. $\forall n \in \mathbb{N} : n > n^2$.

Bài 10. Cho số thực x . Xét các mệnh đề $P : "x^2 = 1"$ và $Q : "x = 1"$

a. Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó.

b. Xét tính đúng sai của hai mệnh đề trên.

c. Chỉ ra một giá trị của x để mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai.

Bài 11. Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và xét tính đúng sai của nó

a. $P : "Tứ giác ABCD$ là hình thoi" và $Q : "Tứ giác ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau".

b. $P : "Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm" và $Q : " \sqrt{(-1)^2 - 3(-1)} > 1"$.$

Bài 12. Lập mệnh đề kéo theo và mệnh đề tương đương của hai mệnh đề sau đây và cho biết tính đúng, sai của chúng. Biết:

$P : "Điểm M$ nằm trên phân giác của góc $Oxy"$.

$Q : "Điểm M$ cách đều hai cạnh $Ox, Oy"$.

Bài 13. Dùng các ký hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a. Có một số nguyên không chia hết cho chính nó.

b. Mọi số thực cộng với số 0 bằng chính nó.

c. Có một số hữu tỉ nhỏ hơn nghịch đảo của nó.

Bài 14. Sử dụng khái niệm "điều kiện cần" hoặc "điều kiện đủ" phát biểu các mệnh đề sau:

a. Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.

b. Số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.

c. Nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$.

d. Nếu $a + b > 0$ thì trong hai số a và b lớn hơn 0.

Bài 15. Phát biểu một "điều kiện đủ"

a. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b. Để tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 16. Xác định tính đúng - sai của các mệnh đề sau:

a. $\forall x \in \mathbb{R} : x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$.

c. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m$ và n là các số lẻ $\Leftrightarrow m^2 + n^2$ là số chẵn.

b. $\forall x \in \mathbb{R} : x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

d. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 17. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau

a. $\exists a \in \mathbb{Q}, a^2 = 2$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

c. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x > y \Leftrightarrow x^3 > y^3$.

d. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 18. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

a) A : “6 là số nguyên tố”.

b) B : “ $(\sqrt{3} - 1)^2$ là số nguyên”;

c) C : “ $\exists n \in \mathbb{N}, n(n + 1)$ là số chính phương”;

d) D : “ $\forall n \in \mathbb{N}, 2n + 1$ là số lẻ”.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 19. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.

A : “ $\exists x \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4” và B : “ $\exists x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho $x + 1$ ”.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 20. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

a) $\overline{A}$: “Phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ có nghiệm”;

b) $\overline{B}$: “Bất phương trình $x^{2013} > 2030$ vô nghiệm”;

c) $\overline{C}$: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$ ”;

d) $\overline{D}$: “ $\exists q \in \mathbb{Q}, 2q^2 - 1 = 0$ ”.

Bài 21. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

a) $A : \forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$;

b) $B : \text{"Tồn tại số thực } a \text{ sao cho } a + \frac{1}{a} \leq 2 \text{"}$.

Bài 22. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và nêu mệnh đề phủ định của nó

a) $P(x) : \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 3$.

b) $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n + 3 \text{ là một số nguyên tố}$.

c) $P(x) : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 > 0$.

d) $P(x) : \forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 2x + 2 \geq 0$.

Bài 23. Hãy phát biểu mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$, $\overline{Q} \Rightarrow P$ và xét đúng sai của mệnh đề này.

a) Cho tứ giác $ABCD$ và hai mệnh đề $P : \text{"Tổng hai góc đối của tứ giác lồi bằng } 180^\circ \text{"}$ và $Q : \text{"Tứ giác nội tiếp được đường tròn"}$.

b) $P : \sqrt{2} - \sqrt{3} > -1$ và $Q : (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > (-1)^2$.

Bài 24. Sử dụng khái niệm "điều kiện cần" để phát biểu các định lý sau

a) Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 5.

b) Nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$.

c) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.

Bài 25. Dùng khái niệm "điều kiện cần" để phát biểu các định lý sau

a) Nếu $MA \perp MB$ thì M thuộc đường tròn đường kính AB .

b) $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ là điều kiện đủ để $a^2 + b^2 > 0$.

Bài 26. Sử dụng khái niệm "điều kiện đủ " để phát biểu các định lí sau

- a) Nếu a và b là hai số hữu tỉ thì tổng $a + b$ là số hữu tỉ.
- b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- c) Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 27. Cho định lí “Cho số tự nhiên n , nếu n^5 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5”. Định lí này được viết dưới dạng $P \Rightarrow Q$.

- a) Hãy xác định các mệnh đề P và Q .
- b) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ “điều kiện cần”.
- c) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ “điều kiện đủ”.
- d) Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của định lí trên rồi dùng các thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 28. Sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” để phát biểu định lí sau

- a) Nếu một tứ giác là hình vuông thì nó có bốn cạnh bằng nhau. Có định lí đảo của định lí trên không, vì sao?
- b) Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc. Có định lí đảo của định lí trên không, vì sao?

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 29. Phát biểu các mệnh đề sau với thuật ngữ “điều kiện cần ”, “điều kiện đủ”

- a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- b) Nếu số nguyên dương chia hết cho 6 thì chia hết cho 3.
- c) Nếu hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân.
- d) Nếu tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao thì $AB^2 = BC \cdot BH$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 30. Sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần và đủ ” để phát biểu các định lí sau

- a) Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó bằng 180° .
- b) Tam giác cân khi và chỉ khi có trung tuyến bằng nhau.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 31. Dùng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ " để phát biểu định lí sau

- a) Một tam giác là tam giác cân nếu và chỉ nếu nó có hai góc bằng nhau.
- b) Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 32. Dùng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lý sau

- a) Tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- b) Tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ba góc vuông.
- c) Tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc đối bù nhau.
- d) Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi nó có chữ số tận cùng là số chẵn.

.....

.....

.....

.....

.....

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- A. Số π có phải là số nguyên không?.
- B. Số 4 là một số nguyên tố.
- C. Tam giác đều có 3 góc bằng nhau và bằng 60° phải không?.
- D. $a^2 + b^2 = c^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. 10 chia hết cho 2. B. 2 là một ước số của 10. C. 2 chia hết cho 10. D. 2 và 10 là hai số chẵn.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- A. 15 là số nguyên tố. B. $a = b + c$. C. $x^2 + x = 0$. D. $2n + 1$ chia hết cho 3.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "14 là hợp số" là mệnh đề

- A. 14 là số nguyên tố. B. 14 chia hết cho 2.
- C. 14 không phải là hợp số. D. 14 chia hết cho 7.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. 20 chia hết cho 5. B. 5 chia hết cho 20. C. 20 là bội số của 5. D. 5 chia hết 20.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $5 + 4 < 10$.
- B. $5 + 4 > 10$.
- C. $\sqrt{2} - 1 < 0$.
- D. $5 + 4 \geq 10$.

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong các câu sau, câu nào **không phải** là mệnh đề?

- A. $5 + 2 = 8$.
- B. $-2 \leq 0$.
- C. $4 - \sqrt{17} > 0$.
- D. $5 + x = 2$.

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu “33 là hợp số” thì “15 chia hết cho 25”.
- B. Nếu “7 là số nguyên tố” thì “8 là bội số của 3”.
- C. Nếu “20 là hợp số” thì “24 chia hết cho 6”.
- D. Nếu “ $3 + 9 = 12$ ” thì “ $4 > 7$ ”.

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

- A. Nếu a và b chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .
- B. Nếu hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- C. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.
- D. Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Trong các mệnh đề tương đương sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. n là số nguyên lẻ khi và chỉ khi n^2 là số lẻ.
- B. n chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của n chia hết cho 3.
- C. $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $AC = BD$.
- D. ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $AB = AC$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.
- B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.
- C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$.
- D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow (-2)\sqrt{23} > (-2) \cdot 5$.

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Xét câu $P(n)$: “ n chia hết cho 12”. Với giá trị nào của n thì $P(n)$ là mệnh đề đúng?

- A. 48.
- B. 4.
- C. 3.
- D. 88.

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Với giá trị nào của biến số x sau đây thì mệnh đề chứa biến $P(x)$: “ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ” trở thành một mệnh đề đúng?

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. -2.

Câu 14. Mệnh đề chứa biến: “ $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ ” đúng với giá trị nào của x ?

A. $x = 0$; $x = 2$.B. $x = 0$; $x = 3$.C. $x = 0$; $x = 2$; $x = 3$.D. $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Câu 15. Cho mệnh đề P : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0$ ”, Q : “ $\exists n \in \mathbb{Z}, n = n^2$ ”. Xét tính đúng, sai của hai mệnh đề P, Q .

A. P đúng và Q sai.B. P sai và Q đúng.C. P, Q đều đúng.D. P, Q đều sai.

Câu 16. Với số thực x bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow x \leq \pm 4$.B. $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$.C. $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow x \leq -4, x \geq 4$.D. $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Câu 17. Với số thực x bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x > \sqrt{5}$ hoặc $x < -\sqrt{5}$.B. $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.C. $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x > \pm\sqrt{5}$.D. $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x \geq \sqrt{5}$ hoặc $x \leq -\sqrt{5}$.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$.B. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.C. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3.D. $\exists a \in \mathbb{Q}, a^2 = 2$.

Câu 19. Với giá trị nào của x mệnh đề chứa biến $P(x)$: “ $2x^2 - 1 < 0$ ” là mệnh đề đúng?

A. 0.

B. 5.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 20. Cho mệnh đề $P(x)$: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ ”. Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.C. $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Câu 21. Trong các câu sau, câu nào đúng?

- A. Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 > 0$ ”.
- B. Phủ định của mệnh đề “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4” là mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 4”.
- C. Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \neq x - 1$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 = x - 1$ ”.
- D. Phủ định của mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$ ” là mệnh đề “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n$ ”.

Câu 22. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$: “ $x^2 + 3x + 1 > 0$ với mọi x ” là

- A. Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 > 0$.
- B. Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 \leq 0$.
- C. Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 = 0$.
- D. Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 < 0$.

Câu 23. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$: “ $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$ là số nguyên tố” là

- A. $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$ không là số nguyên tố.
- B. $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$ không là số nguyên tố.
- C. $\forall x \notin \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$ không là số nguyên tố.
- D. $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$ là số thực.

Câu 24. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$: “ $\exists x \in \mathbb{R}: 5x - 3x^2 = 1$ ” là

- A. $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$.
- B. $\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$.
- C. $\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1$.
- D. $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \geq 1$.

Câu 25. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **không phải** là định lí?

- A. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 3 $\Rightarrow x$ chia hết cho 3.
- B. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 3.
- C. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 9 $\Rightarrow x$ chia hết cho 9.
- D. $\forall x \in \mathbb{Z}, x$ chia hết cho 4 và 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Câu 26. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là định lí?

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$.
- B. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.
- C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.
- D. Nếu $a + b$ chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

BÀI 2. TẬP HỢP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Tập hợp (hay còn gọi là **1 tập**) là một khái niệm nguyên thủy, không định nghĩa. Ta hiểu khái niệm tập hợp qua các ví dụ sau

VÍ DỤ 1. — X là **tập hợp** các chữ cái của chữ *MARIE CURIE*.

— Y là **tập hợp** các số tự nhiên nhỏ hơn 7.

Hai tập hợp X và Y trong ví dụ trên được minh họa bởi một đường cong khép kín mà ta gọi là **Biểu đồ Venn**. (Do nhà toán học Jonh Venn người Anh xây dựng năm 1881)



Mỗi tập hợp gồm các **phần tử** cùng có chung một hay một vài tính chất nào đó.

Phần tử a của tập hợp X được kí hiệu $a \in X$, còn được gọi là a thuộc tập hợp X .

Phần tử b không của tập hợp X được kí hiệu $b \notin X$, còn được gọi là b **không thuộc** X .

Trong lí thuyết tập hợp, người ta thừa nhận tập hợp không chứa một phần tử nào cả, tập hợp đó được gọi là **tập hợp rỗng** và kí hiệu là $\emptyset$.

VÍ DỤ 2. Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập hợp rỗng.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

□ DẠNG 2.1. Cách biểu diễn tập hợp

Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Có thể xác định một tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử của chúng ở giữa dấu $\{ \}$.

Ví dụ:

$X = \{0; 5; 10; 15\}$ là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 17 và chia hết cho 5.

$Y = \{1; 2\}$ là tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$Z = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots, 99\}$ là tập hợp 100 số tự nhiên đầu tiên.

Cách 2. Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử trong tập hợp.

Không phải mọi tập hợp đều liệt kê rành mạch được các phần tử theo thứ tự nào đó. Chẳng hạn, **tập hợp các số tự từ 1 đến 2** là không liệt kê được. (Số thực đứng sau 1 là số nào? Không biết được). Khi đó, chúng có thể được mô tả bằng các tính chất đặc trưng ở giữa dấu $\{ \}$, mà nhờ chúng ta có thể xác định một đối tượng nào đó có thuộc tập hợp này hay không

Ví dụ:

A là tập hợp các số thực từ 1 đến 2 được mô tả $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

⚠ Chú ý 1.

☑ $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên.

☑ $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ.

☑ $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên.

☑ $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.

⚠ Chú ý 2. Tập hợp $\{\emptyset\}$ là tập hợp không rỗng.

VÍ DỤ 3. Xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê

① $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x + 4)(2x^2 - 5x) = 0\}$.

② $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x^2 \leq 25\}$.

③ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n^2 - n - 3 \text{ với } n \in \mathbb{N}, n < 3\}$.

④ $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 < |x| \leq 6\}$.

Các cách gọi:

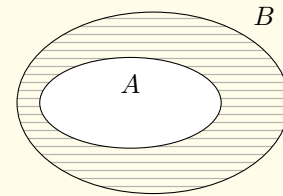
- A là tập con của tập B .
- Tập A bị chứa trong tập B .
- Tập B chứa tập A và được kí hiệu $B \supset A$.

⚠ Chú ý 1

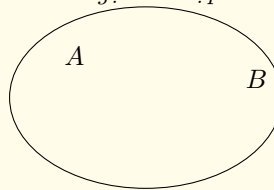
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (Tính bắc cầu).
- Với mọi tập A ta đều có $A \subset A$.
- Với mọi tập A ta đều có $\emptyset \subset A$.

⚠ Chú ý 2. $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Cho hai tập hợp A và B . Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta gọi hai tập A và B bằng nhau, kí hiệu $A = B$.



$$A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$



Bài 3. Xác định các tập hợp con của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 2)(x^2 - x) = 0\}$

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 10 < 0\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = x\}$. Tập nào là con tập nào? Các tập nào bằng nhau?

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $\{1; 3\} \subset X$ và $X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 6. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $X \subset \{-3; -2; 0; 1; 3\}$ và $X \subset \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 7. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - x)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 10 = 0\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$. Tập nào là con tập nào? Các tập nào bằng nhau?

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Cho ba tập hợp $A = \{1; 2; -1\}$, $B = \{2; -1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$. Tập nào là con tập nào? Các tập nào bằng nhau?

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 5. Cho hai tập hợp A và B . Tìm các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$ với $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 5\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{3; 4; 5; 6\}$ và $B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. Do đó

$$\text{— } A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

$$\text{— } A \cap B = \{3; 4\}.$$

$$\text{— } A \setminus B = \{5; 6\}.$$

$$\text{— } B \setminus A = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

□

VÍ DỤ 6. Cho hai tập hợp A và B . Tìm các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$ với $A = \{-1; 2; 3; 7\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x-3) = 0\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{-1; 2; 3; 7\}$ và $B = \{2; 3\}$. Do đó

$$\text{— } A \cup B = \{-1; 2; 3; 7\}.$$

$$\text{— } A \cap B = \{2; 3\}.$$

$$\text{— } A \setminus B = \{-1; 7\}.$$

$$\text{— } B \setminus A = \emptyset.$$

□

Bài 11. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 3; 5\}$ và $B = \{-1; 0; 2; 3\}$. Chứng minh $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

.....

Bài 12. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^3 - 8)(2x^2 - x - 3) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2|x| - 5 \leq 0\}$. Tìm tập hợp $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

.....

Bài 13. Cho ba tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x-5)(x^2+1) < 0\}$ và $C = \left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{2k+12}{k^2+k} \text{ là số nguyên}\right\}$.

Tìm tập hợp $A \cap B \cap C$.

.....

Bài 14. Tìm tất cả các tập X thỏa mãn $\{1; 3\} \cup X = \{0; 1; 2; 3\}$.

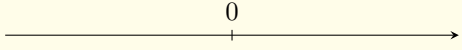
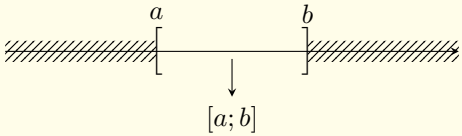
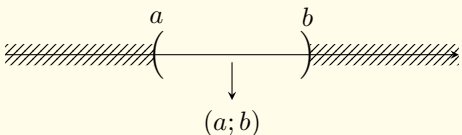
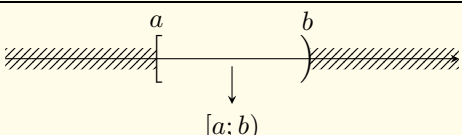
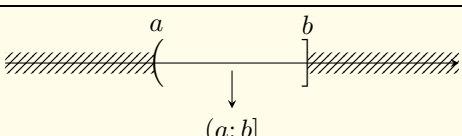
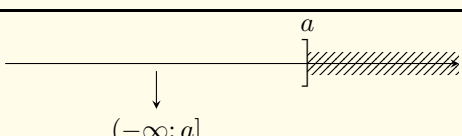
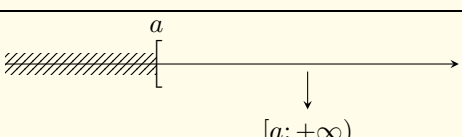
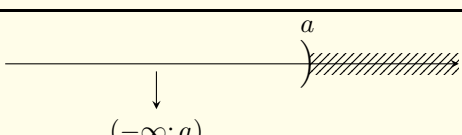
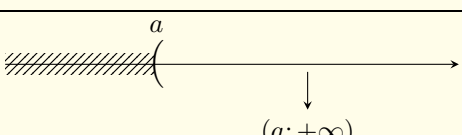
.....

Bài 15. Xác định hai tập hợp A và B biết rằng $A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}$, $B \setminus A = \{2; 10\}$ và $A \cap B = \{3; 6; 9\}$.

.....

Bài 16. Cho tập hợp $A = \{1; 3; 6\}$. Tìm tất cả các tập X thỏa mãn $A \cup X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $A \cap X = \{3\}$.

 DẠNG 2.4. Tập con của tập số thực

Tên gọi	Kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (Phần không bị gạch chéo)
Tập số thực	$(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn	$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng	$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng	$(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng	$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng	$(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

VÍ DỤ 7. Các tập sau là các đoạn, khoảng, nửa khoảng nào? Vẽ hình.

- ① $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 7\}$.
- ② $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 1 \geq 8\}$.

Lời giải.

- ① Ta có $A = (-6; 7)$. Biểu diễn



② Ta có

$$5x + 1 \geq 8 \Leftrightarrow 5x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{5}.$$

Vậy $B = \left[\frac{7}{5}; +\infty\right)$. Biểu diễn



□

VÍ DỤ 8. Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Giải thích.

① $\{-4; 2\} \subset [-4; 2]$.

② $[1; +\infty) = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Lời giải.

- ① Mệnh đề đúng. Thật vậy, vì $-4 \in [-4; 2]$ và $2 \in [-4; 2]$ nên $\{-4; 2\} \subset [-4; 2]$.
 ② Mệnh đề sai. Thật vậy, vì $1,5 \in [1; +\infty)$ nhưng $1,5 \notin \{1; 2; 3; 4; \dots\}$ nên hai tập hợp đã cho không bằng nhau.

□

VÍ DỤ 9. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn trên trục số.

① $(-2; 7) \cap (3; +\infty)$.

② $(-3; 4) \cup \{-3; 4\}$.

Lời giải.

① Ta có $(-2; 7) \cap (3; +\infty) = (3; 7)$. Biểu diễn



② Ta có $(-3; 4) \cup \{-3; 4\} = [-3; 4]$. Biểu diễn



□

VÍ DỤ 10. Xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ và biểu diễn bằng trục số trong các trường hợp sau.

① $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$.

② $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$.

③ $A = (-1; 2018)$, $B = [-2019; 9]$.

④ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2018\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Lời giải.

a) Ta có

— $A \cap B = \{1\}$.

— $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

— $A \setminus B = \{2; 3; 4; 5\}$.

— $B \setminus A = \{-3; -2; -1; 0\}$.

b) Ta có $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

— $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$.

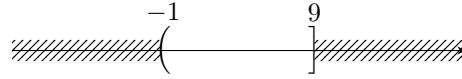
— $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

— $A \setminus B = \{-3; -2; -1\}$.

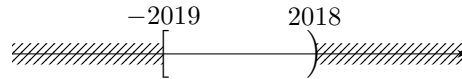
— $B \setminus A = \{4; 5; 6\}$.

c) Ta có

— $A \cap B = (-1; 9]$. Biểu diễn



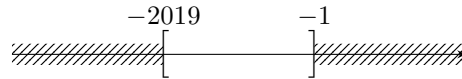
— $A \cup B = [-2019; 2018)$. Biểu diễn



— $A \setminus B = (9; 2018)$. Biểu diễn



— $B \setminus A = [-2019; -1]$. Biểu diễn

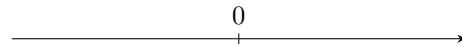


d) Ta có $A = (-\infty; 2018]$ và $B = (0; +\infty)$.

— $A \cap B = (0; 2018]$. Biểu diễn



— $A \cup B = (-\infty; +\infty)$. Biểu diễn



— $A \setminus B = (-\infty; 0]$. Biểu diễn



— $B \setminus A = (2018; +\infty)$. Biểu diễn



□

VÍ DỤ 11. Cho tập hợp $M = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

a) Tìm tất cả tập hợp con có 1 phần tử của tập M .

b) Tìm tất cả tập hợp con có 2 phần tử của tập M .

c) Tập M có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

d) Tập M có tất cả bao nhiêu tập hợp con có ít nhất 1 phần tử?

e) Tập M có tất cả bao nhiêu tập hợp con khác M ?

Lời giải.

- ① Tất cả tập con có 1 phần tử của M là $\{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$.
- ② Tất cả tập con có 2 phần tử của M là $\{-2; -1\}, \{-2; 0\}, \{-2; 1\}, \{-2; 2\}, \{-2; 3\}, \{-2; 4\}, \{-2; 5\}, \{-1; 0\}, \{-1; 1\}, \{-1; 2\}, \{-1; 3\}, \{-1; 4\}, \{-1; 5\}, \{0; 1\}, \{0; 2\}, \{0; 3\}, \{0; 4\}, \{0; 5\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{2; 5\}, \{3; 4\}, \{3; 5\}, \{4; 5\}$.
- ③ Tập hợp M có 8 phần tử. Số tập hợp con của M là $2^8 = 256$.
- ④ Tập con không có phần tử của M là $\emptyset$.
Số tập hợp con có ít nhất 1 phần tử của M là $2^8 - 1 = 255$.
- ⑤ Số tập hợp con khác M là $2^8 - 1 = 255$.

□

Bài 17. Các tập hợp sau là các đoạn, khoảng, nửa khoảng nào? Vẽ hình.

- ① $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x + 1 \leq 3\}$. ② $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 3x - 2 \leq 2\}$.
- ③ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 2x + 3 < 4\}$. ④ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq 2x < 3\}$.
- ⑤ $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 \leq 0\}$. ⑥ $H = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 7 > 4\}$.

Bài 18. Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Giải thích.

- ① $(-1; 3) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. ② $(-2; 2] = [-2; 2)$.
- ③ $\mathbb{N} \subset [0; +\infty)$. ④ $\{-3; 1\} \setminus (-3; 1) = \{-3; 1\}$.

Bài 19. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn trên trục số.

- ① $[-3; 1) \cup (0; 4]$. ② $(-1; 2] \cup [-2; 1)$.

Bài 20. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn trên trục số.

- ① $(-8; 4] \cap [-1; 4]$. ② $(-\infty; 3) \cap [-2; 6)$.
- ③ $[-3; 5] \setminus (-2; 7)$. ④ $[-2; +\infty) \setminus (-4; 5]$.

Bài 21. Cho hai tập $A = [4; 7]$ và $B = (m; 9)$. Tìm số thực m sao cho

- ① $A \cap B = \emptyset$. ② $A \subset B$. ③ $A \setminus B = \emptyset$.

Câu 9. Xác định tập hợp $M = \{1; 3; 9; 27; 81\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của tập hợp

A. $M = \{n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } 1 \leq n \leq 8\}.$

B. $M = \{x \text{ sao cho } x = 3^k; k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq 4\}.$

C. $M = \{n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n = 3^k\}.$

D. $M = \{\text{Có 5 số lẻ}\}.$

Câu 10. Cho tập $M = \{a; b; c; d; e\}$. Hãy chọn câu trả lời đúng trong các câu sau

A. M có 32 tập hợp con.

B. M có 25 tập hợp con.

C. M có 120 tập hợp con.

D. M có 5 tập hợp con.

Câu 11. Cho ba tập hợp $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 5\}$, $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 10\}$, $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 5 = 0\}$. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $Q \subset P \subset M.$

B. $Q \subset M \subset P.$

C. $M \subset Q \subset P.$

D. $M \subset P \subset Q.$

Câu 12. Cho biết x là một phần tử của tập hợp A . Xét các mệnh đề sau

$$(I) : x \in A; (II) : \{x\} \in A; (III) : x \subset A; (IV) : \{x\} \subset A$$

Hỏi trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

A. (I) và (IV).

B. (I) và (III).

C. (I) và (II).

D. (II) và (IV).

Câu 13. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}.$

A. $X = \{0\}.$

B. $X = 0.$

C. $X = \{\emptyset\}.$

D. $X = \emptyset.$

Câu 14. Cho tập $X = \{2; 3; 4\}$. Hỏi tập hợp X có bao nhiêu tập hợp con?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 8.

Câu 15. Tính số các tập con có 2 phần tử của $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$

A. 15.

B. 16.

C. 18.

D. 22.

Câu 16. Tìm các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}.$

A. $X = \{1\}.$

B. $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$

C. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}.$

D. $X = \{0\}.$

.....

Câu 17. Hỏi tập hợp nào là tập rỗng trong các tập hợp sau?

A. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}.$

B. $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}.$

C. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}.$

D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}.$

Câu 18. Cho A là tập tất cả các nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 6 = 0$, B là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 4. Hỏi kết quả nào sau đây là đúng?

A. $B \setminus A = \emptyset.$

B. $A \cap B = A \cup B.$

C. $A \setminus B = \{6\}.$

D. $A \cup B = A.$

Câu 19. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$. Tập hợp nào sau đây **không phải** là tập con của tập A ?

A. $\{12; 3\}.$

B. $\emptyset.$

C. $A.$

D. $\{1; 2; 3\}.$

Câu 20. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2\}$. Tập X có bao nhiêu tập con?

A. 8.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Câu 21. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; a; b\}$. Tập X có bao nhiêu phần tử?

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 22. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 4; 5; 6; 8\}$. Tập hợp $A \cap B$ là

A. $\{5\}.$

B. $\{2\}.$

C. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$

D. $\{2; 5\}.$

Câu 23. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 4; 5; 6; 8\}$. Tập hợp $A \setminus B$ là

A. $\{4; 6; 8\}.$

B. $\{1; 3; 7\}.$

C. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$

D. $\{2; 5\}.$

Câu 24. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\}$. Tập hợp A viết lại dạng liệt kê là

A. $\mathbb{R}.$

B. $\{-2; 2\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}.$

Câu 25. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 > 0\}$. Tập hợp A viết lại dạng liệt kê là

- A. $\emptyset$. B. $[2; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. $[-2; +\infty)$.

Câu 26. Cho tập $A = \{-2; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Mệnh đề nào **sai**?

- A. $A \cap B = \{2\}$. B. $A \cup B = \{2; -2\}$. C. $A \setminus B = \{1; 3; 4\}$. D. $A \cup B = B$.

Câu 27. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; x; y\}$. Xét các mệnh đề sau đây

$$(I) : "3 \in A"; (II) : \{3; 4\} \in A; (III) : \{x; 3; y\} \in A.$$

Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 28. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

- A. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$. B. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$. C. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$. D. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$.

Câu 29. Chọn kết quả **sai** trong các kết quả sau

- A. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$. B. $A \cup B = A \Leftrightarrow A \subset B$.
C. $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. D. $B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Câu 30. Cho các mệnh đề sau. (I) : $\{2; 1; 3\} = \{1; 2; 3\}$; (II) : $\emptyset \subset \emptyset$; (III) : $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (I) và (II) đúng.
C. Chỉ (I) và (III) đúng. D. Cả (I), (II) và (III) đều đúng.

Câu 31. Cho $X = \{7; 2; 8; 4; 9; 12\}$; $Y = \{1; 3; 7; 4\}$. Tập hợp nào sau đây bằng $X \cap Y$?

- A. $\{1; 2; 3; 4; 8; 9; 7; 12\}$. B. $\{2; 8; 9; 12\}$. C. $\{4; 7\}$. D. $\{1; 3\}$.

Câu 32. Cho hai tập hợp $A = \{2; 4; 6; 9\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng tập nào sau đây?

- A. $\{1; 2; 3; 5\}$. B. $\{1; 3; 6; 9\}$. C. $\{6; 9\}$. D. $\emptyset$.

Câu 33. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng

- A. $\{0\}$. B. $\{0; 1\}$. C. $\{1; 2\}$. D. $\{1; 5\}$.

Câu 34. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $B \setminus A$ bằng

- A. $\{5\}$. B. $\{0; 1\}$. C. $\{2; 3; 4\}$. D. $\{5; 6\}$.

Câu 35. Cho hai tập hợp $A = \{1; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5\}$. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

- A. $A \cap B = \{1\}$. B. $A \cap B = \{1; 3\}$. C. $A \cap B = \{1; 5\}$. D. $A \cap B = \{1; 3; 5\}$.

Câu 36. Cho $A = \{1; 2; 3\}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\emptyset \subset A$. B. $1 \in A$. C. $\{1; 2\} \subset A$. D. $2 = A$.

Câu 37. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A. $A \in A$. B. $\emptyset \subset A$. C. $A \subset A$. D. $A \neq \{A\}$.

Câu 38. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$. Các phần tử của tập hợp A là

- A. $A = 0$. B. $A = \{0\}$. C. $A = \emptyset$. D. $A = \{\emptyset\}$.

Câu 39. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0\}$. Các phần tử của tập A là

- A. $A = \{-1; 1\}$. B. $A = \{-1; 1; \sqrt{2}\}$. C. $A = \{-1\}$. D. $A = \{1\}$.

Câu 40. Các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ là

- A. $A = \{0\}$. B. $A = \{1\}$. C. $A = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. D. $A = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

Câu 41. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

- A. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$. B. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$.
C. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 = 0\}$. D. $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 12 = 0\}$.

Câu 42. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào khác rỗng?

A. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}.$

B. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 2 = 0\}.$

C. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^3 - 3)(x^2 + 1) = 0\}.$

D. $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x(x^2 + 3) = 0\}.$

Câu 43. Trong các tập sau, tập hợp nào có đúng một tập hợp con?

A. $\emptyset.$

B. $\{a\}.$

C. $\{\emptyset\}.$

D. $\{a, \emptyset\}.$

Câu 44. Trong các tập sau đây, tập hợp nào có đúng hai tập hợp con?

A. $\{x, y\}.$

B. $\{x\}.$

C. $\{\emptyset, x\}.$

D. $\{\emptyset, x, y\}.$

Câu 45. Cho tập hợp $A = \{2; 5\}$. Tập hợp A có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 46. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Chọn kết quả đúng?

A. $B = \{2; 4\}.$

B. $B = \{-2; 4\}.$

C. $B = \{-4; 4\}.$

D. $B = \{-2; 2\}.$

Câu 47. Cho hai tập hợp $A = \{0; 2; 3; 5\}$ và $B = \{2; 7\}$. Khi đó $A \cap B$ bằng

A. $A \cap B = \{2; 5\}.$

B. $A \cap B = \{2\}.$

C. $A \cap B = \emptyset.$

D. $A \cap B = \{0; 2; 3; 5; 7\}.$

Câu 48. Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật và C là tập hợp các hình vuông. Khi đó

A. $A \cap B = C.$

B. $A \cup B = C.$

C. $A \setminus B = C.$

D. $B \setminus A = C.$

Câu 49. Cách viết nào sau đây không đúng?

A. $1 \subset \mathbb{N}.$

B. $1 \in \mathbb{N}.$

C. $\{1\} \subset \mathbb{N}.$

D. $1 \in \mathbb{N}^*.$

Câu 50. Hỏi tập hợp nào là tập hợp rỗng, trong các tập hợp sau?

A. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}.$

B. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}.$

C. $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}.$

D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}.$

Câu 51. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2\}$. Tập hợp X có bao nhiêu tập con?

A. 8.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

Câu 52. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x^3+4x) = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 53. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; a; b\}$. Số phần tử của tập X là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 54. Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa xếp loại học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?

A. 25.

B. 10.

C. 45.

D. 35.

Câu 55. Một lớp có 45 học sinh. Mỗi em đều đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn bóng đá và bóng chuyền. Có 35 em đăng ký môn bóng đá, 15 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn?

A. 5.

B. 10.

C. 45.

D. 35.

Câu 56. Cho $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ là

A. $\{1; 3; 7\}.$

B. $\{2; 5\}.$

C. $\{4; 6; 8\}.$

D. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$

Câu 57. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\}$. Tập hợp A viết lại dạng liệt kê là

A. $\mathbb{R} \setminus \{2; -2\}.$

B. $\{2; -2\}.$

C. $\mathbb{R}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}.$

Câu 58. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4 > 0\}$. Tập hợp A viết lại dạng liệt kê là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\emptyset$. C. $[-2; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 59. Lớp 10A có 40 học sinh trong đó có 10 bạn giỏi Toán, 15 bạn giỏi Lý, và 22 bạn không giỏi môn học nào trong hai môn Toán, Lý. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học sinh vừa giỏi Toán, vừa giỏi Lý?

- A. 7. B. 25. C. 10. D. 18.

Câu 60. Một lớp học có 25 học sinh học khá các môn tự nhiên, 24 học sinh học khá các môn xã hội 10 học sinh học khá cả môn tự nhiên lẫn môn xã hội, đặc biệt vẫn còn 3 học sinh chưa học khá cả hai nhóm môn ấy. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá đúng một nhóm môn (tự nhiên hoặc xã hội).

- A. 39. B. 26. C. 29. D. 36.

Câu 61. Cho tập $A = -2; 1; 2; 3; 4$; $B = x \in \mathbb{N} : x^2 - 4 = 0$. Mệnh đề nào đúng?

- A. $A \cap B = \{2\}$. B. $A \cap B = \{-2; 2\}$. C. $A \setminus \{1; 3; 4\}$. D. $A \cup B = B$.

Câu 62. Số tập con của tập hợp có n ($n \geq 1; n \in \mathbb{N}$) phần tử là

- A. 2^n . B. 2^{n+1} . C. 2^{n-1} . D. 2^{n+2} .

Câu 63. Cho hai tập $A = \{x \in \mathbb{Z} : (x+3)(x^2-3) = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2+6=0\}$ khi đó

- A. $B \setminus A = B$. B. $A \subset B$. C. $A \setminus B = B$. D. $A \cap B = A$.

Câu 64. Cho hai tập $A = [-1; 3]$; $B = [a; a+3]$. Với giá trị nào của a thì $A \cap B = \emptyset$?

- A. $\begin{cases} a \geq 3 \\ a < -4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 3 \\ a < -4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a \geq 3 \\ a \leq -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a > 3 \\ a \leq -4 \end{cases}$.

Câu 65. Tập hợp $(-2; 3] \cap (3; 4]$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $\emptyset$. B. $\{3\}$. C. $\{-2; 3\}$. D. $\{3; 4\}$.

