



HÌNH HỌC 12

Hoàng Xuân Nhàn

MẶT NÓN

MẶT TRỤ

MẶT CẦU



HÌNH HỌC 12

MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

MỤC LỤC

BÀI 1. MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN.....	trang 01
PHẦN I. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	trang 01
Mặt nón, hình nón và các yếu tố liên quan	trang 01
Hình nón cắt và khối nón cắt.....	trang 02
Khối ghép được tạo bởi hai hình nón chung đáy.....	trang 02
Thiết diện qua trục của hình nón.....	trang 03
Thiết diện vuông góc với trục hình nón	trang 04
Thiết diện qua đỉnh hình nón và không qua trục hình nón	trang 04
Hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp đều.....	trang 05
PHẦN II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ BÀI TẬP.....	trang 07
Dạng 1. Mặt nón và các yếu tố liên quan.....	trang 07
Dạng 2. Sự hình thành của mặt nón, hình nón	trang 10
Dạng 3. Thiết diện qua trục của hình nón.....	trang 13
Dạng 4. Thiết diện qua đỉnh và không chứa trục của hình nón	trang 15
Dạng 5. Thiết diện vuông góc với trục của hình nón	trang 19
Dạng 6. Hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình đa diện	trang 22
Dạng 7. Max-min và bài toán thực tế	trang 26
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1: MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN	trang 29
BÀI 2. MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ.....	trang 30
PHẦN I. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	trang 30
Mặt trụ và các yếu tố liên quan	trang 30
Thiết diện vuông góc với trục hình trụ.....	trang 30
Thiết diện qua trục hình trụ.....	trang 31
Hình trụ cắt (hay phần trụ)	trang 31
Hình nêm.....	trang 32
Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều.....	trang 32
Hình trụ nội tiếp lăng trụ tam giác đều.....	trang 32
Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tứ giác đều.....	trang 33
Hình trụ nội tiếp lăng trụ tứ giác đều	trang 33
Hình trụ ngoại tiếp hình nón.....	trang 33
Hình trụ nội tiếp hình nón.....	trang 34
PHẦN II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ BÀI TẬP.....	trang 34
Dạng 1. Hình trụ và các yếu tố cơ bản	trang 34
Dạng 2. Sự hình thành mặt trụ, khối trụ	trang 37
Dạng 3. Thiết diện qua trục của hình trụ	trang 40
Dạng 4. Thiết diện song song với trục hình trụ.....	trang 42

Dạng 5. Thiết diện nghiêng so với trục hình trụ	trang 45
Dạng 6. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp hình đa diện, hình nón	trang 49
Dạng 7. Hình đa diện có tất cả cạnh chứa trong hình trụ	trang 55
Dạng 8. Max-min và bài toán thực tế	trang 56
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2: MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ	trang 63
BÀI 3. MẶT CẦU, KHỐI CẦU	trang 64
PHẦN I. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	trang 64
Mặt cầu và các công thức liên quan	trang 64
Điểm đối với mặt cầu	trang 64
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng	trang 64
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng	trang 65
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp	trang 66
Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có ba cạnh đôi một vuông góc	trang 66
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có các đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới một góc vuông.....	trang 67
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy	trang 67
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều	trang 68
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc mặt đáy	trang 69
Mặt cầu nội tiếp hình chóp tam giác đều	trang 70
Mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều	trang 71
Mặt cầu ngoại tiếp hình bát diện đều.....	trang 72
Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều.....	trang 72
Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật	trang 72
Mặt cầu nội tiếp hình lập phương	trang 73
Mặt cầu nội tiếp hình nón.....	trang 73
Công thức liên quan đến chòm cầu	trang 74
PHẦN II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ BÀI TẬP.....	trang 74
Dạng 1. Mặt cầu, khối cầu và các yếu tố cơ bản.....	trang 74
Dạng 2. Mặt cầu và bài toán thực tế.....	trang 76
Dạng 3. Giao tuyến giữa mặt cầu và mặt phẳng.....	trang 78
Dạng 4. Mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp và lăng trụ.....	trang 79
Dạng 5. Mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình nón, hình trụ	trang 87
MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO MẶT CẦU	trang 91
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3: MẶT CẦU, KHỐI CẦU.....	trang 97

CHƯƠNG II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

BÀI 1. MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN

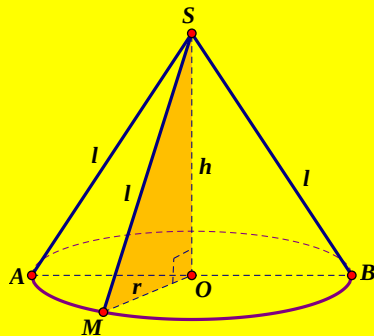
PHẦN I. LÍ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Mặt nón, hình nón, khối nón:

★ Mặt nón – Hình nón và các yếu tố liên quan ★

☞ **Sự hình thành mặt nón, hình nón:** Quay mặt phẳng chứa ΔSOM vuông tại O quanh trục SO , khi đó:

- Đường thẳng đi qua hai điểm S, M tạo thành một mặt nón (tròn xoay) với đỉnh là S , trục là đường thẳng SO và đường sinh là SM .
- Đường gấp khúc SOM tạo thành một hình nón (tròn xoay) có đỉnh là S , chiều cao là SO , độ dài đường sinh là SM và đường tròn đáy là $(O; OM)$.



☞ **Dựa vào hình vẽ, ta có hình nón với các đại lượng sau:**

Đường cao: $h = SO$. (SO cũng được gọi là trục của hình nón).

Bán kính đáy: $r = OA = OB = OM$.

Độ dài đường sinh:

$$l = SA = SB = SM.$$

Góc ở đỉnh: $\angle ASB$. Thiết diện qua trục: ΔSAB cân tại S .

Góc giữa đường sinh và mặt đáy: $\angle SAO = \angle SBO = \angle SMO$.

Các công thức liên quan

- Mối liên hệ chiều cao, bán kính đáy, độ dài đường sinh:

$$h^2 + r^2 = l^2.$$

- Chu vi đáy: $p = 2\pi r$.

- Diện tích đáy: $S_d = \pi r^2$.

- Thể tích khối nón:

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S_d = \frac{1}{3} h \cdot \pi r^2.$$

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \pi r l.$$

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi r l + \pi r^2.$$

Ví dụ 1. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 3cm$ và đường sinh $l = 5cm$.

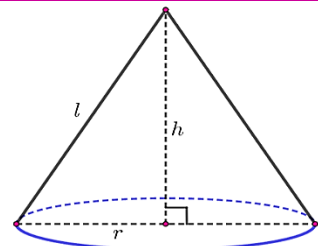
- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.
- Tính thể tích của khối nón tương ứng.

☞ **Lời giải:**

a) Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi r l = 15\pi \text{ (cm}^2\text{)}$;

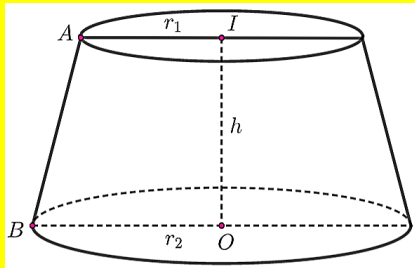
Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2 = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Chiều cao hình nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4cm$. Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.



★ Hình nón cắt và khối nón cắt ★

Hình nón cắt: Khi ta cắt một hình nón bởi một mặt phẳng song song với mặt đáy của nó thì hình nón ấy được chia ra làm hai phần, phần không chứa đỉnh hình nón chính là hình nón cắt.



Từ hình vẽ, ta có:

Chiều cao: $h = OI$.

Bán kính đáy 1: $r_1 = IA$.

Bán kính đáy 2: $r_2 = OB$.

Đường sinh: $l = AB$.

Các công thức liên quan

• Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \pi l (r_1 + r_2).$$

• Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi l (r_1 + r_2).$$

• Thể tích khối chóp cắt:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Ví dụ 2. Cho hình thang ABCD vuông tại A và B có $AB = 3a$, $AD = 2a$, $BC = a$. Quay hình thang này quanh cạnh AB, ta thu được một hình nón cắt.

a) Tìm diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón cắt này.

b) Tìm thể tích của khối nón cắt tương ứng.

Lời giải:

Ta có: $r_1 = a$, $r_2 = 2a$, $h = 3a$, $l = \sqrt{(3a)^2 + a^2} = a\sqrt{10}$.

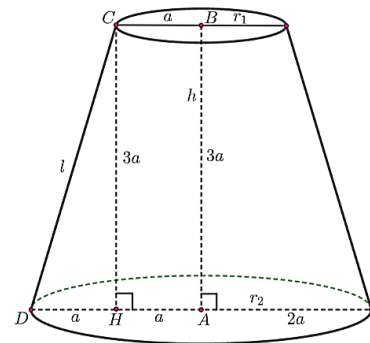
a) Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón cắt:

$$S_{xq} = \pi l (r_1 + r_2) = \pi \cdot a\sqrt{10} \cdot (a + 2a) = 3\pi a^2 \sqrt{10};$$

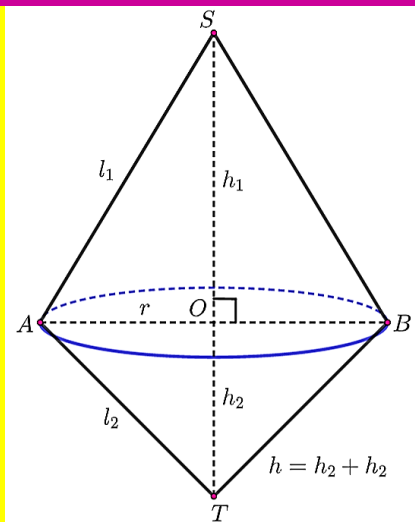
$$S_{tp} = S_{xq} + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 3\pi a^2 \sqrt{10} + \pi a^2 + \pi \cdot (2a)^2 = (3\sqrt{10} + 5)\pi a^2.$$

b) Thể tích khối nón cắt này là: $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 3a \cdot (a^2 + a \cdot 2a + 4a^2) = 7\pi a^3.$$



★ Khối ghép tạo bởi hai hình nón chung đáy ★



Xét hình (H) là hợp của hai hình nón đỉnh S và T có chung đáy là đường tròn đường kính AB (S, T nằm khác phía mặt phẳng đáy).

Theo hình vẽ, ta có:

$$h_1 = SO, h_2 = TO;$$

$$r = OA = OB;$$

$$l_1 = SA = SB,$$

$$l_2 = TA = TB.$$

Các công thức liên quan

Xét hình nón thứ nhất với đỉnh là S:

$$S_{xq1} = \pi r l_1 = \pi r \sqrt{r^2 + h_1^2}, V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1.$$

Xét hình nón thứ hai với đỉnh là T:

$$S_{xq2} = \pi r l_2 = \pi r \sqrt{r^2 + h_2^2}, V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_2.$$

Xét hình (H):

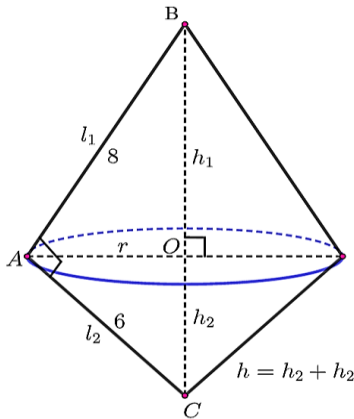
$$S_{xq} = S_{xq1} + S_{xq2} = \pi r (l_1 + l_2) = S_{tp};$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 \left(\underbrace{h_1 + h_2}_h \right) \text{ hay } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Ví dụ 3. Quay tam giác vuông ABC quanh cạnh huyền BC , ta được hình (H) . Biết rằng $AC = 6$, $AB = 8$.

a) Tính diện tích xung quanh của hình (H) . **b)** Tìm thể tích của khối (H) .



Lời giải:

a) Dựa vào hình vẽ, ta có: $l_1 = 8$, $l_2 = 6$; $h = BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

$$r = OA = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}.$$

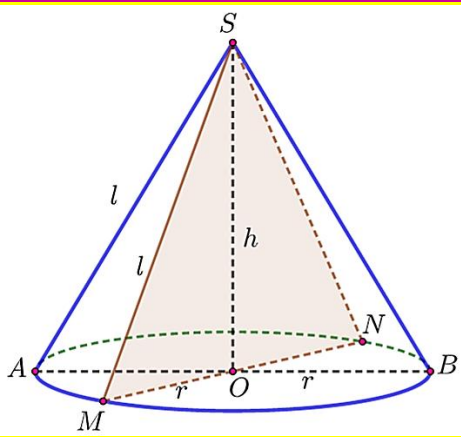
Diện tích xung quanh của hình (H) :

$$S_{xq} = \pi r (l_1 + l_2) = \pi \cdot \frac{24}{5} \cdot (8 + 6) = \frac{336\pi}{5}.$$

b) Thể tích khối (H) : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{24}{5}\right)^2 \cdot 10 = \frac{384\pi}{5}.$

✪ Thiết diện qua trục của hình nón ✪

Một số trường hợp đặc biệt



☞ Nếu ta cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục của hình nón thì thiết diện thu được là tam giác có hai cạnh nằm trên hai đường sinh hình nón và cạnh thứ ba là một đường kính của đường tròn đáy.

☞ Thiết diện qua trục hình nón luôn là một tam giác cân tại đỉnh S

của hình nón đó.

☞ Theo hình vẽ thì thiết diện qua trục hình nón là các tam giác SAB , SMN cân tại S.

• Thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều:

Ta có: $l = 2r$ và

$$h = \frac{(2r)\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} \quad \text{hay} \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

• Thiết diện qua trục hình nón là tam giác vuông (cân) tại S:

Ta có: $2r = l\sqrt{2} \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}$ và $h = r$.

Ví dụ 4. Tính diện tích toàn phần S của hình nón (N) biết thiết diện qua trục của nó là một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}a$.

Lời giải: Thiết diện qua trục hình nón là tam giác vuông cân có cạnh huyền:

$$2r = 2a\sqrt{2} \Rightarrow r = a\sqrt{2}; \quad h = r = a\sqrt{2}; \quad l = r\sqrt{2} = 2a.$$

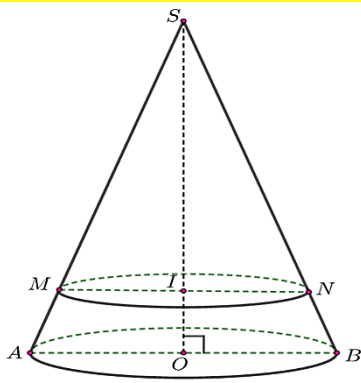
Diện tích toàn phần hình nón (N) : $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2 = 2\sqrt{2}\pi a^2 + 2\pi a^2 = (2\sqrt{2} + 2)\pi a^2.$

Ví dụ 5. Cho khối nón có thể tích là V . Biết rằng khi cắt khối nón đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một tam giác đều có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Tính V .

Lời giải: Gọi thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều SAB có cạnh là $2r$ nên diện tích:

$$S_{\triangle SAB} = \frac{(2r)^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow r = 1; \quad h = r\sqrt{3} = \sqrt{3}. \quad \text{Thể tích khối nón: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \sqrt{3}.$$

★ Thiết diện vuông góc với trục của hình nón ★



✍ **Cắt hình nón đỉnh S bởi một mặt phẳng vuông góc với trục hình nón** thì giao tuyến thu được là một đường tròn nhỏ hơn đường tròn đáy. Giao tuyến đó sẽ chia hình nón làm hai phần: **phần chứa đỉnh S là một hình nón** nhỏ hơn hình nón ban đầu; **phần không chứa đỉnh S chính là một hình nón cụt**.

Tính chất cần nhớ

✍ **Xét hình vẽ bên**, ta có: ΔSIM , ΔSOA đồng dạng.

Suy ra: $\frac{SI}{SO} = \frac{SM}{SA} = \frac{IM}{OA} = k$

✍ **Tỉ số diện tích tam giác và tỉ số diện tích đường tròn:**

$$\frac{S_{\Delta SIM}}{S_{\Delta SOA}} = \frac{S_{(I;IM)}}{S_{(O;OA)}} = k^2.$$

Ví dụ 6. Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $3a$. Cắt hình nón (N) bởi một mặt phẳng vuông góc với trục hình nón và cách mặt đáy hình nón một đoạn bằng a , ta thu được thiết diện có diện tích bằng $\frac{64\pi a^2}{9}$. Khi đó, thể tích của khối nón (N) bằng bao nhiêu?

✍ **Lời giải:**

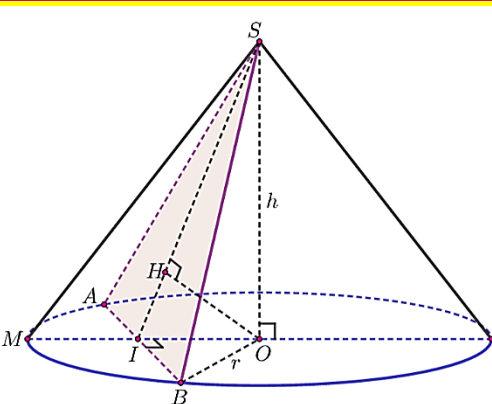
Ta có: $SO = 3a$, $IO = a \Rightarrow SI = 2a$. Đường tròn (thiết diện) có diện tích:

$$S_{(I;IM)} = \pi \cdot IM^2 = \frac{64\pi a^2}{9} \Rightarrow IM = \frac{8a}{3}.$$

Ta có ΔSIM , ΔSOA đồng dạng nên $\frac{SI}{SO} = \frac{IM}{OA} \Leftrightarrow \frac{2a}{3a} = \frac{\frac{8a}{3}}{OA} \Rightarrow OA = 4a$.

Suy ra: $S_{(O;OA)} = \pi \cdot OA^2 = 16\pi a^2$. Thể tích khối nón (N): $V_{(N)} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{(O;OA)} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot 16\pi a^2 = 16\pi a^3$.

★ Thiết diện qua đỉnh hình nón và chứa dây cung (không là đường kính) của đường tròn đáy ★



✍ **Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng qua đỉnh mà không chứa trục hình nón**, ta thu được thiết diện là một tam giác cân

tại đỉnh S, hai cạnh nằm trên hai đường sinh hình nón và cạnh còn lại là dây cung (không là đường kính) của đường tròn đáy.

Tính chất cần nhớ

✍ **Xét hình vẽ bên**, ta có:

$$\bullet \quad OI = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2};$$

$$\bullet \quad \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{IO^2};$$

$$\bullet \quad \begin{cases} (SO, (SAB)) = OSI \\ ((SAB), (OAB)) = SIO \end{cases};$$

$$\bullet \quad d(O, (SAB)) = OH = \frac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}}.$$

Ví dụ 7. Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO . Mặt phẳng (P) qua S và cắt đường tròn đáy theo dây cung AB sao cho tam giác OAB là tam giác vuông. Biết $AB = a\sqrt{2}$ và $\angle SAO = 30^\circ$.

a) Tìm thể tích khối nón đã cho.

b) Tìm khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mp (P) .

Lời giải: a) Vì $\triangle OAB$ vuông cân tại O có

$$AB = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = a = r.$$

$$\text{Xét } \triangle SAO \text{ vuông tại } O \text{ có } SO = AO \cdot \tan \angle SAO = \frac{a\sqrt{3}}{3} = h.$$

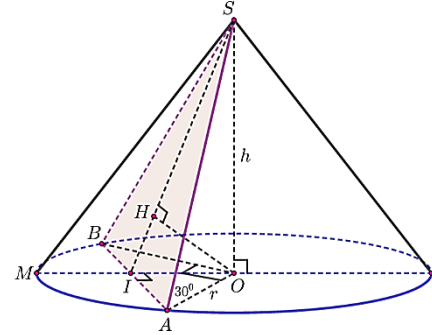
$$\text{thể tích khối nón } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} \pi a^3}{9}.$$

b) Tam giác OAB vuông tại O có trung tuyến

$$OI = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

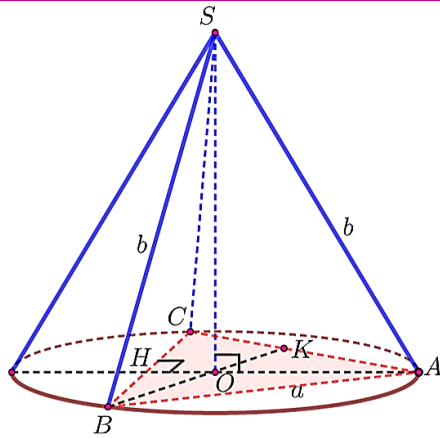
Ta có: $AB \perp OI$, $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$ mà $SI \perp OH$ nên $\boxed{OH \perp (SAB)}$.

$$\text{Do vậy: } d(O, (SAB)) = OH = \frac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



✪ Hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp đều ✪

✪ Hình nón ngoại tiếp hình chóp tam giác đều ✪



Xét hình nón ngoại tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b (xem hình). Ta có:

$$\begin{aligned} OA &= \frac{2}{3} OH \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ \text{hay } \boxed{r} &= \frac{a\sqrt{3}}{3}; \end{aligned}$$

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3} \text{ hay}$$

$$\boxed{h} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}; \boxed{l} = b.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 8. Tìm thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC , biết $S.ABC$ là hình chóp đều có cạnh đáy bằng 3 và cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$.

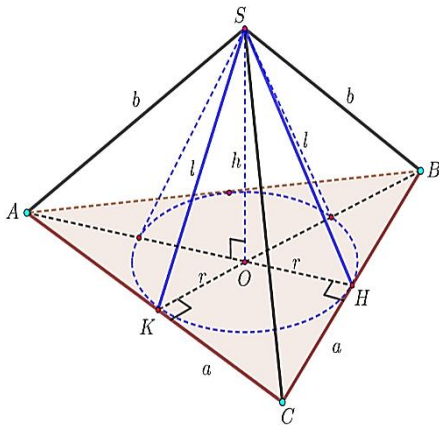
Lời giải: Ta có: $a = 3$,

$$b = 3\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3};$$

$$h = \frac{\sqrt{9 \cdot (3\sqrt{2})^2 - 3 \cdot 3^2}}{3} = \sqrt{15}.$$

$$\begin{aligned} \text{Thể tích khối nón: } V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{15} = \pi \sqrt{15}. \end{aligned}$$

Hình nón nội tiếp hình chóp tam giác đều



Xét hình nón nội tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b (**hình vẽ**). Ta có:

$$\begin{aligned} OH &= \frac{1}{3} AH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ \text{hay } r &= \frac{a\sqrt{3}}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OA &= \frac{a\sqrt{3}}{3}; SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} \\ &= \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3} \text{ hay } h = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}; \\ l &= \sqrt{h^2 + r^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 9. Cho hình nón nội tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $3a$. Tìm diện tích xung quanh hình nón và thể tích khối nón đó.

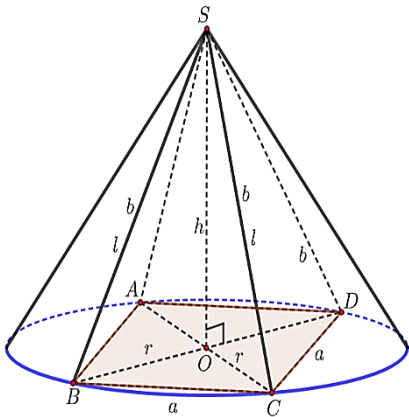
Lời giải: Ta có: $r = \frac{2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = a$;

$$h = \frac{\sqrt{9(3a)^2 - 3(2a\sqrt{3})^2}}{3} = a\sqrt{5};$$

$$l = \frac{\sqrt{4(3a)^2 - (2a\sqrt{3})^2}}{2} = a\sqrt{6}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\sqrt{5}}{3}\pi a^3; S_{xq} = \pi r l = \sqrt{6}\pi a^2.$$

Hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều



Xét hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b (**xem hình**). Ta có:

$$\begin{aligned} r &= OA = OB \\ \text{hay } r &= \frac{a\sqrt{2}}{2}; \\ SO &= \sqrt{SA^2 - OA^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2} \text{ hay } h = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}; \quad l = b. \end{aligned}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 10. Tìm diện tích xung quanh hình nón và thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$.

Lời giải:

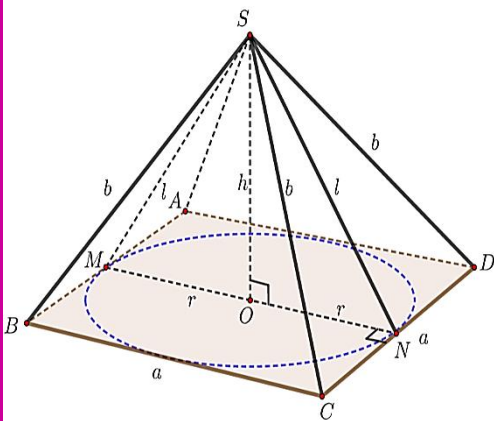
$$\text{Ta có: } r = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = a; l = 2a;$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}.$$

$$S_{xq} = \pi r l = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^3 \sqrt{3}.$$

Hình nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều



Xét hình nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b (xem hình).

Ta có: $OM = ON$

$$= \frac{a}{2} \text{ hay } r = \frac{a}{2}.$$

$$SN = \sqrt{SC^2 - CN^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$$

$$\text{hay } l = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}; SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} \text{ hay}$$

$$h = \frac{\sqrt{4a^2 - 2a^2}}{2}.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 11. Cho hình nón (N) nội tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 4, cạnh bên bằng 5. Tìm thể tích khối nón đã cho.

Lời giải: Ta có: $r = \frac{4}{2} = 2$;

$$l = \frac{\sqrt{4 \cdot 5^2 - 4^2}}{2} = \sqrt{21};$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{17};$$

$$V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{17} = \frac{4\pi\sqrt{17}}{3}.$$

PHẦN II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ BÀI TẬP

DẠNG I. MẶT NÓN VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN

Câu 1. Cho hình nón có đường sinh $l = 5$, bán kính đáy $r = 3$. Diện tích toàn phần của hình nón đó là:

A. $S_p = 15\pi$.

B. $S_p = 20\pi$.

C. $S_p = 22\pi$.

D. $S_p = 24\pi$.

Hướng dẫn giải

Diện tích toàn phần hình nón: $S_p = \pi r l + \pi r^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi$. **Chọn D.**

Câu 2. Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π . Thể tích của khối nón (N) bằng

A. 12π .

B. 20π .

C. 36π .

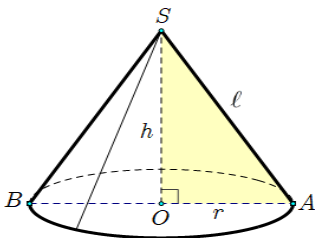
D. 60π .

Hướng dẫn giải

Ta có $S_{xq} = 15\pi \Leftrightarrow \pi r l = 15\pi \Leftrightarrow 3\pi l = 15\pi \Leftrightarrow l = 5$.

Tam giác SAO vuông tại O có $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Thể tích khối nón: $V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$. **Chọn A.**



Câu 3. Gọi l , h , r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là:

- A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $S_{xq} = \pi r l$.
C. $S_{xq} = \pi r h$. D. $S_{xq} = 2\pi r l$.

Câu 4. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a , đường cao là $2a$. Tính diện tích xung quanh hình nón?

- A. $2\sqrt{5}\pi a^2$. B. $\sqrt{5}\pi a^2$.
C. $2a^2$. D. $5a^2$.

Câu 5. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

- A. $4\pi a^2$. B. $3\pi a^2$.
C. $2\pi a^2$. D. $2a^2$.

Câu 6. Một hình nón có chiều cao $h = a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng $r = a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

- A. $2\pi a^2$. B. $\sqrt{3}\pi a^2$.
C. πa^2 . D. $2a^2$.

Câu 7. Khối nón (N) có độ dài đường sinh $\ell = 2a$, đường cao $h = a$. Thể tích của khối nón bằng

- A. $\frac{\pi a^3}{3}$. B. $3\pi a^3$.
C. a^3 . D. πa^3 .

Câu 8. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$, bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh của hình nón đó

- A. $2a\sqrt{2}$. B. $\frac{3a}{2}$.
C. $2a$. D. $3a$.

Câu 9. Cho khối nón có đường sinh bằng 5 và diện tích đáy bằng 9π . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- A. 12π . B. 24π .
C. 36π . D. 45π .

Câu 10. Cho hình hình nón có độ dài đường sinh bằng 4, diện tích xung quanh bằng 8π . Khi đó hình nón có bán kính hình tròn đáy bằng

- A. 8. B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 11. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 25 và bán kính đường tròn đáy bằng 15. Tính thể tích của khối nón đó.

A. 1500π .

B. 4500π .

C. 375π .

D. 1875π .

Câu 12. Cho hình nón (N) có đường kính đáy bằng $4a$, đường sinh bằng $5a$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón (N).

A. $S = 10\pi a^2$.

B. $S = 14\pi a^2$.

C. $S = 36\pi a^2$.

D. $S = 20\pi a^2$.

Câu 13. Một hình nón có diện tích đáy $16\pi\text{dm}^2$ và diện tích xung quanh $20\pi\text{dm}^2$. Thể tích của nó bằng

A. $16\pi\text{ dm}^3$.

B. $\frac{16\pi}{3}\text{ dm}^3$.

C. $8\pi\text{ dm}^3$.

D. $32\pi\text{ dm}^3$.

Câu 14. Cho hình nón bán kính đáy bằng a và thể tích khối nón tương ứng $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. Diện tích toàn phần của hình nón đó bằng

A. $3\pi a^2$.

B. $4\pi a^2$.

C. $2\pi a^2$.

D. πa^2 .

Câu 15. Nếu giữ nguyên bán kính đáy của một khối nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của khối nón này thay đổi như thế nào?

A. Giảm 4 lần.

B. Giảm 2 lần.

C. Tăng 2 lần.

D. Không đổi.

Câu 16. Một hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích toàn phần của hình nón bằng 9π . Đường cao của hình nón đã cho bằng

A. 3.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}/2$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho?

A. $a\sqrt{5}$.

B. $3a\sqrt{2}$.

C. $3a$.

D. $5a$.

Câu 18. Hình nón có chiều cao $10\sqrt{3}\text{cm}$, góc giữa một đường sinh và mặt đáy bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $50\sqrt{3}\pi\text{cm}^2$.

B. $200\pi\text{cm}^2$.

- C. $100\pi\text{cm}^2$. D. $100\sqrt{3}\pi\text{cm}^2$.

Câu 19. Cho hình nón có chiều cao 3cm, góc giữa trục và đường sinh 60° . Thể tích khối nón đó bằng

- A. $27\pi\text{cm}^3$. B. $18\pi\text{cm}^3$.
C. $3\pi\text{cm}^3$. D. $9\pi\text{cm}^3$.

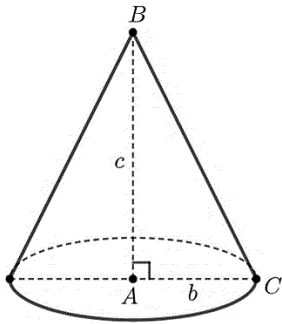
Câu 20. Thể tích của một khối nón có góc ở đỉnh là 90° , bán kính hình tròn đáy là a bằng

- A. $\frac{\pi a^3}{3}$. B. πa^3 .
C. $2\pi a^3$. D. $\frac{a^3}{3}$.

DẠNG II. SỰ HÌNH THÀNH CỦA MẶT NÓN, HÌNH NÓN

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = c$, $AC = b$. Quay tam giác ABC xung quanh đường thẳng chứa cạnh AB ta được một hình nón có thể tích bằng

- A. $\frac{1}{3}\pi bc^2$. B. $\frac{1}{3}bc^2$. C. $\frac{1}{3}b^2c$. D. $\frac{1}{3}\pi b^2c$.



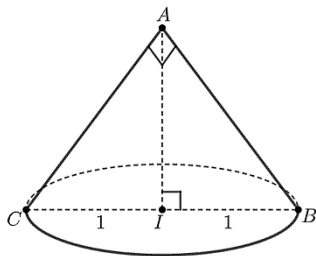
Hướng dẫn giải

Hình nón tạo thành có $r = AC = b$, $h = AB = c$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi b^2 c$. **Chọn D.**

Câu 22. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , gọi I là trung điểm của BC , $BC = 2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI .

- A. $S_{xq} = \sqrt{2}\pi$. B. $S_{xq} = 2\pi$. C. $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi$. D. $S_{xq} = 4\pi$.



Hướng dẫn giải

Hình nón tạo thành có bán kính và đường sinh lần lượt là: $R = \frac{BC}{2} = 1$,

$$l = AB = AC = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi R l = \sqrt{2}\pi$. **Chọn A.**

Câu 23. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $BC = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được tạo thành khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB bằng

A. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

C. $2\pi a^3$.

D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Câu 24. Tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A có cạnh huyền là $\sqrt{2}$. Quay tam giác ABC quanh trục AB thì được khối nón có thể tích là.