Câu 66. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

- A. $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. B. $B = (A \cap B) \cap (A \setminus B)$. C. $B = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. D. $A = (A \cap B) \cap (A \setminus B)$.

Câu 67. Cho 3 tập hợp. $A = [-3; 5]$; $B = [-4; 1]$; và $C = (-4; -3]$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

- A. $A \cap B = [-3; 1]$. B. $(A \cup B) \cup C = [-4; 5]$. C. $C_B C = [-3; 1]$. D. $B \setminus A = [-4; -3]$.

Câu 68. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. B. $B \cap (B \setminus A) = \emptyset$. C. $A \cup (B \setminus A) = \emptyset$. D. $A \cup (B \setminus A) = B$.

Câu 69. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

- A. $M = \{x \in \mathbb{N} | 2x - 1 = 0\}$. B. $M = \{x \in \mathbb{Q} | 3x + 2 = 0\}$.
C. $M = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 6x + 9 = 0\}$. D. $M = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 = 0\}$.

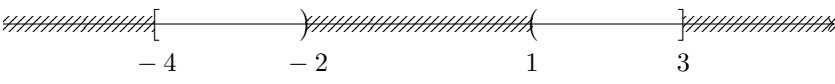
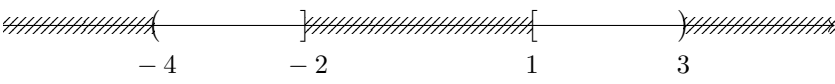
Câu 70. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 3x + 4 = 0\}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Tập hợp A có 1 phần tử. B. Tập hợp A có 2 phần tử.
C. Tập hợp $A = \emptyset$. D. Tập hợp A có vô số phần tử.

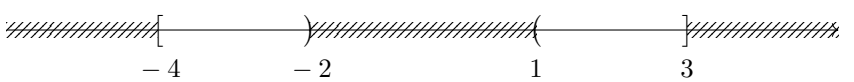
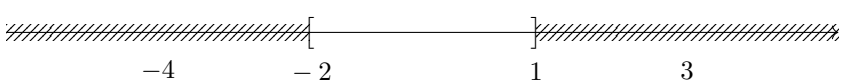
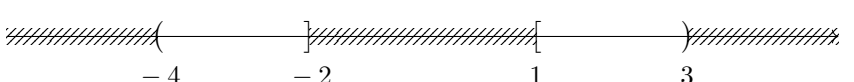
Câu 71. Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa xếp loại học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?

- A. 25. B. 10. C. 45. D. 35.

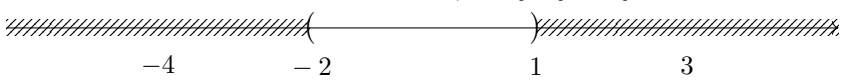
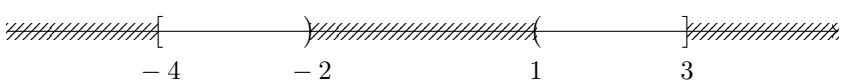
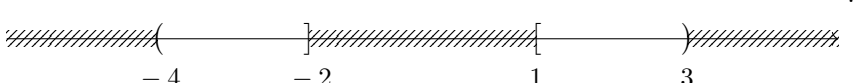
Câu 72. Biểu diễn trên trục số các tập hợp $[-4; 3] \setminus [-2; 1]$ là hình nào sau đây?

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Câu 73. Biểu diễn trên trục số các tập hợp $[-4; 1) \cap (-2; 3]$ là hình nào sau đây?

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Câu 74. Biểu diễn trên trục số các tập hợp $(-4; 1] \cap [-2; 3]$ là hình nào sau đây?

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

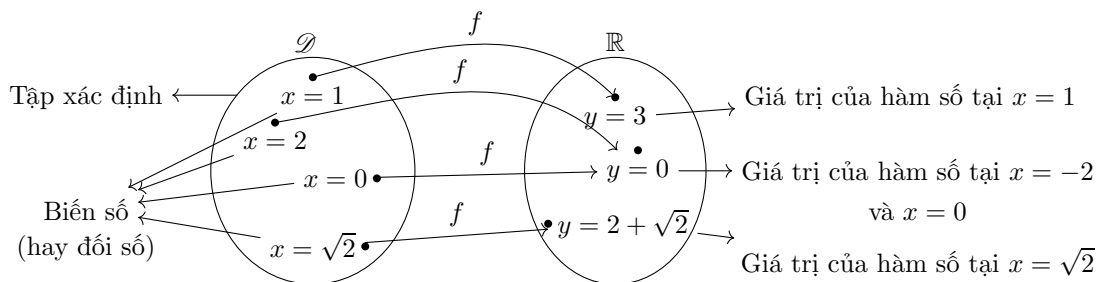
BÀI 1. HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Ở lớp dưới ta đã làm quen với khái niệm hàm số.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$.

- Với $x = 1$ thì $y = f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$.
- Với $x = -2$ thì $y = f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 0$.
- Với $x = 0$ thì $y = f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$.
- Với $x = \sqrt{2}$ thì $y = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$.



Kí hiệu

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) = x^2 + 2x \end{array}$$

Cho $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Hàm số f xác định trên $\mathcal{D}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}$ với một và chỉ một số $y \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{D}$ được gọi là tập xác định của hàm số.
- x được gọi là biến số (đối số) của hàm số f .
- $f(x)$ được gọi là giá trị của hàm số f tại x .

! — Một hàm số được cho bởi một biểu thức hoặc nhiều biểu thức

VÍ DỤ 2. — Hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

— Hàm số $y = g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{nếu } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ không giải thích gì thêm thì tập xác định của nó là tập hợp các số thực x sao cho giá trị của biểu thức $f(x)$ được xác định.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

DẠNG 1.1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Để tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = a$, ta thế $x = a$ vào biểu thức $f(x)$ và được giá trị $f(a)$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{nếu } x \leq 2 \\ -x^2 + 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$. Tính $f(3)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$ và $f(2\sqrt{2})$.

Lời giải.
Ta có $f(3) = -3^2 + 3 = -6$, $f(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$, $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -7$.
 $f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 1$, $f(2\sqrt{2}) = -(2\sqrt{2})^2 + 3 = -5$. □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 8 & \text{nếu } x \geq -2 \\ x^2 - 2x & \text{nếu } x < -2 \end{cases}$. Tính $f(-3)$, $f(2)$, $f(-2)$ và $f(0)$.

Lời giải.
Ta có $f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 15$, $f(2) = 8$, $f(-2) = 8$, $f(0) = 8$. □

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -x^3 + 3 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$. Tính $f(2)$, $f(\sqrt{2})$.

Lời giải.
Ta có $f(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$, $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^3 + 3 = -2\sqrt{2} + 3$. □

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $y = h(x) = \begin{cases} -2(x^2 + 1) & \text{nếu } x \leq 1 \\ \sqrt{x - 1} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$. Tính $h(1)$, $h(2)$, $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $h(\sqrt{2})$.

Lời giải.
Ta có
 $h(1) = -2(1^2 + 1) = -4$, $h(2) = \sqrt{2 - 1} = 1$, $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right) = -3$, $h(\sqrt{2}) = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. □

DẠNG 1.2. Đồ thị hàm số

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ $(x; f(x))$ với $x \in \mathcal{D}$ gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- Để biết điểm $M(a; b)$ có thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ không, ta thế $x = a$ vào biểu thức $f(x)$.
 - Nếu $f(a) = b$ thì điểm $M(a; b)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.
 - Nếu $f(a) \neq b$ thì điểm $M(a; b)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \sqrt{x - 3}$. Trong các điểm $A(2; 8)$, $B(4; 12)$ và $C(5; 25 + \sqrt{2})$, điểm nào thuộc đồ thị của hàm số đã cho?

Lời giải.
Hàm số xác định khi và chỉ khi $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Tập xác định: $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.
— Ta có $2 \notin \mathcal{D}$ nên $A(2; 8)$ không thuộc đồ thị của hàm số.
— Ta có $f(4) = 4^2 + \sqrt{4 - 3} = 17 \neq 12$ nên $B(4; 12)$ không thuộc đồ thị của hàm số.
— Ta có $f(5) = 5^2 + \sqrt{5 - 3} = 25 + \sqrt{2}$ nên $C(5; 25 + \sqrt{2})$ thuộc đồ thị của hàm số. □

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 5$ (C).

- a) Các điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 5)$, $C\left(-\frac{1}{2}; 8\right)$ có thuộc đồ thị (C) của hàm số đã cho không?
- b) Tìm các điểm thuộc đồ thị của hàm số mà có tung độ bằng 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

a) Ta có

- $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 5 = 2$ nên $A(1; 2)$ thuộc đồ thị (C) của hàm số.
- $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 5 = 12 \neq 5$ nên $B(-1; 5)$ không thuộc đồ thị (C) của hàm số.
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 8$ nên $C\left(-\frac{1}{2}; 8\right)$ thuộc đồ thị (C) của hàm số.

b) $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 5 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $M(1; 2)$ và $N\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

□

Bài 1. Cho hàm số $y = g(x) = \frac{-2x}{x^2 - 2x - 3}$. Tìm các điểm thuộc đồ thị của hàm số mà có tung độ bằng 2.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{nếu } x \leq 1 \\ x^2 - 3x & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$

a) Điểm nào trong các điểm sau đây thuộc đồ thị của hàm số?
 $A(3; 3)$, $B(-1; -5)$, $C(1; -2)$ và $D(3; 0)$.

b) Tìm các điểm thuộc đồ thị của hàm số mà có tung độ bằng -2 .

DẠNG 1.3. Tìm tập xác định của hàm số

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ xác định.

⚠ — Hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ xác định khi và chỉ khi $f(x) \neq 0$ (A là hằng số).

— Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ xác định khi và chỉ khi $f(x) \geq 0$.

— Hàm số $y = \frac{A}{\sqrt{f(x)}}$ xác định khi và chỉ khi $f(x) > 0$.

⚠ — $P(x) \cdot Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \neq 0 \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

⚠ — Nếu $a \leq x \leq b$ thì $\mathcal{D} = [a; b]$.

— Nếu $a \leq x < b$ thì $\mathcal{D} = [a; b)$.

— Nếu $\begin{cases} a < x < b \\ x \neq x_0 \end{cases}$ thì $\mathcal{D} = (a; b) \setminus \{x_0\}$.

— Nếu $x > a$ thì $\mathcal{D} = (a; +\infty)$.

— Nếu $x \leq b$ thì $\mathcal{D} = (-\infty; b]$.

— Nếu $\begin{cases} a < x < b \\ c \leq x \leq d \end{cases}$ thì $\mathcal{D} = (a; b) \cup [c; d] \setminus \{x_0\}$.

VÍ DỤ 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+3}{2x^2-18} + \frac{5}{1+x^3} - 2x + 1$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x^2 - 18 \neq 0 \\ 1 + x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 3 \\ x \neq -1. \end{cases}$

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3; -1\}$. □

VÍ DỤ 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = 4\sqrt{2x+1} - (x-4)\sqrt{3-x}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$. □

VÍ DỤ 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x^3 - \sqrt{7-3x}}{(x^2-4x)\sqrt{2x+2}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 2x+2 > 0 \\ x^2-4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ x > -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{7}{3} \\ x \neq 0. \end{cases}$

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \left(-1; \frac{7}{3}\right] \setminus \{0\}$. □

VÍ DỤ 12. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x^3-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{7-3x}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-3x \geq 0 \\ \sqrt{x-2}-\sqrt{7-3x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{7}{3} \\ \sqrt{x-2} \neq \sqrt{7-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{7}{3} \\ x-2 \neq 7-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{7}{3} \\ x \neq \frac{9}{4} \end{cases}$

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \left[2; \frac{7}{3}\right] \setminus \left\{\frac{9}{4}\right\}$. □

VÍ DỤ 13. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3x+5}{x^2+3x+m-1}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x + m - 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & x^2 + 3x + m - 1 = 0 \quad \text{vô nghiệm} \\ \Leftrightarrow & \Delta = 13 - 4m < 0 \\ \Leftrightarrow & m > \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $m > \frac{13}{4}$. □

VÍ DỤ 14. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + 2\sqrt{3x-2m+1}$ có tập xác định $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $3x - 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-1}{3}$.

Vì tập xác định $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$ nên $\frac{2m-1}{3} = -1 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$. □

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y = x^2 - 3x + 2$.

② $y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$

③ $y = \frac{x^2+2x-3}{(x^2-9x)(x^2+x+1)}$.

④ $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

⑤ $y = \frac{x}{x\sqrt{x-1}}$.

⑥ $y = \frac{x}{x-1} + \frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

.....

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y = \frac{x\sqrt{2x+5}-3\sqrt{2-5x}}{4\sqrt{x^2+4}}$.

② $y = \frac{3x+4+\sqrt{x^2+2}}{(x^2+x+5)(|x|+1)}$.

③ $y = \frac{2x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{7-2x}}$.

④ $y = \frac{x^2-4x+3}{(x^2+2x+4)\sqrt{2x^2+1}}$.

⑤ $y = \frac{2x^2+x-3}{(x^2-5x)\sqrt{x-2}}$.

⑥ $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{3-x} + \sqrt{5-x}$.

⑦ $y = \frac{\sqrt{2x+4}+3\sqrt{4-x}}{x^2-3x+2}$.

⑧ $y = \frac{3x+\sqrt{6-x}}{1+\sqrt{x+4}}$.

⑨ $y = \frac{2x^2-5\sqrt{9-2x}}{2-\sqrt{x-2}}$.

⑩ $y = \frac{3x+\sqrt{\frac{x^2+2}{2x+10}}}{1-\sqrt{3-x}}$.

⑪ $y = \frac{\sqrt{3-4x}+x\sqrt{x}}{|2x-7|+2}$.

⑫ $y = \frac{\sqrt{x^2+10}-\sqrt{2x+11}}{|3x-2|-4}$.

.....

Bài 5. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3+2}{x^2-3x+m-5}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

.....

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2-5}{3mx-4m+8}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

.....

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2-2mx+m^2-m+1}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

.....

□ DẠNG 1.4. Sự biến thiên của hàm số

Hàm số f xác định trên khoảng K và $x_1, x_2 \in K$.

— Hàm số f gọi là đồng biến trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

— Hàm số f gọi là nghịch biến trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

⚠ — Hàm số f xác định trên khoảng K . Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in K$, nghĩa là $f(x) = c$ (c là hằng số) thì f gọi là **hàm số hằng** (còn gọi là **hàm số không đổi**) trên K .

— Hàm số f xác định trên khoảng K . Khảo sát sự biến thiên của hàm số f nghĩa là xem f đồng biến, hoặc nghịch biến, hoặc không đổi trên các khoảng nào đó trong tập xác định của nó.

Phương pháp giải toán KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG K

Cho hàm số $y = f(x)$ và hai số tùy ý $x_1, x_2 \in K$.

CÁCH 1. Giả sử $x_1 < x_2$.

— Nếu $f(x_1) - f(x_2) < 0$ thì f **đồng biến** trên K .

— Nếu $f(x_1) - f(x_2) > 0$ thì f **nghịch biến** trên K ,

CÁCH 2. Giả sử $x_1 \neq x_2$.

— Nếu $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ thì f **đồng biến** trên K .

— Nếu $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ thì f **nghịch biến** trên K .

VÍ DỤ 15. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x) = 2x - 7$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Với $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty), x_1 \neq x_2$. Ta có: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1 - 7 - 2x_2 + 7}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. □

VÍ DỤ 16. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = h(x) = x^2 + 2x - 3$ trong khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Với $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -1), x_1 \neq x_2$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^2 + 2x_1 - 3 - x_2^2 - 2x_2 + 3}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x_1 \in (-\infty; -1) \\ x_2 \in (-\infty; -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < -1 \\ x_2 < -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < -2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 < 0.$$

Vậy hàm số giảm trên $(-\infty; -1)$ □

VÍ DỤ 17. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = g(x) = \frac{4x}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Với $\forall x_1, x_2 \in (1; +\infty), x_1 \neq x_2$. Ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4x_1}{x_1 - 1} - \frac{4x_2}{x_2 - 1}$$

$$= \frac{-4(x_1 - x_2)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{-4(x_1 - x_2)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} : (x_1 - x_2) \\ &= \frac{-4}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}. \end{aligned}$$

$$\forall \begin{cases} x_1 \in (1; +\infty) \\ x_2 \in (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0.$$

Vậy hàm số giảm trên $(1; +\infty)$

□

Bài 8. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a. $y = f(x) = (2 - x)^2 - (1 - x)^2$ trong khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b. $y = f(x) = 2 - x(x - 4)$ trên khoảng $(2; +\infty)$.

c. $y = f(x) = 1 - \frac{x - 5}{x - 3}$ trên khoảng $(3; +\infty)$.

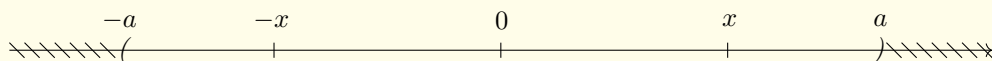
d. $y = k(x) = \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$ trên khoảng $(-\infty; -2)$.

e. $y = \sqrt{x + 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

f. $y = \frac{1}{x + 1}$ trên khoảng $(-\infty; -1)$.

□ DẠNG 1.5. Hàm số chẵn - Hàm số lẻ

① **Tập đối xứng.** $\mathcal{D}$ là tập con của tập số thực $\mathbb{R}$ gọi là **tập đối xứng** nếu thỏa: với mọi x thuộc $\mathcal{D}$ thì $-x$ cũng thuộc $\mathcal{D}$.



② **Hàm số chẵn, hàm số lẻ**

Hàm số f xác định trên **tập đối xứng** $\mathcal{D}$.

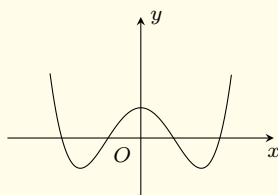
— Nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ mà $f(-x) = f(x)$ thì ta nói f là **hàm số chẵn** trên $\mathcal{D}$.

— Nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ mà $f(-x) = -f(x)$ thì ta nói f là **hàm số lẻ** trên $\mathcal{D}$.

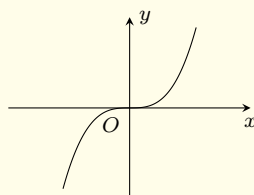
③ **Đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ**

— Đồ thị **hàm số chẵn** nhận trục tung làm trục đối xứng,

— Đồ thị **hàm số lẻ** nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.



Đồ thị hàm số chẵn



Đồ thị hàm số lẻ

Phương pháp giải

CÁCH XÉT TÍNH CHẴN - LẺ CỦA HÀM SỐ

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = f(x)$.

- Nếu $\mathcal{D}$ **không** là tập đối xứng thì hàm số f không chẵn và không lẻ trên $\mathcal{D}$.
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập đối xứng: Với $\forall x \in \mathcal{D}$, tính $f(-x)$.
 - Nếu $f(-x) \neq \pm f(x)$: Chọn một giá trị thích hợp $x = a \in \mathcal{D}$ để có $f(-a) \neq \pm f(a)$. Từ đó kết luận hàm số không chẵn và không lẻ trên $\mathcal{D}$.
 - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì f là hàm số **chẵn** trên $\mathcal{D}$.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì f là hàm số **lẻ** trên $\mathcal{D}$.

VÍ DỤ 18. — $\mathbb{R}$ là tập đối xứng vì $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

- $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ là tập đối xứng vì $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
- $\{-a; a\}$, (với $a > 0$) là tập đối xứng vì $\forall x \in \{-a; a\} \Rightarrow -x \in \{-a; a\}$.
- $[-a; a]$, (với $a > 0$) là tập đối xứng vì $\forall x \in [-a; a] \Rightarrow -x \in [-a; a]$.
- $\{-a; a\} \setminus \{0\}$, (với $a > 0$) là tập đối xứng vì $\forall x \in \{-a; a\} \setminus \{0\} \Rightarrow -x \in \{-a; a\} \setminus \{0\}$.
- $[-a; a] \setminus \{0\}$, (với $a > 0$) là tập đối xứng vì $\forall x \in [-a; a] \setminus \{0\} \Rightarrow -x \in [-a; a] \setminus \{0\}$.

VÍ DỤ 19. — $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ không là tập đối xứng vì $x = -2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ nhưng $-x = 2 \notin \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- $[-4; 4)$ không là tập đối xứng vì $x = -4 \in [-4; 4)$ nhưng $-x = 4 \notin [-4; 4)$.
- $[-4; 6]$ không là tập đối xứng vì $x = 5 \in [-4; 6]$ nhưng $-x = -5 \notin [-4; 6]$.
- $[-5; 5] \setminus \{1\}$ không là tập đối xứng vì $x = -1 \in [-5; 5]$ nhưng $-x = 1 \notin [-5; 5]$.

VÍ DỤ 20. Xét tính chẵn-lẻ của hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x-3}$

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Với $x = 3 \in \mathcal{D}$ nhưng $x = -3 \notin \mathcal{D}$ nên $\mathcal{D}$ không phải là tập đối xứng.

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ. □

VÍ DỤ 21. Xét tính chẵn-lẻ của hàm số $y = g(x) = 2x - 1 + \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

$\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = [-3; 3]$ là tập đối xứng.

Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x) - 1 + \sqrt{3+(-x)} + \sqrt{3-(-x)} \\ &= -2x - 1 + \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x} \\ &= -(2x + 1 - \sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}). \end{aligned}$$

Chọn $a = 2$, ta có

$$g(-2) = -4 + \sqrt{5}; g(2) = 4 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} g(-2) \neq g(2) \\ g(-2) \neq -g(2). \end{cases}$$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ. □

VÍ DỤ 22. Xét tính chẵn-lẻ của hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{x^2}$

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = [-3; 3] \setminus \{0\}$ là tập đối xứng.

Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\sqrt{3+(-x)} + \sqrt{3-(-x)}}{(-x)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}}{x^2} = f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn. □

VÍ DỤ 23. Xét tính chẵn-lẻ của hàm số $y = h(x) = x^3 - x + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = [-1; 1]$ là tập đối xứng.

Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^3 - (-x) + \sqrt{1+(-x)} - \sqrt{1-(-x)} \\ &= -x^3 + x + \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \\ &= -(x^3 - x + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = -h(x) \end{aligned}$$

Vậy hàm số lẻ. □

Bài 9. Chứng minh đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{5x}{x^2 - 4}$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Lời giải.

Ta cần chứng minh hàm số $y = f(x) = \frac{5x}{x^2 - 4}$ là lẻ.

Thật vậy: Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$. Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ là tập đối xứng.

Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{5(-x)}{(-x)^2 - 4} \\ &= \frac{-5x}{x^2 - 4} = -f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số lẻ. □

Bài 10. Chứng minh đồ thị hàm số $y = g(x) = |2-x| + |2+x|$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Lời giải.

Ta cần chứng minh hàm số $y = g(x) = |2-x| + |2+x|$ là chẵn.

Thật vậy: Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} g(-x) &= |2-(-x)| + |2+(-x)| \\ &= |2+x| + |2-x| = g(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn. □

Bài 11. Xét tính chẵn-lẻ của các hàm số sau.

① $y = f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 9}$.

② $y = h(x) = x^2 - 3x$.

③ $y = g(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$.

④ $y = k(x) = \frac{x^3 - 5x}{|x-1| + |x+1|}$.

⑤ $y = u(x) = \frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{x-1}$.

⑥ $y = v(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x}}$.

Lời giải.

① $y = f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 9}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$. $\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ là tập đối xứng. Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-x)^4}{(-x)^2 - 9} \\ &= \frac{2x^4}{x^2 - 9} = f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

② $y = h(x) = x^2 - 3x$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$h(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x.$$

Chọn $a = 2$, ta có

$$h(-2) = 10; h(2) = -2 \Rightarrow \begin{cases} h(-2) \neq h(2) \\ h(-2) \neq -h(2). \end{cases}$$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

③ $y = g(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = [-2; 2]$ là tập đối xứng.

Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} g(-x) &= \sqrt{2+(-x)} + \sqrt{2-(-x)} \\ &= \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = g(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

④ $y = k(x) = \frac{x^3 - 5x}{|x-1| + |x+1|}$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ là tập đối xứng. Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$\begin{aligned} k(-x) &= \frac{(-x)^3 - 5(-x)}{|(-x)-1| + |(-x)+1|} \\ &= \frac{-x^3 + 5x}{|x+1| + |x-1|} \\ &= -\frac{x^3 - 5x}{|x-1| + |x+1|} = -k(x) \end{aligned}$$

Vậy hàm số lẻ.

⑤ $y = u(x) = \frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{x-1}$.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5 \text{ và } x \neq 1.$$

Tập xác định $\mathcal{D} = [-5; 5] \setminus \{1\}$ không phải là tập đối xứng. Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

⑥ $y = v(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x}}$.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+3x \geq 0 \\ 6-3x \geq 0 \\ \sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ \sqrt{6+3x} \neq \sqrt{6-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Tập xác định $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$ là tập đối xứng. Với $\forall x \in \mathcal{D}$. Xét

$$v(-x) = \frac{2(-x)^3}{\sqrt{6+3(-x)} - \sqrt{6-3(-x)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2x^3}{\sqrt{6-3x} - \sqrt{6+3x}} \\
&= \frac{2x^3}{\sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x}} = v(x).
\end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

□

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}}{x}$.

- A. $\mathcal{D} = [-2; 2]$. B. $\mathcal{D} = (-2; 2) \setminus \{0\}$. C. $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Câu 2. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{6-x} + \frac{2x+1}{1+\sqrt{x-1}}$.

- A. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [1; 6]$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; -6)$.

Câu 3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x^2-4x+4}}$.

- A. $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-2; +\infty)$.

Câu 4. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x}{x - \sqrt{x-6}}$.

- A. $\mathcal{D} = [0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}$. C. $\mathcal{D} = 9$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Câu 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

- A. $\mathcal{D} = [1; 4]$. B. $\mathcal{D} = (1; 4) \setminus \{2; 3\}$. C. $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 6. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2018}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 7. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{|x|}{|x-2| + |x^2 + 2x|}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$.

C. $\mathcal{D} = (-2; 0)$.

D. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

Câu 8. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x-4|}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

B. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{4\}$.

D. $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$.

Câu 9. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2 + 4x + 3}$.

A. $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \setminus \{-1\}$.

D. $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right]$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để hàm số $f(x) = (m+1)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 11. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ.

A. $y = x^{2018} - 2017$.

B. $y = \sqrt{2x+3}$.

C. $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$.

D. $y = |x+3| + |x-3|$.

Câu 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = |x+1| + |x-1|$.

B. $y = |x+3| + |x-2|$.

C. $y = 2x^2 - 3x$.

D. $y = 2x^4 - 3x^2 + x$.

Câu 13. Trong các hàm số $y = |x+2| - |x-2|$, $y = |2x+1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, $y = x(|x| - 2)$, $y = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$ có bao nhiêu hàm số lẻ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \leq -2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng?

A. $f(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ là hàm số chẵn.

- C. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.
 D. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

Câu 15. Tìm điều kiện của tham số để hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn.

- A. a tùy ý, $b = 0$, $c = 0$. B. a tùy ý, $b = 0$, c tùy ý. C. a, b, c tùy ý. D. a tùy ý, b tùy ý, $c = 0$.

Câu 16. Hàm số $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$ khi.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m \geq 1$. C. $\begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < 1 \end{cases}$.

Câu 17. Hàm số $y = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1}} - 1$ có tập xác định là

- A. $[-2; -1] \cup (1; 3]$. B. $(-2; -1] \cup [1; 3)$.
 C. $[-2; 3] \setminus \{-1; 1\}$. D. $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3]$.

Câu 18. Hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$ có tập xác định là.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.
 C. $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$.

Câu 19. Cho hai hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$ và $g(x) = -x^4 + x^2 + 1$. Khi đó.

- A. $f(x)$ và $g(x)$ cùng chẵn. B. $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ.
 C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. D. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ chẵn.

Câu 20. Hàm số $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x|-2}}$ có tập xác định là.

- A. $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. C. $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$. D. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 21. Hàm số $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$ khi.

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m \geq 1$.

C. $\begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < 1 \end{cases}$.

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\sqrt{x+2}$ là.

A. -4.

B. -3.

C. -2.

D. -1.

Câu 23. Tìm m để hàm số $y = \frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$.

B. $m < 0$.

C. $m > 2$.

D. $m \leq 3$.

Câu 24. Hàm số nào trong các hàm số sau **không** là hàm số chẵn.

A. $y = \frac{x^2+1}{|2-x|+|2+x|}$.

B. $y = |1+2x| + |1-2x|$.

C. $y = \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} + 5$.

D. $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$.

Câu 25. Hàm số nào trong các hàm số sau là hàm số lẻ.

A. $y = |x-1| + |x+1|$.

B. $y = \frac{x^2+1}{x}$.

C. $y = \frac{1}{x^4-2x^2+3}$.

D. $y = 1-3x+x^3$.

Câu 26. Hàm số $y = \sqrt{x^2-x-20} + \sqrt{6-x}$ có tập xác định là.

A. $(-\infty; -4) \cup (5; 6]$.

B. $(-\infty; -4) \cup (5; 6)$.

C. $(-\infty; -4] \cup [5; 6]$.

D. $(-\infty; -4) \cup [5; 6)$.

Câu 27. Hàm số $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x|-2}}$ có tập xác định là.

A. $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

D. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = |x+2| + |x-2|$ và $g(x) = x^3 + 5x$. Khi đó.

A. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ chẵn.

D. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

Câu 29. Trong các hàm số sau, hàm số nào **không phải** hàm số chẵn.

- A. $y = |x - 5| + |x + 5|$. B. $y = x^4 - x^2 + 12$. C. $y = |1 - x| + |x + 1|$. D. $y = |x^2 - 1| + x$.

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào giảm trên khoảng $(0; 1)$?

- A. $y = x^2$. B. $y = x^3$. C. $y = \frac{1}{x}$. D. $y = \sqrt{x}$.

Câu 31. Hàm số $y = x(1 - |x|)$ là hàm số.

- A. Chẵn. B. Lẻ. C. Không chẵn, không lẻ. D. Vừa chẵn, vừa lẻ.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Hệ thức nào **sai**?

- A. $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$. B. $f[f(f(x))] = f(x)$.
C. $f(x+1) = f(x) + 1$. D. $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+2}$.

Câu 33. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-2m} - \sqrt{4-2x}$ là $[1; 2]$ khi và chỉ khi

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m > \frac{1}{2}$.

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{6-2x}$ là một đoạn trên trục số khi và chỉ khi

- A. $m = 3$. B. $m < 3$. C. $m > 3$. D. $m < \frac{1}{3}$.

Câu 35. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x-1}$?

- A. $M_1(2; 1)$. B. $M_2(1; 1)$. C. $M_3(2; 0)$. D. $M_4(0; 1)$.

Câu 36. Điểm nào sau đây **không** thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x}$

- A. $A(1; -1)$. B. $B(2; 0)$. C. $C\left(3; \frac{1}{3}\right)$. D. $D(-1; -3)$.

.....

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & x \in (-\infty; 0) \\ \sqrt{x+1} & x \in [0; 2] \\ x^2 - 1 & x \in (2; 5] \end{cases}$. Tính $f(4)$.

- A. $f(4) = \frac{2}{3}$. B. $f(4) = 15$. C. $f(4) = \sqrt{5}$. D. $f(4) = 0$.
-

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & x \geq 2 \\ x^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$. Tính $P = f(2) + f(-2)$.

- A. $P = \frac{8}{3}$. B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = \frac{5}{3}$.
-

Câu 39. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}$.

- A. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$. C. $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
-

Câu 40. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2+3x-4}$.

- A. $\mathcal{D} = \{1; -4\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
-

Câu 41. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2+3x+4)}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = \{-1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
-

Câu 42. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^3-3x+2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
-

Câu 43. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$.

- A. $\mathcal{D} = [-3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.
-

Câu 44. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{6-3x} - \sqrt{x-1}$

A. $\mathcal{D} = (1; 2)$.

B. $\mathcal{D} = [1; 2]$.

C. $\mathcal{D} = [1; 3]$.

D. $\mathcal{D} = [-1; 2]$.

.....

.....

.....

.....

Câu 45. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-2} + 6x}{\sqrt{4-3x}}$

A. $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

B. $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$.

C. $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 46. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$

A. $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-4; 4)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 47. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x-3}$

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$.

B. $\mathcal{D} = [1; 3]$.

C. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 48. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-x-6}$

A. $\mathcal{D} = \{3\}$.

B. $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{3\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 49. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

C. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

D. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 50. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+x+1}$

A. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = \{1\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = (-1; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 51. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; 2)$ và trên khoảng $(2; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 52. Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số vừa đồng biến và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số không đồng biến cũng không nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 53. Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số vừa đồng biến vừa nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số không đồng biến cũng không nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 54. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ trên khoảng $(-\infty; -5)$ và trên khoảng $(-5; +\infty)$.

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -5)$, đồng biến trên $(-5; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -5)$, nghịch biến trên $(-5; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-5; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-5; +\infty)$.

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-7}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 56. Trong các hàm số $y = 2015x, y = 2015x + 2, y = 3x^2 - 1, y = 2x^3 - 3x$ có bao nhiêu hàm số lẻ?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 57. Cho hai hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x$ và $g(x) = x^{2017} + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ; $g(x)$ là hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ là hàm số chẵn; $g(x)$ là hàm số chẵn.
- C. Cả $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số không chẵn, không lẻ.
- D. $f(x)$ là hàm số lẻ; $g(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = x^2 - |x|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ. B. $f(x)$ là hàm số chẵn.
C. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ. D. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = |x - 2|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ. B. $f(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số vừa chẵn, vừa lẻ. D. $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 60. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \frac{2x+5}{x-4}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$. D. $\mathcal{D} = [2; +\infty) \setminus \{4\}$.

Câu 61. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-4}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \{-2; 2\}$.

Câu 62. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3-2x}$ là

- A. $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. B. $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. C. $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 63. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2(x-2) & \text{khi } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Giá trị $f(-1)$ bằng

- A. -6. B. 6. C. 5. D. -5.

Câu 64. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = x^2 - 2x + 1$. C. $y = x$. D. $y = -x$.

Câu 65. Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số $y = \sqrt{|2x - 3|}$.

- A. $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 66. Trong các hàm số sau đây $y = |x|$, $y = x^2 + 4x$, $y = -x^4 + 2x^2$ có bao nhiêu hàm số chẵn?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 67. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ ?

- A. $y = -\frac{x}{2}$. B. $y = -\frac{x}{2} + 1$. C. $y = -\frac{x-1}{2}$. D. $y = -\frac{x}{2} + 2$.

Câu 68. Xét tính chẵn, lẻ của hai hàm số $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$, $g(x) = -|x|$

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn. B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ. D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 69. Xét tính chất chẵn lẻ của hàm số: $y = 2x^3 + 3x + 1$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

- A. y là hàm số chẵn. B. y là hàm số lẻ.
C. y là hàm số không có tính chẵn lẻ. D. y là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Câu 70. Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^2 + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. y là hàm số chẵn. B. y là hàm số lẻ.
C. y là hàm số không có tính chẵn lẻ. D. y là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Câu 71. Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** phải là hàm số lẻ?

- A. $y = x^3 + 1$. B. $y = x^3 - x$. C. $y = x^3 + x$. D. $y = \frac{1}{x}$.

Câu 72. Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** phải là hàm số chẵn?

- A. $y = |x + 1| + |1 - x|$. B. $y = |x + 1| - |1 - x|$. C. $y = |x^2 + 1| + |1 - x^2|$. D. $y = |x^2 + 1| - |1 - x^2|$.

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x) = |2x - 3|$. Tìm x để $f(x) = 3$

- A. $x = 3$. B. $x = 3$ hoặc $x = 0$. C. $x = \pm 3$. D. $x = \pm 1$.

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$. Kết quả nào sau đây đúng?