A. $\frac{\pi \sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. π .

Câu 25. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4a$ và $AC = 3a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích toàn phần của hình nón đó bằng

A. $15\pi a^2$.

B. $24\pi a^2$.

C. $36\pi a^2$.

D. $20\pi a^2$.

Câu 26. Trong không gian cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A và $BC = 2a$. Quay tam giác ABC quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay đó bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$.

B. $2\pi a^3$.

C. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

D. πa^3 .

Câu 27. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$, $AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC . Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quay quanh AB là

A. 86π .

B. 106π .

C. 96π .

D. 98π .

Câu 28. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC . Khi đó, tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{16}{9}$.

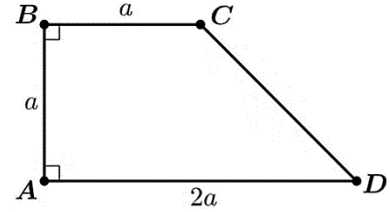
D. $\frac{9}{16}$.

Câu 29. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo ra khi cho hình thang $ABCD$ quay quanh trục AD .

- A. $\frac{7\pi a^3}{3}$. B. $\frac{4\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\pi a^3}{3}$. D. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

Câu 30. Cho hình thang $ABCD$ có $A = B = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD .

- A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. B. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.
C. $\frac{7\pi a^3}{6}$. D. $\frac{7\pi a^3}{12}$.



Câu 31. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, B . Cạnh $AB = BC = \sqrt{2}$, $AD = 2\sqrt{2}$. Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình thang $ABCD$ quanh CD là

- A. $\frac{7}{3}\pi$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{12}\pi$.
C. $\frac{7}{6}\pi$. D. $\frac{14}{3}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD .

Vì $BC \parallel AD$ nên $\frac{BC}{AD} = \frac{EB}{EA} = \frac{EC}{ED} = \frac{1}{2} \Rightarrow EC = CD$ và $EB = BA$.

Dễ thấy tam giác EBC vuông cân tại E . Gọi I là trung điểm CE thì $BI \perp CE$, $IB = IC = IE$.

Tam giác ADE vuông cân tại A ($AD = AE = 2\sqrt{2}$) có C là trung điểm DE nên $AC \perp DE$, $CA = CD = CE$.

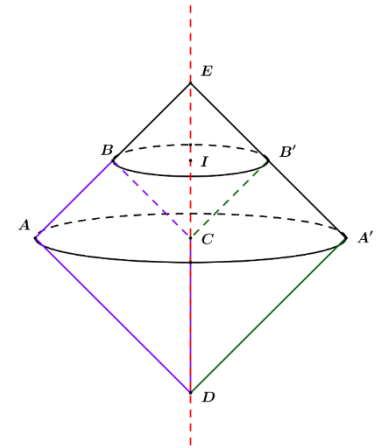
Tổng thể tích hai khối nón lần lượt có đỉnh D, E , cùng đáy là đường tròn $(C; CA)$:

$$V_1 + V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot AC^2 \cdot CE = \frac{2}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{16}{3} \pi.$$

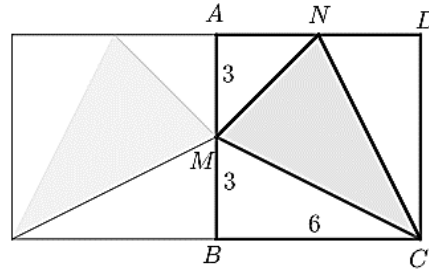
Tổng thể tích hai khối nón lần lượt có đỉnh C, E , cùng đáy là đường tròn $(I; IB)$:

$$V_3 + V_4 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot IB^2 \cdot IC = \frac{2}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{2}{3} \pi.$$

$$\text{Thể tích cần tìm là: } V_1 + V_2 - (V_3 + V_4) = \frac{16}{3} \pi - \frac{2}{3} \pi = \frac{14\pi}{3}.$$



Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 6; gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD .
 Tính thể tích của vật tròn xoay sinh ra bởi tam giác CMN khi quay quanh trục AB .



- A. 81π . B. 60π .
 C. 117π . D. 90π .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Kéo dài CN cắt AB tại E . Khi đó: $\frac{EA}{EB} = \frac{AN}{BC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow EA = AB = 6 \Rightarrow EB = 12$.

Quay tam giác EBC quanh trục AB ta được khối nón có thể tích

$$\text{là: } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot BC^2 \cdot EB = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 144\pi.$$

Thể tích khối nón đỉnh E , bán kính đáy $AN = 3$ là:

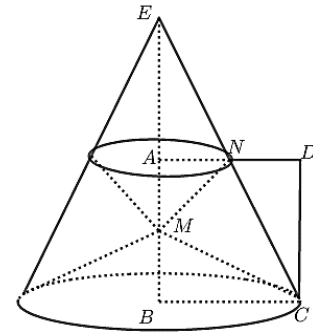
$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot AN^2 \cdot EA = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi.$$

Thể tích khối nón đỉnh M , bán kính đáy $AN = 3$ là: $V_3 = \frac{1}{3} \pi \cdot AN^2 \cdot AM = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi$.

Thể tích khối nón đỉnh M , bán kính đáy $BC = 6$ là: $V_4 = \frac{1}{3} \pi \cdot BC^2 \cdot MB = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 3 = 36\pi$.

Vậy thể tích của vật tròn xoay sinh bởi tam giác CMN khi quay quanh trục AB là:

$$V = V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 144\pi - 18\pi - 9\pi - 36\pi = 81\pi.$$

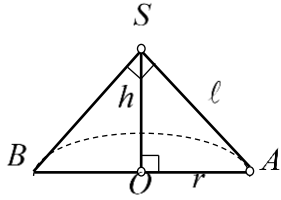


DẠNG III. THIẾT DIỆN QUA TRỤC CỦA HÌNH NÓN

Câu 33. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

- A. $\pi a^2 \sqrt{2}$. B. $\pi a^2 \sqrt{3}$. C. πa^2 . D. $2\pi a^2$.

Hướng dẫn giải



Do ΔSAB vuông cân nên $h = r = \frac{AB}{2} = a$;

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \text{ (hay } l = \frac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}).$$

Vì vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \pi a^2 \sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 34. Cho khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác cân có một góc 120° và cạnh bên bằng a . Tính thể tích khối nón.

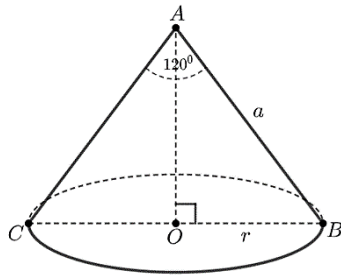
A. $\frac{\pi a^3}{8}$.

B. $\frac{3\pi a^3}{8}$.

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$.

D. $\frac{\pi a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải



Gọi thiết diện qua trục là tam giác ABC có $BAC = 120^\circ$ và $AB = AC = a$ (xem hình vẽ). Gọi O là tâm của đường tròn đáy.

Khi đó: $r = OB = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $h = OA = AB \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{8}$. **Chọn A.**

Câu 35. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}$.

C. $\pi a^2 \sqrt{2}$.

D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Câu 36. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

A. πa^3 .

B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.

C. $\pi a^3 \sqrt{2}$.

D. $\pi a^3 \sqrt{7}$.

Câu 37. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Diện tích toàn phần của hình nón bằng

A. $(2 + \sqrt{2})\pi a^2$.

B. $\sqrt{3}\pi a^2$.

C. $\sqrt{2}\pi a^3$.

D. $\frac{(1 + \sqrt{2})\pi a^2}{2}$.

Câu 38. Cho khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân và đường sinh có độ dài bằng a . Thể tích của khối nón tương ứng bằng

- A. πa^3 . B. $\frac{\pi a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$.
C. $2\pi a^3$. D. $\pi a^3 \cdot \sqrt{2}$.

Câu 39. Cắt một khối nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối nón bằng

- A. $\pi\sqrt{3}a^3$. B. πa^3 .
C. $2\pi\sqrt{3}a^3$. D. $\pi\sqrt{3}a^3/3$.

Câu 40. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2, góc ở đỉnh bằng 60° . Thể tích khối nón là

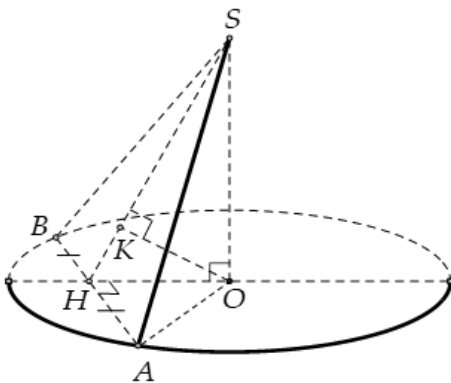
- A. $V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{9}(\text{cm}^3)$. B. $V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^3)$.
C. $V = 8\pi\sqrt{3}(\text{cm}^3)$. D. $V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}(\text{cm}^3)$.

Câu 41. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \pi a^3$.

DẠNG IV. THIẾT DIỆN QUA ĐỈNH VÀ KHÔNG CHỨA TRỤC CỦA HÌNH NÓN

Học sinh cần nắm



Xét thiết diện khi cắt hình nón bởi mặt phẳng (P) qua đỉnh, nhưng không qua trục hình nón, ta cần nhớ:

- Thiết diện luôn là tam giác SAB cân tại đỉnh S .
- Khoảng cách: $d(O, (SAB)) = OK = \frac{SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}}$.
- Góc giữa mặt phẳng chứa thiết diện (SAB) và mặt đáy là SHO .
- Ta thường áp dụng định lý Pi-ta-go hay hệ thức lượng cho các tam giác vuông SOH , SAH , SOA , OAH .

Câu 42. Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón sao cho khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. B. $96\pi a^3$. C. $108\pi a^3$. D. $120\pi a^3$.

Hướng dẫn giải

Xét hình nón có đỉnh S , tâm của đáy là O như hình vẽ và mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB . Theo giả thiết, tam giác SAB vuông cân tại đỉnh S . Gọi I là trung điểm AB , kẻ $OH \perp SI$ tại $H \Rightarrow OH = d(O, (SAB)) = 3a$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{12a^2} \Rightarrow OI = 2a\sqrt{3}.$$

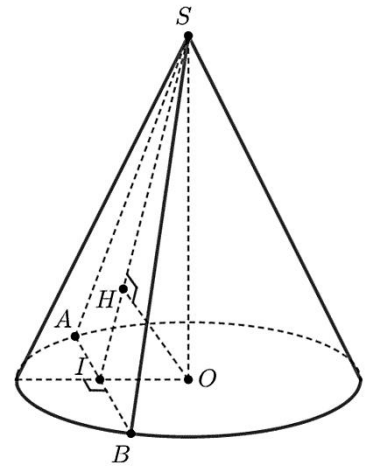
Tam giác SOI có: $SO.OI = SI.OH$

$$\Rightarrow SI = \frac{SO.OI}{OH} = \frac{6a.2a\sqrt{3}}{3a} = 4a\sqrt{3}; \text{ mà tam giác } SAB \text{ vuông cân}$$

$$\text{tại } S \text{ nên } AB = 2SI = 8a\sqrt{3} \Rightarrow IA = 4a\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } OA = \sqrt{IA^2 + OI^2} = \sqrt{12a^2 + 48a^2} = 2\sqrt{15}a.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{15}a)^2 \cdot 6a = 120\pi a^3. \text{ Chọn D.}$$



Câu 43. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 4 và bán kính bằng 3. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có độ dài cạnh đáy bằng 2. Diện tích của thiết diện bằng.

A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{19}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Xét hình nón đỉnh S và tâm của đáy là O , thiết diện là tam giác SAB .

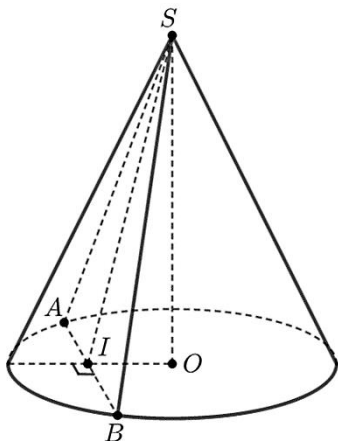
$$\text{Ta có: } h = SO = 4, R = OA = OB = 3, AB = 2.$$

Gọi I là trung điểm AB , tam giác SAB cân tại S nên $AB \perp SI$.

$$\text{Ta có: } SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$$

$$SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Diện tích thiết diện cần tìm: } S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2 = 2\sqrt{6}.$$



Chọn C.

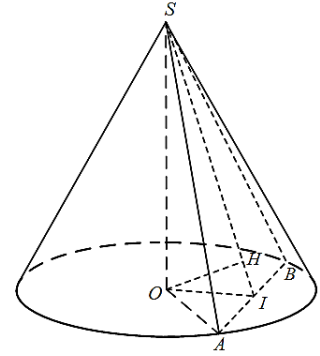
Câu 44. Cho hình nón có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 500$.

B. $S = 400$.

C. $S = 300$.

D. $S = 406$.



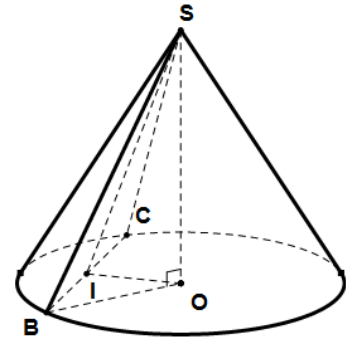
Câu 45. Cắt hình nón (N) đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC .

A. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$.

C. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$.



Câu 46. Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

B. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 47. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.

B. 32π .

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

C. $32\sqrt{5}\pi$. D. 96π .

Câu 48. Cho hình nón có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $8\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $13\sqrt{2}\pi$. B. $14\sqrt{2}\pi$.

C. $12\sqrt{2}\pi$. D. 21π .

Câu 49. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Khoảng cách từ tâm của đáy đến (P) bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. a .

C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 50. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 51. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° . Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

C. $2a^2$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 52. Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O , bán kính, $R = 3\text{cm}$, góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120^\circ$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB , trong đó A, B thuộc đường tròn đáy. Diện tích tam giác SAB bằng

A. $3\sqrt{3}\text{ cm}^2$. B. $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

C. 6 cm^2 . D. 3 cm^2 .

Câu 53. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O , bán kính R . Dựng hai đường sinh SA và SB , biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60° , khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

- A. $h = R\sqrt{3}$. B. $h = R\sqrt{2}$.
C. $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Câu 54. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng $3a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\frac{3a}{2}$. Diện tích của thiết diện đó bằng

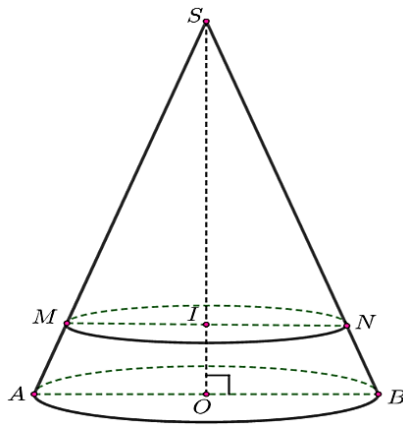
- A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$. B. $12a^2\sqrt{3}$
C. $\frac{12a^2}{7}$. D. $\frac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Câu 55. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. B. $2\sqrt{10}\pi a^2$.
C. $\sqrt{10}\pi a^2$. D. $8\sqrt{10}\pi a^2$.

DẠNG V. THIẾT DIỆN VUÔNG GÓC VỚI TRỤC CỦA HÌNH NÓN

Học sinh cần nắm



Cho hình nón có đỉnh S và tâm của đáy là O .

Xét thiết diện khi cắt hình nón bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO của hình nón tại điểm I . Ta có:

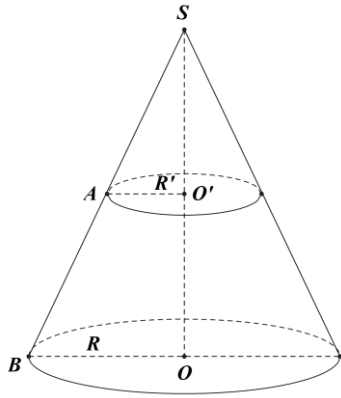
$$\bullet \frac{SI}{SO} = \frac{SM}{SA} = \frac{IM}{OA} = k.$$

$$\bullet \frac{S_{\Delta SIM}}{S_{\Delta SOA}} = \frac{S_{(I;IM)}}{S_{(O;OA)}} = k^2.$$

Câu 56. Cho hình nón (N_1) đỉnh S , đáy là đường tròn $C(O; R)$, đường cao $SO = 40\text{ cm}$. Người ta cắt hình nón trên bằng mặt phẳng vuông góc với trục của nó để được hình nón nhỏ (N_2) có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O'; R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{(N_2)}}{V_{(N_1)}} = \frac{1}{8}$. Tính độ dài đường cao khối nón N_2 .

- A. 20 cm. B. 5 cm. C. 10 cm. D. 49 cm.

Hướng dẫn giải



Ta có: $V_{(N_1)} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot SO$, $V_{(N_2)} = \frac{1}{3} \pi R'^2 \cdot SO'$.

Mặt khác: $\triangle SO'A$ và $\triangle SOB$ đồng dạng nên $\frac{R'}{R} = \frac{SO'}{SO}$.

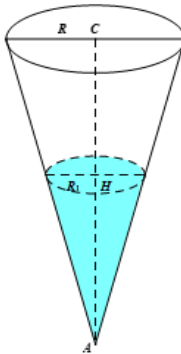
Suy ra: $\frac{V_{(N_2)}}{V_{(N_1)}} = \frac{R'^2 \cdot SO'}{R^2 \cdot SO} = \left(\frac{SO'}{SO} \right)^3 = \frac{1}{8}$.

Suy ra $\frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow SO' = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20\text{ cm}$. **Chọn A.**

Câu 57. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm (hình 1). Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là 10 cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lại (hình 2) thì chiều cao cột nước trong phễu gần bằng giá trị nào sau đây?



Hình 1



Hình 2

- A. 10 cm. B. 0,87 cm. C. 1,07 cm. D. 1,35 cm.

Hướng dẫn giải

Gọi R, h theo thứ tự là bán kính và chiều cao hình nón lớn (phễu); gọi R_1, h_1 là bán kính và chiều cao hình nón nhỏ (hình 1). Gọi V, V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích phễu, thể tích nước trong phễu và thể tích phần còn lại của phễu không bị nước chiếm.

Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi R_1^2 h_1}{\pi R^2 h} = \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 = \frac{1}{8}$ (do tính chất tam giác đồng dạng nên $\frac{R_1}{R} = \frac{h_1}{h} = \frac{1}{2}$).

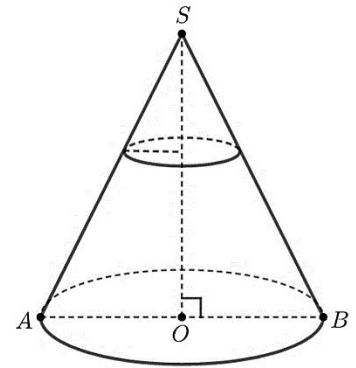
Suy ra $\frac{V_2}{V} = \frac{7}{8} = \frac{\pi R_2^2 h_2}{\pi R^2 h} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3$; trong đó R_2, h_2 lần lượt là bán kính và chiều cao hình nón (phần không chứa nước trong phễu – hình 2).

Do vậy $\frac{h_2}{h} = \sqrt[3]{\frac{7}{8}} \Rightarrow h_2 = h \sqrt[3]{\frac{7}{8}} = 20 \sqrt[3]{\frac{7}{8}}$.

Chiều cao mực nước trong phễu (hình 2): $20 - 20 \sqrt[3]{\frac{7}{8}} \approx 0,87 \text{ cm}$. **Chọn B.**

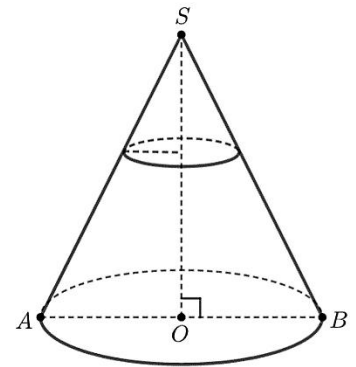
Câu 58. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 10. Mặt phẳng (α) vuông góc với trục và cách đỉnh của hình nón một khoảng bằng 4, chia hình nón thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh của hình nón đã cho, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

- A. $\frac{4}{25}$.
- B. $\frac{21}{25}$.
- C. $\frac{8}{117}$.
- D. $\frac{4}{21}$.



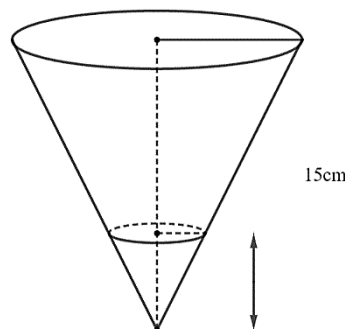
Câu 59. Một vật (N_1) có dạng hình nón có chiều cao bằng 40cm . Người ta cắt vật (N_1) bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ (N_2) có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích (N_1) . Tính chiều cao h của hình nón (N_2) ?

- A. 10cm .
- B. 20cm .
- C. 40cm .
- D. 5cm .



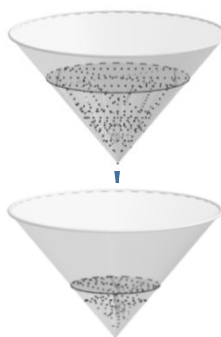
Câu 60. Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm .

- A. $0,501(cm)$.
 B. $0,302(cm)$.
 C. $0,216(cm)$.
 D. $0,188(cm)$.



Câu 61. Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên. Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

- A. $\sqrt[3]{7}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\sqrt[3]{5}$. D. $\frac{1}{2}$.



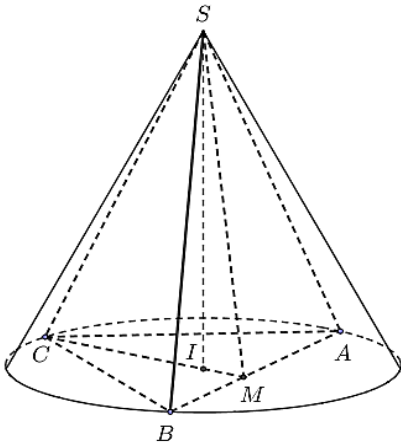
DẠNG VI. HÌNH NÓN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP HÌNH ĐA DIỆN

Câu 62. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S , có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}$. B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; M là trung điểm của AB .



Ta có: $IC = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $IM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy hình chóp là góc $SMC = 60^\circ$.

Tam giác SMI vuông tại I có $\tan 60^\circ = \frac{SI}{IM} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

$$SA = \sqrt{SI^2 + IA^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6} = l. \text{ Diện tích xung quanh hình nón}$$

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 63. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của khối nón nội tiếp và khối nón ngoại tiếp hình chóp đã cho là

- A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của BC . Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có: $SO \perp (ABC)$ tại O .

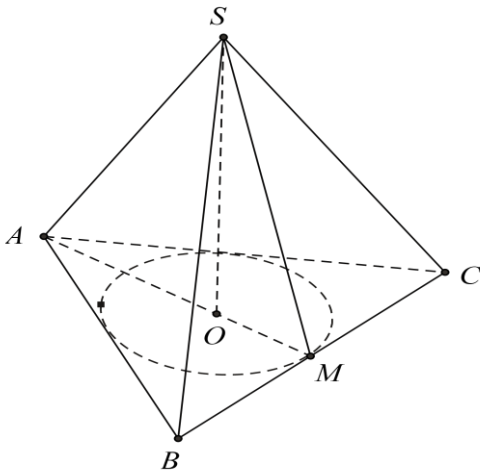
Suy ra O là tâm đường tròn nội tiếp và cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi a là độ dài cạnh của tam giác ABC .

Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Do $OM = \frac{1}{2}OA$ nên ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OM^2 \cdot SO}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OA^2 \cdot SO}$

$$= \frac{OM^2}{OA^2} = \left(\frac{OM}{OA}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Chọn B.}$$



Câu 64. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích toàn phần của khối nón đó là

$$\textbf{A. } S_{\varphi} = \frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{3}+2). \quad \textbf{B. } S_{\varphi} = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5}+1).$$

C. $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5} + 2)$. D. $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

Câu 65. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy là a và (N) là hình nón có đỉnh là S với đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Câu 66. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên tạo với đáy góc 45° . Thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp trên là:

A. $\frac{8}{3}\pi a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$.

C. $2\pi a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

Câu 67. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.

C. πa^3 . D. $\frac{\pi a^3}{6}$.

Câu 68. Diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $4a$ bằng

A. $2\sqrt{2}\pi a^2$. B. $4\pi a^2$.

C. $\sqrt{3}\pi a^2$. D. $\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 69. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$. B. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$.

C. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Câu 70. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên SA bằng $a\sqrt{2}$ và SA tạo đáy góc 45° . Thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. B. $\sqrt{2}\pi a^3$.

C. $\frac{\pi a^3}{6}$. D. $\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 71. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$, góc tạo bởi (SAB) và (ABC) bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{6}$.

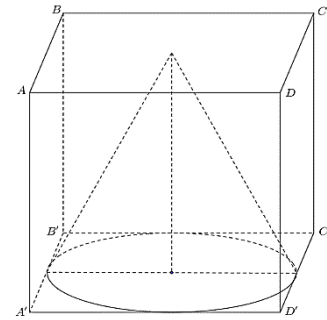
Câu 72. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_p của khối nón đó có dạng bằng $\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{b} + c)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Tính bc .

A. $bc = 5$.

B. $bc = 8$.

C. $bc = 15$.

D. $bc = 7$.



Câu 73. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và cạnh bên bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $A'B'C'D'$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

A. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{17}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{2}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{4}$. D. $S_{xq} = 2\pi a^2 \sqrt{17}$.

DẠNG VII. MAX-MIN VÀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

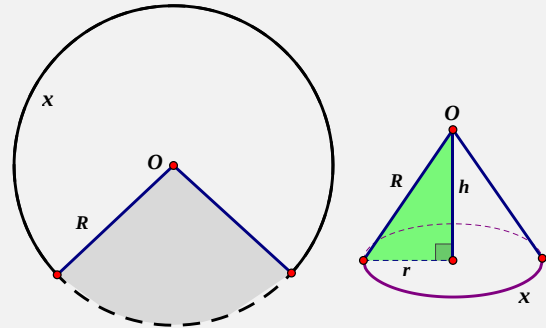
Câu 74. Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R , phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x . Tìm x để thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$.

B. $x = \frac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$.

C. $x = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$.

D. $x = \frac{\pi R\sqrt{6}}{3}$.



Hướng dẫn giải

Đáy hình nón tạo thành là đường tròn có chu vi $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$ (với $x > 0$).

Theo định lý Pitago, ta có $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2}$.

Thể tích khối nón: $V(x) = \frac{1}{3} h \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2} \cdot \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{1}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2}$.

Đạo hàm: $V'(x) = \frac{1}{24\pi^2} \left(2x\sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2}} \right) = \frac{1}{24\pi^2} \left[\frac{2x(4\pi^2 R^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2}} \right]$.

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(4\pi^2 R^2 - x^2) - x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ 2(4\pi^2 R^2 - x^2) - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 = 8\pi^2 R^2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}\pi R}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{2}\pi R$	$+\infty$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$			$V_{\max}$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{6}\pi R}{3}$.

Câu 75. Cho hình nón (N) có đường cao $SO = h$ và bán kính đáy bằng R , gọi M là điểm trên đoạn SO , đặt $OM = x$, $0 < x < h$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M , với hình nón (N) . Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A. $\frac{h}{2}$.

B. $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{h\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{h}{3}$.

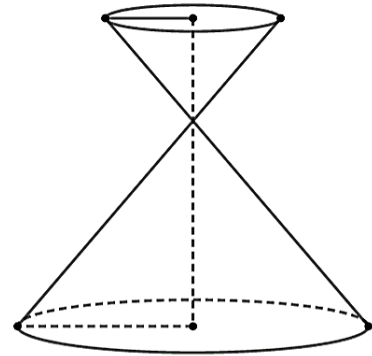
Câu 76. Cho một đồng hồ cát như bên dưới, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\text{ cm}^3$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần bên trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ số thể tích cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{64}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{27}$.

D. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.



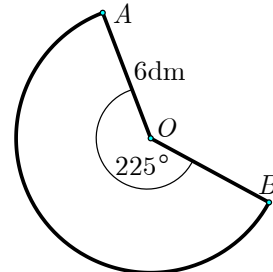
Câu 77. Từ một tấm tôn hình quạt có bán kính $R = 6\text{ dm}$ như hình vẽ, người ta làm thành chiếc phễu hình nón (khi đó OA trùng với OB). Thể tích của khối nón tạo thành bằng

A. $\frac{225\pi\sqrt{39}}{64}\text{ dm}^3$.

B. $\frac{115\pi\sqrt{39}}{8}\text{ dm}^3$.

C. $\frac{225\pi\sqrt{39}}{32}\text{ dm}^3$.

D. $\frac{115\pi\sqrt{39}}{32}\text{ dm}^3$.



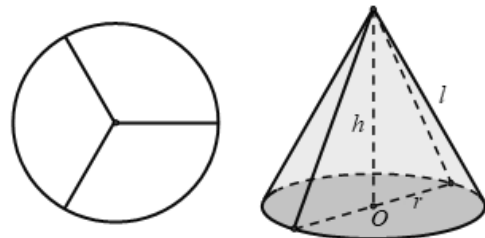
Câu 78. Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu ?

A. $16000\sqrt{2}$ lít.

B. $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

C. $\frac{1600\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

D. $\frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.



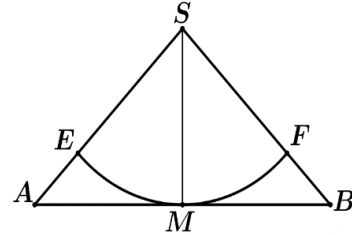
Câu 79. Một miếng tôn hình tam giác vuông cân SAB có độ dài cạnh SA và SB bằng nhau và bằng 3dm . Gọi M là trung điểm của AB . Người ta dùng compa lấy S làm tâm vạch một cung tròn có bán kính là SM cắt SA, SB lần lượt tại E, F rồi cắt miếng tôn theo cung tròn EF đó. Lấy phần hình quạt vừa cắt được người ta gò sao cho cạnh SE và SF trùng nhau thành một cái phễu hình nón có đỉnh S và không có mặt đáy. Thể tích của khối nón trên bằng

A. $\frac{27\pi\sqrt{30}}{256}\text{dm}^3$.

B. $\pi\sqrt{105}\text{dm}^3$.

C. $\frac{9\pi\sqrt{34}}{256}\text{dm}^3$.

D. $\frac{9\pi\sqrt{30}}{256}\text{dm}^3$.



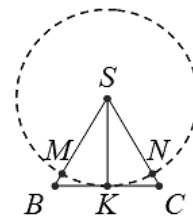
Câu 80. Một tấm tôn hình tam giác đều SBC có độ dài cạnh bằng 3 và có K là trung điểm BC . Người ta dùng compa có tâm là S , bán kính SK vạch một cung tròn MN . Lấy phần hình quạt gò thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là S , cung MN thành đường tròn đáy của hình nón (hình vẽ). Thể tích của khối nón trên bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{105}}{64}$.

B. $\frac{3\pi}{32}$.

C. $\frac{3\pi\sqrt{3}}{32}$.

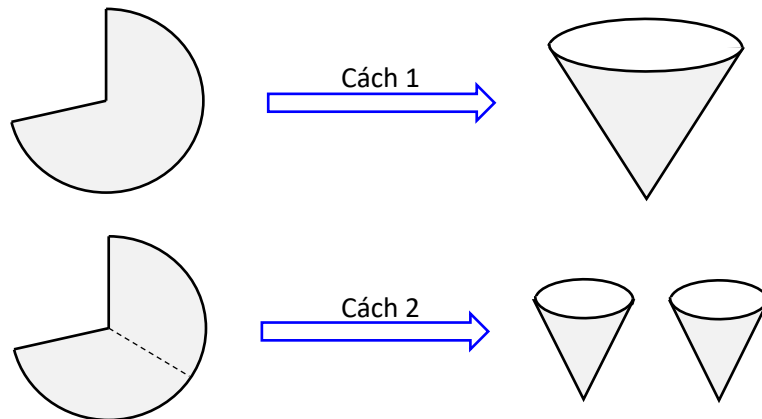
D. $\frac{\pi\sqrt{141}}{64}$.



Câu 81. Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt (như hình vẽ) có bán kính $R=5$ và chu vi của hình quạt là $P=8\pi+10$, người ta gò tấm kim loại đó thành những chiếc phễu hình nón theo hai cách:

Cách 1: Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu.

Cách 2: Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu.