- A. $f(0) = 2, f(-3) = -4$. B. $f(2)$ không xác định, $f(-3) = -5$.
C. $f(-1) = \sqrt{8}, f(2)$ không xác định. D. Tất cả các câu trên đều đúng.

Câu 75. Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x-1} + \frac{x-1}{x+5}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$.

Câu 76. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ là

- A. $\mathcal{D} = (1; 3]$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \emptyset$.

Câu 77. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $\mathcal{D} = (-4; +\infty) \setminus \{2\}$. C. $\mathcal{D} = [-4; +\infty) \setminus \{2\}$. D. $\mathcal{D} = \emptyset$.

Câu 78. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{x-3}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

Câu 79. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x-5} + \frac{1}{\sqrt{13-x}}$ là

- A. $\mathcal{D} = [5; 13]$. B. $\mathcal{D} = (5; 13)$. C. $\mathcal{D} = (5; 13]$. D. $\mathcal{D} = [5; 13)$.

Câu 80. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{|x|-2}$ là

- A. $\mathcal{D} = (-1; +\infty) \setminus \{\pm 2\}$. B. $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{2\}$. C. $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{-2\}$. D. $\mathcal{D} = (-1; +\infty) \setminus \{2\}$.

D. $y = f(x)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

D. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ không chẵn không lẻ.

D. $f(x)$ chẵn, $q(x)$ lẻ.

A. $y = |x + 1| + |1 - x|$. **B.** $y = |x + 1| - |1 - x|$. **C.** $y = |x^2 + 1| + |x^2 - 1|$. **D.** $y = \frac{|x + 1| + |1 - x|}{x^2 + 4}$.

D. $y = x^2$.

D. Hàm số $y = a^2x + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $b < 0$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

.....
Câu 88. Cho hàm số $f(x) = \frac{4}{x+1}$. Khi đó

- A. $f(x)$ tăng trên khoảng $(-\infty; -1)$ và giảm trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 B. $f(x)$ tăng trên hai khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 C. $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty; -1)$ và tăng trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 D. $f(x)$ giảm trên hai khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Câu 89. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
 B. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$, nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 90. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x+2}$. Kết quả nào sau đây đúng?

- A. $f(0) = 2; f(1) = \frac{\sqrt{15}}{3}$.
 B. $f(0) = 2; f(-3) = -\frac{11}{24}$.
 C. $f(2) = 1; f(-2)$ không xác định.
 D. $f(0) = 2; f(1) = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

Câu 91. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & , x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1} & , x < 0 \end{cases}$. Giá trị của $f(0), f(2), f(-2)$ là

- A. $f(0) = 0; f(2) = \frac{2}{3}, f(-2) = 2$.
 B. $f(0) = 0; f(2) = \frac{2}{3}; f(-2) = -\frac{1}{3}$.
 C. $f(0) = 0; f(2) = 1; f(-2) = -\frac{1}{3}$.
 D. $f(0) = 0; f(2) = 1; f(-2) = 2$.

Câu 92. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-3}$. Tập nào sau đây là tập xác định của hàm số $f(x)$?

- A. $(1; +\infty)$.
 B. $[1; +\infty]$.
 C. $[1; 3) \cup (3; +\infty)$.
 D. $[1; +\infty) \setminus \{3\}$.

Câu 93. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20} + \sqrt{6-x}$ có tập xác định là

- A. $(-\infty; 4) \cup (5; 6]$.
 B. $(-\infty; -4) \cup (5; 6)$.
 C. $(-\infty; -4] \cup [5; 6]$.
 D. $(-\infty; -4) \cup [5; 6)$.

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

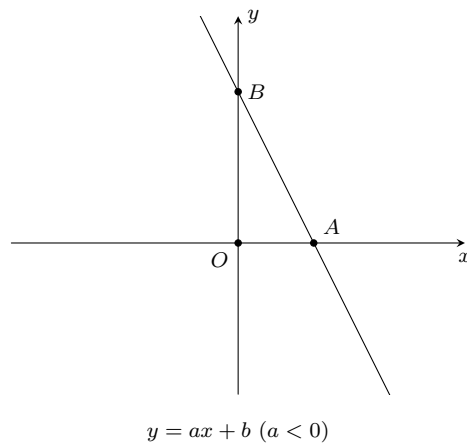
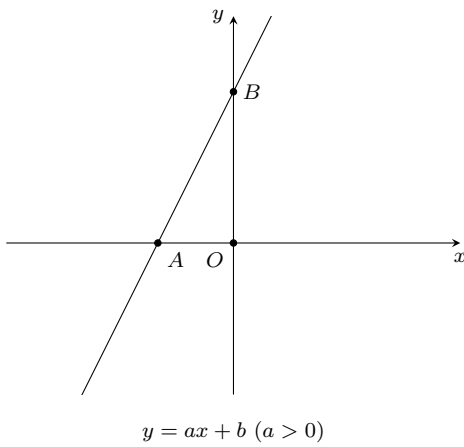
1. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

— Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

— Sự biến thiên:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

— Đồ thị hàm số là một đường thẳng có hệ số góc bằng a , cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và cắt trục tung tại điểm $B(0; b)$.

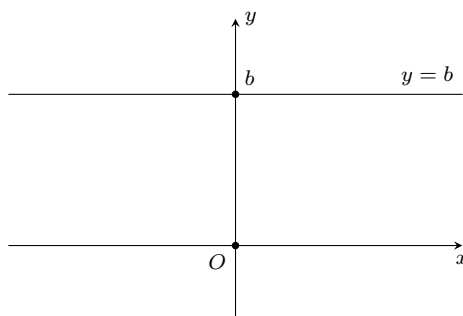


— Vị trí tương đối của hai đường thẳng: Cho $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $d': y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$).

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.
- d cắt $d' \Leftrightarrow a \neq a'$.
- $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$.
- d cắt d' tại một điểm trên trục tung $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq a' \\ b = b' \end{cases}$.

2. Hàm số hằng $y = b$

Đồ thị hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$. Đường thẳng này gọi là đường thẳng $y = b$.



3. Hàm số $y = |ax + b|$ ($a \neq 0$)

$$y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{nếu } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{nếu } x < -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax + b|$ ($a \neq 0$) ta có thể vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$ rồi xóa đi hai phần đường thẳng nằm phía dưới trục hoành.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

DẠNG 2.1. Xét tính đồng biến, nghịch biến

Muốn xét tính đơn điệu của hàm số bậc nhất, ta cần đưa hàm số về đúng dạng $y = \boxed{a}x + b$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

VÍ DỤ 1. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

① $y = 2x + 1$. ② $y = -x + 1$. ③ $y = \frac{1-x}{2}$. ④ $y = -\frac{x}{2}$.

Lời giải.

- ① Hàm số $y = 2x + 1$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.
 ② Hàm số $y = -x + 1$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.
 ③ Hàm số $y = \frac{1-x}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ có hệ số $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.
 ④ Hàm số $y = -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}x$ có hệ số $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

① $y = (m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. ② $y = -mx + m + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 ③ $y = -(m^2+1)x + m + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. ④ $y = \frac{1}{m-1}x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- ① Hàm số $y = (m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.
 Vậy $m > 1$.
 ② Hàm số $y = -mx + m + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.
 Vậy $m > 0$.
 ③ Hàm số $y = -(m^2+1)x + m + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -(m^2+1) < 0 \Leftrightarrow m^2+1 > 0$ (luôn đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$).
 Vậy $m \in \mathbb{R}$.
 ④ Hàm số $y = \frac{1}{m-1}x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.
 Vậy $m > 1$.

□

DẠNG 2.2. Đồ thị hàm số $y = ax + b$

Đưa hàm số về đúng dạng $y = \boxed{a}x + b$, ($a \neq 0$). Đồ thị hàm số là một đường thẳng.

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị “đi lên từ trái sang phải”.

— Nếu $a < 0$ thì đồ thị “đi xuống từ trái sang phải”.

— Xác định giao điểm của đường thẳng với hai trục tọa độ rồi nối hai điểm đó lại ta được đường thẳng là đồ thị của hàm số.

VÍ DỤ 3. Xét tính đơn điệu và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

① $y = 2x + 1$.

② $y = -x + 1$.

③ $y = \frac{1-x}{2}$.

④ $y = -\frac{x}{4} + 2$.

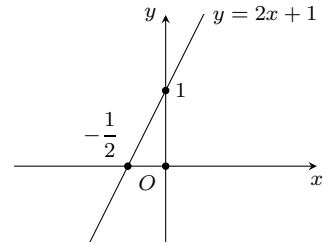
Lời giải.

① $y = 2x + 1$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = 2x + 1$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và $B(0; 1)$.

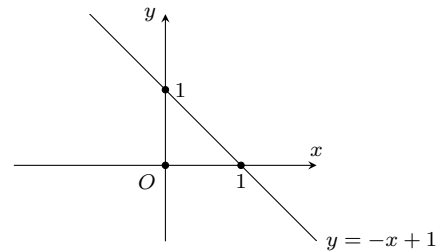


② $y = -x + 1$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = -x + 1$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = -x + 1$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; 1)$.

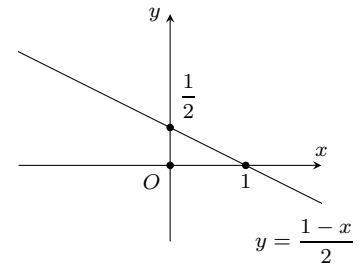


③ $y = \frac{1-x}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = \frac{1-x}{2}$ có hệ số $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{2}$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

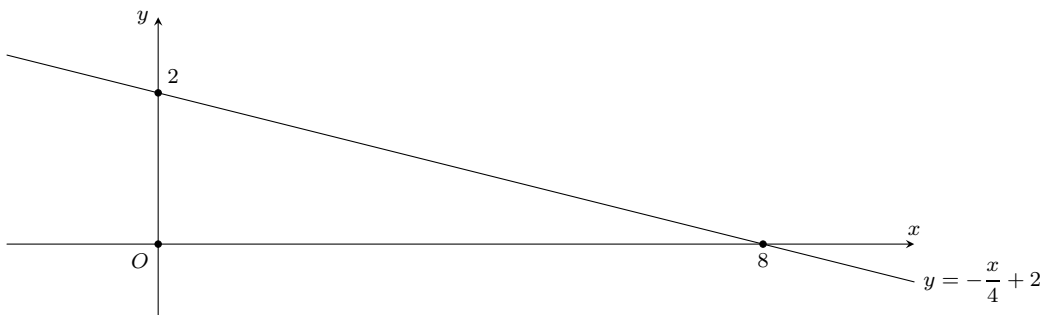


④ $y = -\frac{x}{4} + 2$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = -\frac{x}{4} + 2$ có hệ số $a = -\frac{1}{4} < 0$ nên hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = -\frac{x}{4} + 2$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(8; 0)$ và $B(0; 2)$.



DẠNG 2.3. Đồ thị hàm số $y = |ax + b|$

$$y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{khi } x < -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

— Để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax + b|$, ($a \neq 0$) ta có thể vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$ rồi xóa đi hai phần đường thẳng nằm phía dưới trục hoành.

VÍ DỤ 4. Xét tính đơn điệu và vẽ đồ thị các hàm số sau.

① $y = |x - 1|$

② $y = |-x + 1| + 1$

③ $y = |x + 1| + |x|$

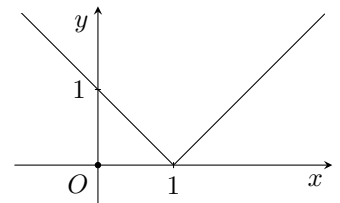
④ $y = x + |x + 1|$

Lời giải.

① Ta có

$$y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

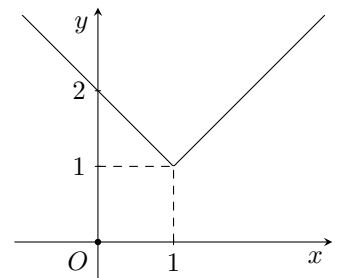
Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.



② Ta có

$$y = |-x + 1| + 1 = \begin{cases} -x + 2 & \text{khi } x \leq 1 \\ x & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

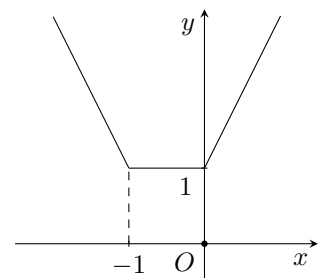
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên $(1; +\infty)$.



③ Ta có

$$y = |x + 1| + |x| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 0 \\ -2x - 1 & \text{khi } x \leq -1. \end{cases}$$

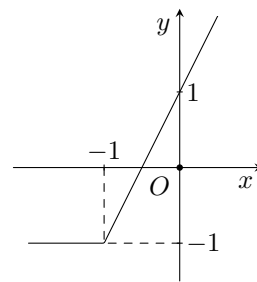
Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.



④ Ta có

$$y = x + |x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -1 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.



□

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm m để hàm số $y = (2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m < -\frac{1}{2}$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Tìm m để hàm số $y = m(x + 2) - x(2m + 1)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > -1$. B. $m < -\frac{1}{2}$. C. $m < -1$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Câu 3. Tìm m để hàm số $y = -(m^2 + 1)x + m - 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 1$. B. Với mọi m . C. $m < -1$. D. $m > -1$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = (m - 2)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 2014. B. 2016. C. Vô số. D. 2015.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = (m^2 - 4)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 4030. B. 4034. C. Vô số. D. 2015.

Câu 6. Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$.

- A. $y = 1 - \sqrt{2}x$. B. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 3$. C. $y + \sqrt{2}x = 2$. D. $y - \sqrt{2}x = 5$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 3)x + 2m - 3$ song song với đường thẳng $y = x + 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = \pm 2$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + m - 1$.

- A. $m = \pm 2$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = 0$.

Câu 9. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 4)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 1$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 0$. D. $S = -4$.

Câu 10. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $E(2; -1)$ và song song với đường thẳng ON với O là gốc tọa độ và $N(1; 3)$. Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

- A. $S = -4$. B. $S = -40$. C. $S = -58$. D. $S = 58$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m + 2)x - 7m - 1$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x - 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -\frac{5}{6}$. C. $m < \frac{5}{6}$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Câu 12. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $N(4; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $4x - y + 1 = 0$. Tính tích $P = ab$.

- A. $P = 0$. B. $P = -\frac{1}{4}$. C. $P = \frac{1}{4}$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Câu 13. Tìm a và b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $A(-2; 1)$ và $B(1; -2)$.

- A. $a = -2$ và $b = -1$. B. $a = 2$ và $b = 1$. C. $a = 1$ và $b = 1$. D. $a = -1$ và $b = -1$.

Câu 14. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $M(-1; 3)$ và $N(1; 2)$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = -\frac{1}{2}$. B. $S = 3$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{5}{2}$.

Câu 15. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-3; 1)$ và có hệ số góc bằng -2 . Tính tích $P = ab$.

- A. $P = -10$. B. $P = 10$. C. $P = -7$. D. $P = -5$.

Câu 16. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = \frac{1-3x}{4}$ và $y = -\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ là

- A. $(0; -1)$. B. $(2; -3)$. C. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. D. $(3; -2)$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y = m^2x + 2$ cắt đường thẳng $y = 4x + 3$

- A. $m = \pm 2$. B. $m \neq \pm 2$. C. $m \neq 2$. D. $m \neq -2$.

Câu 18. Cho hàm số $y = 2x + m + 1$. Tìm giá trị thực của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

- A. $m = 7$. B. $m = 3$. C. $m = -7$. D. $m = \pm 7$.

Câu 19. Cho hàm số $y = 2x + m + 1$. Tìm giá trị thực của m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

- A. $m = -3$. B. $m = 3$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Câu 20. Tìm giá trị thực của m để hai đường thẳng $d: y = mx - 3$ và $\Delta: y + x = m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

- A. $m = -3$. B. $m = 3$. C. $m = \pm 3$. D. $m = 0$.

Câu 21. Tìm giá trị thực của m để hai đường thẳng $d: y = mx - 3$ và $\Delta: y + x = m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

- A. $m = \sqrt{3}$. B. $m = \pm\sqrt{3}$. C. $m = -\sqrt{3}$. D. $m = 3$.

Câu 22. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm a và b , biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-1; 1)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 5.

- A. $a = \frac{1}{6}, b = \frac{5}{6}$. B. $a = -\frac{1}{6}, b = -\frac{5}{6}$. C. $a = \frac{1}{6}, b = -\frac{5}{6}$. D. $a = -\frac{1}{6}, b = \frac{5}{6}$.

Câu 23. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm a và b , biết rằng đồ thị hàm số cắt đường thẳng $\Delta_1: y = 2x + 5$ tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt đường thẳng $\Delta_2: y = -3x + 4$ tại điểm có tung độ bằng -2 .

- A. $a = \frac{3}{4}; b = \frac{1}{2}$. B. $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{1}{2}$. C. $a = -\frac{3}{4}; b = -\frac{1}{2}$. D. $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm giá trị thực của tham số m để ba đường thẳng $y = 2x$, $y = -x - 3$ và $y = mx + 5$ phân biệt và đồng qui.

- A. $m = -7$. B. $m = 5$. C. $m = -5$. D. $m = 7$.

Câu 25. Tìm giá trị thực của tham số m để ba đường thẳng $y = -5(x + 1)$, $y = mx + 3$ và $y = 3x + m$ phân biệt và đồng qui.

- A. $m \neq 3$. B. $m = 13$. C. $m = -13$. D. $m = 3$.

Câu 26. Cho hàm số $y = x - 1$ có đồ thị là đường Δ . Đường thẳng Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

- A. $S = \frac{1}{2}$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{3}{2}$.

Câu 27. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(2; 3)$ và tạo với hai tia Ox , Oy một tam giác vuông cân.

- A. $y = x + 5$. B. $y = -x + 5$. C. $y = -x - 5$. D. $y = x - 5$.

Câu 28. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 2)$ và tạo với hai tia Ox , Oy một tam giác có diện tích bằng 4.

- A. $y = -2x - 4$. B. $y = -2x + 4$. C. $y = 2x - 4$. D. $y = 2x + 4$.

Câu 29. Đường thẳng $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ($a \neq 0, b \neq 0$) đi qua điểm $M(-1; 6)$ tạo với các tia Ox , Oy một tam giác có diện tích bằng 4. Tìm $S = a + 2b$.

- A. $S = -\frac{38}{3}$. B. $S = \frac{-5 + 7\sqrt{7}}{3}$. C. $S = 10$. D. $S = 6$.

Câu 30. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 3)$, cắt hai tia Ox , Oy và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $\sqrt{5}$.

A. $y = 2x + 5$.

B. $y = -2x - 5$.

C. $y = 2x - 5$.

D. $y = -2x + 5$.

Câu 31.

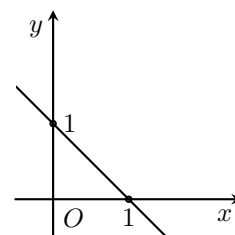
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x + 1$.

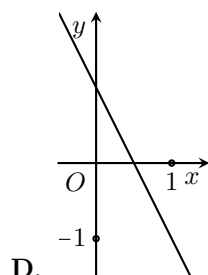
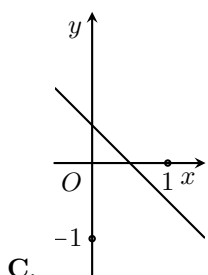
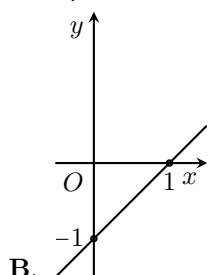
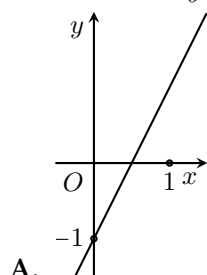
B. $y = -x + 2$.

C. $y = 2x + 1$.

D. $y = -x + 1$.



Câu 32. Hàm số $y = 2x - 1$ có đồ thị là hình nào trong bốn hình sau?



Câu 33.

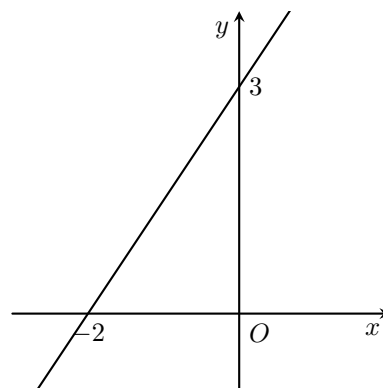
Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị là hình bên. Tìm a và b .

A. $a = -2$ và $b = 3$.

B. $a = -\frac{3}{2}$ và $b = 2$.

C. $a = -3$ và $b = 3$.

D. $a = \frac{3}{2}$ và $b = 3$.



Câu 34.

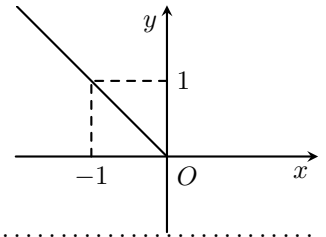
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |x|$.

B. $y = -x$.

C. $y = |x|$ với $x < 0$.

D. $y = -x$ với $x < 0$.

**Câu 35.**

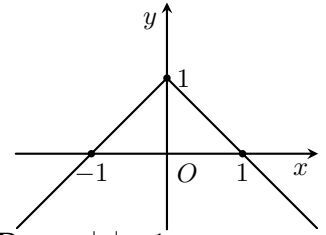
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |x|$.

B. $y = |x| + 1$.

C. $y = 1 - |x|$.

D. $y = |x| - 1$.

**Câu 36.**

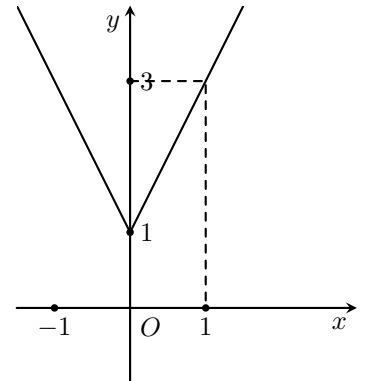
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |x| + 1$.

B. $y = 2|x| + 1$.

C. $y = |2x + 1|$.

D. $y = |x + 1|$.

**Câu 37.**

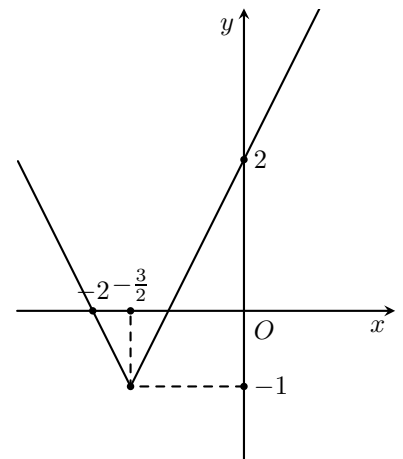
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |2x + 3|$.

B. $y = |2x + 3| - 1$.

C. $y = |x - 2|$.

D. $y = |3x + 2| - 1$.



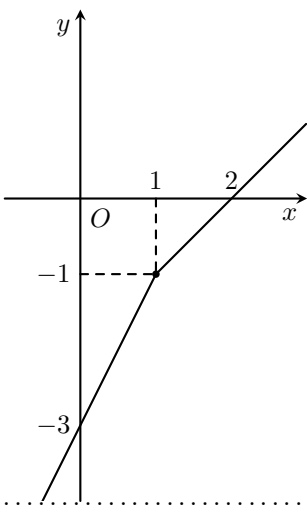
.....

.....

.....

Câu 38.

Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.
- B. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ x - 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.
- C. $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.
- D. $y = |x - 2|$.

.....

.....

.....

.....

Câu 39. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = |2x - 1|$. C. $y = 1 - 2x$. D. $y = -|2x - 1|$.

.....

.....

.....

.....

Câu 40. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

- A. $y = |4x + 3|$. B. $y = |4x - 3|$. C. $y = |-3x + 4|$. D. $y = |3x + 4|$.

.....

.....

.....

.....

BÀI 3.

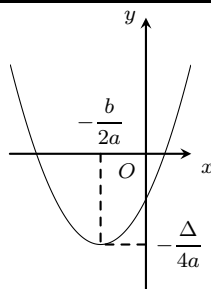
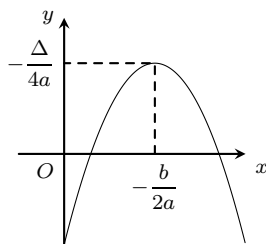
HÀM SỐ BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.
Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ được gọi là một **Parabol**.

SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$																	
$a > 0$	$a < 0$																
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$-\frac{\Delta}{4a}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> — Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. — Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>fy</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{\Delta}{4a}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> — Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. — Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	fy	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$														
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$														
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$														
fy	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$														
																	
— Tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. — Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.																	

Đặc biệt

- Khi $a > 0$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ tại $x = -\frac{b}{2a}$.
- Khi $a < 0$ hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ tại $x = -\frac{b}{2a}$.

CÁC BƯỚC VẼ PARABOL: $(P) : y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

B1. Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

B2. Xác định trục đối xứng $\Delta : x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.

B3. Lập bảng giá trị, xác định các điểm thuộc (P) .

B4. Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để nối các điểm đó lại.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = -x^2 + bx + 2$ có đồ thị là parabol (P) . Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho, biết rằng (P) có đỉnh nằm trên đường thẳng $x = -2$.

Lời giải.

Vì đỉnh của parabol nằm trên đường thẳng $x = -2$ nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow \frac{-b}{2 \cdot (-1)} = -2 \Leftrightarrow b = -4$. Khi đó ta có $(P) : y = -x^2 - 4x + 2$.

— Bảng biến thiên

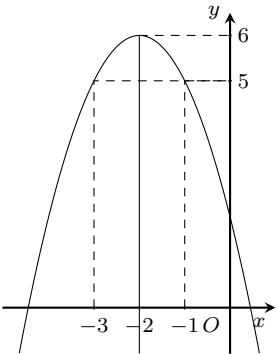
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	6	$+\infty$

— Vẽ đồ thị hàm số.

Tọa độ đỉnh của parabol (P) là $I(-2; 6)$.
Trục đối xứng $\Delta : x = -2$, bề lõm hướng xuống dưới.
Bảng giá trị xác định các điểm thuộc (P) :

x	-3	-2	-1
y	5	6	5

Đồ thị hàm số



□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = -2x^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) . Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho, biết rằng (P) đi qua điểm $A(1; -2)$ và hoành độ của đỉnh là 2.

Lời giải.

Vì hoành độ đỉnh của parabol là 2 nên $-\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow -\frac{b}{2 \cdot (-2)} = 2 \Leftrightarrow b = 8$. Khi đó $(P) : y = -2x^2 + 8x + c$.

Mặt khác (P) đi qua điểm $A(1; -2)$ nên $-2 = -2 \cdot (1)^2 + 8 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -8$.

Vậy $(P) : y = -2x^2 + 8x - 8$.

— Bảng biến thiên

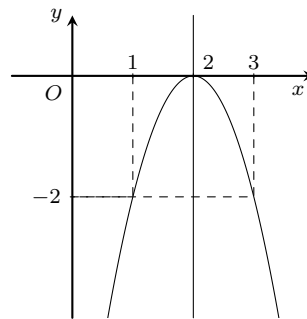
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

— Vẽ đồ thị hàm số.

Tọa độ đỉnh của parabol (P) là $I(2; 0)$.Trục đối xứng $\Delta : x = 2$, bề lõm hướng xuống dưới.Bảng giá trị xác định các điểm thuộc (P):

x	1	2	3
y	-2	0	-2

Đồ thị hàm số



□

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = x^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P). Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho, biết rằng (P) có đỉnh $I(-1; -2)$.

Lời giải.

Vì (P) có đỉnh là $I(-1; -2)$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 & (1) \\ A \in (P). & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{b}{2 \cdot 1} = -1 \Leftrightarrow b = 2.$$

$$(2) \Leftrightarrow -2 = (-1)^2 + 2(-1) + c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Vậy } (P) : y = x^2 + 2x - 1.$$

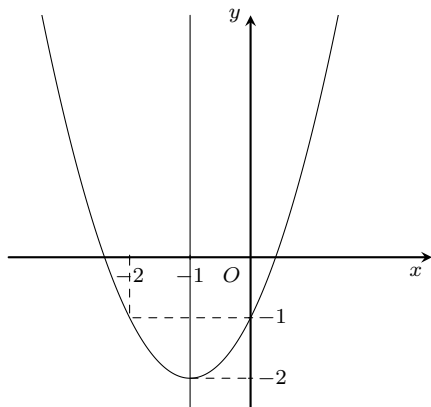
— Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$

— Vẽ đồ thị hàm số. Tọa độ đỉnh của parabol (P) là $I(-1; -2)$.Trục đối xứng $\Delta : x = -1$, bề lõm hướng lên trên.Bảng giá trị xác định các điểm thuộc (P):

x	-2	-1	0
y	-1	-2	-1

Đồ thị hàm số



□

△ THIẾU BTTL BỔ SUNG SAU

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}}{x}$.

- A. $\mathcal{D} = [-2; 2]$. B. $\mathcal{D} = (-2; 2) \setminus \{0\}$. C. $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{6-x} + \frac{2x+1}{1+\sqrt{x-1}}$.

- A. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [1; 6]$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 6)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x^2-4x+4}}$.

- A. $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x}{x - \sqrt{x} - 6}$.

- A. $\mathcal{D} = [0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}$. C. $\mathcal{D} = \{9\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

- A. $\mathcal{D} = [1; 4]$. B. $\mathcal{D} = (1; 4) \setminus \{2; 3\}$. C. $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2018}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 7. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{|x|}{|x-2| + |x^2 + 2x|}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$.

C. $\mathcal{D} = (-2; 0)$.

D. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

Câu 8. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x-4|}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

B. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{4\}$.

D. $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$.

Câu 9. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$.

A. $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \setminus \{-1\}$.

D. $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right]$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để hàm số $f(x) = (m+1)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 11. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = x^{2018} - 2017$.

B. $y = \sqrt{2x+3}$.

C. $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$.

D. $y = |x+3| + |x-3|$.

Câu 12. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = |x+1| + |x-1|$.

B. $y = |x+3| + |x-2|$.

C. $y = 2x^3 - 3x$.

D. $y = 2x^4 - 3x^2 + x$.

Câu 13. Trong các hàm số $y = |x+2| - |x-2|$, $y = |2x+1| + \sqrt{4x^2-4x+1}$, $y = x(|x-2|)$, $y = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$ có bao nhiêu hàm số lẻ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & ; x \leq -2 \\ |x| & ; -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & ; x \geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ. B. $f(x)$ là hàm số chẵn.
C. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ. D. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

Câu 15. Tìm điều kiện của tham số để các hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn.

- A. a tùy ý, $b = 0$, $c = 0$. B. a tùy ý, $b = 0$, c tùy ý. C. a, b, c tùy ý. D. a tùy ý, b tùy ý, $c = 0$.

Câu 16. Hàm số $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$ khi

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m \geq 1$. C. $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 1$. D. $m \geq 2$ hoặc $m < 1$.

Câu 17. Hàm số $y = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1}} - 1$ có tập xác định là

- A. $[-2; -1) \cup (1; 3]$. B. $(-2; 1] \cup [1; 3)$.
C. $[-2; 3] \setminus \{1\}$. D. $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3]$.

Câu 18. Hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$ có tập xác định là

- A. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. B. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.
C. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$. D. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$.

Câu 19. Cho hai hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$ và $g(x) = -x^4 + x^2 + 1$. Khi đó

- A. $f(x)$ và $g(x)$ cùng chẵn. B. $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ.
C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. D. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ chẵn.

Câu 20. Hàm số $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x|-2}}$ có tập xác định là

- A. $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. C. $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$. D. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 21. Hàm số $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$ khi

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m \geq 1$.

C. $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 1$.

D. $m \geq 2$ hoặc $m < 1$.

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\sqrt{x+2}$ là

A. -4 .

B. -3 .

C. -2 .

D. -1 .

Câu 23. Tìm m hàm số $y = \frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

A. $m \geq 1$.

B. $m < 0$.

C. $m > 2$.

D. $m \leq 3$.

Câu 24. Hàm số nào trong các hàm số sau không là hàm số chẵn ?

A. $y = \frac{x^2+1}{|2-x|+|2+x|}$.

B. $y = |1+2x| + |1-2x|$.

C. $y = \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} + 5$.

D. $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$.

Câu 25. Hàm số nào trong các hàm số sau là hàm số lẻ

A. $y = |x-1| + |x+1|$.

B. $y = \frac{x^2+1}{x}$.

C. $y = \frac{1}{x^4-2x^2+3}$.

D. $y = 1-3x+x^3$.

Câu 26 (0D2B1-2). Hàm số $y = \sqrt{x^2-x-20} + \sqrt{6-x}$ có tập xác định là

A. $(-\infty; -4) \cup (5; 6]$.

B. $(-\infty; -4) \cup (5; 6)$.

C. $(-\infty; -4) \cup [5; 6]$.

D. $(-\infty; -4) \cup [5; 6)$.

Câu 27. Hàm số $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x|-2}}$ có tập xác định là

A. $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

D. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = |x+2| + |x-2|$ và $g(x) = x^3 + 5x$. Khi đó

A. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ chẵn.

D. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

.....

Câu 29. Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải hàm số chẵn

- A. $y = |x - 5| + |x + 5|$. B. $y = x^4 - x^2 + 12$. C. $y = |1 - x| + |x + 1|$. D. $y = |x^2 - 1| + x$.
-

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào giảm trên khoảng $(0; 1)$?

- A. $y = x^2$. B. $y = x^3$. C. $y = \frac{1}{x}$. D. $y = \sqrt{x}$.
-

Câu 31. Hàm số $y = x(1 - |x|)$ là hàm số

- A. chẵn. B. lẻ. C. không chẵn, không lẻ. D. vừa chẵn, vừa lẻ.
-

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Hệ thức nào sai?

- A. $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$. B. $f[f(f(x))] = f(x)$.
 C. $f(x+1) = f(x) + 1$. D. $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+2}$.
-

Câu 33. Cho $(P) : y = x^2 - 4x + 3$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 4)$. B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 4)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$. D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.
-

Câu 34. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đi qua điểm $M(1; 3)$ và trục đối xứng $x = 3$?

- A. $y = -x^2 + 6x$. B. $y = x^2 + 3x - 1$. C. $y = x^2 + 2x - 2$. D. $y = -x^2 + 6x - 2$.
-

Câu 35. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) . Khi đó, tọa độ đỉnh của (P) là

- A. $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$. B. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{a}\right)$. C. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. D. $I\left(\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{2a}\right)$.
-

Câu 36. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (P) . Tọa độ đỉnh của (P) là

- A. $(0; 0)$. B. $(1; -1)$. C. $(-1; 3)$. D. $(2; 0)$.
-

Câu 37. Cho hàm số $y = 2x^2 + 6x + 3$ có đồ thị (P) . Trục đối xứng của (P) là

- A. $x = -\frac{3}{2}$. B. $y = -\frac{3}{2}$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P) . Trục đối xứng của (P) là

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Câu 39. Parabol $y = 2x^2 + x + 2$ có đỉnh là

- A. $I\left(\frac{1}{4}; \frac{19}{8}\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$. C. $I\left(\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$. D. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{15}{8}\right)$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 41. Đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 7$. Chọn khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 43. Parabol $y = 2x^2 + 3x + 1$ nhận đường thẳng

- A. $x = \frac{3}{2}$ làm trục đối xứng. B. $x = -\frac{3}{4}$ làm trục đối xứng.
C. $x = -\frac{3}{2}$ làm trục đối xứng. D. $x = \frac{3}{4}$ làm trục đối xứng.

Câu 44. Parabol $y = x^2 - 4x + 4$ có đỉnh là

- A. $I(1; 1)$. B. $I(2; 0)$. C. $I(-1; 1)$. D. $I(-1; 2)$.

Câu 45. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. y tăng trên $(1; +\infty)$. B. y giảm trên $(1; +\infty)$. C. y giảm trên $(-\infty; 1)$. D. y tăng trên $(3; +\infty)$.