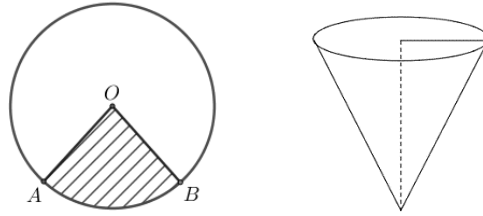


Gọi V_1 là thể tích của cái phễu ở cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{21}{\sqrt{7}}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.
- C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 82. Bạn X có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, X muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó X phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất ?

- A. $x = \frac{\pi}{4}$.
- B. $x = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.
- C. $x = \frac{\pi}{3}$.
- D. $x = \frac{\pi}{2}$.



Câu 83. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy bằng

- A. $10\sqrt{2}$ cm.
- B. $50\sqrt{2}$ cm.
- C. 20cm.
- D. 25cm.

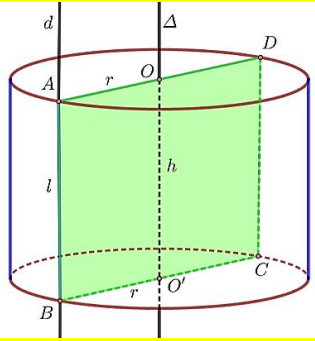
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1: MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN

1D	2A	3B	4B	5C	6A	7D	8D	9A	10C
11A	12A	13A	14A	15B	16A	17D	18B	19A	20A
21D	22A	23A	24B	25B	26C	27C	28B	29A	30A
31D	32A	33A	34A	35D	36B	37D	38B	39D	40D
41C	42D	43C	44A	45A	46B	47A	48B	49D	50D
51A	52A	53D	54D	55B	56A	57B	58C	59B	60D
61A	62D	63B	64B	65C	66D	67D	68A	69A	70C
71B	72A	73C	74A	75D	76B	77A	78B	79D	80A
81B	82B	83D							

BÀI 2. MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ

PHẦN I. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

★ Mặt trụ – Hình trụ và các yếu tố liên quan ★



☞ Sự hình thành mặt trụ, hình trụ:

Xét hai đường thẳng song song d , Δ và hình chữ nhật $OABO'$ như hình.

Quay mặt phẳng chứa hai đường thẳng d , Δ quanh đường thẳng Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt trụ (tròn xoay) có trục là Δ và bán kính bằng khoảng cách giữa d và Δ .

Đường gấp khúc $OABO'$ tạo ra một hình trụ (tròn xoay) có:

Đường cao: $h = OO'$.

Đường sinh: $l = AB = CD$. Ta có: $l = h$.

Bán kính đáy: $r = OA = OD = O'B = O'C$.

Trục là đường thẳng Δ (qua tâm hai đường tròn đáy O , O').

Thiết diện qua trục: Là hình chữ nhật $ABCD$.

Các công thức liên quan

• Chu vi đáy: $p = 2\pi r$.

• Diện tích đáy: $S_d = \pi r^2$.

• Thể tích khối trụ:

$$V = h \cdot S_d = h \cdot \pi r^2.$$

• Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi r h.$$

• Diện tích toàn phần:

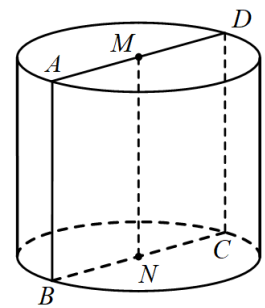
$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$, $AD=2$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tìm diện tích toàn phần của hình trụ đã cho; tính thể tích khối trụ tương ứng.

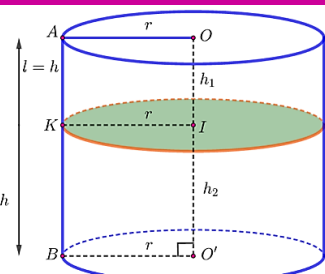
☞ Lời giải: Ta có: $r = \frac{AD}{2} = 1$; $l = AB = 1 = h$.

Diện tích toàn phần của hình trụ: $S = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot 1 + 2\pi \cdot 1^2 = 4\pi$.

Thể tích khối trụ đã cho: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3}$.



★ Thiết diện vuông góc với trục của hình trụ ★



☞ Cắt hình trụ bằng một mặt

phẳng vuông góc với trục của nó, thiết diện tạo thành là một đường tròn, khi đó ta thu được hai hình trụ có tổng chiều cao bằng hình trụ ban đầu, bán kính đáy bằng nhau và bằng bán kính đáy hình trụ ban đầu.

Các công thức liên quan

$$h_1 + h_2 = h;$$

$$S_{xq1} + S_{xq2} = S_{xq};$$

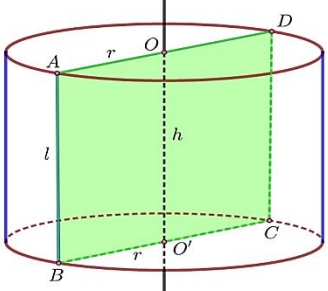
$$V_1 + V_2 = V;$$

$$S_{tp1} + S_{tp2} = S_{tp} + 2S_d.$$

Ví dụ 2. Cắt một hình trụ có chiều cao $3a$ bằng một mặt phẳng vuông góc với trục của nó, ta thu được hai hình trụ có tổng diện tích toàn phần lớn hơn diện tích toàn phần của hình trụ ban đầu $8\pi a^2$. Tìm thể tích khối trụ ban đầu.

Lời giải: Ta có: $S_{tp1} + S_{tp2} = S_{tp} + 2S_d = S_{tp} + 8\pi a^2$; suy ra $S_d = 4\pi a^2 = \pi r^2 \Rightarrow r = 2a$.

Thể tích khối trụ ban đầu: $V = \pi r^2 h = \pi (2a)^2 \cdot 3a = 12\pi a^3$.

★ Thiết diện qua trục của hình trụ ★	Đặc biệt
 Xét một mặt phẳng qua trục OO' của hình trụ và cắt hai đáy hình trụ theo các đường kính AC, BC. Khi đó hình chữ nhật $ABCD$ được gọi là thiết diện qua trục của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ chia hình trụ ban đầu thành hai nửa hình trụ, ta nói $(ABCD)$ là một mặt phẳng đối xứng của hình trụ này.	Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông cạnh a, ta có: $2r = l = h = a$

Ví dụ 3. Một hình trụ (T) có thiết diện qua trục là hình vuông với đường chéo $2a$.

a) Tìm chu vi và diện tích thiết diện đó.

b) Tìm diện tích xung quanh hình trụ (T) , thể tích khối trụ tương ứng.

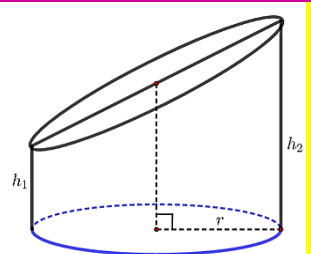
Lời giải: Hình vuông có đường chéo $2a$ nên cạnh hình vuông đó là $\frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Chu vi thiết diện: $C_{ABCD} = 4a\sqrt{2}$; diện tích thiết diện: $S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$.

Thiết diện qua trục là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $2r = l = h = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích xung quanh hình trụ (T) : $S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = 2\pi a^2$.

Thể tích khối trụ (T) : $V_{(T)} = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{2}$.

★ Hình trụ cụt (hay phiên trụ) ★	Các công thức liên quan
 Nếu ta cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng không vuông góc với trục của hình trụ, đồng thời không cắt đường tròn đáy hình trụ đó thì ta sẽ thu được hai phần đều là hình phiên trụ (thiết diện là hình elip). Xét hình phiên trụ ở bên, trong đó r là bán kính đường tròn đáy của hình trụ ban đầu (lúc chưa bị cắt); h_1, h_2 lần lượt là khoảng cách ngắn nhất và dài nhất từ một điểm thuộc elip đến mặt phẳng chứa đường tròn đáy.	• Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r (h_1 + h_2)$ • Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{elip} + S_{hình\ tròn}$ • Thể tích: $V = \pi r^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$

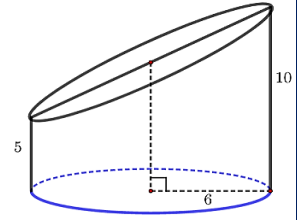
Ví dụ 4. Tìm diện tích xung quanh và thể tích của phiên trụ được cho như hình vẽ.

Lời giải:

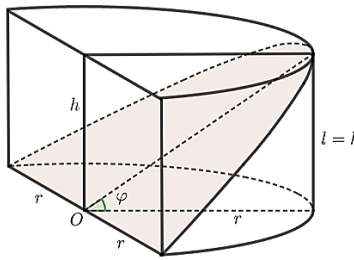
Ta có: $h_1 = 5, h_2 = 10, r = 6$.

Diện tích phần trụ: $S_{xq} = \pi r (h_1 + h_2) = \pi \cdot 6 (5 + 10) = 90\pi$.

Thể tích phần trụ: $V = \pi r^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) = \pi \cdot 6^2 \cdot \left(\frac{5 + 10}{2} \right) = 270\pi$.



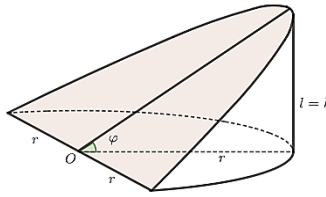
Hình nêm



Xét một nửa hình trụ (T) (được cắt bởi một mặt phẳng qua trục). Tiếp tục cắt (T)

bởi một phẳng phẳng đi qua điểm chính giữa cung bán nguyệt của một đáy và đường kính của đáy còn lại, ta thu được hai hình nêm: **Hình nêm loại 1** và **hình nêm loại 2**.

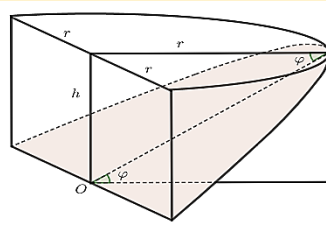
Các công thức liên quan



Hình nêm loại 1:

Thể tích:

$$V = \frac{2}{3} r^3 \tan \varphi.$$



Hình nêm loại 2:

Thể tích:

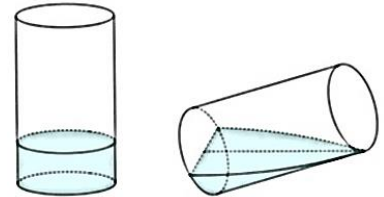
$$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) r^3 \tan \varphi.$$

Ví dụ 5. Cho một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc bằng 6cm, chiều cao trong lòng cốc bằng 10cm đang chứa một lượng nước. Bé An nghiêng cốc nước, vừa lúc nước chạm miệng cốc thì đường kính đáy cốc nằm ngay bề mặt nước. Tìm thể tích lượng nước có trong cốc thủy tinh đó.

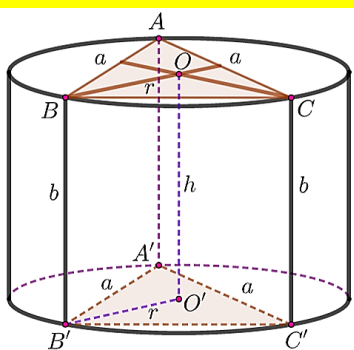
Lời giải: Nhận xét: Đây là hình nêm loại 1.

Thể tích lượng nước là:

$$V = \frac{2}{3} r^3 \tan \varphi = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{h}{r} = \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 3^2 \cdot 10 = 60 \text{cm}^3.$$



Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều



Xét hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b . Ta có:

$$OA = OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = r;$$

$$OO' = b = h.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 6. Tìm thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{3}$, cạnh bên bằng 2.

Lời giải:

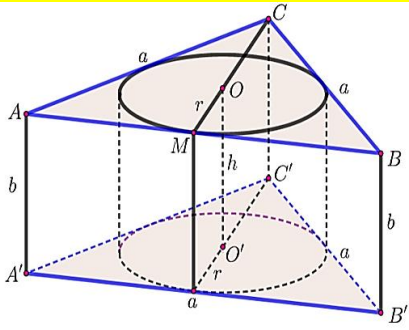
$$\text{Ta có: } r = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 1, h = 2.$$

Thể tích khối trụ:

$$V = \pi r^2 h = 2\pi.$$

Hình trụ nội tiếp lăng trụ tam giác đều

Ví dụ minh họa



Xét hình trụ nội tiếp lăng trụ tam giác đều

$ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b .

Ta có: $OO' = [b = h]$;

$$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = r.$$

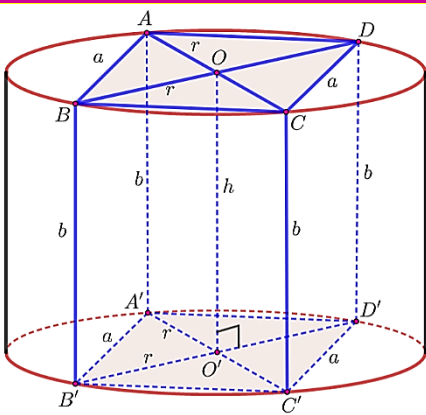
Ví dụ 7. Tìm diện tích toàn phần hình trụ nội tiếp lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2\sqrt{3}$, cạnh bên bằng 3.

Lời giải: Ta có: $h = 3$;

$$r = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 1 ;$$

$$S_{tp} = 2\pi rh + \pi r^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot 3 + \pi \cdot 1^2 = 7\pi.$$

Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tứ giác đều



Xét hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tứ giác đều

(hình hộp chữ nhật có hai mặt đối nhau là hình vuông) với cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b , ta có:

$$OO' = [b = h] ;$$

$$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} = r.$$

Ví dụ minh họa

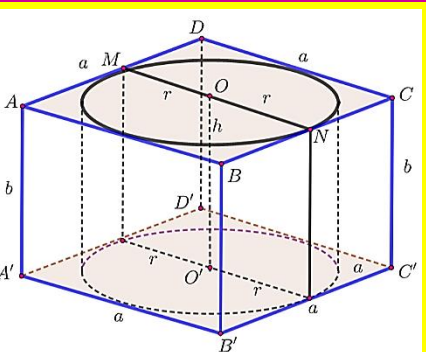
Ví dụ 8. Tìm thể tích khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh bên bằng $2a$ và chu vi một mặt bên bằng $12a$.

Lời giải: Gọi x là cạnh đáy lăng trụ thì chu vi một mặt bên: $2(x + 2a) = 12a \Rightarrow x = 4a$;

$$r = \frac{4a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2} ; h = 2a ;$$

$$V = \pi r^2 h = 16\pi a^3.$$

Hình trụ nội tiếp lăng trụ tứ giác đều



Xét hình trụ nội tiếp lăng trụ tứ giác đều

$ABCD.A'B'C'D'$ khi đó:

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} = r,$$

$$[h = b].$$

Ví dụ minh họa

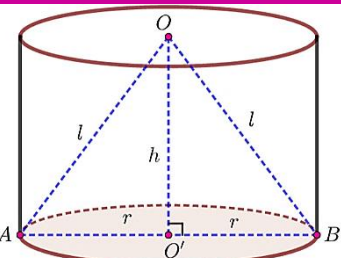
Ví dụ 9. Tìm diện tích xung quanh hình trụ nội tiếp hình lập phương có cạnh $2a$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } r = \frac{2a}{2} = a, h = 2a.$$

$$\text{Diện tích xung quanh hình trụ: } S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot a \cdot 2a = 4\pi a^2.$$

Hình trụ ngoại tiếp hình nón



Xét hình trụ ngoại tiếp hình nón có bán kính đáy r và chiều cao h (xem hình).

Ví dụ minh họa

Ví dụ 10. Cho hình trụ (T) ngoại tiếp hình nón (N) biết hình nón (N) có thiết diện qua trục là tam giác đều OAB và diện tích tam giác OAB bằng $a^2\sqrt{3}$. Tìm thể tích khối (T) theo a .

Khi đó hình trụ này cố định và cũng có bán kính đáy là r và chiều cao h .