Câu 46. Hàm số nào sau đây nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$?

- A. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$. B. $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$. C. $y = \sqrt{2}(x+1)^2$. D. $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$.

Câu 47. Hàm số nào sau đây đồng biến trong khoảng $(-1; +\infty)$?

- A. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$. B. $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$. C. $y = \sqrt{2}(x+1)^2$. D. $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Trong mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

- A. y tăng trên $(0; +\infty)$. B. y giảm trên $(-\infty; 1)$.
C. Đồ thị y có đỉnh $I(1; 0)$. D. y tăng trên $(-1; +\infty)$.

Câu 49. Tìm tập xác định của hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$. D. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.

Câu 50. Cho $(P): y = x^2 - 2x + 3$. Tìm mệnh đề **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$. B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$. D. Hàm số nghịch biến $(-\infty; 2)$.

Câu 51. Cho hàm số $y = 2x^2 - x + 3$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số

- A. $M(2; 1)$. B. $M(-1; 1)$. C. $M(2; 3)$. D. $M(0; 3)$.

Câu 52. Parabol $y = x^2 - 4x + 4$ có đỉnh là

- A. $I(1; 1)$. B. $I(2; 0)$. C. $I(-1; 1)$. D. $I(-1; 2)$.

Câu 53. Cho $(P): y = x^2 - 4x + 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 4)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 4)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
 D. Hàm số nghịch biến $(-\infty; 2)$.

Câu 54. Parabol $y = x^2 - 3x + 2$ có đỉnh I và cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt M, N . Tính diện tích S của tam giác IMN ?

- A. $S = 1$.
 B. $S = \frac{1}{5}$.
 C. $S = \frac{1}{8}$.
 D. $S = \frac{1}{4}$.

Câu 55. Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị đi qua điểm $A(0; 6)$. Tính giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$.

- A. $P = 0$.
 B. $P = -3$.
 C. $P = 5$.
 D. $P = 9$.

Câu 56. Tính khoảng cách d ngắn nhất từ đỉnh I của parabol $y = 3x^2 - 6mx + 4m^2 - 2m + 4$ đến trục Ox .

- A. $d = 1$.
 B. $d = 2$.
 C. $d = 3$.
 D. $d = 4$.

Câu 57. Tính khoảng cách d ngắn nhất từ đỉnh I của parabol $y = x^2 - 4mx + 3m^2 - 4m - 2$ đến trục Ox .

- A. $d = 1$.
 B. $d = 2$.
 C. $d = 3$.
 D. $d = 4$.

Câu 58. Hàm số $y = x^2 - 4mx - 2x + 13m + \sqrt{5}$ luôn đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(m^2 + 4m + 4; +\infty)$.
 B. $(m^2 - 3m + 1; +\infty)$.
 C. $(m^2 - m + 2; +\infty)$.
 D. $(m^2 + m + 2; +\infty)$.

Câu 59. Tìm m để hàm số $y = -x^2 - 4mx + 4m - 9$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- A. $m \leq 2$.
 B. $m \geq -1$.
 C. $m > 1$.
 D. $m < 1$.

Câu 60. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 8x + 5m - 24$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 6]$ bằng -1

- A. $m = 1,5$.
 B. $m = 2,5$.
 C. $m = 1,4$.
 D. $m = 5$.

Câu 61. Cho hàm số $y = -x^2 + 5x - 4$. Hàm số có bảng biến thiên nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{9}{4}$	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$

B.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

D.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$-\infty$

Câu 62. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = -\frac{3}{2}$.

B. $T = \frac{1}{2}$.

C. $T = \frac{9}{2}$.

D. $T = \frac{3}{2}$.

Câu 63.

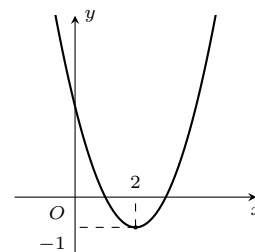
Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m < 1$.

B. $m > 3$.

C. $m = -1, m = 3$.

D. $-1 < m < 0$.



Câu 64. Cho $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

A. $m = 7$.

B. $m = -7$.

C. $m = 1, m = -7$.

D. $m = -1$.

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình một ẩn

Khái niệm **phương trình** thực ra đã có trong chương trình toán bậc THCS, bài này chỉ muốn trình bày lại theo cách nhìn của khái niệm **mệnh đề chứa biến**.

- Cho hai biểu thức $f(x)$ và $g(x)$. **Mệnh đề chứa biến** $f(x) = g(x)$ gọi là **phương trình một ẩn**.
- x gọi là **ẩn số** (hay gọi tắt là **ẩn**).
- $f(x)$ gọi là **vế trái**, $g(x)$ gọi là **vế phải**.
- Nếu có một số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 gọi là một nghiệm của phương trình.
- Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình gọi là tập nghiệm của phương trình đó.
- Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó, nghĩa là tìm tập nghiệm của phương trình.
- Nếu phương trình không có nghiệm nào thì ta nói phương trình vô nghiệm (hoặc có tập nghiệm là **rỗng**).

VÍ DỤ 1. Mệnh đề chứa biến $x(x - 2) = 2x - 3$ là phương trình một ẩn.

- Với $x = 3$ thế vào phương trình ta được $3(3 - 2) = 2 \cdot 3 - 3 \Leftrightarrow 3 = 3$ là một mệnh đề đúng, do đó $x = 3$ là một nghiệm của phương trình.
- Với $x = 4$ thế vào phương trình ta được $4(4 - 2) = 2 \cdot 4 - 3 \Leftrightarrow 8 = 5$ là một mệnh đề sai, nên $x = 4$ không là nghiệm của phương trình.

2. Phương trình tương đương và phương trình hệ quả

Cho hai phương trình $f(x) = g(x)$ (1) có tập nghiệm S_1 và $h(x) = k(x)$ (2) có tập nghiệm S_2 .

- Nếu tập nghiệm S_1, S_2 bằng nhau thì ta gọi (1) và (2) là hai phương trình tương đương. Kí hiệu

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = k(x).$$

- Nếu $S_1 \subset S_2$ thì ta gọi (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1). Kí hiệu $f(x) = g(x) \Rightarrow h(x) = k(x)$.

Ở phương trình hệ quả có thể xuất hiện khả năng có 1 giá trị $x_0 \in S_2$ nhưng $x_0 \notin S_1$ (Nghĩa là x_0 là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1)). Ta gọi x_0 là nghiệm ngoại lai.

3. Phép biến đổi tương đương

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương (gọi là phép biến đổi tương đương).

- ① Cộng hay trừ hai vế cùng một số hoặc cùng một biểu thức.
- ② Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Phương trình đóng vai trò quan trọng trong chương trình toán bậc THPT. Do đó việc nắm vững các phép biến đổi là cần thiết.
- Các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là **phép biến đổi tương đương**.
- Việc đặt điều kiện để được phép biến đổi tương đương đòi hỏi sự linh hoạt và nắm được bản chất vấn đề **"Không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình"**.
- Nếu chưa nắm rõ khi nào cần hoặc không cần đặt điều kiện cho phương trình, thì tốt hơn cả là cứ đặt điều kiện để an tâm.
- Nếu chưa thực sự biết một phép biến đổi nào đó có tương đương không, thì nên biến đổi thành phương trình hệ quả, sau đó thử các giá trị ẩn số tìm được vào phương trình đã cho để kết luận tập nghiệm của phương trình.
- Sau cùng, không được sử dụng tùy tiện các kí hiệu " $\Rightarrow$ " hoặc " $\Leftrightarrow$ " hoặc "để trống" trong các phép biến đổi phương trình này thành phương trình kia.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$.

Lời giải.

Phân tích lời giải Vài cách trình bày câu trả

① Ta có

$$\square \quad x^2 - x - 4 = x - 1 \Leftrightarrow \dots$$



Phương trình nào tương đương với $x^2 - x - 4 = x - 1$?

② Ta có $\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ hay $x = -1$.

Sử dụng " $\Leftrightarrow$ ", " $\Rightarrow$ " tùy tiện.

③ Ta có: $\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1$

$$\square \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3$$



Tại sao lại "để trống"?

④ Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1$$



Quá sai lầm!

Cách giải đúng

Cách 1: Không đặt điều kiện và sử dụng phép biến đổi **hệ quả**

— Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} &\Rightarrow x^2 - x - 4 = x - 1 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3. \end{aligned}$$

— Thử lại

- Với $x = -1$ phương trình đã cho trở thành $\frac{1+1-4}{\sqrt{-2}} = \sqrt{-2}$ không thỏa vì $\sqrt{-2}$ không tồn tại.
- Với $x = 3$ phương trình đã cho trở thành $\frac{9-3-4}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$ thỏa.

— Vậy phương trình có một nghiệm $x = 3$.

Cách 2: Đặt điều kiện và sử dụng phép biến đổi **tương đương**.

— Điều kiện $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

— Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1} &\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3.\end{aligned}$$

— So với điều kiện $x > 1$, phương trình đã cho có một nghiệm $x = 3$.

□

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình sau

a. $\frac{x^2 - 3x - 3}{\sqrt{x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

b. $\frac{x^2 - 5x - 3}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{x - 3}$

c. $\frac{2x}{x + 1} - \frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{4}{x^2 - 1}$

d. $1 + \frac{1 - 2x}{x^2 + x} = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x}$

.....

Bài đọc thêm

1. Điều kiện của một phương trình

Thực ra, việc tìm điều kiện của một phương trình không đơn giản như tìm tập xác định của hàm số, hoặc tìm điều kiện của ẩn số x để các vế của phương trình có nghĩa, nó còn mang ý nghĩa rộng hơn, đó là tìm điều kiện để trong phương trình dấu "=" có thể xảy ra được, và đôi khi cũng không nhất thiết phải tìm cho đến điều kiện của ẩn số x , điều này đòi hỏi sự linh hoạt. Ta xem các ví dụ sau

VÍ DỤ 3. Tìm điều kiện của phương trình $\frac{x - 3}{x - 2} = x + 1$.

Lời giải.

Điều kiện $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm điều kiện của phương trình $\sqrt{x - 1} = -x^3 + x^2 - x + 1$.

Lời giải.

— Biểu thức trong căn không âm nên ta có điều kiện của phương trình là $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (a)

— Mặt khác, với $x \geq 1$ thì vế trái của phương trình không âm, nên để dấu "=" trong phương trình có thể xảy ra, ta có thêm điều kiện vế phải của phương trình cũng không âm, nghĩa là

$$\begin{aligned}-x^3 + x^2 - x + 1 \geq 0 &\Leftrightarrow -x^3 - x + x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x(x^2 + 1) + (x^2 + 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1)(-x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 1 \geq 0 \text{ (vì } (x^2 + 1) > 0) \Leftrightarrow x \leq 1. \text{ (b)}\end{aligned}$$

— Hai điều kiện (a) và (b) cho điều kiện chung của phương trình là $x = 1$.

(Hơn nữa nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình, nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.)

□

VÍ DỤ 5. Tìm điều kiện của phương trình $\sqrt{(x-1)^2(-x-3)} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Lời giải sai:

Điều kiện:

$$\begin{cases} (x-1)^2(-x-3) \geq 0 & (*) \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3 \geq 0 \text{ (vì } (x-1)^2 \geq 0) \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

(Nghĩa là phương trình vô nghiệm)

Nhận xét Sai lầm ở biến đổi điều kiện (*) $A \cdot B \geq 0$.

— Trong Ví dụ 2. $A = (x^2 + 1) > 0$ và $B = -x + 1$ nên
 $A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1) \cdot (-x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 1 \geq 0$ là **ĐÚNG**.

— Trong Ví dụ 3. $A = (x-1)^2 \geq 0$ và $B = -x-3$ nên
 $A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (-x-3) \geq 0 \Leftrightarrow -x-3 \geq 0$ là **SAI**.



$$A^2 \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = 0 \\ B \text{ có nghĩa} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} B \geq 0 \\ A \text{ có nghĩa} \end{cases}.$$

Lời giải đúng.

Điều kiện

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x-1)^2(-x-3) \geq 0 & (*) \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -x-3 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy điều kiện của phương trình là $x = 1$.

(Hơn nữa nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình, nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.) □

VÍ DỤ 6. Xét phương trình $\frac{x^3 + 2x - 3}{x^3 - x + \sqrt{x-1}} = 1$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^3 - x + \sqrt{x-1} \neq 0. \end{cases} \quad (*)$

Việc giải điều kiện (*) còn phức tạp hơn việc giải phương trình đã cho. Do vậy không cần thiết phải giải điều kiện (*), hãy để nguyên điều kiện này và giải phương trình để tìm giá trị của x , sau đó xem những giá trị x nào thỏa điều kiện (*) thì giá trị đó là nghiệm của phương trình. □

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là **phép biến đổi tương đương**.

Các phép biến đổi sau là *phép biến đổi tương đương*.

3. Phép cộng (trừ) hai vế với cùng một biểu thức

Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D}$ và $h(x)$ là biểu thức xác định trên $\mathcal{D}$. Khi đó $f(x) = g(x)$ và $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ là hai phương trình tương đương.

Ta viết $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một biểu thức ta được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Như vậy ta có

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0.$$

Chuyển $g(x)$ sang vế trái là phép biến đổi **tương đương**.

$$f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) = g(x).$$

Chuyển $h(x)$ từ vế này sang vế kia là phép biến đổi **tương đương**.

VÍ DỤ 7. Giải phương trình $(x + \sqrt{x-1})x = 3x + 4 + x\sqrt{x-1}$.

Lời giải.

Lời giải sai

Ta có

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x-1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x-1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \quad (1) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3x + 4 \quad (2) \quad (\text{đơn giản cho } x\sqrt{x-1}) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

Cách giải này **SAI** vì tập xác định của phương trình (1) là $[1; +\infty)$, còn tập xác định của phương trình (2) là $\mathbb{R}$. Phép biến đổi *đơn giản* cho $x\sqrt{x-1}$ đã làm thay đổi điều kiện $x \geq 1$ của phương trình (1) nên đây không là phép biến đổi tương đương.

Lời giải đúng

Cách 1. Đặt điều kiện để sử dụng phép biến đổi **tương đương**.

— Điều kiện $x \geq 1$.

— Ta có

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x-1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x-1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

— So với điều kiện $x \geq 1$, phương trình đã cho có một nghiệm $x = 4$.

Cách 2. Không đặt điều kiện và sử dụng phép biến đổi **hệ quả**.

— Ta có

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x-1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Rightarrow x^2 + x\sqrt{x-1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

— Với $x = -1$ phương trình đã cho trở thành $(-1 + \sqrt{-2})(-1) = -3 + 4 - \sqrt{-2}$ vô nghĩa vì $\sqrt{-2}$ không tồn tại. Suy ra loại $x = -1$.

— Với $x = 4$ phương trình đã cho trở thành $(4 + \sqrt{3})(4) = 12 + 4 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 16 = 16$ thỏa. Suy ra nhận $x = 4$.

— Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 4$.

Chú thích: $x = -1$ gọi là nghiệm ngoại lai.

⚠️ Chú ý 1. $f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad (1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (2)$. Nếu hai phương trình (1) và (2) không cùng tập xác định thì đơn giản hai vế cho $h(x)$ là **SAI**.

□

VÍ DỤ 8. Giải phương trình $(x + \sqrt{x^2+1})x = 3x + 4 + x\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x^2+1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x^2+1} \\ \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x^2+1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x^2+1} \quad (1) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3x + 4 \quad (2) \quad (\text{đơn giản cho } x\sqrt{x^2+1}) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

Cách giải này **ĐÚNG** vì tập xác định của phương trình (1) và (2) cùng là $\mathbb{R}$. Phép biến đổi *đơn giản* cho $x\sqrt{x^2+1}$ không làm thay đổi điều kiện $x \in \mathbb{R}$ của phương trình (1) nên đây là phép biến đổi **tương đương**.

△ Chú ý 2. $f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad (1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (2)$. Nếu hai phương trình (1) và (2) có cùng tập xác định thì đơn giản hai vế cho $h(x)$ là **ĐÚNG**.

□

4. Phép nhân (chia) hai vế với cùng một biểu thức khác 0.

Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D}$ và $h(x)$ là biểu thức xác định trên $\mathcal{D}$, thỏa $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}$. Khi đó $f(x) = g(x)$ và $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ là hai phương trình tương đương.

Ta viết $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$.

Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một biểu thức khác 0 ta được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Như vậy ta có

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

(Với điều kiện hai phương trình có cùng tập xác định $\mathcal{D}$ và $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}$.)

Đơn giản hai vế cho $h(x) \neq 0$ là phép biến đổi **tương đương**.

$$\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot h(x).$$

(Với điều kiện hai phương trình có cùng tập xác định $\mathcal{D}$ và $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}$.)

$$f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) = g(x).$$

Nhân hai vế cho $h(x) \neq 0$ là phép biến đổi **tương đương**.

VÍ DỤ 9. Giải phương trình $x(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - x - 3)$.

Lời giải.

Lời giải sai

Vì $\sqrt{x} > 0$ nên $\sqrt{x} + 1 > 1$. Do đó $\sqrt{x} + 1 \neq 0$. Vậy

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x} + 1) &= (\sqrt{x} + 1)(x^2 - x - 3) \quad (1) \\ \Leftrightarrow x &= x^2 - x - 3 \quad (2) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3. \end{aligned}$$

Cách giải này **SAI** vì mặc dù $\sqrt{x} + 1 \neq 0, \forall x \geq 0$, nhưng tập xác định của phương trình (1) là $[0; +\infty)$, còn tập xác định của phương trình (2) là $\mathbb{R}$. Do đó phép biến đổi *đơn giản* cho $(\sqrt{x} + 1)$ đã làm thay đổi điều kiện $x \geq 0$ của phương trình (1) nên đây không là phép biến đổi tương đương.

Lời giải đúng

— Điều kiện $x \geq 0$, khi đó $\sqrt{x} + 1 \neq 0$.

— Do vậy

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x} + 1) &= (\sqrt{x} + 1)(x^2 - x - 3) \\ \Leftrightarrow x &= x^2 - x - 3 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3. \end{aligned}$$

— So với điều kiện $x \geq 0$, phương trình đã cho có một nghiệm $x = 3$.

□

VÍ DỤ 10. Giải phương trình $x^3 + 2x = (5x + 8)(x^2 + 2)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^3 + 2x &= (5x + 8)(x^2 + 2) \Leftrightarrow x(x^2 + 2) = (5x + 8)(x^2 + 2) \quad (1) \\ \Leftrightarrow x &= 5x + 8 \quad (2) \quad (\text{vì } x^2 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow x &= -2 \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.} \end{aligned}$$

Cách giải này **ĐÚNG** vì tập xác định của phương trình (1) và (2) cùng là $\mathbb{R}$, đồng thời $x^2 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó phép biến đổi *đơn giản* cho $(x^2 + 2)$ không làm thay đổi điều kiện $x \in \mathbb{R}$ của phương trình (1) nên đây là phép biến đổi tương đương. $\square$

VÍ DỤ 11. Giải phương trình $5x^3 - 20x = x^4 - 16$.

Lời giải.

Lời giải sai

Ta có

$$\begin{aligned} 5x^3 - 20x = x^4 - 16 &\Leftrightarrow 5x(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &\Leftrightarrow 5x = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

Cách giải này **SAI** vì mặc dù các phép biến đổi không làm thay đổi tập xác định $\mathbb{R}$ của phương trình ban đầu nhưng biểu thức $(x^2 - 4)$ không khác 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải đúng

Ta có

$$\begin{aligned} 5x^3 - 20x = x^4 - 16 &\Leftrightarrow 5x(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ hay } x = 1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

⚠ Chú ý 3.

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \quad (1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (2).$$

Nếu hai phương trình (1) và (2) không cùng tập xác định, hoặc $h(x)$ không khác 0 với mọi x thuộc tập xác định của phương trình (1) thì đơn giản hai vế cho $h(x)$ là **SAI**. Khi đó ta biến đổi (Đặt $h(x)$ làm nhân tử chung)

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \Leftrightarrow h(x) [f(x) - g(x)] = 0 \text{ là } \mathbf{ĐÚNG}$$

$\square$

VÍ DỤ 12. Giải phương trình $\frac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = x - 2$.

Lời giải.

Vì $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = x - 2 &\Leftrightarrow x^3 - 3 = (x^2 + 1)(x - 2) \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3 = x^3 - 2x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

⚠ Chú ý 4. Nếu $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì ta có $\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) \cdot g(x)$.

$\square$

VÍ DỤ 13. Giải phương trình $\frac{2x - 3}{x} = x - 2$.

Lời giải.

Cách 1.

Điều kiện $x \neq 0$. Khi đó

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{2x - 3}{x} = x - 2 &\Leftrightarrow 2x - 3 = x(x - 2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 3 \text{ (thỏa) } x \neq 0. \end{aligned}$$

Cách 2. Ta có

$$\frac{2x - 3}{x} = x - 2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2x - 3 &= x(x - 2) \quad (2) \quad (\text{vì } x = 0 \text{ không là nghiệm của phương trình}) \\ \Leftrightarrow 2x - 3 &= x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 3. \end{aligned}$$

□

Nhận xét

- Phương trình (1) có điều kiện $x \neq 0$.
- Thế $x = 0$ vào phương trình (2) ta được $-3 = 0$ là mệnh đề **sai**, nên $x = 0$ không là nghiệm của (2), nghĩa là phương trình (2) hiển nhiên có $x \neq 0$. Mà nếu phương trình (2) có $x \neq 0$ thì $\frac{2x-3}{x} = x-2 \Leftrightarrow 2x-3 = x(x-2)$ là phép biến đổi tương đương.
- Có thể hiểu cách khác $x = 0$ không thuộc tập nghiệm của (1) và (2), nên (1) và (2) là hai phương trình tương đương, do đó không cần điều kiện $x \neq 0$ ta vẫn có phép biến đổi $\frac{2x-3}{x} = x-2 \Leftrightarrow 2x-3 = x(x-2)$ là **ĐÚNG**.

⚠ Chú ý 5. Nếu mọi nghiệm của mẫu số $h(x)$ không là nghiệm của tử số $f(x)$ thì không cần điều kiện $h(x) \neq 0$ ta vẫn được phép biến đổi tương đương

$$\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) \cdot g(x).$$

VÍ DỤ 14. Giải phương trình $\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x - 2$.

Nhận xét

- Cho mẫu số bằng 0: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 3$.
- Thế $x = -1$ vào tử số $(-1)^3 + 3 \cdot (-1) = -4 \neq 0$ nên $x = -1$ không là nghiệm của tử số.
- Thế $x = 3$ vào tử số $3^3 + 3 \cdot 3 = 36 \neq 0$ nên $x = 3$ không là nghiệm của tử số.
- Mọi nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử nên không cần điều kiện mẫu khác 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x - 2 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x &= (x^2 - 2x - 3)(x - 2) \quad (\text{Vì } x = -1, x = 3 \text{ không là nghiệm}) \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x &= x^3 - 2x^2 - 3x - 2x^2 + 4x + 6 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 6 &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = -\frac{3}{2} \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.} \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 15. Giải phương trình $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = x - 2$.

Nhận xét

- Cho mẫu số bằng 0: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Thế $x = 1$ vào tử số $2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm của tử số.
- Vậy bài toán này phải có điều kiện mẫu số khác 0.

Lời giải.

- Điều kiện $x \neq 1$. Khi đó
- Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = x - 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 &= (x - 1)(x - 2) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 &= x^2 - 2x - x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 1. \end{aligned}$$

— So với điều kiện $x \neq 1$, phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$.

□

⚠ Chú ý 6. Nếu có một nghiệm của mẫu số $h(x)$ là nghiệm của tử số $f(x)$ thì phải đặt điều kiện $h(x) \neq 0$.

$$\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \neq 0 \\ f(x) = h(x) \cdot g(x). \end{cases}$$

VÍ DỤ 16. Giải phương trình $\frac{2x^3 - x + 14}{2x^2 + 3x - 2} = x - 7$.

Nhận xét

— Cho mẫu số bằng 0: $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hay $x = \frac{1}{2}$.

— Thế $x = -2$ vào tử số $2 \cdot (-2)^3 - (-2) + 14 = 0$ nên $x = -2$ là nghiệm của tử số.

— Có một nghiệm $x = -2$ của mẫu là nghiệm của tử nên phải có điều kiện mẫu khác 0.

Lời giải.

— Điều kiện $2x^2 + 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ và $x \neq \frac{1}{2}$. Khi đó

— Ta có

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - x + 14}{2x^2 + 3x - 2} &= x - 7 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - x + 14 &= (2x^2 + 3x - 2)(x - 7) \\ \Leftrightarrow 11x^2 + 22x &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = -2. \end{aligned}$$

— So với điều kiện $x \neq -2$ và $x \neq \frac{1}{2}$, phương trình đã cho có một nghiệm $x = 0$.

□

VÍ DỤ 17. Giải phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - x - 6) = 0$.

Lời giải.

Lời giải sai

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2}(x^2 - x - 6) &= 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \quad (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Cách giải này **sai** vì

— Phương trình (1) có điều kiện $x \geq 2$.

— Phương trình (*) có điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

— Phép biến đổi đã làm thay đổi điều kiện của phương trình ban đầu nên đây không là phép biến đổi tương đương.

Lời giải đúng

— Điều kiện $x \geq 2$. Khi đó

— Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2}(x^2 - x - 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

— So với điều kiện $x \geq 2$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 3$.

□

⚠ Chú ý 7.

— Đặt điều kiện cho phương trình $f(x) \cdot g(x) = 0$. Khi đó

— $f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Điều kiện của phương trình $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = x + 3$ là

- A. $x = 3$. B. $x \neq 3$. C. $x > 3$. D. $x \geq 3$.

Câu 2. Trong bốn phép biến đổi sau, phép biến đổi nào là phép biến đổi tương đương?

- A. $\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. B. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$.
C. $x + \sqrt{x-4} = 3 + \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x = 3$. D. $x - \sqrt{x-5} = 3 \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{x-5}$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\frac{x+2}{x} = \frac{2x+3}{2x-4}$ là

- A. $x = -\frac{3}{8}$. B. $x = \frac{3}{8}$. C. $x = \frac{8}{3}$. D. $x = -\frac{8}{3}$.

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x-1}$ là

- A. $\left\{\frac{1}{2}; -6\right\}$. B. $\left\{-\frac{1}{2}; 6\right\}$. C. $\left\{-\frac{1}{4}; 3\right\}$. D. $\left\{\frac{1}{4}; -3\right\}$.

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $(x^2 + 1)(10x^2 - 31x + 24) = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6. Tìm điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$.

- A. $x \neq 4$. B. $x \in \mathbb{R}$. C. $x \neq \pm 4$. D. $x \neq 4$.

Câu 7. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x+1} = x+1$.

- A. $x \geq 1$. B. $x \geq -1$. C. $x \leq 1$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 8. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x}{x^2+1} - 5 = \frac{3}{x^2+1}$.

- A. $x \neq 1$. B. $x \neq -1$. C. $x \neq \pm 1$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 9. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$.

- A. $x > 2$. B. $x \neq \pm 2$. C. $x \geq 2$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 10. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$.

- A. $x \neq \pm 2; x \neq 0$. B. $x \geq 2$. C. $x > 2$. D. $x \neq 2; x \neq 0$.

Câu 11. Tìm điều kiện xác định của phương trình $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$.

- A. $x \neq 4$. B. $x \geq 4$. C. $x > 4$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 12. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x}{3-x} + \frac{1}{2x-1} = \frac{6-5x}{3x-2}$.

- A. $x > 3$. B. $x \geq 3$. C. $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3; x \neq \frac{3}{2}$. D. $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3; x \neq \frac{2}{3}$.

Câu 13. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-1} = 0$ là

- A. $x \geq 0$. B. $x > 0$ và $x^2-1 \geq 0$. C. $x > 0$. D. $x \geq 0$ và $x^2-1 > 0$.

Câu 14. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{3x-2} + \sqrt{4-3x} = 1$.

- A. $x > \frac{4}{3}$. B. $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$. C. $x \neq \frac{2}{3}; x \neq \frac{4}{3}$. D. $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Câu 15. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$.

A. $x > 3$.

B. $x \geq 2$.

C. $x \geq 1$.

D. $x \geq 3$.

Câu 16. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $3x + \sqrt{x-2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}$.

B. $\sqrt{x-1} = 3x \Leftrightarrow x-1 = 9x^2$.

C. $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2$.

D. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 17. Chỉ ra khẳng định sai.

A. $\sqrt{x-2} = 3\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x-2 = 0$.

B. $\sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4$.

C. $\frac{x(x-2)}{x-2} = 2 \Rightarrow x = 2$.

D. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 18. Chỉ ra khẳng định sai.

A. $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1 = 0$.

B. $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = 1$.

C. $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

D. $|x-2| = x+1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+1)^2$.

Câu 19. Chỉ ra khẳng định sai.

A. $\sqrt{x-2} = 3\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x-2 = 0$.

B. $\sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4$.

C. $|x-2| = 2x+1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (2x+1)^2$.

D. $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Câu 20. Phương trình $(x^2+1)(x-1)(x+1) = 0$ tương đương với phương trình

A. $x-1 = 0$.

B. $x+1 = 0$.

C. $x^2+1 = 0$.

D. $(x+1)(x-1) = 0$.

Câu 21. Phương trình $\frac{3x+1}{x-5} = \frac{16}{x-5}$ tương đương với phương trình

A. $\frac{3x+1}{x-5} + 3 = \frac{16}{x-5} + 3$.

B. $\frac{3x+1}{x-5} - \sqrt{2-x} = \frac{16}{x-5} - \sqrt{2-x}$.

C. $\frac{3x+1}{x-5} + \sqrt{2-x} = \frac{16}{x-5} + \sqrt{2-x}$.

D. $\frac{3x+1}{x-5} \cdot 2x = \frac{16}{x-5} \cdot 2x$.

Câu 22. Phương trình $(x-4)^2 = x-2$ là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây?

A. $x-4 = x-2$.

B. $\sqrt{x-2} = x-4$.

C. $\sqrt{x-4} = \sqrt{x-2}$.

D. $\sqrt{x-4} = x-2$.

Câu 23. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$.

A. $x > 2$.

B. $x \geq 7$.

C. $2 \leq x < 7$.

D. $2 \leq x \leq 7$.

Câu 24. Tập nghiệm T của phương trình $\sqrt{x^2-2x} = \sqrt{2x-x^2}$ là

A. $T = \{0\}$.

B. $T = \emptyset$.

C. $T = \{0; 2\}$.

D. $T = \{2\}$.

Câu 25. Tập nghiệm T của phương trình $\frac{\sqrt{x}}{x} = \sqrt{-x}$ là

A. $T = \{0\}$.

B. $T = \emptyset$.

C. $T = \{1\}$.

D. $T = \{-1\}$.

Câu 26. Cho phương trình $2x^2 - x = 0$ (1). Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình hệ quả của phương trình (1)?

A. $2x - \frac{x}{1-x} = 0$.

B. $4x^3 - x = 0$.

C. $(2x^2 - x)^2 = 0$.

D. $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Câu 27. Phương trình $x^2 = 3x$ tương đương với phương trình

A. $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$.

B. $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$.

C. $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$.

D. $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$.

Câu 28. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1$.

B. $\frac{x(x-1)}{(x-1)} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

C. $|3x-2| = x-3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0$.

D. $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow 3x-12 = 0$.

Câu 29. Khi giải phương trình $\sqrt{3x^2+1} = 2x+1$ (1), ta tiến hành các bước sau

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$3x^2 + 1 = (2x + 1)^2. \quad (2)$$

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được $x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -4$.

Bước 3: Khi $x = 0$, ta có $3x^2 + 1 > 0$. Khi $x = -4$, ta có $3x^2 + 1 > 0$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0; -4\}$.

Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Đúng.
- B. Sai ở bước 1.
- C. Sai ở bước 2.
- D. Sai ở bước 3.

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Khi giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5} = 2 - x$ (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$x^2 - 5 = (2 - x)^2. \qquad (2)$$

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được $4x = 9$.

Bước 3: $(2) \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{9}{4}$.

Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Đúng.
- B. Sai ở bước 1.
- C. Sai ở bước 2.
- D. Sai ở bước 3.

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Khi giải phương trình $|x - 2| = 2x - 3$ (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9. \qquad (2)$$

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

Bước 3: $(2) \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{5}{3}$.

Bước 4: Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{5}{3}$.

Cách giải trên sai từ bước nào?

- A. Sai ở bước 1.
- B. Sai ở bước 2.
- C. Sai ở bước 3.
- D. Sai ở bước 4.

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Khi giải phương trình $\frac{(x - 3)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2} = 0$ (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: $(1) \Leftrightarrow \frac{(x - 3)}{\sqrt{x} - 2}(x - 4) = 0.$ (2)

Bước 2: $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - 3)}{\sqrt{x} - 2} = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$

Bước 3: $\Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 4$.

Bước 4: Vậy phương trình có tập nghiệm là $T = \{3; 4\}$.

Cách giải trên sai từ bước nào?

- A. Sai ở bước 1.
- B. Sai ở bước 2.
- C. Sai ở bước 3.
- D. Sai ở bước 4.

.....

.....

.....

.....

Câu 33. $x = 9$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $\sqrt{2-x} = x$. B. $\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}}$. C. $\sqrt{2x+7} = x-4$. D. $\sqrt{14-2x} = x-3$.

Câu 34. Nghiệm của phương trình $\sqrt{x+3} = 1$ (nếu có) là

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = -3$. D. vô nghiệm.

Câu 35. Khi giải phương trình $\frac{(x-5)(x-4)}{\sqrt{x}-3} = 0$ (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: (1) $\Leftrightarrow \frac{(x-5)}{\sqrt{x}-3}(x-4) = 0$. (2)

Bước 2: $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-5)}{\sqrt{x}-3} = 0 \\ x-4 = 0 \end{cases}$

Bước 3: $\Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = 4$.

Bước 4: Vậy phương trình có tập nghiệm là $T = \{5; 4\}$.

Cách giải trên sai từ bước nào?

- A. Sai ở bước 1. B. Sai ở bước 2. C. Sai ở bước 3. D. Sai ở bước 4.

Câu 36. Khi giải phương trình $x + \frac{1}{x+2} = -\frac{2x+3}{x+2}$ (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: Điều kiện $x \neq 2$.

Bước 2: với điều kiện trên (1) $\Leftrightarrow x(x+2) + 1 = -(2x+3)$. (2)

Bước 3: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Bước 4: Vậy phương trình có tập nghiệm là $T = \{-2\}$.

Cách giải trên sai từ bước nào?

- A. Sai ở bước 1. B. Sai ở bước 2. C. Sai ở bước 3. D. Sai ở bước 4.

Câu 37. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

Câu 38. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $|x| = -x$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

Câu 39. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

Câu 40. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $|x-2| = 2-x$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

Câu 41. Phương trình $\sqrt{-x^2+10x-25} = 0$

- A. vô nghiệm. B. vô số nghiệm. C. mọi x đều là nghiệm. D. có nghiệm duy nhất.

Câu 42. Phương trình $\sqrt{2x+5} = \sqrt{-2x-5}$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = -\frac{5}{2}$. C. $x = -\frac{2}{5}$. D. $x = -\frac{2}{5}$.

Câu 43. Tập nghiệm của phương trình $x - \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 3$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{3\}$. C. $S = [3; +\infty)$. D. $S = \mathbb{R}$.

Câu 44. Tập nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x} = \sqrt{x-1} - 1$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{-1\}$. C. $S = \{0\}$. D. $S = \mathbb{R}$.

Câu 45. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2-3x+2) = 0$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{1; 2\}$.

Câu 46. Cho các phương trình $\sqrt{x-1} = 3$, (1) và $(\sqrt{x-1})^2 = (-3)^2$ (2). Chọn khẳng định **sai**?

- A. Phương trình (1) là phương trình hệ quả của phương trình (2).
 B. Phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).
 C. Phương trình (1) và phương trình (2) là hai phương trình tương đương.

D. Phương trình (2) vô nghiệm.

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + 6}{x - 2} = \frac{5x}{x - 2}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 48. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x - 1} = x - 1$ là

A. $\{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$.

B. $\{2 - \sqrt{2}\}$.

C. $\{2 + \sqrt{2}\}$.

D. $\emptyset$.

Câu 49. Số nghiệm của phương trình $x\sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 50. Hãy chỉ ra khẳng định sai?

A. $\sqrt{x - 1} = 2\sqrt{1 - x} \Leftrightarrow x - 1 = 0$.

B. $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} = 0$.

C. $|x - 2| = x + 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = (x + 1)^2$.

D. $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1, x > 0$.

Câu 51. Tập nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{\sqrt{x - 1}} = \frac{4}{\sqrt{x - 1}}$ là

A. $S = \{2\}$.

B. $S = \{-2; 2\}$.

C. $S = \{-2\}$.

D. $S = \emptyset$.

Câu 52. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3 - x} + x = \sqrt{3 - x} + 4$ là

A. $S = \{3\}$.

B. $S = \{3; 4\}$.

C. $S = \{4\}$.

D. $S = \emptyset$.

Câu 53. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $x^2 - 4 = 0$?

A. $(2 + x)(-x^2 + 2x + 1) = 0$.

B. $(x - 2)(x^2 + 3x + 2) = 0$.

C. $\sqrt{x^2 - 3} = 1$.

D. $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Câu 54. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $x^2 - 3x = 0$?

A. $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$.

B. $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$.

C. $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$.

D. $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$.

Câu 55. Phương trình nào sau đây **không** tương đương với phương trình $x + \frac{1}{x} = 1$?

A. $x^2 + \sqrt{x} = -1$.

B. $|2x-1| + \sqrt{2x+1} = 0$.

C. $x\sqrt{x-5} = 0$.

D. $7 + \sqrt{6x-1} = -18$.

Câu 56. Chọn cặp phương trình tương đương trong các cặp phương trình sau

A. $x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1}$ và $x = 1$.

B. $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$ và $x = 1$.

C. $\sqrt{x}(x+2) = \sqrt{x}$ và $x+2 = 1$.

D. $x(x+2) = x$ và $x+2 = 1$.

Câu 57. Chọn cặp phương trình tương đương trong các cặp phương trình sau

A. $2x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3}$ và $2x = 1$.

B. $\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0$ và $x = 0$.

C. $\sqrt{x+1} = 2-x$ và $x+1 = (2-x)^2$.

D. $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$ và $x = 1$.

Câu 58. Chọn cặp phương trình **không** tương đương trong các cặp phương trình sau

A. $x+1 = x^2-2x$ và $x+2 = (x-1)^2$.

B. $3x\sqrt{x+1} = 8\sqrt{3-x}$ và $6x\sqrt{x+1} = 16\sqrt{3-x}$.

C. $x\sqrt{3-2x} + x^2 = x^2 + x$ và $x\sqrt{3-2x} = x$.

D. $\sqrt{x+2} = 2x$ và $x+2 = 4x^2$.

Câu 59. Tìm giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương $2x^2 + mx - 2 = 0$ (1) và $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0$ (2).

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -2$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (1) và $(m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$ (2).

A. $m = -5$.

B. $m = -5, m = 4$.

C. $m = 4$.

D. $m = 5$.

Câu 61. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1$.

B. $\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1$.

C. $|3x - 2| = x - 3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0.$

D. $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow 3x - 12 = 0.$

Câu 62. Cho phương trình $2x^2 - x = 0$. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào **không** phải là hệ quả của phương trình đã cho?

A. $2x - \frac{x}{1-x} = 0.$

B. $4x^3 - x = 0.$

C. $(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0.$

D. $2x^3 + x^2 - x = 0.$

Câu 63. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2x - x^2}$ là

A. $S = \{0\}.$

B. $S = \emptyset.$

C. $S = \{0; 2\}.$

D. $S = \{2\}.$

Câu 64. Phương trình $x(x^2 - 1)\sqrt{x-1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 65. Phương trình $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 66. Phương trình $\sqrt{(x-3)^2(5-3x)} + 2x = \sqrt{3x-5} + 4$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 67. Phương trình $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 68. Phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 69. Phương trình $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + x = \sqrt{2 - x}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 70. Phương trình $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 71. Phương trình $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 72. Phương trình $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 73. Phương trình $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 5.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP - VÍ DỤ - BÀI TẬP RÈN LUYỆN

□ DẠNG 2.1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn

Cách giải và biện luận phương trình $ax = b$.

— Trường hợp 1: $a \neq 0$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{b}{a}$.

— Trường hợp 2: $a = 0$. Giải để tìm tham số, thế tham số vào phương trình $ax = b$.

+ Nếu được $0x = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm (tập nghiệm $S = \mathbb{R}$).

+ Nếu được $0x = b$ ($b \neq 0$) thì phương trình vô nghiệm.

⚠ — Phương trình $ax = b$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$.

— Phương trình $ax = b$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$

— Phương trình $ax = b$ có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải và biện luận theo tham số m phương trình $(2m - 4)x = m - 2$.

Lời giải.

— $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m - 2}{2m - 4} = \frac{1}{2}$.

— $2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0 \Rightarrow$ Phương trình có vô số nghiệm.

□

VÍ DỤ 2. Giải và biện luận theo tham số m phương trình $(m^2 - 1)x + 1 = m$.

Lời giải.

$(m^2 - 1)x + 1 = m \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m - 1$

— $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{m - 1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m + 1}$.

— $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1. \end{cases}$

– Với $m = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0 \Rightarrow$ Phương trình có vô số nghiệm.

– Với $m = -1$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = -2 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

□

VÍ DỤ 3. Giải và biện luận theo tham số m phương trình $m^3x = m^2 + 4 + 4m(x - 1)$.

Lời giải.

$m^3x = m^2 + 4 + 4m(x - 1) \Leftrightarrow (m^3 - 4m)x = m^2 - 4m + 4$.

$$\text{— } m^3 - 4m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \text{ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } x = \frac{m^3 - 4m}{m^2 - 4m + 4} = \frac{m(m+2)}{m-2}.$$

$$\text{— } m^3 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2. \end{cases}$$

- Với $m = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 4 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô số nghiệm.
- Với $m = -2$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 16 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

□

VÍ DỤ 4. Giải và biện luận theo tham số a và b phương trình $a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a)$.

Lời giải.

$$a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a) \Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a^3 - ab^2.$$

$$\text{— } a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -b \end{cases} \text{ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } x = \frac{a^3 - ab^2}{a^2 - b^2} = a.$$

$$\text{— } a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

- Với $a = b$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0 \Rightarrow$ Phương trình có vô số nghiệm.
- Với $a = -b$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0 \Rightarrow$ Phương trình có vô số nghiệm.

□

VÍ DỤ 5. Giải và biện luận theo tham số m phương trình $\frac{m(x-1)-3}{x+1} = 2$.

Lời giải.

$$\frac{m(x-1)-3}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m(x-1)-3 = 2x+2 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)x = m+5 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)x = m+5 \\ m \neq \frac{-3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{— } \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \text{ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } x = \frac{m+5}{m-2}.$$

$$\text{— } \begin{cases} m-2 = 0 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ thì phương trình đã cho trở thành } 0x = 7 \Rightarrow \text{Phương trình vô nghiệm.}$$

□

VÍ DỤ 6. Tìm tham số m để phương trình $m^2x + 2 = x + 2m$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

$$m^2x + 2 = x + 2m \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2m - 2 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

□

VÍ DỤ 7. Tìm tham số m để phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$ vô nghiệm.

Lời giải.

$$m^2x + 6 = 4x + 3m \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 3m - 6 \quad (1)$$

$$(1) \text{ vô nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

□

VÍ DỤ 8. Tìm tham số m để phương trình $m^2(x-1) + m = x(3m-2)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$$m^2(x-1) + m = x(3m-2) \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2)x = m^2 - m \quad (1)$$

$$(1) \text{ có tập nghiệm là } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

□

2. Bài tập tự rèn luyện

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

① $m(x-m) = x + m - 2$

② $2(m-1)x - m(x-1) = 2m + 3$

③ $2m^2(x-1) + 7 = 2(x+1) + 3m$

④ $(m^2 + 3)(x-1) - m = (3-2m)x - 5$

Bài 2. Giải và biện luận theo tham số a và b các phương trình

① $a^2x = a(x+b) - b$

② $(a+b)^2x + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2 + b^2)x$

③ $\frac{a(x-2a)}{12} + \frac{b^2}{4} = \frac{bx-a^2}{12} + \frac{b^2}{6}$

Bài 3. Giải và biện luận theo tham số m các phương trình

① $\frac{3}{2x-2} = m + 1$

② $\frac{m(x+4)-1}{x+2} = 1$

③ $\frac{m}{mx+3} = 2$

Bài 4. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình

① $m^2x - m = 4x - 2$ có nghiệm duy nhất.

② $m(mx-1) = 1+x$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

③ $(m+1)^2x + 1 - m = (7m-5)x$ vô nghiệm.

Bài 5. Chứng minh rằng phương trình $m(m-1)x + 2mx = (2m-1)x + m$ có nghiệm duy nhất với mọi $m \in \mathbb{R}$.

📁 DẠNG 2.2. Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn

Cách giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Trường hợp 1. $a = 0$, giải tìm tham số. Thế tham số này vào phương trình đã cho để có kết luận.

Trường hợp 2. $a \neq 0$.

Tính $\Delta = b^2 - 4ac$. (Nếu b chẵn thì tính $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$)

— Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.

— Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$. (Nếu tính Δ' thì $x = -\frac{b'}{a}$).

— Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
(Nếu tính Δ' thì $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$).

1. VÍ DỤ

VÍ DỤ 9. Tìm tham số m để phương trình $mx^2 - 2(m+3)x + m+1 = 0$ (*) vô nghiệm.

Lời giải.

Trường hợp 1. $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Thay vào phương trình (*) ta được $-6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$.

Suy ra phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{6}$ nên $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2. $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Ta có $\Delta' = (m+3)^2 - m(m+1) = 5m+9$. Phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 5m+9 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{9}{5}.$$

Vậy $m < -\frac{9}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

VÍ DỤ 10. Tìm tham số m để phương trình $(2-m)x^2 - 4x + 3 = 0$ (*) có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 3(2-m) = 3m-2$.

Phương trình (*) có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ 3m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Khi đó phương trình (*) có nghiệm kép là $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2-m} = \frac{3}{2}$. □

VÍ DỤ 11. Tìm tham số m để phương trình $(2m-1)x^2 - 2(m-1)x - 1 = 0$ (*) có hai nghiệm phân biệt. Tính hai nghiệm này.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m-1)(-1) = m^2$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \neq 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó phương trình (*) có nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{(m-1) \pm m}{2m-1} \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2m-1}$.

Nhận xét:

Ta có thể tính nhanh hai nghiệm bằng cách: phương trình này có các hệ số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$ nên phương trình có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2m-1}$. $\square$

VÍ DỤ 12. Tìm tham số m để phương trình $(m+2)x^2 - 2mx + m - 3 = 0 (*)$ có nghiệm phân biệt. Tính các nghiệm này.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - (m+2)(m-3) = m+6$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ m+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m > -6 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình $(*)$ có nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m \pm \sqrt{m+6}}{m+2}$. $\square$

VÍ DỤ 13. Giải và biện luận theo tham số m phương trình

$$(m-3)x^2 - 2(m-2)x + m = 0 (*).$$

Lời giải.

Trường hợp 1. $a = 0 \Leftrightarrow m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Thay vào phương trình $(*)$ ta được $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Suy ra phương trình có một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

Trường hợp 2. $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Ta có $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m+4$.

— Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -m+4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

— Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -m+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{m-2}{m-3} = 2.$$

— Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < 4 \end{cases}$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m-2 \pm \sqrt{-m+4}}{m-3}.$$

$\square$

2. BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 6. Tìm tham số m để phương trình

① $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$ vô nghiệm.

② $mx^2 - (2m+3)x + m = 0$ có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

③ $mx^2 - 2(m+3)x + m+1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Tính các nghiệm này.

④ $(m-1)x^2 + 7x - 12 = 0$ có nghiệm. Tính các nghiệm này.

.....

Bài 7. Giải và biện luận theo tham số m phương trình

- ① $x^2 + 2(m + 1)x + m^2 + 7 = 0.$
- ② $(2 - m)x^2 - 4x + 3 = 0.$

DẠNG 2.3. Định lí Vi-ét

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

⚠ ① Phương trình $7x^2 - 2x + 3 = 0$ có $S = -\frac{b}{a} = \frac{2}{7}$ và $P = \frac{3}{7}$ là **SAI** vì phương trình này vô nghiệm.

② Phương trình $x^2 - 2x - 5 = 0$ có $S = -\frac{b}{a} = 2$ và $P = -5$ là **ĐÚNG** vì phương trình này có nghiệm.

Tìm hiểu thêm về định lí Viète cho phương trình bậc 3

Nếu phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2 và x_3 thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để phương trình $x^2 + mx + 15 = 0$ có một nghiệm là 5. Tính nghiệm còn lại.

Lời giải.

Vì phương trình $x^2 + mx + 15 = 0$ có một nghiệm là 5 nên ta có

$$5^2 + 5m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = -8.$$

Với $m = -8$, ta có phương trình

$$x^2 - 8m + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$$

Vậy nghiệm còn lại là $x = 5$. □

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị tham số m để phương trình $x^2 - mx + 36 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa hệ thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - mx + 36 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 khi và chỉ khi $m^2 - 4 \cdot 36 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -12 \\ m \geq 12 \end{cases}$.

Áp dụng định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = 36. \end{cases}$

Khi đó,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{m}{36} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow m = 15 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $m = 15$. □

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để phương trình $mx^2 + 2(1-m)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa hệ thức $x_1 + 2x_2 = 2$.

Lời giải.

Phương trình $mx^2 + 2(1-m)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ (1-m)^2 - 3m(m-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

Áp dụng định lý Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-1}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$.

Từ hệ phương trình, $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-1}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{m} \\ x_2 = \frac{m+1}{m} \end{cases}$.

Suy ra

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow -\frac{2}{m} \cdot \frac{m+1}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán. □

VÍ DỤ 4. Tìm tham số m để phương trình $x^2 - x + m - 2 = 0$.

- ① Giải phương trình khi $m = 1$.
- ② Tìm m để phương trình có nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại của phương trình.
- ③ Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó theo m .

Lời giải.

- ① Với $m = 1$, ta có phương trình

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

- ② Vì phương trình $x^2 - x + m - 2 = 0$ có nghiệm bằng 2 nên ta có

$$2^2 - 2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Với $m = 0$, ta có phương trình

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Nghiệm còn lại của phương trình là $x = -1$.

- ③ Phương trình $x^2 - x + m - 2 = 0$ có nghiệm kép khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$. Khi đó, nghiệm kép của phương trình là $x = -\frac{1}{2}$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 8. Tìm tham số m để phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+1)x - 1 = 0$ có một nghiệm là 3. Tính nghiệm còn lại.

.....

Bài 9. Tìm tham số m để phương trình

- ① $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 đồng thời thỏa hệ thức $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 5$.
- ② $x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 đồng thời thỏa hệ thức $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{9}{2}$.
- ③ $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 đồng thời thỏa hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 40$.
- ④ $x^2 - (m + 1)x + 10 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 đồng thời thỏa hệ thức $x_1 = 3x_2$.

□ DẠNG 2.4. Phương trình vô tỷ

$\sqrt{A} = B$ Phương pháp giải toán

Biến đổi phương trình về dạng $\sqrt{A} = B$.

Cách1. Sử dụng phép biến đổi tương đương.

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

Cách2. Sử dụng phép biến đổi hệ quả.

- $\sqrt{A} = B \Rightarrow A = B^2$. (1)
- Giải phương trình (1) tìm được ẩn số x và thế vào phương trình đã cho để nhận nghiệm.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\sqrt{4x^2 + 2x + 10} - 3x = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 2x + 10} - 3x = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 + 2x + 10 = (3x + 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 5x^2 + 4x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 1 & (\text{nhận}) \\ x = -\frac{9}{5} & (\text{loại}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$. □

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 6x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 & (\text{nhận}) \\ x = 2 & (\text{nhận}) \\ x = -2 & (\text{loại}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$ và $x = 2$. □

VÍ DỤ 7. Giải phương trình $x + 3\sqrt{x^2 - 3} = 7$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x + 3\sqrt{x^2 - 3} = 7 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3} = \frac{7 - x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7 - x}{3} \geq 0 \\ x^2 - 3 = \left(\frac{7 - x}{3}\right)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ 9(x^2 - 3) = (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ 4x^2 + 7x - 38 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ \begin{cases} x = \frac{-7 + 3\sqrt{73}}{8} \quad (\text{nhận}) \\ x = \frac{-7 - 3\sqrt{73}}{8} \quad (\text{nhận}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{-7 + 3\sqrt{73}}{8}$ và $x = \frac{-7 - 3\sqrt{73}}{8}$. □

VÍ DỤ 8. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 1 = 4(x-2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 17x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 3 \quad (\text{nhận}) \\ x = \frac{5}{4} \quad (\text{loại}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$. □

VÍ DỤ 9. Giải phương trình $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1) \cdot (4-x)} = 2 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (4-x) = 4 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\text{nhận}) \\ x = 3 \quad (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ và $x = 3$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 10. Giải các phương trình sau:

① $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

② $x - \sqrt{2x + 7} = 4$

③ $2x - \sqrt{-x^2 + 6x - 5} = 6$

.....

Bài 11. Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$

② $\sqrt{x + \sqrt{5x + 10}} = 2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{x^2 + \sqrt{x + 8}} - x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

$\sqrt{A} = \sqrt{B}$ Phương pháp giải

Cách 1. Sử dụng phép biến đổi **tương đương**.

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hoặc } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

Cách 2. Sử dụng phép biến đổi **hệ quả**.

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Rightarrow A = B$
 - Giải phương trình (1) tìm được ẩn số x và thế vào phương trình đã cho để nhận nghiệm.
- (1)

1. Ví dụ

VÍ DỤ 10. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{6 - 3x} = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{6 - 3x} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = \sqrt{6 - 3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 6 - 3x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (nhận).} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$ và $x = 2$. □

VÍ DỤ 11. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} = 2\sqrt{3x - 2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 + 3x} = 2\sqrt{3x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 3x = 4(3x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 8 \text{ (nhận).} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 8$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 12. Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{2x - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} = 0$.

② $\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2(x + 1)}$.

③ $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \frac{3}{2}\sqrt{x + 5}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 13. Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{3} = 0$.

② $2\sqrt{(x + 1)^2 + 7} = \sqrt{7(x + 5)}$.

③ $\sqrt{(x + 1)(x - 3)} - \sqrt{x} = 0$.

⚠ Thiếu dạng 3,4,5,6,7,8

NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP (NÂNG CAO)

1. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

VÍ DỤ 12. Giải phương trình $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.

Lời giải.

— Điều kiện cho phương trình có nghĩa: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

— Ta có $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 2(3-x) = \sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}$. (*)

— Nhân hai vế của phương trình cho $\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} \neq 0$ ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 2(3-x) [\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}] = (x+6) - 9(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2(3-x) [\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}] = 8(3-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & (\text{thỏa } x \geq 2) \\ \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4. & (1) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+6) + 9(x-2) + 6\sqrt{(x+6)(x-2)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+4x-12} = 14-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 14-5x \geq 0 \\ 9(x^2+4x-12) = (14-5x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ 16x^2 - 176x + 304 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x = \frac{11 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} (\text{thỏa } x \geq 2).$$

— Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=3$ hay $x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}$.

□

Bài 14. Giải phương trình sau.

a. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$

b. $\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4}$.

Lời giải:

a. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$

— Phương trình xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{4} \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

— Nhân hai vế của phương trình cho $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$. Ta được

$$\begin{aligned} x+3 &= \frac{x+3}{5} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}) \\ \Leftrightarrow (x+3) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2})\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 & (l) \\ 1 - \frac{1}{5} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}) = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (2):

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 5 \\
 \Leftrightarrow & 2\sqrt{12x^2-5x-2} = 26-7x \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 26-7x \geq 0 \\ 4(12x^2-5x-2) = 49x^2-364x+676 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{26}{7} \\ x^2-344x+684=0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{26}{7} \\ \begin{cases} x=342 & (l) \\ x=2 & (n) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=2.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$.

$$\text{b. } \sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4}.$$

$$\text{— Phương trình xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} 3x^2-5x+1 \geq 0 \\ x^2-2 \geq 0 \\ 3(x^2-x-1) \geq 0 \\ x^2-3x+4 \geq 0. \end{cases}$$

Để ý rằng:

$$\text{— } (3x^2-5x+1) - 3(x^2-x-1) = -2(x-2).$$

$$\text{— } (x^2-2) - (x^2-3x+4) = 3(x-2).$$

Do đó phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$$\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{3(x^2-x-1)} = \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2-3x+4}$$

Nhân lượng liên hợp cho vế trái và nhân lượng liên hợp cho vế phải. Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-5x+1} + \sqrt{3(x^2-x-1)}} = \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-3x+4}} \\
 \Leftrightarrow & (x-2) \left(\frac{-2}{\sqrt{3x^2-5x+1} + \sqrt{3(x^2-x-1)}} - \frac{3}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-3x+4}} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 & (n) \\ \frac{-2}{\sqrt{3x^2-5x+1} + \sqrt{3(x^2-x-1)}} - \frac{3}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-3x+4}} = 0 & (1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Để thấy (1) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$.

VÍ DỤ 13. Giải phương trình $\sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}$.

Lời giải.

Nhận xét

— Dùng máy tính cầm tay nhận thấy $x=2$ là một nghiệm của phương trình. Do đó phương trình đã cho có thể phân tích thành $(x-2) \cdot P(x) = 0$. Để thực hiện điều đó, ta biến đổi sao cho mỗi biểu thức trong phương trình đều xuất hiện thừa số $x-2$ bằng cách:

$$\text{— Thế } x=2 \text{ vào biểu thức } \sqrt{x^2+12} \text{ ta được: } \sqrt{x^2+12} = \sqrt{2^2+12} = 4.$$

$$\text{— Thế } x=2 \text{ vào biểu thức } 3x \text{ ta được: } 3 \cdot x = 3 \cdot 2 = 6.$$

$$\text{— Thế } x=2 \text{ vào biểu thức } \sqrt{x^2+5} \text{ ta được: } \sqrt{x^2+5} = \sqrt{2^2+5} = 3.$$

Từ đó có hướng biến đổi hằng số **5** trong phương trình thành:

$$\sqrt{x^2+12} + \mathbf{5} = 3x + \sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+12} - \mathbf{4}) = (3x - \mathbf{6}) + (\sqrt{x^2+5} - \mathbf{3}).$$

Giải

— Phương trình đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

— Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x^2+12}-4)=(3x-6)+(\sqrt{x^2+5}-3) \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ \Leftrightarrow & (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=2 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

— Từ phương trình đã cho ta lại có:

$$\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5.$$

Vì $\sqrt{x^2+12} > \sqrt{x^2+5}$ nên điều kiện để phương trình có nghiệm là $3x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$.

Suy ra $x+2 > 0$ và hiển nhiên $\sqrt{x^2+12}+4 > \sqrt{x^2+5}+3$

Do đó: $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3 < 0$, nghĩa là phương trình (1) vô nghiệm.

— Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$.

□

Bài 15. Giải các phương trình sau:

$$\textcircled{1} \sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2x}=\frac{7}{4}.$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x+3}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2x}+5.$$

$$\textcircled{4} \sqrt[3]{x+8}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}+x^2=\frac{1}{x+1}+2.$$

Lời giải.

$$1. \sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$$

— Phương trình đã cho xác định khi $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$.

— Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)-(\sqrt{6-x}-1)+(3x^2-14x-5)=0$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}-\frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0 \\ \Leftrightarrow & (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right)=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-5=0 \Leftrightarrow x=5 & (n) \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)=0 & (\text{VN do vế trái} \geq 0). \end{cases} \end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=5$.

$$2. \frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2x}=\frac{7}{4}.$$

— Phương trình đã cho xác định khi $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{— Phương trình } &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 = \frac{3x^2 - 2x - 8}{4x^2}. \\
&\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3x^2 - 2x - 8}{4x^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})} = \frac{(x-2)(3x+4)}{4x^2} \\
&\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{3x+4}{4x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \frac{3x+4}{4x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})} = 0 \text{ (VN do vế trái } \geq 0). \end{cases}
\end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$.

$$3. \sqrt{x+3} = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2x} + 5.$$

— Phương trình đã cho xác định khi $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 0. \end{cases}$

$$\text{— Phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2x} + 3.$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{x^2+6x-7}{2x} \\
&\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{(x-1)(x+7)}{2x} \\
&\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{x+7}{2x} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \quad (\text{n}) \\ \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{x+7}{2x} = 0 \quad (\text{VN}). \end{cases}
\end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

$$4. \sqrt[3]{x+8} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} + x^2 = \frac{1}{x+1} + 2.$$

— Phương trình đã cho xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1. \end{cases}$

$$\text{— Phương trình } \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+8} - 2) + (\sqrt{x^2+1} - 1) + (\sqrt{x} + x^2) = \frac{1}{x+1} - 1.$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+8} - 2) + (\sqrt{x^2+1} - 1) + (\sqrt{x} + x^2) = \frac{1}{x+1} - 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{(\sqrt[3]{x+8})^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} + 1} + \frac{x-x^2}{\sqrt{x}-x^2} + \frac{x}{x+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x+8})^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} + \frac{1-x}{\sqrt{x}-x^2} + \frac{1}{x+1} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{(\sqrt[3]{x+8})^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} + \frac{1-x}{\sqrt{x}-x^2} + \frac{1}{x+1} = 0 \quad (\text{VN}). \end{cases}
\end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 0$.

□

VÍ DỤ 14. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$.

Lời giải.**Nhận xét**

— Dùng máy tính cầm tay nhận thấy $x = 0$ hay $x = 1$ là hai nghiệm của phương trình. Do đó phương trình đã cho có thể phân tích thành $x \cdot (x - 1) \cdot P(x) = 0$. Để thực hiện điều đó, ta biến đổi sao cho mỗi biểu thức trong phương trình đều xuất hiện thừa số $x(x - 2)$ bằng cách:

$$\begin{aligned} - \text{ Xét } \sqrt{3x+1} &= mx+n. \text{ Thế } x=0 \text{ và } x=1 \text{ ta được } \begin{cases} 1=n \\ 2=m+n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=1. \end{cases} \\ - \text{ Xét } \sqrt{5x+4} &= px+q. \text{ Thế } x=0 \text{ và } x=1 \text{ ta được } \begin{cases} 2=q \\ 3=p+q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ p=1. \end{cases} \end{aligned}$$

Giải

— Phương trình đã cho xác định khi $x \geq -\frac{1}{3}$.

— Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3. \\ \Leftrightarrow & \left[\sqrt{3x+1} - (x+1) \right] + \left[\sqrt{5x+4} - (x+2) \right] = (3x^2 - x + 3) - (x+1) - (x+2) \\ \Leftrightarrow & \frac{(3x+1) - (x+1)^2}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{(5x+4) - (x+2)^2}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} = 3x^2 - 3x \\ \Leftrightarrow & \frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} = 3(x^2 - x) \\ \Leftrightarrow & (-x^2+x) \left[\frac{1}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} + 3 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x^2+x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} + 3 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm vì } VT > 0) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=0 \\ x=1. \end{cases} \end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ x=1. \end{cases}$

□

Bài 16. Giải các phương trình sau:

- $\sqrt{x^2+3x-9} + \sqrt{3x-5} = x^2 - 2x + 2$, biết $x \geq \frac{5}{3}$.
- $5\sqrt{x+3} + 5\sqrt{3x-2} = 5x^2 - 31x + 41$.
- $4\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{10-x} + 4\sqrt{5x+4} = 4x^2 - 37x + 61$.
- $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13$.
- $(x+3)\sqrt{x^2+x+2} = x^2 + 3x + 4$.

Lời giải.

$$\text{a. } \sqrt{x^2+3x-9} + \sqrt{3x-5} = x^2 - 2x + 2, \text{ biết } x \geq \frac{5}{3}.$$

— Phương trình đã cho xác định khi $x \geq -\frac{1}{3}$.

— Nhận thấy $\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$ là nghiệm

— Phương trình $\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2+3x-9} - (2x-3) \right] + \left[\sqrt{3x-5} - (x-1) \right] = x^2 - 5x + 6$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-9-(2x-3)^2}{\sqrt{x^2+3x-9} + (2x-3)} + \frac{3x-5-(x-1)^2}{\sqrt{3x-5} + (x-1)} = x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 15x - 18}{\sqrt{x^2 + 3x - 9} + (2x - 3)} + \frac{-x^2 + 5x - 6}{\sqrt{3x - 5} + (x - 1)} = x^2 - 5x + 6 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) \left(\frac{3}{\sqrt{x^2 + 3x - 9} + (2x - 3)} + \frac{1}{\sqrt{3x - 5} + (x - 1)} + 1 \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3x - 9} + (2x - 3)} + \frac{1}{\sqrt{3x - 5} + (x - 1)} + 1 = 0 \quad (\text{vô nghiệm vì } VT > 0) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (n) \\ x = 2 & (n). \end{cases}
\end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 3$ hoặc $x = 2$.

b. $5\sqrt{x+3} + 5\sqrt{3x-2} = 5x^2 - 31x + 41$.

— Nhận thấy $\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$ là nghiệm.

— Phương trình $\Leftrightarrow [5\sqrt{x+3} - (x+9)] + [5\sqrt{3x-2} - (3x+2)] = 5x^2 - 35x + 30$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 7x - 6}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{-9x^2 + 63x - 54}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} = 5x^2 - 35x + 30 \\
&\Leftrightarrow \frac{-(x-1)(x-6)}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{-9(x-1)(x-6)}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} = 5(x-1)(x-6) \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x-6) \left(5 + \frac{1}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{9}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = 6(n) \\ 5 + \frac{1}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{9}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} = 0 \quad (VN). \end{cases}
\end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 6$.

c. $4\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{10-x} + 4\sqrt{5x+4} = 4x^2 - 37x + 61$.

— Nhận thấy $\begin{cases} x = 1 \\ x = 9 \end{cases}$ là nghiệm

— Phương trình

$$\Leftrightarrow [4\sqrt{3x-2} - (2x+2)] + [4\sqrt{10-x} - (-x+13)] + [4\sqrt{5x+4} - (2x+10)] = 4x^2 - 40x + 36.$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{-4x^2 + 40x - 36}{4\sqrt{3x-2} + 2x + 2} + \frac{-x^2 + 10x - 9}{4\sqrt{10-x} - x + 13} + \frac{-4x^2 + 40x - 36}{4\sqrt{5x+4} + 2x + 10} = 4x^2 - 40x + 36 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 9) \left(4 + \frac{4}{4\sqrt{3x-2} + 2x + 2} + \frac{1}{4\sqrt{10-x} - x + 13} + \frac{4}{4\sqrt{5x+4} + 2x + 10} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (n) \\ x = 9 & (n) \\ 4 + \frac{4}{4\sqrt{3x-2} + 2x + 2} + \frac{1}{4\sqrt{10-x} - x + 13} + \frac{4}{4\sqrt{5x+4} + 2x + 10} = 0 \quad (VN). \end{cases}
\end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 9$.

d. $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13$.

— Nhận thấy $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ là nghiệm

— Phương trình $\Leftrightarrow [2\sqrt{3x+4} - (2x+4)] + [3\sqrt{5x+9} - (3x+9)] = x^2 + x$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{-4x^2 - 4x}{2\sqrt{3x+4} + 2x + 4} + \frac{-9x^2 - 9x}{3\sqrt{5x+9} + 3x + 9} = x^2 + x \\
&\Leftrightarrow (x^2 + x) \left(1 + \frac{4}{2\sqrt{3x+4} + 2x + 4} + \frac{9}{3\sqrt{5x+9} + 3x + 9} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (n) \\ x = -1 & (n) \end{cases} \quad 1 + \frac{4}{2\sqrt{3x+4}+2x+4} + \frac{9}{3\sqrt{5x+9}+3x+9} = 0 (VN).$$

— Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 0$.

e. $(x+3)\sqrt{x^2+x+2} = x^2+3x+4$.

— Nhận thấy $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ là nghiệm

— Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} = \frac{x^2+3x+4}{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} - 2 = \frac{x^2+3x+4}{x+3} - 2$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} = \frac{x^2+x-2}{x+3} \\ &\Leftrightarrow (x^2+x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+2} - \frac{1}{x+3} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+2} - \frac{1}{x+3} = 0 (VN) \end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = -2$.

□

Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối **Ghi chú:** Theo công văn số 5842/BGDĐT-VP ngày 01/09/2011 của BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO, từ năm học 2011, phần "*Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối*" là nội dung "đọc thêm".

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases} \cdot |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases} \cdot |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B.$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Phương trình $-2x^2 - 4x + 3 = m$ có nghiệm khi

- A. $m \leq 5$. B. $m \geq 5$. C. $m > 5$. D. $m < 5$.

.....

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m^2(x+m) = x+m$ có vô số nghiệm ?

- A. $m = \pm 1$. B. $m = 0$ hoặc $m = -1$. C. $m = 0$ hoặc $m = 1$. D. $-1 < m < 1, m \neq 0$.

.....

Câu 3. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 0$ là

- A. 17. B. 20. C. 12. D. 10.

.....

Câu 4. Tổng lập phương hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 0$ là

- A. 40. B. -40. C. 52. D. 56.

.....

Câu 5. Phương trình $x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6. Phương trình $1,5x^4 - 2,6x^2 - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 7. Với giá trị nào của m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 8$?

- A. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = -2 \\ m = -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$.

Câu 8. Tìm điều kiện xác định của phương trình $1 + \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)}$

- A. $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\frac{2x}{x-3} + \frac{5x+3}{x+3} = 1$ là

- A. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. B. $x = -1$. C. $x = 0$. D. $x = 1$.

Câu 10. Cho phương trình $\frac{1}{4}x^2 - (m-3)x + m^2 - 2m + 7 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

- A. $m \geq \frac{1}{2}$. B. $m < -\frac{1}{2}$. C. $m > \frac{1}{2}$. D. $m < \frac{1}{2}$.

Câu 11. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$. Tất cả các tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2$.

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}$. C. $m = 0$. D. $m = 5$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $|3x - 1| = 5$ là

- A. $x = 2$. B. $x = \frac{1}{3}$. C. $\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 13. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

- A. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 4 \end{cases}$. B. $m = 4$. C. $m = -3$. D. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -4 \end{cases}$.

Câu 14. Phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có nghiệm khi

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Câu 15. Phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ có nghiệm khi

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Câu 16. Phương trình $4x^2 - 4x + m + 1 = 0$ có nghiệm khi

- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq -1$.

Câu 17. Phương trình $4x^2 - 4x + m + 1 = 0$ vô nghiệm khi

- A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $m > 1$. D. $m < 1$.

Câu 18. Cho phương trình $ax + b = 0$. Chọn mệnh đề đúng ?

- A. Nếu phương trình có nghiệm thì $a \neq 0$. B. Nếu phương trình vô nghiệm thì $a = 0$.
C. Nếu phương trình vô nghiệm thì $b = 0$. D. Nếu phương trình có nghiệm thì $b \neq 0$.

Câu 19. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

- A. $a = 0$. B. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$. C. $a = b = 0$. D. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

Câu 20. Phương trình $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

- A. Có 2 nghiệm trái dấu. B. Có hai nghiệm âm phân biệt.
C. Có hai nghiệm dương phân biệt. D. Vô nghiệm.

Câu 21. Phương trình $x^2 + m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 0$.

Câu 22. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Hãy chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau ?