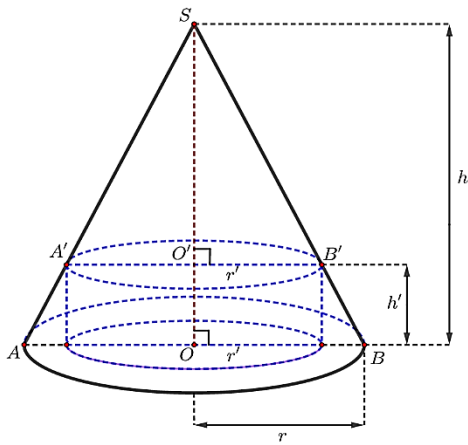
Lời giải: Gọi $OA = OB = AB = x$;

$$S_{\triangle OAB} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = 2a \Rightarrow r = a.$$

$$h = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; V_{(T)} = \pi r^2 h = \pi a^3 \sqrt{3}.$$

★ Hình trụ nội tiếp hình nón ★

Ví dụ minh họa



Xét hình trụ nội tiếp hình nón có bán kính đáy r và chiều cao h (hình vẽ). Gọi $r', h' = x$ là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

$$\text{Ta có: } \frac{r'}{r} = \frac{h-h'}{h}$$

$$\Rightarrow r' = \frac{r}{h} \times (h-h').$$

$$\text{Thay vào } V_{\text{trụ}} = \pi \cdot r'^2 \cdot h';$$

$$\text{Suy ra: } V_{\text{trụ}} = \frac{\pi r^2}{h^2} (h-x)^2 \cdot x \text{ với } x = h'.$$

$$V_{\text{trụ}} = \frac{\pi r^2}{2h^2} \times (h-x) \cdot (h-x) \cdot 2x \leq \frac{\pi r^2}{2h^2} \times \left(\frac{h-x+h-x+2x}{3} \right)^3;$$

$$V_{\text{trụ}} \leq \frac{4\pi r h}{27} \text{ hay } (V_{\text{trụ}})_{\max} = \frac{4\pi r h}{27}. \text{ Khi đó: } x = \frac{h}{3}.$$

Ví dụ 11. Cho hình nón (N) có chiều cao bằng 3 và bán kính đáy bằng 2. Tìm chiều cao của hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) sao cho thể tích khối (T) đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải:

$$(V_T)_{\max} = \frac{4\pi r h}{27} = \frac{4\pi \cdot 2 \cdot 3}{27} = \frac{8\pi}{9}.$$

Chiều cao hình trụ là:

$$h' = x = \frac{h}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

PHẦN II. PHÂN LOẠI BÀI TẬP

Dạng 1. Hình trụ và các yếu tố cơ bản

Câu 1. Cho khối trụ (T) có bán kính đáy $R=1$, thể tích $V=5\pi$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ tương ứng

A. $S=12\pi$.

B. $S=11\pi$.

C. $S=10\pi$.

D. $S=7\pi$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{5\pi}{\pi \cdot 1^2} = 5.$$

Diện tích toàn phần của trụ tương ứng là: $S_p = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot 5 + 2\pi \cdot 1^2 = 12\pi$. **Chọn A.**

Câu 2. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a . Tính độ dài đường cao của hình trụ đó.

- A. a . B. $2a$. C. $3a$. D. $4a$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Diện tích xung quanh của hình trụ: } S_{xq} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi a} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a} = 2a.$$

Vậy độ dài đường cao của hình trụ đó là $h = 2a$. **Chọn B.**

Câu 3. Cho hình trụ (T) có độ dài đường sinh l , bán kính đáy r . Ký hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh của (T) . Công thức nào sau đây là đúng?

- A. $S_{xq} = 3\pi rl$. B. $S_{xq} = 2\pi rl$.
C. $S_{xq} = \pi rl$. D. $S_{xq} = 2\pi r^2 l$.

Câu 4. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

- A. $V = 128\pi$. B. $V = 64\sqrt{2}\pi$.
C. $V = 32\pi$. D. $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Câu 5. Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết hình trụ có bán kính đáy là a và đường cao là $a\sqrt{3}$.

- A. $2\pi a^2$. B. πa^2 .
C. $\pi a^2 \sqrt{3}$. D. $2\pi a^2 \sqrt{3}$.

Câu 6. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R , chiều cao bằng h . Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $R = h$. B. $R = 2h$.
C. $h = 2R$. D. $h = \sqrt{2}R$.

Câu 7. Thể tích khối trụ có bán kính đáy $r = a$ và chiều cao $h = a\sqrt{2}$ bằng

- A. $4\pi a^3 \sqrt{2}$. B. $\pi a^3 \sqrt{2}$.
C. $2\pi a^3$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 8. Cho hình trụ có bán kính đáy là 3 và thể tích bằng 18π . Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

- A. 18π . B. 36π .
C. 12π . D. 6π .

Câu 9. Diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 3, chiều cao là $6\sqrt{3}$ bằng

- A. $9\pi + 36\pi\sqrt{3}$. B. $18\pi + 36\pi\sqrt{3}$.
C. $18\pi + 18\pi\sqrt{3}$. D. $6\pi + 36\pi\sqrt{3}$.

Câu 10. Hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ bằng

A. $2\pi a^2(\sqrt{3}-1)$. B. $\pi a^2(1+\sqrt{3})$.

C. $\pi a^2\sqrt{3}$. D. $2\pi a^2(1+\sqrt{3})$.

Câu 11. Cho khối trụ (T) có bán kính đáy bằng 4 và diện tích xung quanh bằng 16π . Tính thể tích V của khối trụ (T).

A. $V = 32\pi$. B. $V = 64\pi$.

C. $V = 16\pi$. D. $V = 8\pi$.

Câu 12. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy ?

A. $r = 5\sqrt{2\pi}$. B. $r = 5$.

C. $r = 5\sqrt{\pi}$. D. $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$, chiều cao $h = 7\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S = 35\pi(\text{cm}^2)$. B. $S = 70\pi(\text{cm}^2)$.

C. $S = \frac{70}{3}\pi(\text{cm}^2)$. D. $S = \frac{35}{3}\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 14. Cho khối trụ có chu vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πa^2 . B. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

C. $4\pi a^3$. D. $16\pi a^3$.

Câu 15. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

A. 50 m^2 . B. $50\pi\text{ m}^2$.

C. $100\pi\text{ m}^2$. D. 100 m^2 .

Câu 16. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $8\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình trụ bằng:

A. $4a$. B. $8a$.

C. $2a$. D. $6a$.

Câu 17. Tính diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2(\sqrt{3}-1)$. B. $\pi a^2\sqrt{3}$.

C. $\pi a^2(\sqrt{3}+1)$. D. $2\pi a^2(\sqrt{3}+1)$.

Câu 18. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $16\pi a^2$ và độ dài đường sinh bằng $2a$. Tính bán kính r của đường tròn đáy của hình trụ đã cho.

A. $r = 4a$. B. $r = 6a$.

C. $r = 4\pi$. D. $r = 8a$.

Câu 19. Cho một khối trụ có diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π . Tính thể tích của khối trụ biết khoảng cách giữa hai đáy bằng 10.

A. 160π . B. 400π .

C. 40π . D. 64π .

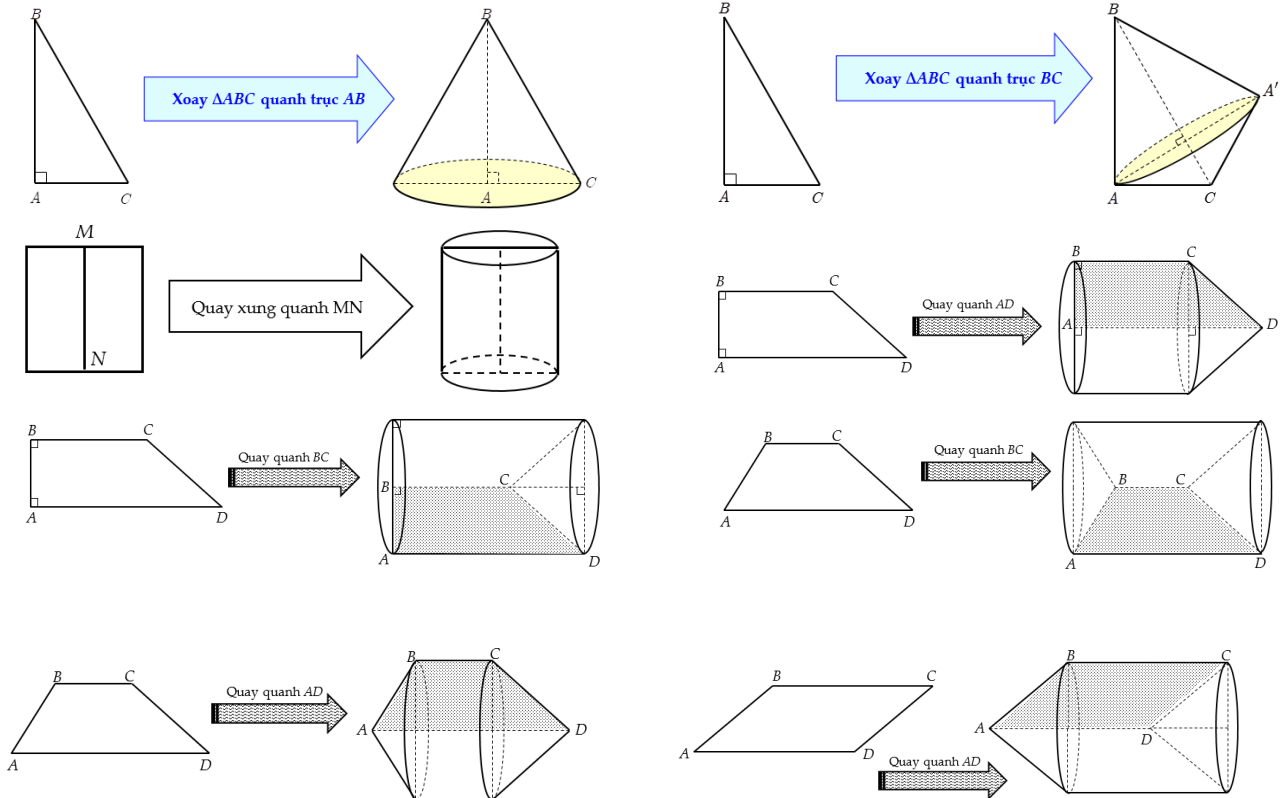
Câu 20. Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h . Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 18 lần. B. 6 lần.

C. 36 lần. D. 12 lần.

Dạng 2. Sự hình thành mặt trụ, hình trụ

Các trường hợp thường gặp



Câu 21. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ khi quay đường gấp khúc $BCDA$ xung quanh trục AB .

A. $S_{xq} = 2\pi a^2$.

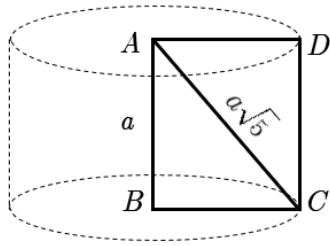
B. $S_{xq} = 4\pi a^2$.

C. $S_{xq} = 2a^2$.

D. $S_{xq} = 4a^2$.

Hướng dẫn giải:

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU



Khi xoay hình chữ nhật $ABCD$ quanh AB , ta thu được hình trụ có chiều cao $h = AB = a$ và bán kính đáy là $r = BC$, với:

$$r = BC = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a.$$

$$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2a \cdot a = 4\pi a^2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 22. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC . Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

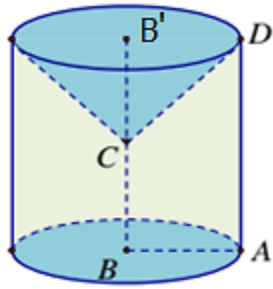
A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

B. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$.

C. $V = \pi a^3$.

D. $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Thể tích khối cần tìm: $V = V_1 - V_2$ với V_1 là thể tích khối trụ có bán kính đáy là $BA = a$ và chiều cao $AD = 2a$; V_2 là thể tích khối nón có bán kính đáy là $B'D = a$ và chiều cao $CB' = a$.

$$\text{Khi đó } V = V_1 - V_2 = \pi \cdot a^2 \cdot 2a - \frac{1}{3} \pi \cdot a^2 \cdot a = \frac{5\pi a^3}{3}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng $ABCD$ quanh trục AD .

A. $4\pi a^3$.

B. $2\pi a^3$.

C. $8\pi a^3$.

D. πa^3 .

Câu 24. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1, AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp} = 4\pi$.

B. $S_{tp} = 6\pi$.

C. $S_{tp} = 2\pi$.

D. $S_{tp} = 10\pi$.

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ quay quanh cạnh AB tạo ra hình trụ có độ dài của đường tròn đáy bằng $4\pi a$. Tính theo a thể tích V của hình trụ này.

A. $V = 2\pi a^3$.

B. $V = 4\pi a^3$.

C. $V = 8\pi a^3$.

D. $V = \frac{8\pi a^3}{3}$.

Câu 26. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=4$, $AD=2$. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB và CD . Cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh trục MN ta được hình trụ tròn xoay có thể tích V bằng bao nhiêu ?

- A. $V=32\pi$. B. $V=16\pi$.
C. $V=8\pi$. D. $V=4\pi$.

Câu 27. Trong không gian, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , có độ dài các cạnh là $AD=a$, $AB=5a$, $CD=2a$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình thang trên quanh trục AB ?

- A. $V=5\pi a^3$. B. $V=6\pi a^3$.
C. $V=3\pi a^3$. D. $V=11\pi a^3$.

Câu 28. Trong không gian, cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D có $AB=3$ và $DC=AD=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay nhận được khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục DC .

- A. $V=2\pi$. B. $V=\frac{7\pi}{3}$.
C. $V=3\pi$. D. $V=\frac{4\pi}{3}$.

Câu 29. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , $AD=CD=a$, $AB=2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh đường thẳng CD . Thể tích khối tròn xoay thu được bằng

- A. $\frac{7\pi a^3}{3}$. B. πa^3 .
C. $\frac{4\pi a^3}{3}$. D. $\frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 30. Cho hình thang vuông $ABCD$ có độ dài hai đáy $AB=2a$, $DC=4a$, đường cao $AD=2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh đường thẳng AB thu được khối tròn xoay (H) . Tính thể tích V của khối (H) .

- A. $V=8\pi a^3$. B. $V=\frac{20\pi a^3}{3}$.
C. $V=16\pi a^3$. D. $V=\frac{40\pi a^3}{3}$.

Câu 31. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $AD=\sqrt{2}$. Quay hình thang quanh đường thẳng AB . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành ?

- A. $V=3\pi$. B. $V=\frac{4\pi}{3}$.
C. $V=\frac{7\pi}{3}$. D. $V=\frac{5\pi}{3}$.

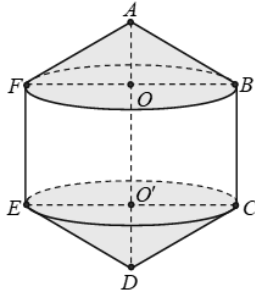
Câu 32. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng 4. Quay lục giác đều đó quanh đường thẳng AD . Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra bằng

A. $V = 32\pi$.

B. $V = \frac{128\pi}{3}$.

C. $V = \frac{111\pi}{2}$.

D. $V = 64\pi$.



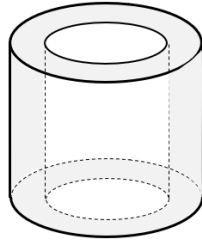
Câu 33. Người ta cần đổ một ống thoát nước hình trụ với chiều cao 200cm, độ dày của thành ống là 15cm, đường kính của ống là 80cm (như hình vẽ). Tính lượng bê tông cần phải đổ ống thoát nước đó ?

A. $0,195\pi \text{ m}^3$.

B. $0,18\pi \text{ m}^3$.

C. $0,14\pi \text{ m}^3$.

D. $\pi \text{ m}^3$.



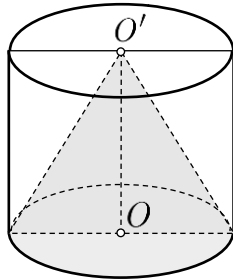
Câu 34. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy lần lượt là (O) , (O') . Biết thể tích khối nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn (O) là a^3 . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $2a^3$.

B. $4a^3$.

C. $\frac{10a^3}{3}$.

D. $3a^3$.



Dạng 3. Thiết diện qua trục của hình trụ

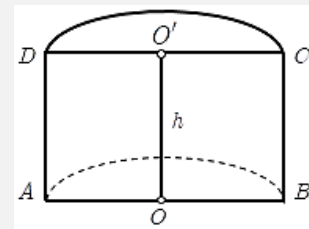
Câu 35. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AB = 4a$, $BC = 3a$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. $12\pi a^3$.

B. $16\pi a^3$.

C. $4\pi a^3$.

D. $8\pi a^3$.



Hướng dẫn giải:

Do thiết diện qua trục là hình chữ nhật $ABCD$ nên: $r = \frac{AB}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$. Mà $h = BC = 3a$.

Thể tích trụ: $V = \pi r^2 h = \pi (2a)^2 \cdot 3a = 12\pi a^3$. **Chọn A.**

Câu 36. Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của khối trụ.

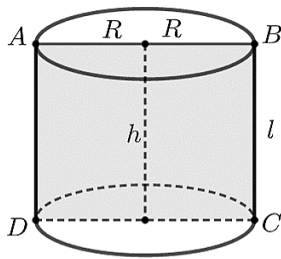
A. $S_{tp} = \frac{13a^2\pi}{6}$.