- A. Nếu $P < 0$ thì (1) có hai nghiệm trái dấu.
 B. Nếu $P > 0$ và $S < 0$ thì (1) có hai nghiệm.
 C. Nếu $P > 0$, $S < 0$ và $\Delta > 0$ thì (1) có 2 nghiệm âm.
 D. Nếu $P > 0$, $S > 0$ và $\Delta > 0$ thì (1) có 2 nghiệm dương.

Câu 23. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (với $a \neq 0$). Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Câu 24. Cho phương trình $(\sqrt{3} + 1)x^2 + (2 - \sqrt{5})x + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. Phương trình vô nghiệm. B. Phương trình có hai nghiệm dương.
 C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu. D. Phương trình có hai nghiệm âm.

Câu 25. Hai số $1 - \sqrt{2}$ và $1 + \sqrt{2}$ là hai nghiệm của phương trình

- A. $x^2 - 2x - 1 = 0$. B. $x^2 + 2x - 1 = 0$. C. $x^2 + 2x + 1 = 0$. D. $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Câu 26. $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ là hai nghiệm của phương trình

- A. $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$. B. $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$.
 C. $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$. D. $x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$.

Câu 27. Phương trình $(m^2 - m)x + m - 3 = 0$ là phương trình bậc nhất khi và chỉ khi

- A. $m \neq 0$. B. $m \neq 1$. C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 28. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là sai

- A. Phương trình $3x + 5 = 0$ có nghiệm là $x = -\frac{5}{3}$.
 B. Phương trình $0x - 7 = 0$ vô nghiệm.
 C. Phương trình $0x + 0 = 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.
 D. Phương trình $m^2x = 1$ có nghiệm duy nhất với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 29. Phương trình $(a - 3)x + b = 0$ vô nghiệm với giá trị a, b là

- A. $a = 3, b$ tùy ý. B. a tùy ý, $b = 2$. C. $a = 3, b = 2$. D. $a = 3, b \neq 2$.

Câu 30. Cho phương trình $x^2 + 7x - 260 = 0$ (1). Biết rằng phương trình có nghiệm $x_1 = 13$. Hỏi x_2 bằng bao nhiêu

- A. -27 . B. -20 . C. 20 . D. 8 .

Câu 31. Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm duy nhất khi

- A. $m \neq 1$. B. $m \neq 3$. C. $m \neq 1$ và $m \neq 3$. D. $m = 1$ và $m = 3$.

Câu 32. Phương trình $(m^2 - 2m)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm khi

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m \neq 0$ và $m \neq 2$. D. $m \neq 0$.

Câu 33. Tìm m để phương trình $(m^2 - 4)x = m(m + 2)$ có tập nghiệm $\mathbb{R}$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. $m \neq -2$ và $m \neq 2$.

Câu 34. Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x + m^2 + 4m + 5 = 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi

- A. $m = -2$. B. $m = -5$. C. $m = 1$. D. Không tồn tại m .

Câu 35. Phương trình $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m$ vô nghiệm khi

- A. $m = 1$. B. $m = 6$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 36. Phương trình $(m+1)^2x+1=(7m-5)x+m$ vô nghiệm khi

- A. $m=2$ hoặc $m=3$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=3$.

Câu 37. Điều kiện để phương trình $m(x-m+3)=m(x-2)+6$ vô nghiệm là

- A. $m=2$ hoặc $m=3$. B. $m \neq 2$ và $m \neq 3$. C. $m \neq 2$ hoặc $m=3$. D. $m=2$ hoặc $m \neq 3$.

Câu 38. Phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ có nghiệm khi

- A. $m \geq -\frac{5}{4}$. B. $m \leq -\frac{5}{4}$. C. $m = -\frac{5}{4}$. D. $m = \frac{5}{4}$.

Câu 39. Cho phương trình $x^2+2(m+2)x-2m-1=0$. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm?

- A. $m \leq -5$ hoặc $m \geq -1$. B. $m < -5$ hoặc $m > -1$. C. $-5 \leq m \leq -1$. D. $m \leq 1$ hoặc $m \geq 5$.

Câu 40. Cho phương trình $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $m > 4$ thì phương trình vô nghiệm.
 B. Nếu $m \leq 4$ và $m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m}$, $x = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}$.
 C. Nếu $m = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{4}$.
 D. Nếu $m = 4$ thì phương trình có nghiệm kép $x = \frac{3}{4}$.

Câu 41. Với giá trị nào của m thì phương trình $mx^2+2(m-2)x+m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \leq 4$. B. $m < 4$. C. $m < 4$ và $m \neq 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 42. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m+1)x^2-6(m+1)x+2m+3=0$ có nghiệm kép?

- A. $m = \frac{7}{6}$. B. $m = \frac{6}{7}$. C. $m = -\frac{6}{7}$. D. $m = -1$.

Câu 43. Với giá trị nào của m thì phương trình $2(x^2-1)=x(mx+1)$ có nghiệm duy nhất?

- A. $m = \frac{17}{8}$. B. $m = 2$ hoặc $m = \frac{17}{8}$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.

Câu 44. Để hai đồ thị $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ có hai điểm chung thì

- A. $m = -3, 5$. B. $m < -3, 5$. C. $m > -3, 5$. D. $m \geq -3, 5$.

Câu 45. Nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 5 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

- A. $y = x^2$ và $y = -3x + 5$. B. $y = x^2$ và $y = -3x - 5$. C. $y = x^2$ và $y = 3x - 5$. D. $y = x^2$ và $y = 3x + 5$.

Câu 46. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 1 = 0$. Ta có tổng $x_1^2 + x_2^2$ bằng

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Câu 47. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2x^2 - 4x - 1 = 0$. Khi đó giá trị của $T = |x_1 - x_2|$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. $\sqrt{6}$. D. 4.

Câu 48. Phương trình $3(m + 4)x + 1 = 2x + 2(m - 3)$ có nghiệm duy nhất với giá trị của m bằng

- A. $m = \frac{4}{3}$. B. $m = -\frac{3}{4}$. C. $m \neq -\frac{10}{3}$. D. $m \neq \frac{4}{3}$.

Câu 49. Tìm m để phương trình $(m^2 - 2)(x + 1) = x + 2$ vô nghiệm.

- A. $m = 0$. B. $m = \pm 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = \pm\sqrt{3}$.

Câu 50. Tập nghiệm của phương trình $(m^2 - 9)x + 6 - 2m = 0$ trong trường hợp $m^2 - 9 \neq 0$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\emptyset$. C. $\left\{\frac{2}{m-3}\right\}$. D. $\left\{\frac{2}{m+3}\right\}$.

Câu 51. Hiện tại tuổi cha của An gấp 3 lần tuổi của An, 5 năm trước tuổi cha An gấp 4 lần tuổi An. Hỏi cha An sinh An lúc bao nhiêu tuổi?

- A. 30. B. 25. C. 35. D. 28.

Câu 52. Tập nghiệm của phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ là

- A. $S = \{1, 4\}$. B. $S = \{1, 2, -2\}$. C. $S = \{-1, 1, 2, -2\}$. D. $S = \{1, 2\}$.

Câu 53. Tìm giá trị của m để phương trình $2x^2 - 3x + m = 0$ có một nghiệm bằng 1. Tìm nghiệm còn lại.

- A. $m = 1$ và $x_2 = \frac{1}{2}$. B. $m = -1$ và $x_2 = \frac{1}{2}$. C. $m = -1$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$. D. $m = 1$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Câu 54. Tìm giá trị m để phương trình $mx^2 - 3x - 5 = 0$ có một nghiệm bằng -1 .

- A. $m = 4$. B. $m = -4$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 55. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu?

- A. $m > 1$. B. $m < 1$. C. Với mọi m . D. Không tồn tại m .

Câu 56. Cho phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) (1). Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, $S = \frac{-b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$. Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $\Delta < 0$. B. $\Delta < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Câu 57. Cho phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) (1). Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, $S = \frac{-b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $\Delta > 0$. B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Câu 58. Để phương trình $m^2(x - 1) = 4x + 5m + 4$ có nghiệm âm thì giá trị thích hợp cho tham số m là

- A. $m < -4$ hay $m > -2$. B. $-4 < m < -2$ hay $-1 < m < 2$. C. $m < -2$ hay $m > 2$. D. $m < -4$ hay $m > -1$.

Câu 59. Điều kiện cho tham số m để phương trình $(m - 1)x = m - 2$ có nghiệm âm là

- A. $m < 1$. B. $m = 1$. C. $1 < m < 2$. D. $m > 2$.

Câu 60. Cho phương trình $m^3x = mx + m^2 - m$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có vô số nghiệm.

A. $m = 0$ hay $m = 1$.

B. $m = 0$ hay $m = -1$.

C. $m = -1$ hay $m = 1$.

D. Không có giá trị nào của m .

Câu 61. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+6)x + m^2 = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó?

A. $m = -3, x_1 = x_2 = 3$. B. $m = -3, x_1 = x_2 = -3$. C. $m = 3, x_1 = x_2 = 3$. D. $m = 3, x_1 = x_2 = -3$.

Câu 62. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 2m - 3 = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép?

A. $m = \frac{7}{6}$.

B. $m = -\frac{6}{7}$.

C. $m = \frac{6}{7}$.

D. $m = -1$.

Câu 63. Để phương trình $mx^2 + 2(m-3)x + m - 5 = 0$ vô nghiệm, với giá trị của m là

A. $m > 9$.

B. $m \geq 9$.

C. $m < 9$.

D. $m < 9$ và $m \neq 0$.

Câu 64. Phương trình $\frac{b}{x+1} = a$ có nghiệm duy nhất khi

A. $a \neq 0$.

B. $a = 0$.

C. $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

D. $a = b = 0$.

Câu 65. Với giá trị nào của tham số a thì phương trình $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x-a} = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $a < 1$.

B. $1 \leq a < 4$.

C. $a \geq 4$.

D. không có a .

Câu 66. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-4}(x^2 - 3x + 2) = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 67. Phương trình $(x^2 - 3x + m)(x - 1) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi

A. $m < \frac{9}{4}$.

B. $m \leq \frac{9}{4}$ và $m \neq 2$.

C. $m < \frac{9}{4}$ và $m \neq 2$.

D. $m \geq \frac{9}{4}$.

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 3m$ vô nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 6$.

Câu 77. Cho phương trình $(m + 1)^2x + 2 = (7m - 5)x + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm

- A. $m = 1$. B. $m = 2; m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 78. Cho hai hàm số $y = (m + 1)x^2 + 3m^2x + m$ và $y = (m + 1)x^2 + 12x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số đã cho không cắt nhau.

- A. $m = 2$. B. $m = \pm 2$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Câu 79. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $(2m - 4)x = m - 2$ có nghiệm duy nhất

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m \neq -1$. D. $m \neq 2$.

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 2. B. 19. C. 20. D. 21.

Câu 81. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 10]$ để phương trình $(m + 1)x = (3m^2 - 1)x + m - 1$ có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử trong S bằng

- A. 15. B. 16. C. 39. D. 40.

Câu 82. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m^2 + m)x = m + 1$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

- A. $m = -1$. B. $m \neq 0$. C. $m \neq -1$. D. $m = 1$.

Câu 83. Cho hai hàm số $y = (m + 1)^2x - 2$ và $y = (3m + 7)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau.

- A. $m \neq 2$. B. $m \neq -3$. C. $m \neq -2, m \neq 3$. D. $m = -2, m = 3$.

Câu 91. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 - 2x + 1 - 2m = 0$ có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử trong S bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{7}{2}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Câu 92. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 5.

B. 6.

C. 9.

D. 10.

Câu 93. Phương trình $(m^2 + 2)x^2 + (m - 2)x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $0 < m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \leq 2$.

Câu 94. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = (m-1)x^2 + 2mx + 3m - 1$.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 2$.

Câu 95. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để phương trình $x^2 - 2mx + 144 = 0$ có nghiệm. Tổng các phần tử trong S bằng

A. 21.

B. 18.

C. 1.

D. 0.

Câu 96. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hai đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ có điểm chung.

A. $m = -\frac{7}{2}$.

B. $m < -\frac{7}{2}$.

C. $m > -\frac{7}{2}$.

D. $m \geq -\frac{7}{2}$.

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $mx^2 - mx + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 17.

B. 18.

C. 20.

D. 21.

Câu 98. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$ có một nghiệm gấp đôi nghiệm còn lại.

A. $m \in \left\{\frac{5}{2}; 7\right\}$.

B. $m \in \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\}$.

C. $m \in \left\{0; \frac{2}{5}\right\}$.

D. $m \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}$.

Câu 99. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0$ có một nghiệm gấp ba nghiệm còn lại.

- A. $m = 7$. B. $m = 3$. C. $m = 3; m = 7$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 100. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(x-1)(x^2 - 4mx - 4) = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \neq \emptyset$. C. $m \neq \frac{3}{4}$. D. $m \neq -\frac{3}{4}$.

Câu 101. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Câu 102. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Câu 103. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$. C. $P < 0$. D. $P > 0$.

Câu 104. Phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt khi

- A. $m < -2$. B. $m > 2$. C. $m \geq -2$. D. $m \neq 0$.

Câu 105. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt?

- A. 5. B. 6. C. 10. D. 11.

Câu 106. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt?

- A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in (0; 2)$. D. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 107. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2; 6]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Tổng các phần tử trong S bằng

- A. -3 . B. 2 . C. 18 . D. 21 .

Câu 108. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt là

- A. $m \in (-1; 1)$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. D. $m \in (-\infty; -1)$.

Câu 109. Phương trình $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

- A. $m > 1$. B. $m < 1$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 1$.

Câu 110. Giả sử phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Tính giá trị biểu thức $P = 3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2)$ theo m .

- A. $P = 3m^2 - 10m + 6$. B. $P = 3m^2 + 10m - 5$. C. $P = 3m^2 - 10m + 1$. D. $P = 3m^2 + 10m + 1$.

Câu 111. Số nghiệm của phương trình $20x^3(1-x)^3 = \frac{4}{25}$ trên khoảng $(0; 1)$ là

- A. 6 . B. 3 . C. 2 . D. 1 .

Câu 112. Giả sử phương trình $x^2 - 3x - m = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Tính giá trị của biểu thức $P = x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1)$.

- A. $P = -m + 9$. B. $P = 5m + 9$. C. $P = m + 9$. D. $P = -5m + 9$.

Câu 113. Giả sử phương trình $2x^2 - 4ax - 1 = 0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = |x_1 - x_2|$.

- A. $T = \frac{4a^2 + 2}{3}$. B. $T = \sqrt{4a^2 + 2}$. C. $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2}$. D. $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{4}$.

.....

.....

Câu 114. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ trong đó $p > 0, q > 0$. Nếu hiệu các nghiệm của phương trình bằng 1. Khi đó p bằng

- A. $\sqrt{4q+1}$. B. $\sqrt{4q-1}$. C. $-\sqrt{4q+1}$. D. $q+1$.

.....

.....

.....

.....

Câu 115. Nếu $m \neq 0$ và $n \neq 0$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$ thì tổng $m + n$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. -1 . C. $\frac{1}{2}$. D. 1 .

.....

.....

.....

.....

Câu 116. Giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - mx + 1 - 3m = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

- A. $m > \frac{1}{3}$. B. $m < \frac{1}{3}$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

.....

.....

.....

.....

Câu 117. Tìm tham số thực m để phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

- A. $m < 1$. B. $m > 2$. C. $m > 3$. D. $1 < m < 3$.

.....

.....

.....

.....

Câu 118. Phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

- A. $m < 3$. B. $m < 1$. C. $m = 1$. D. $1 < m < 3$.

.....

.....

.....

.....

Câu 119. Phương trình $x^2 + x + m = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > -\frac{3}{4}$. B. $m < -\frac{3}{4}$. C. $m > \frac{1}{4}$. D. $m > -\frac{5}{4}$.

.....

.....

.....

.....

BÀI 3.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

DẠNG 3.1. Phương pháp thế

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 + 2xy + 5y = 0. & (2) \end{cases}$

Lời giải.
Từ (1) suy ra $y = 2x + 1$ thay vào phương trình (2) ta được

$$4x^2 - (2x + 1)^2 + 2x(2x + 1) + 5(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -1$.
Vậy hệ Phương trình có nghiệm là $(-1; -1)$.

□

VÍ DỤ 2.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ x^3 - y^3 = 3(x - y). & (2) \end{cases}$

Lời giải.
Từ (1) suy ra $y = 1 - x$ thay vào (2) ta được

$$x^3 - (1 - x)^3 - 3(x - 1 + x) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 2$.
Với $x = 2 \Rightarrow y = -1$.
Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $(-1; 2), (2; -1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

□

2. Bài tập tự rèn luyện

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

① $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5. \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 7. \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2 + y = 4x \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

④ $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 13. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 3y^2 = 7. \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 3y^2 - xy + 2x - 5y = 4. \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

📁 DẠNG 3.2. Hệ phương trình đối xứng loại 1

3. Phương pháp giải toán

Định nghĩa 1. Hệ phương trình đối xứng loại 1 có dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ với $\begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x). \end{cases}$

Cách giải:

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ (điều kiện hệ có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Thế S, P vào hệ.

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

⚠ Một số biểu thức đối xứng thường gặp

$$\text{— } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P.$$

$$\text{— } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = S(S^2 - 3P) = S^3 - 3PS.$$

$$\text{— } x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 \cdot y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2.$$

4. Ví dụ

VÍ DỤ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x + y)^2 - 2xy = 5. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 - 2(5 - S) = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ \begin{cases} S = 3 \\ S = -5 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \text{ (Nhận)} \\ \begin{cases} S = -5 \\ P = 10. \end{cases} \text{ (Loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1; 2), (2; 1)$. □

VÍ DỤ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S + P = 11 \\ S \cdot P = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 11 - P \\ (11 - P)P = 30 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} S = 11 - P \\ -P^2 + 11P - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 11 - P \\ \begin{cases} P = 6 \\ P = 5 \end{cases} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \text{ (nhận)} \\ \begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases} \text{ (nhận)} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = 2 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 6X + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 5 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(3; 2), (2; 3), (1; 5), (5; 1)$. □

VÍ DỤ 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^3 - 3(x + y)xy = (x + y)^2 - 2xy \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S = 1 \\ S^3 - 3SP = S^2 - 2P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ 1 - 3P = 1 - 2P \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 0 \end{cases} \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Với $\begin{cases} S = 1 \\ P = 0 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(0; 1), (1; 0)$. □

VÍ DỤ 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 5 \\ (x^2 + y^2)^2 - 3(xy)^2 = 13 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ (S^2 - 2P)^2 - 3P^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ 5^2 - 3P^2 = 13 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 5 + 2P \\ \begin{cases} P = 2 \\ P = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = 2 \\ S^2 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} P = -2 \\ S^2 = 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = 2 \\ S = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} P = 2 \\ S = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} P = -2 \\ S = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} P = -2 \\ S = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2. \end{cases}$
Với $\begin{cases} S = -3 \\ P = 2 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = -2. \end{cases}$
Với $\begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 2. \end{cases}$
Với $\begin{cases} S = -1 \\ P = -2 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = -2. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1), (-1; 2), (2; -1), (1; -2), (-2; 1)$. □

5. Bài tập tự rèn luyện

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau

- ① $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8. \end{cases}$

② $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28. \end{cases}$
- ③ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 = 34. \end{cases}$

④ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x + y) + 2xy + 9 = 0. \end{cases}$
-

.....

.....

.....

.....
- 📁 DẠNG 3.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2
- $$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ f(y; x) = 0. \end{cases}$$

Phương pháp giải toán
- Lấy vế trừ vế rồi đặt $x - y$ làm nhân tử chung, sau đó dùng phương pháp thế để tìm nghiệm.
6. Ví dụ
- VÍ DỤ 7. Giải hệ phương trình
- $$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x. \end{cases}$$
- Lời giải.
- Ta có $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y & (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x & (2). \end{cases}$
- Lấy vế trừ vế ta được
- $$\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 &= x - y \Leftrightarrow 3(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Trường hợp 1: $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$.

Thay vào phương trình (1) ta được $x^2 - 2x^2 = 2x + x \Leftrightarrow -x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 & \Rightarrow y = -3. \end{cases}$

— Trường hợp 2: $3x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 - 3x}{3}$.

Thay vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} x^2 - 2\frac{(1 - 3x)^2}{9} &= 2x + \frac{1 - 3x}{3} \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 3x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &\in \emptyset. \end{aligned}$$

— Vậy $S = \{(0; 0); (-3; -3)\}$.

□

VÍ DỤ 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2). \end{cases}$

Lời giải.

Lấy (1) - (2) ta được

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 2y - 2x \\ \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)[x^2 + y^2 + xy + 2] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 + xy + 2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Trường hợp 1: $y = x$.

Thay vào phương trình (1) ta được

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} & \Rightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

— Trường hợp 2: $x^2 + y^2 + xy + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 = 0$ (vô nghiệm).

— Vậy $S = \left\{(1; 1); \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

□

VÍ DỤ 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2y = y^2 + 1 & (1) \\ 2y^2x = x^2 + 1 & (2). \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x, y > 0$.

Lấy (1) - (2) ta được

$$\begin{aligned} 2x^2y - 2xy^2 &= y^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow 2xy(x - y) + (x - y)(x + y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(2xy + x + y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2xy + x + y = 0 \text{ (vô nghiệm do } x, y > 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Với $y = x$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy $S = \{(1; 1)\}$.

□

7. Bài tập rèn luyện

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 - 2x - y - 1 = 0 \\ y^2 - 2y - x - 1 = 0. \end{cases}$$

8. Bài tập rèn luyện nâng cao

Bài 4. Giải các hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^3 = 2y + x + 2 \\ y^3 = 2x + y + 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x. \end{cases}$$

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2y - y^2 = 4 \\ y^2x - x^2 = 4. \end{cases}$$

Bài 6. Giải hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x^2y + x = 3y \\ 2y^2x + y = 3x. \end{cases}$$

DẠNG 3.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP

9. Ví dụ

VÍ DỤ 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y & (2). \end{cases}$

Lời giải.

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^2 - (y - 1)x - 2y^2 - 2y = 0$.
Xem đây như là phương trình bậc hai theo ẩn x thì ta có $\Delta = (y - 1)^2 + 4(2y^2 + 2y) = 9y^2 + 6y + 1 = (3y + 1)^2 \geq 0$ với mọi y .

Khi đó $\begin{cases} x = \frac{y - 1 + 3y + 1}{2} \\ x = \frac{y - 1 - 3y - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -y - 1. \end{cases}$

— Trường hợp 1: $x = 2y$.

Thay vào phương trình (1) ta được

$$7y^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 & \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 & \Rightarrow x = -2. \end{cases}$$

— Trường hợp 2: $x = -y - 1$.

Thay vào phương trình (1) ta được

$$(y+1)^2 - (y+1)y + y^2 = 7 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 & \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 & \Rightarrow x = -3. \end{cases}$$

— Vậy $S = \{(2; 1); (-2; -1); (-3; 2); (2; -3)\}$.

□

10. Bài tập tương tự

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x^2 - 2y^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 4 \\ x - xy - 2y = 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0. \end{cases}$$

.....

$$\text{VÍ DỤ 11. Giải hệ phương trình} \begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 & (1) \\ x^2 - 5y^2 - x - 7 = 0. & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Nhận xét. Phương trình (1) chứa các biểu thức $x^3, 6x^2y, 9xy^2, 4y^3$ là những biểu thức có cùng bậc ba. Ta gọi phương trình dạng này là phương trình **đẳng cấp** (bậc 3). Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho y^3 (hoặc nếu $x \neq 0$, chia hai vế cho x^3).

— Xét $y = 0$ hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x^3 = 0 \\ x^2 - x - 7 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

— Xét $y \neq 0$, chia hai vế cho y^3 ta được

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 9\frac{x}{y} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 4y. \end{cases}$$

— Với $x = y$ thế vào (2) ta được

$$(2) \Leftrightarrow y^2 - 5y^2 - y - 7 = 0 \Leftrightarrow -4y^2 - y - 7 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

— Với $x = 4y$ thế vào (2) được

$$(2) \Leftrightarrow 16y^2 - 5y^2 - 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow 11y^2 - 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 4 \\ y = -\frac{7}{11} \Rightarrow x = -\frac{28}{11}. \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\frac{28}{11} \\ y = -\frac{7}{11}. \end{cases}$

□

11. Bài tập tương tự

Bài 8. Giải các hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0. & (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2y}{x}} = 3 & (1) \\ x - y + xy = 3. & (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 & (1) \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x. & (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y & (1) \\ 13x^2 - 41xy + 21y^2 = -9. & (2) \end{cases}$$

.....

VÍ DỤ 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2. \end{cases}$

Lời giải.

— Xét $y = 0$. Hệ trở thành $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

— Xét $y \neq 0$. Chia hai vế của phương trình đầu cho y và chia hai vế của phương trình sau cho y^2 ta được hệ tương đương $\begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \quad (I)$

— Đặt ẩn phụ.

Cách 1. Hệ (I) viết lại thành $\begin{cases} x + x \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + x \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$

— Đặt $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$, hệ (I) trở thành $\begin{cases} u + uv + v = 7 \\ u^2 + uv + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + uv = 7 \\ (u + v)^2 - uv = 13 \end{cases} \quad (a).$

Đây là hệ đối xứng loại 1. Đặt $S = u + v$, $P = u \cdot v$.

(a) trở thành $\begin{cases} S + P = 7 & (1) \\ S^2 - P = 13 & (2) \end{cases}$.

Lấy (1) cộng (2) theo từng vế ta được

$$S^2 + S = 20 \Leftrightarrow S^2 + S - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = -5 \Rightarrow P = 12 \\ S = 4 \Rightarrow P = 3. \end{cases}$$

Khi đó u và v là nghiệm của phương trình

$$X^2 + 5X + 12 = 0 \text{ (vô nghiệm) hoặc } X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 3. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases} \end{cases}$

Vậy hệ có hai nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

Cách 2. Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13. \end{cases} \quad (*)$

— Đặt $\begin{cases} u = x + \frac{1}{y} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$, (*) trở thành $\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 - v = 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$.

— Lấy (3) cộng với (4) theo từng vế ta được:

$$u^2 + u = 20 \Leftrightarrow u^2 + u - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -5 \Rightarrow v = 12 \\ u = 4 \Rightarrow v = 3. \end{cases}$$

Trường hợp 1. $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = -5y \\ x = 12y. \end{cases} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$

Thế $x = 12y$ vào (5) ta được $12y^2 + 1 = -5y \Leftrightarrow 12y^2 + 5y + 1 = 0$ vô nghiệm.

Trường hợp 2. $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = 4y \\ x = 3y. \end{cases} \quad \begin{matrix} (7) \\ (8) \end{matrix}$

Thế $x = 3y$ vào phương trình (7) ta được $3y^2 + 1 = 4y \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1. \end{cases}$

Vậy hệ có hai nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

□

12. Bài tập tương tự

Bài 9. Giải hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} xy + x - 1 = 3y \\ x^2y - x = 2y^2. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x + y)^2 = 2x^2 + 7y + 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0. \end{cases}$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho một tam giác vuông. Khi ta tăng mỗi cạnh góc vuông lên 2cm thì diện tích tam giác tăng lên 17cm². Nếu giảm các cạnh góc vuông đi 3cm và 1cm thì diện tích tam giác giảm đi 11cm². Tính diện tích tam giác ban đầu.

A. 50cm².

B. 25cm².

C. 50√5cm².

D. 50√2cm².

Câu 2. Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau $\frac{24}{5}$ giờ sẽ đầy bể. Mỗi giờ lượng nước của vòi một chảy được bằng $\frac{3}{2}$ lần lượng nước của vòi thứ hai. hỏi vòi thứ hai chảy riêng một mình thì bao lâu sẽ đầy bể?

- A. 12 giờ. B. 10 giờ. C. 8 giờ. D. 3 giờ.
-
-
-
-

Câu 3. Tìm độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng: khi ta tăng mỗi cạnh lên 2 cm thì diện tích tăng 17 cm²; khi ta giảm chiều dài của cạnh này là 3 cm và cạnh kia 1 cm thì diện tích giảm 11cm².

- A. 5 cm và 10 cm. B. 4 cm và 7 cm. C. 2 cm và 3 cm. D. 5 cm và 6 cm.
-
-
-
-

Câu 4. Ta đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ thì hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3y + xy^3 = 2 \end{cases}$ thành

- A. $\begin{cases} S + P = 1 \\ P = 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ P = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} S^2 + 2P = 1 \\ P = 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ S = 2 \end{cases}$.
-
-
-
-

Câu 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = m - 1 \\ 2x - y = 3m + 3 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2$ nhỏ nhất?

- A. $m = -\frac{4}{5}$. B. $m = -\frac{3}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = -1$.
-
-
-
-

Câu 6. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$ là

- A. $(-1; -1)$. B. $(1; 1)$. C. $(1; -1)$. D. $(-1; 1)$.
-
-
-
-

Câu 7. Hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + my = -1 \end{cases}$ vô nghiệm khi

- A. không có m . B. $m = -4$. C. $m = -\frac{1}{4}$. D. $m \neq -4$.
-
-
-
-

Câu 8. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2m}{x-1} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{m}{x-1} + \frac{y+6}{y} = 5 \end{cases}$ trong trường hợp $m \neq 0$ là

- A. $(1; 0)$. B. $(m + 1; 2)$. C. $\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{2}\right)$. D. $(3; m)$.
-
-
-
-

Câu 9. Hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m - 3 \\ 4x + my = -2 \end{cases}$ có vô số nghiệm khi

A. $m = \pm 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = 2$.

D. $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Câu 10. Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $a = -1$.

B. $a = 1$ hoặc $a = -1$.

C. $a = 1$.

D. không có a .

Câu 11. Tìm tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx + y + m = 0 \\ x + my + m = 0 \end{cases}$ vô nghiệm

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 0$.

D. $m \neq 1$.

Câu 12. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất khi

A. $m = \frac{10}{3}$.

B. $m = 10$.

C. $m = -10$.

D. $m = -\frac{10}{3}$.

Câu 13. Hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$

A. có 2 nghiệm (2; 3) và (1; 5).

B. có 2 nghiệm (2; 1) và (3; 5).

C. có 1 nghiệm là (5; 6).

D. có 4 nghiệm (2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1).

Câu 14. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = -\sqrt{2}$.

C. $m = \sqrt{2}$ và $m = -\sqrt{2}$.

D. m tùy ý.

Câu 15. Hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x} = y + 5x \\ \frac{1}{y} = x + 5y \end{cases}$ có bao nhiêu cặp nghiệm (x, y) mà $x \neq y$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

.....

Câu 16. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$ có đúng một nghiệm.
 A. $m \neq 3$ hay $m \neq -3$. B. $m \neq 3$ và $m \neq -3$. C. $m \neq 3$. D. $m \neq -3$.

.....

Câu 17. Hệ phương trình $\begin{cases} x \cdot y + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$
 A. có 2 nghiệm $(2; 3)$ và $(1; 5)$. B. có 2 nghiệm $(2; 1)$ và $(3; 5)$.
 C. có 1 nghiệm là $(5; 6)$. D. có 4 nghiệm $(2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1)$.

.....

Câu 18. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi
 A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = -\sqrt{2}$. C. $m = \sqrt{2}$ và $m = -\sqrt{2}$. D. m tùy ý.

.....

Câu 19. Hệ phương trình $\begin{cases} |x - 1| + y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ có nghiệm là
 A. $x = -3; y = 2$. B. $x = 2; y = -1$. C. $x = 4; y = -3$. D. $x = -4; y = 3$.

.....

Câu 20. Hệ phương trình $\begin{cases} mx + 3y = 2m - 1 \\ x + (m + 2)y = m + 3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất với giá trị của m là
 A. $m \neq 1$. B. $m \neq -3$. C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$.

.....

Câu 21. Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $\begin{cases} mx + (m + 4)y = 2 \\ m(x + y) = 1 - y \end{cases}$ vô nghiệm
 A. $m = 0$. B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 3 \end{cases}$.

.....

Câu 22. Hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases}$ có nghiệm là
 A. $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3}$. B. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$. C. $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$. D. vô nghiệm.

Câu 23. Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

- A. $a = 1$. B. $a = 1$ hoặc $a = -1$. C. $a = -1$. D. không có a .

Câu 24. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}$ là

- A. $(1; 1; 1)$. B. $(1; 2; 1)$. C. $(2; 2; 1)$. D. $(3; 3; 3)$.

Câu 25. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = \frac{7}{2} \\ x^2y + xy^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$ có nghiệm là

- A. $(3; 2); (-2; 1)$. B. $(0; 1); (1; 0)$. C. $(0; 2); (2; 0)$. D. $\left(2; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 26. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$ có nghiệm là

- A. $(2; 3)$ hoặc $(3; 2)$. B. $(1; 2)$ hoặc $(2; 1)$.
C. $(-2; -3)$ hoặc $(-3; -2)$. D. $(-1; -2)$ hoặc $(-2; -1)$.

Câu 27. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$ có nghiệm là

- A. $(3; 2); (2; 3)$. B. $(-3; -7); (-7; -3)$.
C. vô nghiệm. D. $(3; 2); (2; 3); (-3; -7); (-7; -3)$.

Câu 28. Hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$ có nghiệm là $(x; y)$ với $x \neq 0$ và $y \neq 0$ là

- A. $(-\sqrt{11}; -\sqrt{11}); (\sqrt{11}; \sqrt{11})$. B. $(0; \sqrt{11}); (\sqrt{11}; 0)$.
C. $(-\sqrt{11}; 0)$. D. $(\sqrt{11}; 0)$.

Câu 29. Hãy chỉ ra các cặp nghiệm khác 0 của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 5x - 2y \\ y^2 = 5y - 2x. \end{cases}$

- A. (3; 3). B. (2; 2); (3; 1); (-3; 6).
C. (1; 1); (2; 2); (3; 3). D. (-2; -2); (1; -2); (-6; 3).

Câu 30. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y = 6 \\ y^2 + x = 6 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 6. B. 4. C. 2. D. 0.

Câu 31. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$ có bao nhiêu cặp nghiệm $(x; y)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 32. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = m^2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hệ phương trình có nghiệm với mọi m .
B. Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \geq \sqrt{8}$.
C. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ $|m| \geq 2$.
D. Hệ phương trình luôn vô nghiệm.

Câu 33. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17 \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases}$. Hệ thức biểu diễn x theo y rút ra từ hệ phương trình là

- A. $x = \frac{y-2}{2}$ hay $x = \frac{y+2}{2}$. B. $x = \frac{y-3}{2}$ hay $x = \frac{y+3}{2}$.
C. $x = \frac{y-1}{2}$ hay $x = \frac{y+1}{2}$. D. $x = \frac{5}{13}y$ hay $x = \frac{3}{5}y$.

Câu 34. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$. Các giá trị thích hợp của tham số m để hệ phương trình có nghiệm nguyên là

- A. $m = 0, m = -2$. B. $m = 1; m = 2; m = 3$. C. $m = 0; m = 2$. D. $m = 1; m = -3; m = 4$.

Câu 35. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12 \\ 2(x+y)^2 - y^2 = 14 \end{cases}$. Các cặp nghiệm dương của hệ phương trình là

- A. (1; 2), $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. B. (2; 1), $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$. C. $(\frac{2}{3}; 3)$, $(\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$. D. $(\frac{1}{2}; 1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{3}; \sqrt{3})$.

.....

Câu 36. Hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 27 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?
 A. 5. B. 2. C. 6. D. 4.

.....

Câu 37. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 1 \end{cases}$ có bao nhiêu cặp nghiệm $(x; y)$?
 A. 1. B. vô nghiệm. C. 2. D. 3.

.....

Câu 38. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + y^2x = 2m^2 - m - 3 \end{cases}$ và các mệnh đề

(I) Hệ có vô số nghiệm khi $m = -1$.

(II) Hệ có nghiệm khi $m > \frac{3}{2}$.

(III) Hệ có nghiệm với mọi m .