B. $S_{tp} = a^2\pi\sqrt{3}$.

C. $S_{tp} = \frac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}$.

D. $S_{tp} = \frac{27a^2\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Thiết diện qua trục hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $3a$ nên ta có độ dài đường sinh $l = 3a$ và bán kính đường tròn đáy là $R = \frac{3a}{2}$.

Suy ra: $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot \frac{3a}{2} \cdot 3a + 2\pi \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{27a^2\pi}{2}$.

Câu 37. Cắt một hình trụ bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. $2\pi a^2$.

B. $8\pi a^2$.

C. $4\pi a^2$.

D. $16\pi a^2$.

Câu 38. Một hình trụ có bán kính đáy a , có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình trụ.

A. πa^2 .

B. $2\pi a^2$.

C. $3\pi a^2$.

D. $4\pi a^2$.

Câu 39. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông, diện tích mỗi mặt đáy bằng $S = 9\pi (\text{cm}^2)$. Tính diện tích xung quanh hình trụ đó.

A. $S_{xq} = 36\pi (\text{cm}^2)$.

B. $S_{xq} = 18\pi (\text{cm}^2)$.

C. $S_{xq} = 72\pi (\text{cm}^2)$.

D. $S_{xq} = 9\pi (\text{cm}^2)$.

Câu 40. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AB = 4a$, $AC = 5a$. Tính thể tích của khối trụ:

A. $V = 12\pi a^3$.

B. $V = 16\pi a^3$.

C. $V = 4\pi a^3$.

D. $V = 8\pi a^3$.

Câu 41. Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông có cạnh là $2a$. Thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là:

- A. $2\pi a^3$. B. $\frac{2\pi a^3}{3}$.
C. $8\pi a^3$. D. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

Câu 42. Cho một khối trụ (S) có bán kính đáy bằng a . Biết thiết diện của hình trụ qua trục là hình vuông có chu vi bằng 8. Thể tích của khối trụ sẽ bằng

- A. 8π . B. 4π .
C. 2π . D. 16π .

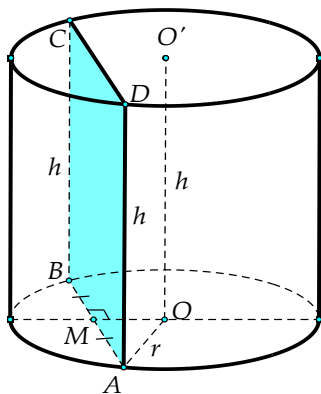
Câu 43. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng 30cm^2 và chu vi bằng 26 cm. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

- A. $23\pi(\text{cm}^2)$. B. $\frac{23\pi}{2}(\text{cm}^2)$.
C. $\frac{69\pi}{2}(\text{cm}^2)$. D. $69\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 44. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a , mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $8a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

- A. $4\pi a^2$. B. $8\pi a^2$.
C. $16\pi a^2$. D. $2\pi a^2$.

Dạng 4. Thiết diện song song với trục hình trụ



- $ABCD$ là hình chữ nhật (hoặc hình vuông):
- $d(O, (P)) = d(O, (ABCD)) = OM$ với M trung điểm AB .
- $h = OO' = AD = BC$.
- Trong tam giác OMA vuông tại M có:
$$OA^2 = OM^2 + MA^2 = d^2(O, (P)) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$
- Diện tích của thiết diện: $S_{ABCD} = AB \cdot CD = AB \cdot h$.

Câu 45. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

- A. $216\pi a^3$. B. $150\pi a^3$. C. $54\pi a^3$. D. $108\pi a^3$.

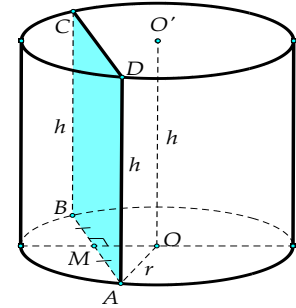
Hướng dẫn giải:

Theo đề có $h = OO' = AB = 6a$ và $OM = 3a$.

Trong tam giác OAM vuông tại M có:

$$r = \sqrt{MA^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + OM^2} = 3a\sqrt{2}.$$

Suy ra $V = \pi r^2 h = \pi (3a\sqrt{2})^2 \cdot 6a = 108\pi a^3$. **Chọn D.**



Câu 46. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a . Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ.

- A. $3\pi a^3$. B. $\pi a^3 \sqrt{3}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$. D. πa^3 .

Hướng dẫn giải:

Giả sử hình vuông $ABCD$ là thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) .

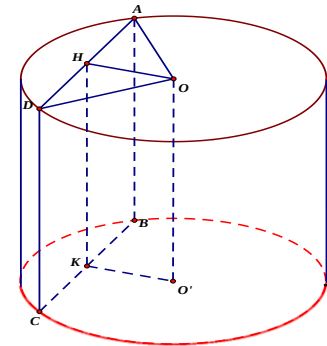
Gọi H, K lần lượt là trung điểm AD, BC .

Ta có $OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow d(O; (P)) = OH \Rightarrow OH = \frac{a}{2}$.

Do đó: $AD = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra: $OO' = AB = AD = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h = \pi a^2 a\sqrt{3} = \pi a^3 \sqrt{3}$. **Chọn B.**



Câu 47. Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng (P) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng (P) bằng 3. Thể tích khối trụ đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}\pi$. B. $\frac{52\pi}{3}$.
C. 52π . D. 13π .

Câu 48. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5cm và khoảng cách giữa hai đáy là 7cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

- A. 55cm^2 . B. 56cm^2 .
C. 53cm^2 . D. 46cm^2 .

Câu 49. Khi cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích của khối trụ bằng

- A. $7\sqrt{7}\pi a^3$. B. $\frac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$.
C. $3\pi a^3$. D. $8\pi a^3$.

Câu 50. Cho hình trụ có đường cao $h = 5\text{cm}$, bán kính đáy $r = 3\text{cm}$. Xét mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ, cách trục 2cm. Diện tích thiết diện của hình trụ với (P) bằng

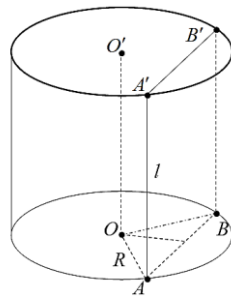
- A. $5\sqrt{5}\text{cm}^2$. B. $6\sqrt{5}\text{cm}^2$.
C. $3\sqrt{5}\text{cm}^2$. D. $10\sqrt{5}\text{cm}^2$.

Câu 51. Một khối trụ có bán kính đáy $r = 5$, khoảng cách giữa hai đáy $h = 4$. Mặt phẳng (P) song song với trục cắt khối trụ theo một thiết diện là hình vuông. Khoảng cách từ trục đến (P) bằng

- A. 3. B. $\sqrt{41}$.
C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{21}$.

Câu 52. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π , thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120° . Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

- A. $3\sqrt{2}$.
B. $\sqrt{3}$.
C. $2\sqrt{3}$.
D. $2\sqrt{2}$.



Câu 53. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) .

- A. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 54. Một khối trụ có bán kính đáy $r = 2a$. O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\frac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A, B . Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a .

B. $6a$.

C. $3a$.

D. $2a$.

Dạng 5. Thiết diện nghiêng so với trục hình trụ

Câu 55. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

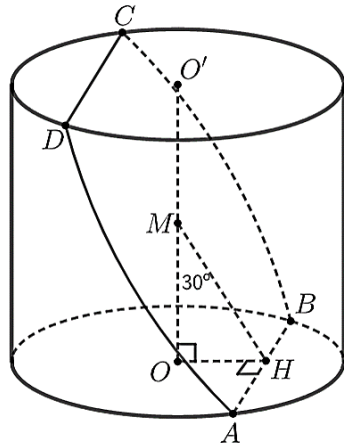
A. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$.

C. $\frac{2R}{3}$.

D. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của OO' và A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) với đường tròn (O); H là hình chiếu của O trên AB .

Khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $OMH = 30^\circ$.

Xét $\triangle MHO$ vuông tại O : $OH = OM \tan 30^\circ = R \tan 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle AHO$ vuông tại H : $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **Chọn A.**

Câu 56. Cho hình trụ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ lấy hai điểm A, B ; trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ lấy hai điểm C, D sao cho $ABCD$ là hình vuông và $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ góc 45° . Thể tích khối trụ đã cho bằng

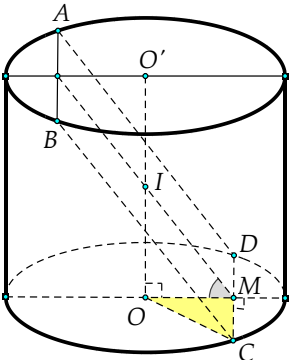
A. $\sqrt{3}\pi a^3$.

B. $3\sqrt{2}\pi a^3$.

C. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.

D. $3\sqrt{2}\pi a^3$.

Hướng dẫn giải:



Gọi O, O' là tâm của các đường tròn đáy hình trụ và I là trung điểm OO' , M là trung điểm CD .

Tam giác IOM vuông cân tại O (tam giác vuông có góc 45°) nên

$$OM = OI = \frac{OO'}{2} = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $MC = IM = \sqrt{OM^2 + OI^2} = a$.

$$\text{Do đó: } r = OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2 h = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 57. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc 45° . Khi đó thể tích khối trụ là

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{8}$. B. $\frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{8}$.
C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{16}$. D. $\frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{16}$.

Câu 58. Cho hình trụ (T) có hai đường tròn đáy với tâm lần lượt là O và O' . Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O') và C, D cùng thuộc (O) sao cho $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 60° . Thể tích của khối trụ bằng

- A. $2\pi a^3 \sqrt{3}$. B. $\pi a^3 \sqrt{3}/9$.
C. $\pi a^3 \sqrt{3}/3$. D. $\pi a^3 \sqrt{3}$.

Câu 59. Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Một hình vuông $ABCD$ có đáy AB, CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy và $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

- A. $\frac{5a^2}{4}$. B. $5a^2$.
C. $\frac{5a^2 \sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{5a^2}{2}$.

Câu 60. Cho hình trụ (T) có hai đường tròn đáy với tâm lần lượt là O và O' . Xét hình vuông $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') và $AB = a$, đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 45° . Thể tích của khối trụ bằng

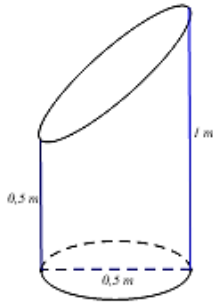
- A. $\frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{16}$. B. $3\pi a^3 \sqrt{2}$.
C. $2\pi a^3 \sqrt{2}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{16}$.

Câu 61. Cho hình trụ (T) có bán kính và chiều cao đều bằng $2\sqrt{2}$. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy, cạnh AD và BC không phải đường sinh của hình trụ (T) . Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng

- A. 20. B. $12\sqrt{2}$.
C. $\frac{40\sqrt{2}}{3}$. D. $10\sqrt{2}$.

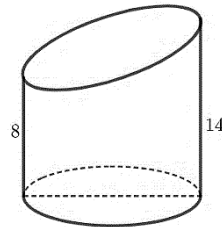
Câu 62. Một khối gỗ hình trụ có đường kính 0,5m và chiều cao 1 (m). Người ta đã cắt khối gỗ, phần còn lại như hình vẽ bên có thể tích là V . Tính V .

- A. $\frac{3\pi}{16} (\text{m}^3)$.
B. $\frac{5\pi}{64} (\text{m}^3)$.
C. $\frac{3\pi}{64} (\text{m}^3)$.
D. $\frac{\pi}{16} (\text{m}^3)$.



Câu 63. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ. Biết rằng thiết diện là một elip có độ dài trục lớn là 10, khoảng cách gần nhất từ một điểm thuộc thiết diện đến mặt đáy (chứa AB) bằng 8, khoảng cách xa nhất từ một điểm thuộc thiết diện đến mặt đáy (chứa AB) bằng 14. Tính thể tích của (H) .

- A. $V_{(H)} = 275\pi$.
B. $V_{(H)} = 176\pi$.
C. $V_{(H)} = 192\pi$.
D. $V_{(H)} = 704\pi$.



Câu 64. Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O' , chiều cao $h = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30° , cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh

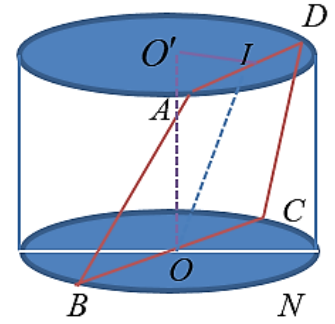
của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

B. $\sqrt{3}\pi a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$.

D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Xét hình thang $ABCD$ thỏa mãn đề bài (BC là đáy lớn, AD là đáy nhỏ) và R là bán kính đáy của hình trụ.

Ta có: $\begin{cases} BC = 2R \\ BC = 2AD \end{cases} \Rightarrow AD = R$. Kẻ $O'I \perp AD$ tại $I \Rightarrow AD \perp (OO'I) \Rightarrow (ABCD) \perp (OO'I)$.

Suy ra góc giữa OO' và $(ABCD)$ bằng $O'OI$. Theo giả thiết $O'OI = 30^\circ$.

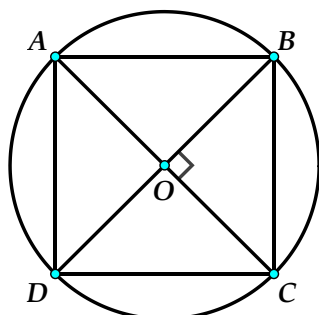
$$\cos O'OI = \frac{OO'}{OI} \Leftrightarrow OI = \frac{OO'}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a.$$

$$\text{Diện tích hình thang } ABCD: S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot IO}{2} \Leftrightarrow 3a^2 = \frac{(R + 2R) \cdot 2a}{2} \Leftrightarrow R = a.$$

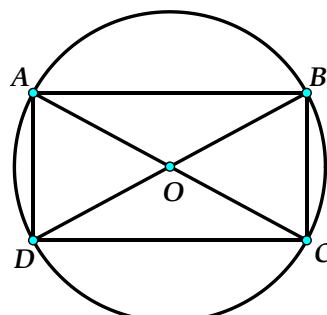
$$\text{Thể tích của khối trụ là: } V = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \pi a^3 \sqrt{3}.$$

Dạng 6. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp hình đa diện, hình nón

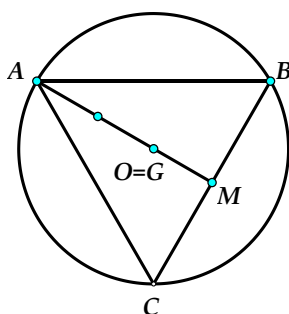
Tâm O và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp một số đa giác cần nhớ:



Hình vuông $R = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$.

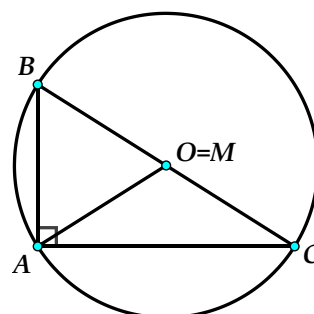


Hình chữ nhật $R = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$.



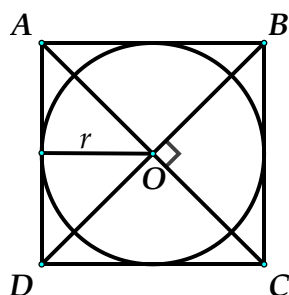
Tam giác đều

$$R = AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

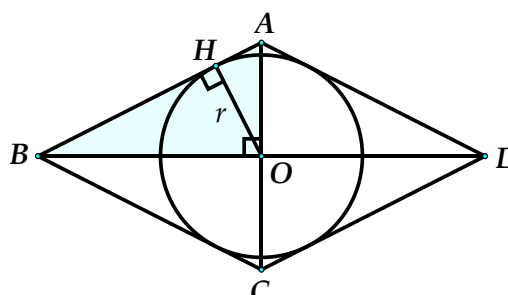


Tam giác vuông

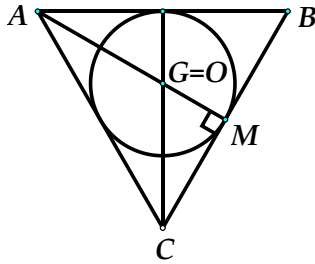
$$R = AO = \frac{BC}{2}.$$



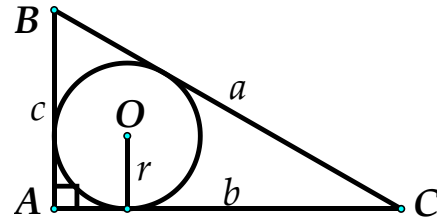
Hình vuông: $r = \frac{AB}{2}$.