Các mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Chỉ (III). D. Chỉ (I) và (III).

.....

Câu 39. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 - 2a + 3 \end{cases}$. Giá trị thích hợp của tham số a sao cho hệ có nghiệm $(x; y)$ và tích $x \cdot y$ nhỏ nhất là

A. $a = 1$. B. $a = -1$. C. $a = 2$. D. $a = -2$.

.....

Câu 40. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 2 - a \\ x + 2y = a + 1 \end{cases}$. Tìm tham số a để tổng bình phương hai nghiệm của hệ phương trình đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 1$. B. $a = -1$. C. $a = \frac{1}{2}$. D. $a = -\frac{1}{2}$.

.....

Câu 41. Tìm tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - (m+1)y = 3m \\ x - 2my = m + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m = \frac{5}{2}$. B. $m = -\frac{5}{2}$. C. $m = \frac{2}{5}$. D. $m = -\frac{2}{5}$.

A. $(2; -2); (3; -3)$. **B.** $(-2; 2); (-3; 3)$. **C.** $(1; -1); (3; -3)$. **D.** $(-1; 1); (-4; 4)$.

A. 4.
C. 1.

B. -4 .
D. không tồn tại giá trị xy .

A. $a < 0$. **B.** $a > 0$. **C.** $a < \frac{5}{2}$. **D.** $a > \frac{5}{2}$.

A. 2. B. 1. C. 6. D. 0.

📁 DẠNG 3.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2

Phương pháp giải toán

Lấy vế trừ vế rồi đặt $x - y$ làm nhân tử chung, sau đó dùng phương pháp thế để tìm nghiệm.

1. Ví dụ

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y & (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x & (2). \end{cases}$$

Lấy vế trừ vế ta được

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 &= x - y \Leftrightarrow 3(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Trường hợp 1: $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$.

Thay vào phương trình (1) ta được $x^2 - 2x^2 = 2x + x \Leftrightarrow -x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 & \Rightarrow y = -3. \end{cases}$

— Trường hợp 2: $3x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 - 3x}{3}$.

Thay vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} x^2 - 2\frac{(1 - 3x)^2}{9} &= 2x + \frac{1 - 3x}{3} \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 3x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &\in \emptyset. \end{aligned}$$

— Vậy $S = \{(0; 0); (-3; -3)\}$.

□

VÍ DỤ 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2). \end{cases}$$

Lời giải.

Lấy (1) – (2) ta được

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 2y - 2x \\ \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)[x^2 + y^2 + xy + 2] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 + xy + 2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Trường hợp 1: $y = x$.

Thay vào phương trình (1) ta được

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} & \Rightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

— Trường hợp 2: $x^2 + y^2 + xy + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 = 0$ (vô nghiệm).

— Vậy $S = \left\{(1; 1); \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

□

VÍ DỤ 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2y = y^2 + 1 & (1) \\ 2y^2x = x^2 + 1 & (2). \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x, y > 0$.

Lấy (1) – (2) ta được

$$2x^2y - 2xy^2 = y^2 - x^2$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2xy(x - y) + (x - y)(x + y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(2xy + x + y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2xy + x + y = 0 \text{ (vô nghiệm do } x, y > 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Với $y = x$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy $S = \{(1; 1)\}$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 10. Giải các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 - 2x - y - 1 = 0 \\ y^2 - 2y - x - 1 = 0. \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

3. Bài tập rèn luyện nâng cao

Bài 11. Giải các hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^3 = 2y + x + 2 \\ y^3 = 2x + y + 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x. \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

Bài 12. Giải các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2y - y^2 = 4 \\ y^2x - x^2 = 4. \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

Bài 13. Giải hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x^2y + x = 3y \\ 2y^2x + y = 3x. \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

□ DẠNG 3.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP

4. Ví dụ

VÍ DỤ 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y & (2). \end{cases}$

Lời giải.

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^2 - (y-1)x - 2y^2 - 2y = 0$.

Xem đây như là phương trình bậc hai theo ẩn x thì ta có $\Delta = (y-1)^2 + 4(2y^2 + 2y) = 9y^2 + 6y + 1 = (3y+1)^2 \geq 0$ với mọi y .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x = \frac{y-1+3y+1}{2} \\ x = \frac{y-1-3y-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -y-1. \end{cases}$$

— Trường hợp 1: $x = 2y$.

Thay vào phương trình (1) ta được

$$7y^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 & \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 & \Rightarrow x = -2. \end{cases}$$

— Trường hợp 2: $x = -y-1$.

Thay vào phương trình (1) ta được

$$(y+1)^2 - (y+1)y + y^2 = 7 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 & \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 & \Rightarrow x = -3. \end{cases}$$

— Vậy $S = \{(2; 1); (-2; -1); (-3; 2); (2; -3)\}$.

□

5. Bài tập tương tự

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x^2 - 2y^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 4 \\ x - xy - 2y = 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0. \end{cases}$$

.....

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Một số kiến thức cần nhớ Định nghĩa: Các mệnh đề $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ được gọi là bất đẳng thức. Tính chất:

- ① $\forall c \in \mathbb{R}$, ta có: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ (hoặc $a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$).
- ② $\forall c > 0$, ta có $a < b \Leftrightarrow ac < bc$.
- ③ $\forall c < 0$, ta có $a < b \Leftrightarrow ac > bc$.
- ④ $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$ (chỉ đúng với dấu $+$, không đúng với dấu $-$).
- ⑤ $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$ (chỉ đúng với dấu $\times$, không đúng với dấu $:$).
- ⑥ $\forall a > 0$, ta có $a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$ (với n nguyên dương).
- ⑦ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ta có $a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$ (với n nguyên dương).
- ⑧ $\forall a > 0$, ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- ⑨ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- ⑩ $\forall a, b \geq 0$, ta có $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ (bất đẳng thức Cauchy).
- ⑪ $\forall a > 0$, ta có $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- ① $2(1-a)^2 \geq 1-2a^2, \forall a \in \mathbb{R}$.
- ② $(1+a^2)(1+b^2) \geq (1+ab)^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- ③ $a^2 + b(13b+a) \geq 3b(a+b), \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- ④ $2x^2 + y^2 + 1 \geq 2x(1-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- ⑤ $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 \geq 2x + 12y + 6z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
- ⑥ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}, \forall x \geq y \geq 0$.
- ⑦ $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2), \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$.
- ⑧ Cho x, y là hai số thực thỏa $4x+y=1$. Chứng minh rằng $4x^2+y^2 \geq 0,2$.
- ⑨ $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b > 0$.
- ⑩ $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}, \forall a \geq 1$.

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau

① $a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3, \forall a, b \geq 0.$

② $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2), \forall a, b \geq 0.$

③ $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3, \forall a, b \geq 0.$

④ $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \leq \frac{a^3+b^3}{2}, \forall a, b \geq 0.$

⑤ $2(a^5 + b^5) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3), \forall a, b \geq 0.$

Bài 3. Chứng minh các bất đẳng thức sau

① $a^2 + ab + b^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

③ $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

④ $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

⑤ $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}.$

⑥ $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

Bài 4. Chứng minh các bất đẳng thức sau

① $(a + b)(1 + 4ab) \geq 4ab, \forall a, b \geq 0.$

② $(2a + 1)(6 + ab)(b + 3) \geq 48ab, \forall a, b \geq 0.$

③ $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8, \forall a, b, c > 0.$

④ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \forall a, b > 0.$

⑤ $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 8, \forall a, b, c > 0.$

Bài 5. Chứng minh các bất đẳng thức sau

① $a + b + 2 \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \forall a, b \geq 0.$

② $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}, \forall a, b, c \geq 0.$

③ $a + b + 1 \geq \sqrt{ab} + \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \geq 0.$

④ $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \forall a, b, c > 0.$

⑤ $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6, \forall a, b, c > 0.$

⑥ Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, với $a, b, c > 0.$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Trong các tính chất sau, tính chất nào **sai**?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$

B. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

D. $\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

Câu 2. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

B. $a < b \Rightarrow ac < bc$.

C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.

D. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.

B. $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac \leq bd$.

C. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.

D. $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b$, với $c > 0$.

Câu 4. Cho ba số a, b, c thỏa mãn đồng thời $a + b - c > 0$; $a + c - b > 0$; $b + c - a > 0$. Để ba số a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì cần thêm điều kiện gì?

A. Cần có cả $a, b, c \geq 0$.

B. Cần có cả $a, b, c > 0$.

C. Chỉ cần một trong ba số a, b, c dương.

D. Không cần thêm điều kiện gì.

Câu 5. Nếu $a > b$ và $c > d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $ac > bd$.

B. $a - c < b - d$.

C. $a + c > b + d$.

D. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Câu 6. Cho bất đẳng thức $|a - b| \leq |a| + |b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi?

A. $a = b$.

B. $ab \leq 0$.

C. $ab \geq 0$.

D. $ab = 0$.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x) = x^2 + 3|x|$ với $x \in \mathbb{R}$ là

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 8. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.
- B. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 1 và không giá trị nhỏ nhất.
- C. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
- D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 10. Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

- A. có giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$.
- B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.
- C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$.
- D. không có giá trị lớn nhất.

Câu 11. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $a < b \Rightarrow ac < bc$.
- B. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- C. $a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$.
- D. $a < b \Rightarrow ac < bc, (c > 0)$.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.
- B. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.
- C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$.
- D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Câu 13. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.
- B. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
- C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.
- D. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

Câu 14. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{a}$.
- B. $a < b \Rightarrow ac < bc$.
- C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
- D. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

Câu 15. Tìm mệnh đề sai?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.
- B. $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.

C. $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$

D. $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b, \quad (\text{với } c > 0).$

Câu 16. Cho a, b, c, d với $a > b$ và $c > d$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a + c > b + d.$

B. $a - c > b - d.$

C. $ac > bd.$

D. $a^2 > b^2.$

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{x^2}$ với $x \neq 0$.

A. $2\sqrt{3}.$

B. $\sqrt[4]{3}.$

C. $2\sqrt[4]{3}.$

D. $\sqrt{3}.$

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$ với $x > 0$.

A. 4.

B. 8.

C. 2.

D. 16.

Câu 19. Cho x và y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $T = x + y$.

A. -8 và $8.$

B. -2 và $2.$

C. $-2\sqrt{2}$ và $2\sqrt{2}.$

D. $-\sqrt{2}$ và $\sqrt{2}.$

Câu 20. Nếu $a > b$ và $c > d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $ac > bd.$

B. $a - c > b - d.$

C. $a - d > b - c.$

D. $-ac > -bd.$

Câu 21. Nếu $m > 0$ và $n < 0$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $m > -n.$

B. $n - m < 0.$

C. $-m > -n.$

D. $m - n < 0.$

Câu 22. Nếu a, b và c là các số bất kỳ và $a > b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ac > bc.$

B. $a^2 < b^2.$

C. $a + c > b + c.$

D. $c - a > c - b.$

Câu 23. Nếu $a > b$ và $c > d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$

B. $a - c > b - d.$

C. $ac > bd.$

D. $a + c > b + d.$

Câu 24. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a ?

- A. $6a > 3a$. B. $3a > 6a$. C. $6 - 3a > 3 - 6a$. D. $6 + a > 3 + a$.

Câu 25. Nếu a, b và c là các số bất kỳ và $a < b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $ac > bc$. B. $a^2 < b^2$. C. $3a + 2c > 3b + 2c$. D. $ac < bc$.

Câu 26. Nếu $a > b > 0, c > d > 0$ thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

- A. $ac > bc$. B. $a - c > b - d$. C. $a^2 > b^2$. D. $ac > bd$.

Câu 27. Nếu $a > b > 0, c > d > 0$ thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

- A. $ac > bd$. B. $a + c > b + d$. C. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. D. $\frac{a}{b} > \frac{d}{c}$.

Câu 28. Sắp xếp ba số $\sqrt{6} + \sqrt{13}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{3} + \sqrt{16}$ theo thứ tự từ bé đến lớn thì thứ tự đúng là

- A. $\sqrt{19}$; $\sqrt{3} + \sqrt{16}$; $\sqrt{6} + \sqrt{13}$. B. $\sqrt{3} + \sqrt{16}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{6} + \sqrt{13}$.
C. $\sqrt{19}$; $\sqrt{6} + \sqrt{13}$; $\sqrt{3} + \sqrt{16}$. D. $\sqrt{6} + \sqrt{13}$; $\sqrt{3} + \sqrt{16}$; $\sqrt{19}$.

Câu 29. Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $-3a > -3b$. B. $a^2 > b^2$. C. $2a > 2b$. D. $a < b$.

Câu 30. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right)$ bằng

- A. 64. B. 60. C. 8. D. 16.

Phần II

HÌNH HỌC

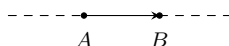
BÀI 1. VEC-TƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm véc-tơ

- Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu véc-tơ có điểm đầu A , điểm cuối B là $\vec{AB}$.
- Giá của véc-tơ là đường thẳng chứa véc-tơ đó.
- Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ, kí hiệu $|\vec{AB}|$.

Ví dụ véc-tơ $\vec{AB}$

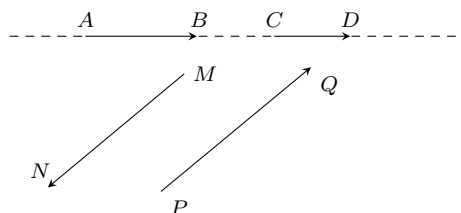


- Điểm đầu A ;
- Điểm cuối B ;
- Phương (giá): Đường thẳng qua hai điểm A, B ;
- Hướng từ A đến B .

2. Hai véc-tơ cùng phương

Định nghĩa 1. Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Các ví dụ



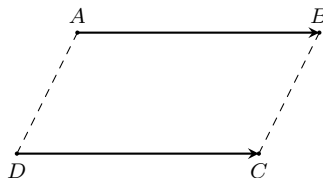
$\vec{AB}$ cùng phương với $\vec{CD}$, $\vec{MN}$ cùng phương với $\vec{PQ}$.

Nhận xét. — Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

- Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AB}, \vec{AC}$ cùng phương.

3. Hai véc-tơ bằng nhau

Định nghĩa 2. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.



$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \text{ cùng hướng với } \vec{CD} \\ AB = CD. \end{cases}$$

4. véc-tơ-không

Định nghĩa 3. Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

B. CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm phân biệt A, B . Có bao nhiêu đường thẳng đi qua A và B ; Có bao nhiêu véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A hoặc B .

Lời giải.

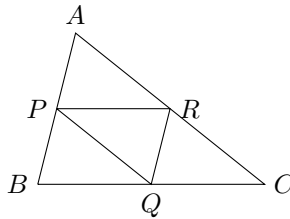
- Có một đường thẳng đi qua A và B .
- Có 2 véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A hoặc B : $\vec{AB}$ và $\vec{BA}$.

□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AC .

- a) Nêu các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A, B, C .
- b) Nêu các véc-tơ bằng $\vec{PQ}$.
- c) Nêu các véc-tơ đối của $\vec{PQ}$.

Lời giải.



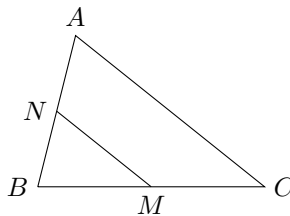
- a) Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A, B, C : $\vec{AB}, \vec{BA}, \vec{AC}, \vec{CA}, \vec{BC}$ và $\vec{CB}$.
- b) Các véc-tơ bằng $\vec{PQ}$ là: $\vec{AR}$ và $\vec{RC}$.
- c) Các véc-tơ đối của $\vec{PQ}$ là: $\vec{QP}, \vec{RA}$ và $\vec{CR}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB .

- a) Các véc-tơ nào cùng hướng với $\vec{AC}$.
- b) Các véc-tơ nào ngược hướng với $\vec{BC}$.
- c) Nêu các véc-tơ bằng nhau.

Lời giải.



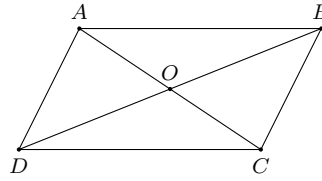
- a) Các véc-tơ nào cùng hướng với $\vec{AC}$: $\vec{NM}, \vec{AA}, \vec{BB}, \vec{CC}, \vec{MM}$ và $\vec{NN}$.
- b) Các véc-tơ nào ngược hướng với $\vec{BC}$: $\vec{CB}, \vec{CM}$ và $\vec{MB}$.
- c) Các véc-tơ bằng nhau: $\vec{BM} = \vec{MC}, \vec{BN} = \vec{NA}, \vec{MB} = \vec{CM}$ và $\vec{NB} = \vec{AN}$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tìm các véc-tơ khác $\vec{0}$ thỏa

- a) Có điểm đầu và điểm cuối là A, B, C, D .
 b) Các véc-tơ bằng nhau có điểm đầu hoặc điểm cuối là O .

Lời giải.



- a) Hình bình hành $ABCD$ có 6 cạnh được lập từ các đỉnh A, B, C, D . Cứ hai đỉnh bất kì của hình bình hành thì có hai véc-tơ. Do đó có 12 véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A, B, C, D .
 b) Các véc-tơ có bằng nhau có điểm đầu hoặc điểm cuối là O : $\vec{AO} = \vec{OC}$, $\vec{OA} = \vec{CO}$, $\vec{DO} = \vec{OB}$ và $\vec{OD} = \vec{BO}$.

□

VÍ DỤ 5. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D . Chứng minh rằng $\vec{AB} = \vec{DC}$ thì $\vec{AD} = \vec{BC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 &\vec{AB} = \vec{DC} \\
 \Leftrightarrow &\vec{AD} + \vec{DB} = \vec{DB} + \vec{BC} \\
 \Leftrightarrow &\vec{AD} = \vec{BC} + \vec{DB} - \vec{DB} \\
 \Leftrightarrow &\vec{AD} = \vec{BC} + \vec{0} \\
 \Leftrightarrow &\vec{AD} = \vec{BC}.
 \end{aligned}$$

□

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy chỉ ra các véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là một trong bốn điểm A, B, C, D . Trong số các véc-tơ trên, hãy chỉ ra

- a) Các véc-tơ cùng phương.
 b) Các cặp véc-tơ cùng phương nhưng ngược hướng.
 c) Các cặp véc-tơ bằng nhau.

.....

Bài 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O .

- a) Tìm các véc-tơ khác véc-tơ-không và cùng phương với $\vec{AO}$.
 b) Tìm các véc-tơ bằng với các véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$.
 c) Tìm các véc-tơ bằng với các véc-tơ $\vec{AB}$ và có điểm đầu là O, D, C .

.....

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

- a) Tìm các véc-tơ bằng với $\vec{AB}$.

b) Tìm các véc-tơ bằng với các véc-tơ $\vec{OA}$.

c) Vẽ các véc-tơ bằng với $\vec{OA}$ có điểm cuối là các điểm A, B, C, D .

.....

Bài 4. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó?

.....

Bài 5. Cho năm điểm A, B, C, D, E, D phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó?

.....

Bài 6. Cho tam giác ABC có A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

a) Chứng minh rằng $\vec{BC'} = \vec{C'A} = \vec{A'B'}$.

b) Tìm các véc-tơ bằng với $\vec{B'C'}, \vec{C'A'}$.

.....

Bài 7. Cho véc-tơ $\vec{AB}$ và một điểm C . Hãy dựng điểm D sao cho $\vec{AB} = \vec{CD}$.

.....

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC . Chứng minh rằng $\vec{MP} = \vec{QN}, \vec{MQ} = \vec{PN}$.

.....

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $|\vec{AB} + \vec{AD}| = AC$.

b) Nếu $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{CB} - \vec{CD}|$ thì $ABCD$ là hình chữ nhật.

.....

Bài 10. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính độ dài các véc-tơ $\vec{AB} + \vec{BC}, \vec{AB} - \vec{BC}$.

.....

Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh là a . Tính $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$.

.....

.....

.....

.....

Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hãy biểu diễn các véc-tơ $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ theo hai véc-tơ $\vec{AO}$, $\vec{BO}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a , trực tâm H . Tính độ dài của các véc-tơ $\vec{HA}$, $\vec{HB}$, $\vec{HC}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính độ dài của các véc-tơ $\vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{AB} - \vec{AD}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 15. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$, B' là điểm đối xứng với B qua O . Chứng minh rằng $\vec{AH} = \vec{B'C}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 16. Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu có $\vec{AB} = \vec{DC}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 17. Cho $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$. So sánh về độ dài, phương và hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 18. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ khác véc-tơ không. Khi nào có đẳng xảy ra?

① $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

② $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

.....

.....

.....

.....

Bài 19. Cho $\triangle ABC$. Vẽ D đối xứng với A qua B , E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A . Gọi G là giao điểm giữa trung tuyến AM của $\triangle ABC$ với trung tuyến DN của $\triangle DEF$. Gọi I , K lần lượt là trung điểm của GA và GD . Chứng minh

① $\vec{AB} = \vec{NM}$.

② $\vec{MK} = \vec{NI}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 20. Cho $\triangle ABC$ và M là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vẽ điểm P đối xứng với M qua D , điểm Q đối xứng với P qua E , điểm N đối xứng với Q qua F . Chứng minh $\vec{MA} = \vec{AN}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 21. Cho hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm G . Chứng minh $\vec{BE} = \vec{FC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AM, AN với BD . Chứng minh $\vec{BE} = \vec{FD}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $AH \perp BD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH và BC . Kẻ $BK \perp AM$ và cắt AH tại E . Chứng minh rằng $\vec{MN} = \vec{EB}$.

.....

.....

.....

.....

.....

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1 (0H1Y1-1). Véc-tơ là một đoạn thẳng

- A. Có hướng.

C. Có hai đầu mút.
- B. Có hướng dương và hướng âm.

D. Thỏa mãn ba tính chất trên.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2 (0H1Y2-4). Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

- A. Hai véc-tơ bằng nhau.

C. Hai véc-tơ cùng hướng.
- B. Hai véc-tơ đối nhau.

D. Hai véc-tơ cùng phương.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3 (0H1Y2-4). Hai véc-tơ đối nhau khi và chỉ khi

- A. Cùng hướng và có độ dài bằng nhau.

C. Cùng phương và có độ dài bằng nhau.
- B. Song song và có độ dài bằng nhau.

D. Ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4 (0H1Y1-3). Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi

- A. Cùng hướng và cùng độ dài. B. Cùng phương.
C. Cùng hướng. D. Có cùng độ dài.

Câu 5 (0H1B1-2). Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cùng phương.
B. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$ cùng phương.
C. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AC}$ và $\vec{BC}$ cùng phương.
D. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC = BC$.

Câu 6 (0H1B1-2). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ. B. Có ít nhất hai véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
C. Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ. D. Không có véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.

Câu 7 (0H1B1-2). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
B. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
C. Hai véc-tơ $\vec{AB}, \vec{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
D. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài.

Câu 8 (0H1Y1-3). Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài cùng chúng không bằng nhau.
B. Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài cùng chúng không cùng phương.
C. Hai véc-tơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.
D. Hai véc-tơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

Câu 9 (0H1B1-2). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba thì cùng phương.
B. Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
C. Véc-tơ không là véc-tơ không có giá.
D. Điều kiện đủ để hai véc-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Câu 10 (0H1B1-2). Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Không có véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
B. Có vô số véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- C. Có một véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- D. Có hai véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 11. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.
- B. Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.
- C. Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = -\vec{a}$.
- D. Không có vectơ $\vec{u}$ nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.
- B. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
- C. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.
- D. Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

Câu 13. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. Hai vectơ cùng phương thì bằng nhau.
- B. Hai vectơ ngược hướng thì có độ dài không bằng nhau.
- C. Hai vectơ cùng phương và cùng độ dài thì bằng nhau.
- D. Hai vectơ cùng hướng và cùng độ dài thì bằng nhau.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, trong các khẳng định sau, hãy tìm khẳng định sai?

- A. $\vec{AD} = \vec{CB}$.
- B. $|\vec{AD}| = |\vec{CB}|$.
- C. $\vec{AB} = \vec{DC}$.
- D. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.

Câu 15. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. Vectơ là một đường thẳng có hướng.
- B. Vectơ là một đoạn thẳng.
- C. Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
- D. Vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Câu 16. Cho vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Được gọi là vectơ suy biến.
- B. Được gọi là vectơ có phương tùy ý.
- C. Được gọi là vectơ không, kí hiệu là $\vec{0}$.
- D. Là vectơ có độ dài không xác định.

Câu 17. Vectơ có điểm đầu D và điểm cuối E được kí hiệu như thế nào là đúng?

A. DE .

B. ED .

C. $|\overrightarrow{DE}|$.

D. $\overrightarrow{DE}$.

.....

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

.....

Câu 19. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C ?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

.....

Câu 20. Cho tam giác đều ABC . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

.....

Câu 21. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng.

B. Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.

C. Hai vectơ cùng phương thì có giá song song nhau.

D. Hai vectơ cùng hướng thì có giá song song nhau.

.....

Câu 22. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, M là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

B. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

C. $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$.

D. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

.....

Câu 23. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

A. 2.

B. 6.

C. 13.

D. 12.

.....

Câu 24. Cho tam giác đều ABC , cạnh a . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = a$.

B. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

D. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

.....

Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$ là
 A. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$.

Câu 33. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là
 A. $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$. C. $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$. D. $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$.

Câu 34. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?
 A. Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
 B. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
 C. $|\overrightarrow{PQ}| = \overrightarrow{PQ}$.
 D. $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$.

Câu 35. Cho các khẳng định sau

- ① Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- ② Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$
- ③ Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- ④ Nếu $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ thì 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự là 4 đỉnh của hình bình hành.

Hỏi có bao nhiêu khẳng định **sai**?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 36. Câu nào **sai** trong các câu sau đây?

- A. Vectơ đối của $\vec{a} \neq \vec{0}$ là vectơ ngược hướng với $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$.
 B. Vectơ đối của $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.
 C. Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho thì với điểm O bất kỳ ta luôn có thể viết $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.
 D. Hiệu của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

Câu 37. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó các cặp vectơ nào cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. C. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. D. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

.....

Câu 38. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{OD}$ là

A. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$.

D. $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}$.

.....

Câu 39. Cho hình bình hành $ABGE$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EG}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BE}$.

C. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BE}$.

D. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$.

.....

Câu 40. Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước (3 điểm bất kì không thẳng hàng) là

A. 42.

B. 3.

C. 9.

D. 27.

.....

Câu 41. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Trong các khẳng định sau, hãy tìm khẳng định **sai**?

A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

B. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

C. $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{MN}|$.

D. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$.

BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

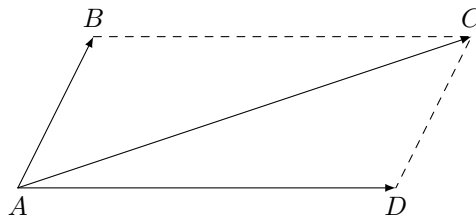
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tổng của hai vectơ

- Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C ta có $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$.
- Quy tắc ba điểm còn được gọi là hệ thức Charles dùng để cộng các vectơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều vectơ như sau:

$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

- Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$.



- **Chú ý:** Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các vectơ chung gốc.

Các tính chất:

$$\begin{aligned} &\circ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. & \circ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). & \circ \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}. \end{aligned}$$

2. Hiệu của hai vectơ

- Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Tổng của vectơ $\vec{a}$ với vectơ đối $-\vec{a}$ là vectơ $\vec{0}$. Nghĩa là $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
- Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lưu ý. Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

DẠNG 2.1. Chứng minh đẳng thức vectơ

Ta sử dụng các quy tắc sau.

- Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, chèn điểm C .
- Quy tắc ba điểm (phép trừ vectơ): $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.
- Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành $ABCD$, ta luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Chú ý: Về mặt thực hành, ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau để thực hiện biến đổi.

- **Hướng 1:** Biến đổi một vế thành vế còn lại (Vế trái (VT) $\Rightarrow$ Vế phải (VP) hoặc ngược lại).
 - Nếu xuất phát từ vế phức tạp, ta cần thực hiện đơn giản biểu thức.
 - Nếu xuất phát từ vế đơn giản, ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.
- **Hướng 2:** Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- **Hướng 3:** Biến đổi đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}}_{\vec{0}} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

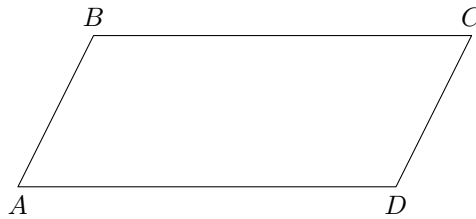
Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. □

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} \end{cases}.$$



Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} + \underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}}_{\vec{0}} \\ &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \quad (\text{Do } ABCD \text{ là hình bình hành}). \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$. □

VÍ DỤ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DB} \quad (\text{luôn đúng}). \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}.$$

Vậy $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$. □

VÍ DỤ 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \end{cases} \quad (\text{do } ABCD \text{ là hình bình hành}) \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.$$

Vậy $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$. □

📁 DẠNG 2.2. Tính độ dài của vectơ tổng

- ☑ *Biến đổi vectơ tổng, hiệu đã cho thành một vectơ duy nhất. Tìm độ dài của vectơ đó.*
- ☑ *Dùng định nghĩa dựng vectơ tổng bằng hình vẽ. Tính độ dài.*

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng 10. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

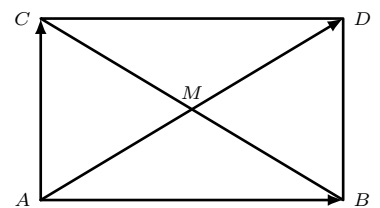
- Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 10$.
- Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = 10$.

□

VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , có cạnh $AB = 5$ và $AC = 12$. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

- Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$.
- Tính độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Gọi M là trung điểm của BC , D là điểm đối xứng của A qua BC .
Khi đó tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật.
Khi đó ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$.



□

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình bình hành tâm O . Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

.....

Bài 2. Cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Bài 3. Cho 5 điểm A, B, C, D, E tùy ý. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}$.

Bài 4. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

d) Nếu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Bài 5. Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G . Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF}$.

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = 2$ (cm). Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Câu 1. Cho đều cạnh a , trọng tâm G . Tính các giá trị của các biểu thức sau:

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

c) $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$.

Câu 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5(\text{cm})$, $BC = 10(\text{cm})$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$?

Câu 3. Cho vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 2(\text{cm})$. Tìm $|\vec{AB}|$, $|\vec{AC}|$, $|\vec{AB} + \vec{AC}|$, $|\vec{AC} - \vec{AB}|$?

Câu 4. Cho vuông tại B có $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Hãy tính $|\vec{AC}|$, $|\vec{AI}|$, $|\vec{AB} + \vec{AC}|$, $|\vec{BC}|$?

Câu 5. Cho hình thang vuông tại A và D có $AB = AD = a$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính $|\vec{CD}|$, $|\vec{BD}|$?

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

a) Đặt các điểm M, N sao cho $\vec{EM} = \vec{BD}$, $\vec{FN} = \vec{BD}$.

b) Chứng minh $\vec{CA} = \vec{MN}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC .

a. Xác định các điểm D và E sao cho: $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ và $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$.

b. Chứng minh C là trung điểm của đoạn thẳng ED .

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$.

a. Hãy xác định các điểm M, P sao cho $\vec{AM} = \vec{DB}$, $\vec{MP} = \vec{AB}$.

b. Chứng minh rằng B là trung điểm của đoạn thẳng DP .

Câu 9. Cho 4 điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng: $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow AD$ và BC có cùng trung điểm.

Câu 10. Cho tam giác ABC . Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ, BCPQ, CARS$. Chứng minh $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$

.....

Câu 11. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều là 100 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ và hướng của $\vec{F}_3$.

.....

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 12. Chọn phát biểu **sai**?

- A. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
 B. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
 C. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$.
 D. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

.....

Câu 13. Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB .

- A. $OA = OB$. B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$. C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

.....

Câu 14. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

.....

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$ với I là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

.....

Câu 16. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a . Độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ bằng

- A. a . B. $2a$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

.....

Câu 17. Cho tam giác ABC , trọng tâm là G . Phát biểu nào là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}|$. B. $|\overrightarrow{GA}| + |\overrightarrow{GB}| + |\overrightarrow{GC}| = 0$.
 C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \overrightarrow{AC}$. D. $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 0$.

Câu 18. Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB .

- A. $OA = OB$. B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$. C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $BC = 5$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 21. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$ bằng

- A. a . B. $2a$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

- A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{AC}$. D. $2\overrightarrow{DC}$.

Câu 23. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Khi đó $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

- A. $\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{PB}$. C. $\overrightarrow{AP}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Câu 24. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$. C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$.

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

- A. $2a\sqrt{2}$. B. $3a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $2a$.

Câu 34. Cho tam giác ABC , khẳng định nào sau là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 35. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $2a\sqrt{3}$.

Câu 36. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các véc-tơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. B. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
C. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài. D. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Câu 37. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đồng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{BC}$. B. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$. C. $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$. D. $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{CA}$.

Câu 38. Cho $\vec{AB} = -\vec{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ cùng hướng. B. $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ cùng độ dài.
C. $ABCD$ là hình bình hành. D. $\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{0}$.

Câu 39. Tính tổng $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR}$

- A. $\vec{MR}$. B. $\vec{MN}$. C. $\vec{PR}$. D. $\vec{MP}$.

Câu 40. Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là

- A. $IA = IB$. B. $\vec{IA} = \vec{IB}$. C. $\vec{IA} = -\vec{IB}$. D. $\vec{AI} = \vec{BI}$.

Câu 41. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

- A. $IA = IB$. B. $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. C. $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$. D. $\vec{IA} = \vec{IB}$.

Câu 42. Cho $\triangle ABC$ cân tại A đường cao AH . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{AB} = \vec{AC}$. B. $\vec{HC} = -\vec{HB}$. C. $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$. D. $\vec{BC} = 2\vec{HC}$.

Câu 43. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{CD}$. B. $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$.
C. $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$. D. $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{DC} - \vec{DA}$.

Câu 44. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\vec{OB} - \vec{OC}$.

- A. $\vec{BC}$. B. $\vec{DA}$. C. $\vec{OD} - \vec{OA}$. D. $\vec{AB}$.

Câu 45. Cộng các véc-tơ có cùng độ dài 5 và cùng giá. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Cộng 5 véc-tơ ta được kết quả là $\vec{0}$.
B. Cộng 4 véc-tơ đôi một ngược hướng ta được kết quả là $\vec{0}$.
C. Cộng 121 véc-tơ ta được kết quả là $\vec{0}$.
D. Cộng 25 véc-tơ ta được véc-tơ có độ dài là 0.

Câu 46. Cho bốn điểm A, B, C, D . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$. B. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{DA}$.
C. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CD} + \vec{DA}$. D. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CD} + \vec{CB}$.

Câu 47. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây bằng $\vec{CA}$?

- A. $\vec{BC} + \vec{AB}$. B. $-\vec{OA} + \vec{OC}$. C. $\vec{BA} + \vec{DA}$. D. $\vec{DC} - \vec{CB}$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí điểm M

- A. M là đỉnh của hình bình hành $ACBM$. B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
C. M trùng C . D. M là trọng tâm tam giác ABC .

Câu 49. Cho tam giác đều ABC có cạnh a . Giá trị $|\vec{AB} - \vec{CA}|$ bằng bao nhiêu?

- A. $2a$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 3. TÍCH CỦA VEC-TƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích của một số đối với một vec-tơ

Định nghĩa 1. Cho một số thực $k \neq 0$ và một vec-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích $k \cdot \vec{a}$ là một vec-tơ có cùng hướng $\vec{a}$ và $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$ khi $k > 0$.

Tích $k \cdot \vec{a}$ là một vec-tơ có ngược hướng $\vec{a}$ và $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$ khi $k < 0$.

Tính chất 1.

$$\text{— } k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

$$\text{— } k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}.$$

$$\text{— } (k + h) \cdot \vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}.$$

$$\text{— } (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

$$\text{— } 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

$$\text{— } 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}.$$

Định lí 1 (Điều kiện để hai vectơ cùng phương).

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

2. Trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

$$\text{— } I \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \text{ hay } \vec{IA} = -\vec{IB}.$$

$$\text{— } I \text{ là trung điểm } AB \text{ và } M \text{ là điểm bất kì, ta luôn có } 2\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB}.$$

$$\text{— } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ và } M \text{ là điểm bất kì } \Leftrightarrow 3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

□ DẠNG 3.1. Chứng minh đẳng thức vec-tơ

$$\text{— Quy tắc 3 điểm: } \vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}, \text{ chèn điểm } M.$$

$$\text{— Quy tắc 3 điểm (phép trừ): } \vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}, \text{ hiệu hai vec-tơ cùng gốc.}$$

$$\text{— Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành } ABCD \text{ luôn có } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}.$$

$$\text{— Cách thường dùng: Biến đổi một vế cho đến khi ra vế còn lại.}$$

$$\text{— Cách bắc cầu: Biến đổi hai vế cho ra cùng một kết quả.}$$

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có 3 trung tuyến là AM, BN, CP . Chứng minh

$$\textcircled{1} \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}.$$

$$\textcircled{2} \vec{AP} + \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

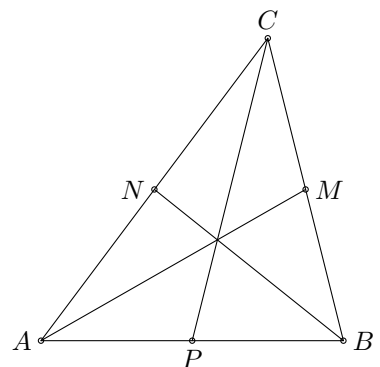
Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{CB}) = \vec{0}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Vì } P \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } \vec{AP} = \vec{PB}. \text{ Khi đó ta có } \vec{AP} + \vec{BM} = \vec{PB} + \vec{BM} = \vec{PM}.$$

Mà PM là đường trung bình trong tam giác ABC suy ra $\vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ suy ra

$$\vec{AP} + \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$



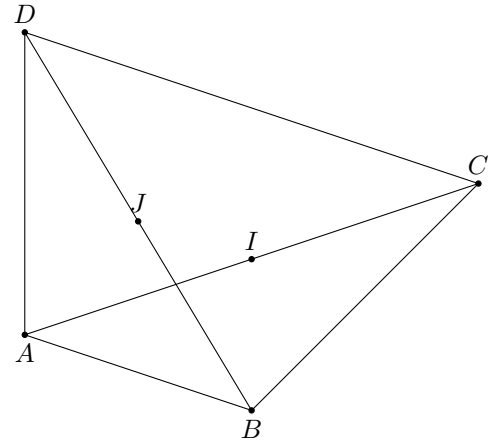
□

VÍ DỤ 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AC, BD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= 2\overrightarrow{IJ}.\end{aligned}$$



□

□ DẠNG 3.2. Xác định điểm thỏa điều kiện cho trước

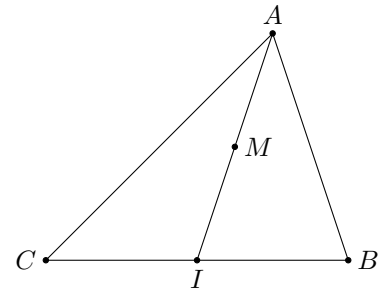
- Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$, trong đó A là điểm cố định, $\vec{v}$ là một vectơ cố định.
- Lấy điểm A là gốc dựng véc-tơ bằng $\vec{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC . Hãy xác định vị trí điểm M thỏa điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CI} = \vec{0} \quad (I \text{ là trung điểm } AB) \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CI} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}.\end{aligned}$$



□

□ DẠNG 3.3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (1).
Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các quy tắc biến đổi véc-tơ.
- Xác định (tính) véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý:

- Dựa vào lời bình 3, ta có thể suy luận được phát biểu sau: “Cho ba điểm A, B, C . Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất kỳ”. Đặc biệt khi $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số k .

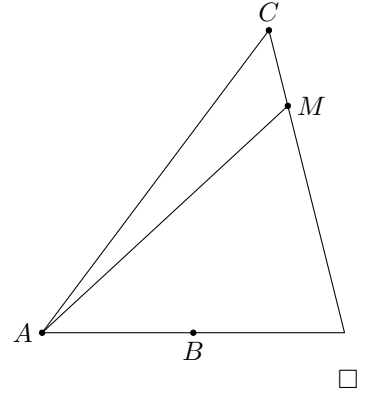
- Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC . Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \text{ (vì } MB = 3MC) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

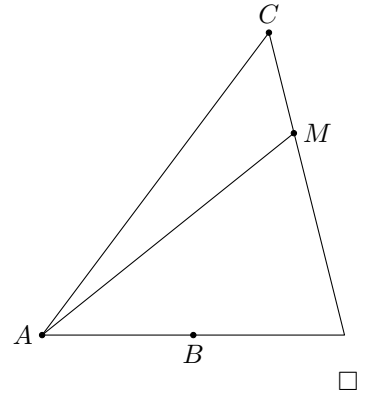


VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC . Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2}{3}BC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ (vì } BM = \frac{2}{3}BC) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

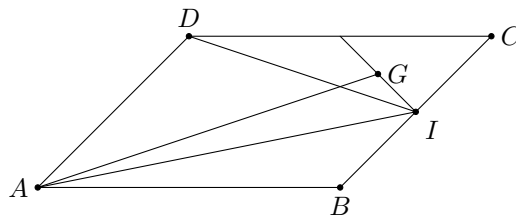


VÍ DỤ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Hãy tính các véc-tơ sau theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

① $\overrightarrow{DI}$ với I là trung điểm BC .

② $\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm tam giác CDI .

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

b) Gọi M là trung điểm DC , ta có

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

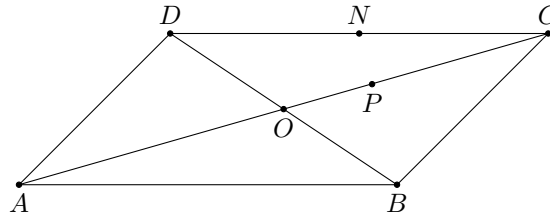
$$= \frac{5}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ hay } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$$

□

VÍ DỤ 7. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có CO là đường trung tuyến của tam giác BCD . Hơn nữa $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ suy ra P là trọng tâm của tam giác BCD .

Mặt khác BN cũng là đường trung tuyến trong tam giác BCD nên B, P, N thẳng hàng. □

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1

Bài 1. Cho tam giác ABC có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm thỏa $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN . Hãy tính các véc-tơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

.....

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, trên hai cạnh AB, AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC . Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

.....

Bài 3. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

.....

Bài 4. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

① Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

② Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

.....

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP . Hãy biểu thị các vector $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ theo các vector $\vec{BN}, \vec{CP}$.

.....

Bài 6. Cho tam giác ABC . Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

- ① Tính $\vec{AI}, \vec{AJ}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.
- ② Tính $\vec{AG}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.

.....

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . M là trung điểm của BC . Hãy tính $\vec{AI}, \vec{CI}, \vec{MI}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.

.....

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP . Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P . Hãy biểu diễn các véc-tơ $\vec{AG'}, \vec{CG'}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$ và Chứng minh hệ thức: $5\vec{AC} - 6\vec{AB} = 6\vec{MG'}$

.....

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD . Hãy biểu diễn các véc-tơ $\vec{BC}, \vec{CD}$ theo các véc-tơ $\vec{AM}, \vec{AN}$.

.....

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC . Hãy biểu diễn véc-tơ $\vec{MN}$ theo $\vec{AB}, \vec{DC}$ và theo $\vec{AC}, \vec{DB}$.

.....

Bài 11. Cho $\triangle DEF$. Dựng điểm H sao cho $\vec{EH} = 4\vec{ED} - 3\vec{EF}$ và chứng minh điểm H nằm trên DF .

.....

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức $3\vec{AD} = \vec{AC}$. Biểu diễn véc-tơ $\vec{BD}, \vec{BI}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$ và chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

.....

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$.

- ① Dựng các điểm E, F sao cho $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
- ② Dựng điểm G sao cho tứ giác $AEGF$ là hình bình hành.
- ③ Chứng minh 3 điểm A, C, G thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 15. Cho $\triangle ABC$.

- ① Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}, 2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- ② Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 16. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 17. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}, \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 18. Cho $\triangle ABC$.

- ① Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
- ② Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 20. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD . Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

Bài 21. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM . Trên AB lấy điểm I , AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

Bài 22. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- ① Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.
- ② Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ .

.....

.....

.....

.....

Bài 23. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm I thỏa $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ và M là giao điểm của đường thẳng IJ và BC . Đặt $\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{MC}$.

- ① Chứng minh rằng $12\overrightarrow{IJ} = 9\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{BA}$.
- ② Tính $\overrightarrow{IM}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.
- ③ Tìm giá trị của m .

.....

.....

.....

.....

Bài 24. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, \quad k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}, \quad k \neq 1.$$

- ① Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$.
- ② Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.
- ③ Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

Bài 25. Cho hình bình hành $ABCD$.

- ① Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

- ② Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và k . Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G .

Bài 26. Cho tứ giác $ABCD$. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\vec{AM} = k\vec{AB}$ và $\vec{DN} = k\vec{DC}$. Chứng minh rằng $\vec{MN} = (1 - k)\vec{AD} + k\vec{BC}$.

Bài 27. Cho $\triangle ABC$. Gọi O, H, G lần lượt theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng.

Bài 28. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là AB . Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của AD và BC .

① Chứng minh rằng $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$.

② Chứng minh $MN \parallel DC$.

Bài 29. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức $4\vec{CI} + \vec{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MI \parallel BG$.

Bài 30. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$. Chứng minh rằng $EF \parallel AC$.

Bài 31. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức $\vec{BD} = 4\vec{BA}, \vec{AE} = 3\vec{AC}$. Chứng minh rằng $DE \parallel AM$.

Bài 32. Cho $\triangle ABC$. Dựng các điểm M, N sao cho $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}, \vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

Bài 33. Cho $\triangle ABC$. Dựng các điểm I, J sao cho $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{AJ} = 3\vec{AC}$. Chứng minh $IC \parallel BJ$.

Bài 34. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dựng các điểm E, F thỏa mãn $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BJ}$. Chứng minh $AF \parallel CE$.

Bài 35. Cho $\triangle ABC$. Các điểm D, E, G được xác định bởi hệ thức $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}, 2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC}$.

- ① Chứng minh $BE \parallel CD$.
- ② Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh E, G, M thẳng hàng.

Bài 36. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của cạnh AB và D, E, F theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức: $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}, 5\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

- ① Chứng minh rằng $EM \parallel BC$.
- ② Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.
- ③ Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BC, MF đồng quy tại một điểm.

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó $\overrightarrow{GA}$ bằng

- A. $2\vec{GM}$. B. $\frac{2}{3}\vec{GM}$. C. $-\frac{2}{3}\vec{AM}$. D. $\frac{1}{2}\vec{AM}$.

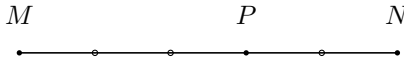
Câu 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến AM . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\vec{GA} + 2\vec{GM} = \vec{0}$. B. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$.
C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. D. $\vec{AM} = -2\vec{MG}$.

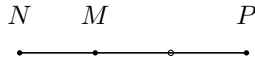
Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

- A. $\vec{AC}$. B. $2\vec{AC}$. C. $3\vec{AC}$. D. $5\vec{AC}$.

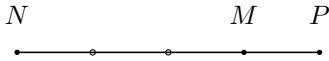
Câu 4. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\vec{MN} = -3\vec{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây?



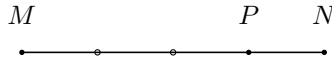
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

C

Câu 5. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm này thẳng hàng là

- A. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}, \forall M.$ B. $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB}, \forall M.$
C. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$ D. $\exists k \in \mathbb{R}: \vec{AB} = k\vec{AC}.$

D

Câu 6. Hãy chọn kết quả đúng khi phân biệt $\vec{AM}$ theo hai $\vec{AB}, \vec{AC}$ của tam giác ABC với trung tuyến AM

- A. $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}.$ B. $\vec{AM} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}.$ C. $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).$ D. $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}).$

C

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{CD}.$ B. $\vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{CD}.$ C. $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB}.$ D. $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC}.$

D

Câu 8. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $2\vec{AM} = 3\vec{AG}.$ B. $\vec{AM} = 2\vec{AG}.$ C. $\vec{AB} + \vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{AG}.$ D. $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{GM}.$

A

Câu 9. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GM}.$ B. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}.$ C. $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}.$ D. $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AM}.$

A

Câu 10. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào sau đây đúng?

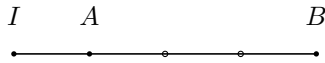
- A. $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).$ B. $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}).$ C. $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).$ D. $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}).$

B

Câu 11. Điều kiện nào dưới đây để O là trung điểm của đoạn AB ?

- A. $OA = OB$. B. $\vec{OA} = \vec{OB}$. C. $\vec{AO} = \vec{BO}$. D. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0}$.

D

Câu 12. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ?

- A. $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$. B. $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. C. $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$. D. $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$.

A

Câu 13. Cho tam giác ABC có trung tuyến BM và trọng tâm G . Khi đó $\vec{BG}$ bằng

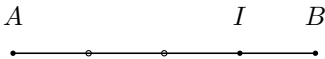
- A. $\vec{BA} + \vec{BC}$. B. $\frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$. C. $\frac{1}{3}\vec{BA} + \vec{BC}$. D. $\frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC})$.

D

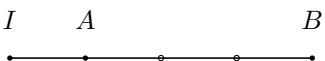
Câu 14. Gọi CM là trung tuyến của $\triangle ABC$ và D là trung điểm CM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{DA} + \vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$. B. $\vec{DA} + \vec{DC} + 2\vec{DB} = \vec{0}$. C. $\vec{DA} + \vec{DB} + 2\vec{CD} = \vec{0}$. D. $\vec{DC} + \vec{DB} + 2\vec{DA} = \vec{0}$.

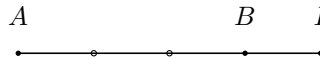
A

Câu 15. Cho đoạn thẳng AB và điểm I thỏa mãn $\vec{IB} + 3\vec{IA} = \vec{0}$. Hình nào sau đây mô tả đúng giả thiết này?

Hình 1



Hình 3



Hình 2



Hình 4

- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Câu 16. Cho $\triangle ABC$ có D, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$. B. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.
C. $\vec{MC} + \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$. D. $\vec{MC} + \vec{MA} + 2\vec{CM} = \vec{0}$.

A

Câu 17. Cho $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = -2\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ bằng nhau. B. Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.
C. Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng phương. D. Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ đối nhau.

A

Câu 18. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{OB} - \vec{OD} = 2\vec{OB}$. B. $\vec{AC} = 2\vec{AO}$. C. $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$. D. $\vec{DB} = 2\vec{BO}$.

D

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$. Tính $P = |2\vec{AD} + \vec{DB}|$

- A. $P = 2a$. B. $P = a$. C. $P = a\sqrt{3}$. D. $P = a\sqrt{2}$.

A

Câu 20. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ?



- A. $2\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$. B. $3\vec{BI} + 2\vec{BA} = \vec{0}$. C. $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$. D. $2\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$.

C

Câu 21. Cho tam giác ABC và I thỏa mãn $\vec{IA} = 3\vec{IB}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$. B. $\vec{CI} = \frac{1}{2}(3\vec{CB} - \vec{CA})$. C. $\vec{CI} = \frac{1}{2}(\vec{CA} - 3\vec{CB})$. D. $\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$.

B

Câu 22. Phát biểu nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $\vec{AB} = \vec{AC}$ thì $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$. B. Nếu $\vec{AB} = \vec{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
C. Nếu $3\vec{AB} + 7\vec{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng. D. $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{DC} - \vec{BA}$.

B

Câu 23. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $3\vec{GG'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$.

B. $3\vec{GG'} = \vec{AB'} + \vec{BC'} + \vec{CA'}$.

C. $3\vec{GG'} = \vec{AC'} + \vec{BA'} + \vec{CB'}$.

D. $3\vec{GG'} = \vec{A'A} + \vec{B'B} + \vec{C'C}$.

D

Câu 24. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?

A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$.

B. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$.

C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$.

C

Câu 25. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?

A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

B. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.

C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$.

D. $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

D

Câu 26. Biết rằng hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó, giá trị của x là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

C

Câu 27. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, AC và AB . Chọn khẳng định **sai**.

A. $\vec{GA_1} + \vec{GB_1} + \vec{GC_1} = \vec{0}$.

B. $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.

C. $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

D. $\vec{GC} = 2\vec{GC_1}$.

D

Câu 28. Nếu G là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{AG} = \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

B. $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

C. $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

D. $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

B

Câu 29. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$. Véc-tơ cùng hướng với $\vec{x}$ là

A. $2\vec{a} - \vec{b}$.

B. $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

C. $4\vec{a} + 2\vec{b}$.

D. $-\vec{a} + \vec{b}$.

B

Câu 30. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M thoả mãn $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{AB}$. Khi đó M là trung điểm của

- A. AB . B. BC . C. AD . D. CD .

C

Câu 31. Cho tam giác ABC . Tập hợp tất cả điểm M thoả mãn $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6$ là

- A. Một đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC .
 B. Một đường tròn tâm là trọng tâm của $\triangle$ và bán kính bằng 6.
 C. Một đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 2.
 D. Một đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 18.

C

Câu 32. Cho tam giác ABC có điểm I thoả mãn $5\vec{MA} = 2\vec{MB}$. Nếu $\vec{IA} = m\vec{IM} + n\vec{IB}$ thì cặp số $(m; n)$ bằng

- A. $\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$. B. $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$. D. $\left(\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

A

Câu 33. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC thoả mãn $MB = 2MC$. Khi đó biểu diễn $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ là

- A. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + 3\vec{AC}$. B. $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$. C. $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{3}{3}\vec{AC}$. D. $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$.

C

Câu 34. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trên cạnh BC thoả mãn $CM = 2BM$ và I là trung điểm của đoạn AB . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{IM} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$. B. $\vec{IM} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$. C. $\vec{IM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$. D. $\vec{IM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$.

B

Câu 35. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?

- A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$. B. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.
 C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}$ và $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. D. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 100\vec{b}$.

A

Câu 36. Cho tam giác ABC có điểm N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$. B. $\vec{AN} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$. C. $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$. D. $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.

D

Câu 37. Cho hai điểm A, B cố định. Gọi I là trung điểm AB . Tập hợp tất cả điểm M thoả mãn $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ là

- A. Đường tròn đường kính AB . B. Đường trung trực của đoạn AB .
C. Đường tròn tâm I bán kính AB . D. Nửa đường tròn đường kính AB .

A

Câu 38. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC = 2$. Độ dài véc-tơ $4\vec{AB} - \vec{AC}$ bằng

- A. $\sqrt{17}$. B. $2\sqrt{15}$. C. 5. D. $2\sqrt{17}$.

D

Câu 39. Cho tam giác ABC có điểm N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$ và I là trung điểm của AB . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{NI} = -\frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$. B. $\vec{NI} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$. C. $\vec{NI} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$. D. $\vec{NI} = -\frac{2}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$.

B

Câu 40. Cho tam giác ABC có I, D lần lượt là trung điểm AB, CI . Điểm N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AN} = 2\vec{DN}$. B. $\vec{AN} = 2\vec{ND}$. C. $\vec{AN} = 3\vec{ND}$. D. $\vec{AN} = 4\vec{DN}$.

D

Câu 41. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM , I là trung điểm của AM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$. B. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$. C. $2\vec{IB} + \vec{IB} + \vec{IC} = 4\vec{IA}$. D. $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{IA}$.

A

Câu 42. Cho tam giác ABC , có bao nhiêu điểm M thoả mãn $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 5$

- A. 1. B. 2. C. Vô số. D. Không có điểm nào.

C

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho $\widehat{xOM} = \alpha$ với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Giả sử $M(x_0; y_0)$.

$$\odot \cos \alpha = x_0$$

$$\odot \sin \alpha = y_0$$

$$\odot \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (x_0 \neq 0)$$

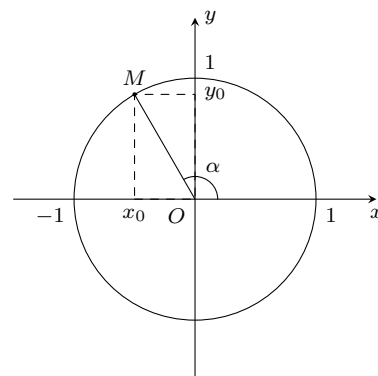
$$\odot \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (y_0 \neq 0)$$

Nhận xét: $\forall \alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ ta có:

$$\text{— } -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \text{ và } -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

$$\text{— } \tan \alpha \text{ xác định khi } \alpha \neq 90^\circ.$$

$$\text{— } \cot \alpha \text{ xác định khi } \alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ.$$



2. Dấu của các giá trị lượng giác

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+	+
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-	-

3. Tính chất

Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180° , chẳng hạn α và $180^\circ - \alpha$, khi đó ta có quan hệ giữa các góc bù nhau như sau:

$$\odot \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\odot \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\odot \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\odot \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha.$$

4. Từ định nghĩa ta có các hệ thức cơ bản sau

$$\odot \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\odot \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\odot \tan x \cdot \cot x = 1.$$

$$\odot 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\odot 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Ta có:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \widehat{AOB} \text{ với } \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

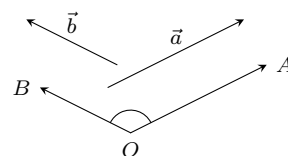
Đặc biệt:

$$\odot (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\odot (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

$$\odot (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng.}$$

$$\odot (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ ngược hướng.}$$



B. VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

① $\sin(A + B) = \sin C$.

② $\cos(A + B) = -\cos C$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$.

b) Ta có $\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$.

□

VÍ DỤ 2. Không sử dụng máy tính bỏ túi. Chứng minh:

① $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$.

② $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 105^\circ) = \sin 75^\circ$.

b) Ta có $\cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$.

□

VÍ DỤ 3. Cho góc x , với $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3\sin^2 x + \cos^2 x$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

$$P = 3\sin^2 x + \cos^2 x = 3 \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 3.$$

□

VÍ DỤ 4. Cho hình vuông $ABCD$. Tính

① $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

② $\sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.

③ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Lời giải.

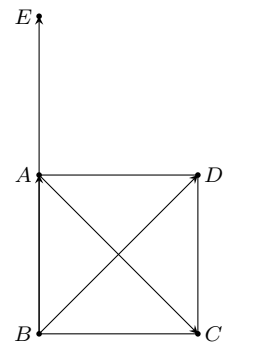
a) Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$. Ta có $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = 135^\circ$.

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Ta có $AC \perp BD \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ \Rightarrow \sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \sin 90^\circ = 1$.

c) Do $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CD} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = \cos 180^\circ = -1.$$



□

BÀI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

$\triangleleft$ — $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$.

— $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

— $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

2. Tính chất

Với $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và $\forall k \in \mathbb{R}$, ta có:

$\odot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

$\odot (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

$\odot (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

$\odot (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

$\odot \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

$\odot \vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

$\odot (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó:

— $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

— $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$.

— $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

— $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$, với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

— $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 2.1. Tính tích vô hướng và tính góc

— Sử dụng định nghĩa bằng cách đưa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ về cùng chung gốc để xác định chính xác góc $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$ sau đó dùng công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

— Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

— Nếu đề bài cho dạng tọa độ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

— Trong tam giác ABC , nếu biết độ dài 3 cạnh thì

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2).$$

$\triangleleft$ Khi tính tích vô hướng của hai vectơ ta thường:

– Biến đổi các vectơ về chung gốc để việc tìm góc giữa hai vectơ dễ dàng hơn.

Ví dụ: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

– Dưa về các vectơ cùng phương hoặc vuông góc.

Ví dụ: Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông) thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

Tính góc giữa hai vectơ:

— Góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$, với $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

— Các góc của tam giác ABC :

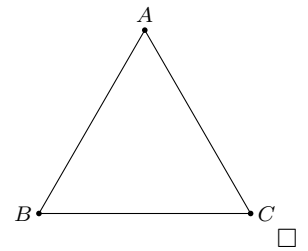
$$\bullet \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}; \quad \bullet \cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC}; \quad \bullet \cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB}.$$

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ đều, cạnh bằng 4cm. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

— Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 8$.

— Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -8$.



VÍ DỤ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(2; 5)$ và $C(-3; 1)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và tính góc $\widehat{BAC}$ của $\triangle ABC$.

Lời giải.

① Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$; $\overrightarrow{AC} = (-4; 3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot (-4) + 7 \cdot 3 = 17$.

② Ta có $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{17}{5 \cdot \sqrt{2} \cdot 5} = \frac{17\sqrt{2}}{50}$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 61,3^\circ$.

□

📦 DẠNG 2.2. Chứng minh vuông góc

— Dùng tính chất tích vô hướng

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0. \end{cases}$$

— Dùng tính chất tích vô hướng trong hệ trục tọa độ

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0.$$

VÍ DỤ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Chứng minh $\vec{a} \perp \vec{b}$ với $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (6; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Suy ra $\vec{a} \perp \vec{b}$. □

VÍ DỤ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (6; m)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \vec{a} \perp \vec{b} \\ \Leftrightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \Leftrightarrow & 3 \cdot 6 - 2 \cdot m = 0 \\ \Leftrightarrow & m = 9. \end{aligned}$$

Vậy với $m = 9$ thì $\vec{a} \perp \vec{b}$. □

VÍ DỤ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (6; -2)$, $\vec{c} = (m + 2; -4)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải.

Ta có $\vec{b} + \vec{c} = (6 + m + 2; -2 - 4) = (8 + m; -6)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} & \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \\ \Leftrightarrow & \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3 \cdot (8 + m) - 2 \cdot (-6) = 0 \\ \Leftrightarrow & 24 + 3m + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow & m = -12. \end{aligned}$$

Vậy với $m = -12$ thì $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$. □

DẠNG 2.3. Các điểm đặc biệt trong tam giác

— Trục tâm H của tam giác ABC là giao điểm của ba đường cao.

$$\text{Do đó } \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được tọa độ điểm H .

— Chân đường cao D vẽ từ A của tam giác ABC .

$$\text{Do đó } \begin{cases} AD \perp BC \\ \vec{BD} \text{ cùng phương } \vec{BC}. \end{cases}$$

Giải hệ này ta thu được tọa độ chân đường cao D .

— Tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC là giao điểm ba đường trung trực.

— TH1: $\triangle ABC$ là tam giác đặc biệt:

- * $\triangle ABC$ vuông tại A , khi đó I là trung điểm BC .
- * $\triangle ABC$ đều, khi đó I là trọng tâm.

— TH2: $\triangle ABC$ là tam giác thường:

- * Cách 1: Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC. \end{cases}$
- * Cách 2: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC .
Ta có $\begin{cases} IM \perp BC \\ IN \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IM} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{IN} \cdot \vec{AC} = 0. \end{cases}$

— Tìm E và F lần lượt là chân đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A

- Chân đường phân giác trong $E(x_E; y_E)$, khi đó $\vec{EB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \vec{EC}$.
- Chân đường phân giác ngoài $F(x_F; y_F)$, khi đó $\vec{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \vec{FC}$.

VÍ DỤ 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\triangle ABC$ với $A(1; 6)$, $B(2; -6)$ và $C(-1; 1)$.

- Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.
- Tìm tọa độ J của chân đường cao kẻ từ A .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của $\triangle ABC$.

Lời giải.

- a) Gọi trực tâm H có tọa độ là $H(x_H; y_H)$.

Ta có $\vec{BC} = (-3; 7)$, $\vec{AC} = (-2; -5)$, $\vec{AH} = (x_H - 1; y_H - 6)$ và $\vec{BH} = (x_H - 2; y_H + 6)$.

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x_H - 1) \cdot (-3) + (y_H - 6) \cdot 7 = 0 \\ (x_H - 2) \cdot (-2) + (y_H + 6) \cdot (-5) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -3x_H + 7y_H = 39 \\ -2x_H - 5y_H = 26 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_H = -13 \\ y_H = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy trực tâm H có tọa độ là $H(-13; 0)$.

- b) Gọi J có tọa độ là $J(x_J; y_J)$. Khi đó $\vec{AJ} = (x_J - 1; y_J - 6)$, $\vec{BJ} = (x_J - 2; y_J + 6)$.

Vì J là chân đường cao kẻ từ A nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} AJ \perp BC \\ \vec{BJ} \text{ cùng phương } \vec{BC} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x_J - 1) \cdot (-3) + (y_J - 6) \cdot 7 = 0 \\ \frac{x_J - 2}{-3} = \frac{y_J + 6}{7} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -3x_J + 7y_J = 39 \\ 7x_J + 3y_J = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_J = -\frac{5}{2} \\ y_J = \frac{9}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy J có tọa độ là $J\left(-\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

- c) Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $\vec{IA} = (1 - a; 6 - b)$, $\vec{IB} = (2 - a; -6 - b)$ và $\vec{IC} = (-1 - a; 1 - b)$.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA = IB = IC$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (1 - a)^2 + (6 - b)^2 = (2 - a)^2 + (-6 - b)^2 \\ (1 - a)^2 + (6 - b)^2 = (-1 - a)^2 + (1 - b)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2a - 24b = 3 \\ 4a + 10b = 35 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = \frac{15}{2} \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $I\left(\frac{15}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

VÍ DỤ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ với $A(0; 2)$, $B(-1; 4)$ và $C(2; 0)$.

- Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

- a) Gọi J có tọa độ là $J(x_J; y_J)$. Khi đó $\vec{AJ} = (x_J; y_J - 2)$, $\vec{BJ} = (x_J + 1; y_J - 4)$, $\vec{BC} = (3; -4)$.
 Vì J là chân đường cao kẻ từ A nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} AJ \perp BC \\ \vec{BJ} \text{ cùng phương } \vec{BC} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_J \cdot 3 + (y_J - 2) \cdot (-4) = 0 \\ \frac{x_J + 1}{3} = \frac{y_J - 4}{-4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x_J - 4y_J = -8 \\ -4x_J - 3y_J = -8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_J = \frac{8}{25} \\ y_J = \frac{56}{25} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy J có tọa độ là $J\left(\frac{8}{25}; \frac{56}{25}\right)$.

- b) Gọi $G(x_G; y_G)$ là tọa độ trọng tâm tam giác ABC . Khi đó

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

- c) Gọi $D = (x_D; y_D)$. Khi đó $\vec{AB} = (-1; 2)$, $\vec{DC} = (2 - x_D; -y_D)$.
 Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \vec{AB} = \vec{DC} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -1 = 2 - x_D \\ 2 = -y_D \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy D có tọa độ là $D(3; -2)$.

□

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , tính tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau

- $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (3; 4)$.
- $\vec{a} = (-3; 2)$, $\vec{b} = (6; 1)$.

.....

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tính góc của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau

a) $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (6; 4)$.

b) $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(4; -2)$, $B(1; 5)$ và $C(-3; 7)$.

a) Tính các tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

b) Tính các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Tính $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A và $BC = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính $\vec{CB} \cdot \vec{BA}$.

Bài 6. Cho $\vec{a} = (2; -3)$. Tìm véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$.

Bài 7. Cho $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (6; -2)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{c}$ để $\vec{a} \perp \vec{c}$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = 20$.

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(10; 5)$, $B(3; 2)$ và $C(6; -5)$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại B .

Bài 9. Tìm m để các véc-tơ sau vuông góc với nhau.

a) $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (m; 1)$.

b) $\vec{a} = (-3; 2)$, $\vec{b} = (4; m)$.

Bài 10. Tìm độ dài véc-tơ $\vec{AB}$ biết $A(4; 5)$, $B(2; 9)$.

.....

.....

.....

Bài 11. Tìm m để $AB = \sqrt{5}$ biết $A(1; m)$, $B(2; 3)$.

.....

.....

.....

Bài 12. Cho $\vec{a} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ biết $|\vec{b}| = \sqrt{10}$.

.....

.....

.....

Bài 13. Cho $\vec{a} = (-2; 1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$ biết $|\vec{b}| = \sqrt{5}$.

.....

.....

.....

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác với $A(1; 1)$, $B(1; 7)$, $C(9; 1)$. Tìm tọa độ điểm K là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

.....

.....

.....

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(4; 3)$, $B(-1; -1)$, $C(2; -4)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ K là chân đường cao kẻ từ C .

.....

.....

.....

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. 180° .

B. 0° .

C. 90° .

D. 45° .

.....

.....

.....

Câu 2. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng và khác $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

.....

.....

.....

Câu 3. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{15}{2}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại B . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$. B. $\vec{AB}^2 = AB^2$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$. D. $\vec{BC}^2 = BC^2$.

Câu 5. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. B. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1b_1; a_2b_2)$. D. $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Câu 6. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.
C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 \cdot b_2^2}}$.

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là

- A. $(-2; 3)$. B. $(-1; 4)$. C. -5 . D. 1 .

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho $M(-3; 2)$, $N(5; -4)$. Độ dài đoạn thẳng MN là

- A. 5 . B. $\sqrt{29}$. C. $\sqrt{3}$. D. 10 .

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Giá trị của $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ là

- A. $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. a^2 . D. $\frac{a^2}{2}$.

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

- A. a . B. $a \cdot \sqrt{2}$. C. 0 . D. a^2 .

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 1)$, $\vec{b} = (2; 0)$. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. 45° . B. 135° . C. 30° . D. 90° .

Câu 12. Cặp véc-tơ nào sau đây vuông góc?

- A. $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. B. $\vec{a} = (3; -4)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$.
C. $\vec{a} = (-2; -3)$ và $\vec{b} = (-6; 4)$. D. $\vec{a} = (7; -3)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$ và $C(1; -1)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Tam giác ABC cân tại B . B. $|\vec{BC}| = \sqrt{8}$.
C. Tam giác ABC vuông tại A . D. $AC = 4$.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 0)$, $B(3; 1)$ và $C(-1; -1)$. Tính số đo góc B của $\triangle ABC$.

- A. 15° . B. 60° . C. 120° . D. 135° .

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-6; -4)$, $B(3; 5)$, $C(6; 2)$. Tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$ là

- A. $H(3; 5)$. B. $H(-6; -4)$. C. $H\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$. D. $H(0; -1)$.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(-2; 2)$, $B(-3; -1)$ và điểm C trên trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tọa độ của C là

- A. $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. B. $\left(0; \frac{8}{3}\right)$. C. $(0; -2)$. D. $\left(0; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với điểm $O(0; 0)$, $A(-21; -20)$, $B(-15; -20)$. Chu vi tam giác OAB là

- A. 60 (đvdd). B. 30 (đvdd). C. 35 (đvdd). D. 54 (đvdd).

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(5; 2)$, và điểm M thuộc trục tung sao độ dài đoạn $AM = 13$. Tọa độ điểm M là

- A. $M(0; -10)$ và $M(0; 14)$. B. $M(0; -4)$ và $M(0; 0)$. C. $M(0; 10)$ và $M(0; -14)$. D. $M(0; 4)$ và $M(0; 0)$.

.....

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(1; -2)$, $B(-3; 5)$, $C(-1; 4)$. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$. Tọa độ điểm H là

- A. $H(3; 2)$. B. $H(6; 8)$. C. $H(5; 6)$. D. $H(4; 4)$.

.....

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; 4)$, $B(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B .

- A. $C(4; 0); C(-2; 2)$. B. $C(-1; 5); C(5; 3)$. C. $C(0; 4); C(2; -2)$. D. $C(5; 1)$.

.....

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(3; -1)$, $B(-3; 2)$, $C(3; 5)$. Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là

- A. $I\left(\frac{1}{4}; -2\right)$. B. $I\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. C. $I\left(\frac{3}{4}; 2\right)$. D. $I\left(-1; \frac{2}{7}\right)$.

.....