Hình thoi $r = OH = \frac{OA \cdot OB}{AB}$.



Tam giác đều $r = MG = \frac{1}{3} AM = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{6}$.



Tam giác vuông $r = \frac{b+c-a}{2}$.

Câu 65. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

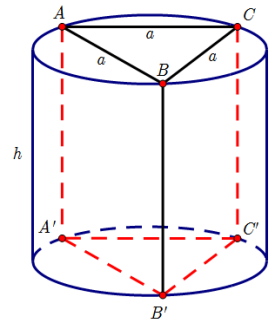
- A. $V = 3\pi a^2 h$. B. $V = \pi a^2 h$. C. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. D. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác đáy của lăng trụ, bán kính đường tròn đáy là $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; chiều cao hình trụ bằng với chiều cao lăng trụ (và bằng h).

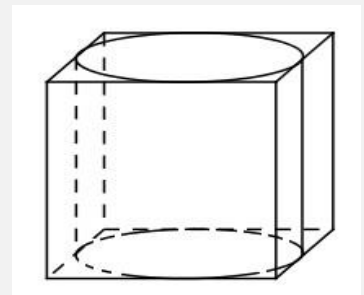
Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = h.S = h \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2 h}{3}$.

Chọn D.



Câu 66. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh bằng 1. Tính thể tích của khối trụ đó.

- A. $\frac{\pi}{2}$.
B. $\frac{\pi}{4}$.
C. π .
D. $\frac{\pi}{3}$.



Hướng dẫn giải:

Đường tròn đáy hình trụ là đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh bằng 1 nên có bán kính $R = \frac{1}{2}$; chiều cao hình trụ bằng với cạnh của hình lập phương và bằng 1.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{4}$. **Chọn B.**

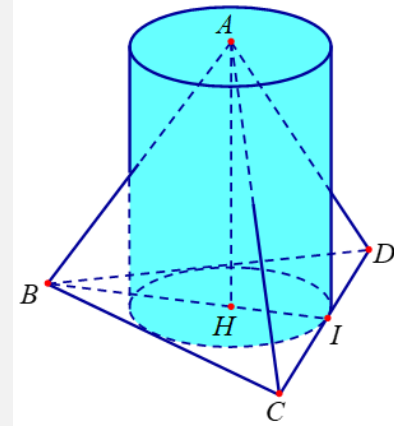
Câu 67. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$.

C. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.

D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.



Hướng dẫn giải:

Đường tròn đáy hình trụ nội tiếp tam giác đều BCD nên có bán kính $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chiều cao hình trụ là $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi S là diện tích xung quanh hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Diện tích S bằng

A. πa^2 . **B.** $\pi\sqrt{2}a^2$.

C. $\pi\sqrt{3}a^2$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$.

Câu 69. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .

A. $\frac{\pi a^3}{4}$. **B.** πa^3 .

C. $2\pi a^3$. **D.** $\frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 70. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$ và $AA' = 4a$. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $\frac{144\pi a^3}{13}$. B. $13\pi a^3$.
C. $24\pi a^3$. D. $13a^3$.

Câu 71. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2a$, $AA' = 3a\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ có hai đáy lần lượt ngoại tiếp hai đáy của hình hộp chữ nhật đã cho.

- A. $7\pi a^2$. B. $16\pi a^2$.
C. $12\pi a^2$. D. $20\pi a^2$.

Câu 72. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 8$, $CD = 6$, $AC' = 12$. Diện tích toàn phần của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ bằng

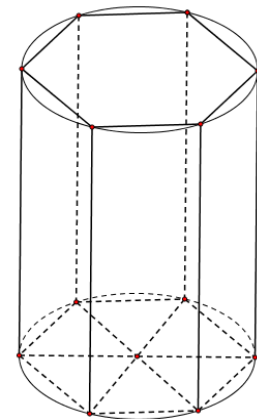
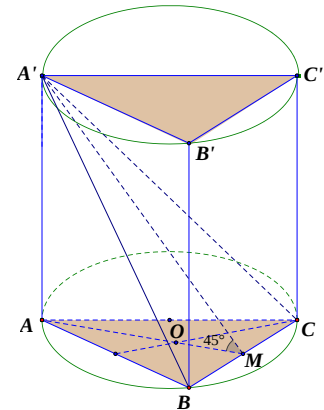
- A. 576π . B. $10(2\sqrt{11} + 5)\pi$.
C. 26π . D. $5(4\sqrt{11} + 4)\pi$.

Câu 73. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 45° , diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.
B. $2\pi a^2$.
C. $4\pi a^2$.
D. $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 74. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

- A. $V = 27\sqrt{3}a^3$.
B. $V = 81\sqrt{3}a^3$.
C. $V = 24\sqrt{3}a^3$.
D. $V = 36\sqrt{3}a^3$.



Câu 75. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. πa^3 . B. $2\pi a^3$.
C. $4\pi a^3$. D. $3\pi a^3$.

Câu 76. Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $3a$ và có hai đáy là hai tam giác nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ (T) . Tính thể tích V của khối trụ (T) .

- A. $V = \pi a^3$. B. $V = 3\pi a^3$.
C. $V = 6\pi a^3$. D. $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 77. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a\sqrt{2}$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{6}$. Diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

- A. $4\pi a^2\sqrt{6}$. B. $4\pi a^2$.
C. $2\pi a^2\sqrt{6}$. D. $\pi a^2\sqrt{6}$.

Câu 78. Cho hình lập phương có cạnh bằng 40 cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S = S_1 + S_2$ (cm²).

- A. $S = 4(2400 + \pi)$. B. $S = 2400(4 + \pi)$.
C. $S = 2400(4 + 3\pi)$. D. $S = 4(2400 + 3\pi)$.

Câu 79. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Thể tích của hình trụ có hai đáy nội tiếp hình lăng trụ bằng

- A. $2\pi a^3$. B. $\frac{\pi a^3}{6}$.
C. πa^3 . D. $\frac{\pi a^3}{12}$.

Câu 80. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $4a$. Thể tích của hình trụ có hai đáy nội tiếp hình lăng trụ bằng

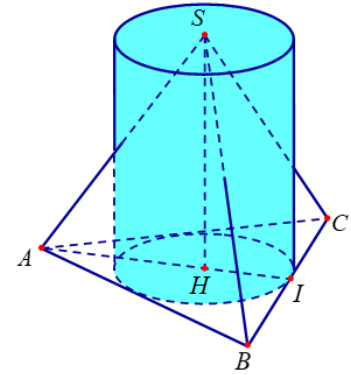
- A. $\frac{\pi a^3}{18}$. B. $2\pi a^3$.
C. πa^3 . D. $\frac{\pi a^3}{12}$.

Câu 81. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 6a$, $AC = 8a$ và $AA' = 12a$. Thể tích của hình trụ có hai đáy nội tiếp hình lăng trụ bằng

- A. $\frac{\pi a^3}{12}$. B. $\frac{\pi a^3}{6}$.
C. $48\pi a^3$. D. $\frac{48\pi a^3}{5}$.

Câu 82. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và chiều cao bằng chiều cao hình chóp $S.ABC$ đỉnh S .

- A. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.
B. $S_{xq} = 3\pi\sqrt{2}$.
C. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.
D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.



Câu 83. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao hình chóp $S.ABCD$ đỉnh S .

- A. $S_{xq} = 16\sqrt{2}\pi$. B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$.
C. $S_{xq} = 16\sqrt{3}\pi$. D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Câu 84. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao hình chóp $S.ABCD$ đỉnh S .

- A. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$.
C. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Câu 85. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và chiều cao bằng chiều cao hình chóp $S.ABC$ đỉnh S .

- A. $S_{xq} = 8\pi$. B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$.

C. $S_{xq} = 16\pi$.

D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Dạng 7. Hình đa diện có tất cả cạnh chứa trong hình trụ

Câu 86. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{3}$ (cm) với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O . Gọi M là điểm thuộc cung AB của đường tròn đáy sao cho $ABM = 60^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là:

A. $V = 3(\text{cm}^3)$.

B. $V = 4(\text{cm}^3)$.

C. $V = 6(\text{cm}^3)$.

D. $V = 7(\text{cm}^3)$.

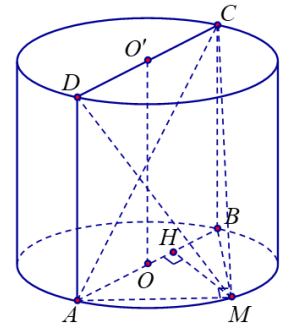
Hướng dẫn giải:

Ta có: $\triangle MAB$ vuông tại M có $B = 60^\circ$ nên $MB = \sqrt{3}$; $MA = 3$.

Gọi H là hình chiếu của M trên AB , suy ra $MH \perp (ACD)$ và

$$MH = \frac{MB \cdot MA}{AB} = \frac{3}{2}. \text{ Ta có: } S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

$$\text{Vậy } V_{M.ACD} = \frac{1}{3} MH \cdot S_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 = 3(\text{cm}^3). \text{ Chọn A.}$$



Câu 87. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao là 50 cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A. $d = 50$ cm.

B. $d = 50\sqrt{3}$ cm.

C. $d = 25$ cm.

D. $d = 25\sqrt{3}$ cm.

Câu 88. Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục d của hình trụ bằng 30° . Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ:

A. $d(AB, d) = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

B. $d(AB, d) = R$.

C. $d(AB, d) = R\sqrt{3}$.

D. $d(AB, d) = \frac{R}{2}$.

Câu 89. Một khối trụ có bán kính đáy $r = 2a$. O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\frac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A, B . Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a .

B. $6a$.

C. $3a$.

D. $2a$.

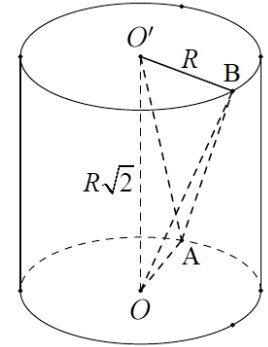
Câu 90. Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O) , (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A , B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỷ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\frac{2}{3\pi}$.

B. $\frac{1}{3\pi}$.

C. $\frac{1}{6\pi}$.

D. $\frac{1}{4\pi}$.



Câu 91. Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn (O) , (O') bán kính bằng a , chiều cao hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Các điểm A , B tương ứng nằm trên hai đường tròn (O) , (O') sao cho $AB = a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABOO'$ theo a .

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{2a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Dạng 8. Max-min và bài toán thực tế

Câu 92. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $16\pi \text{ m}^3$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. 0,8 m.

B. 1,2 m.

C. 2 m.

D. 2,4 m.

Hướng dẫn giải:

Gọi r , h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ ($r, h > 0$).

Công thức thể tích khối trụ: $V = h.S_{\text{đ}} = h.\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{r^2}$.

Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đ}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{16}{r^2} + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\frac{16}{r} + r^2 \right)$.

Ta sẽ khảo sát hàm $S_{tp} = 2\pi \left(\frac{16}{r} + r^2 \right)$ với $r > 0$.

$$S'_{tp} = 2\pi \left(-\frac{16}{r^2} + 2r \right) = \frac{2\pi(2r^3 - 16)}{r^2}; S'_{tp} = 0 \Leftrightarrow r^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \text{ (thỏa điều kiện } r > 0 \text{)}.$$

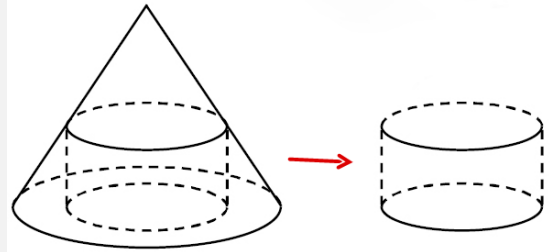
Bảng biến thiên:

r		0	2	$+\infty$	
S'_{tp}			-	0	+
S_{tp}				$\rightarrow 24\pi$	

Để việc chế tạo ra cái bồn dầu hình trụ sao cho ít tốn kém nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của hình trụ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $r = 2m$. **Chọn C.**

Câu 93. Một khúc gỗ có dạng khối nón có bán kính đáy $r = 30cm$, chiều cao $h = 120cm$. Anh thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng khối trụ như hình vẽ. Gọi $V_{\max}$ là thể tích lớn nhất của khúc gỗ có thể chế tác được. Tính $V_{\max}$.

- A. $V_{\max} = 0,16\pi \text{ m}^3$. B. $V_{\max} = 0,024\pi \text{ m}^3$.
C. $V_{\max} = 0,36\pi \text{ m}^3$. D. $V_{\max} = 0,016\pi \text{ m}^3$.



Hướng dẫn giải:

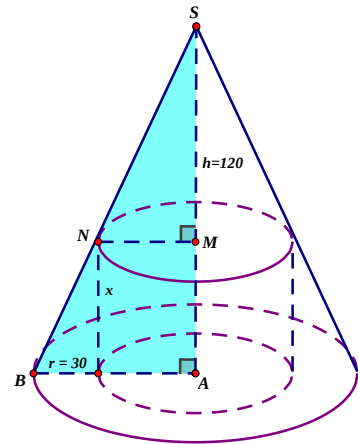
Gọi chiều cao hình trụ được tạo thành là $AM = x \text{ (cm)}$ ($0 < x < 120$) và mô hình được cho như hình vẽ.

Do hai tam giác SMN và SAB đồng dạng (có S chung, $SMN = SAB = 90^\circ$), ta có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{MN}{30} = \frac{120-x}{120} \Rightarrow MN = 30 - \frac{x}{4}.$$

Vậy khối trụ mới được tạo thành có bán kính $MN = 30 - \frac{x}{4}$, đường cao $AM = x$ nên có thể tích:

$$V = \pi \left(30 - \frac{x}{4} \right)^2 x = \pi \cdot \left(30 - \frac{x}{4} \right) \cdot \left(30 - \frac{x}{4} \right) \cdot \frac{x}{2}. \text{ Chọn D.}$$



Cách giải 1: Sử dụng BĐT Cô-si.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\left(30 - \frac{x}{4}\right) \cdot \left(30 - \frac{x}{4}\right) \cdot \frac{x}{2} \leq \left(\frac{30 - \frac{x}{4} + 30 - \frac{x}{4} + \frac{x}{2}}{3}\right)^3 = 20^3$.

Do đó: $V \leq 2\pi \cdot 20^3 \Rightarrow V_{\max} = 16\,000\pi \text{ cm}^3 = 0,016\pi \text{ m}^3$.

Cách giải 2: Khảo sát hàm số.

Xét hàm số $V(x) = \pi \left(30 - \frac{x}{4}\right)^2 x = \pi \left(900x - 15x^2 + \frac{1}{16}x^3\right)$ với $0 < x < 120$.

Ta có $V'(x) = \pi \left(900 - 30x + \frac{3x^2}{16}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120 & (\text{loại}) \\ x = 40 & (\text{nhaận}) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	40	120
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	1	$16\,000\pi$	5

Để thấy $V_{\max} = 16\,000\pi \text{ cm}^3 = 0,016\pi \text{ m}^3$.

Câu 94. Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.

- A. 108π .
B. 6480π .
C. 502π .
D. 504π .



Câu 95. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN , PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60 \text{ cm}$ và thể tích khối tứ diện $MNPQ = 30 \text{ dm}^3$. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ.

- A. $101,3\text{dm}^3$.
B. $111,4\text{dm}^3$.
C. $121,3\text{dm}^3$.
D. $141,3\text{dm}^3$.

Câu 96. Một nhà máy cần sản xuất các hộp hình trụ kín cả hai đầu có thể tích V cho trước. Mỗi quan hệ giữa bán kính đáy R và chiều cao h của hình trụ để diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất là

- A. $h = 3R$. B. $R = h$.
C. $h = 2R$. D. $R = 2h$.

Câu 97. Một đơn vị sản xuất hộp đựng thuốc dung tích 2dm^3 dạng hình trụ có đáy là hình tròn. Nhà sản xuất chọn bán kính đáy R của hình hộp gần với số nào để ít tốn vật liệu nhất ?

- A. $R \approx 1,37\text{dm}$. B. $R \approx 1\text{dm}$.
C. $R \approx 2\text{dm}$. D. $R \approx 0,68\text{dm}$.

Câu 98. Khi thiết kế vỏ lon sữa hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí làm vỏ lon là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V mà diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất thì bán kính R của đường tròn đáy khối trụ bằng giá trị nào sau đây ?

- A. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. B. $R = \sqrt{V}$.
C. $R = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$. D. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 99. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π . Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

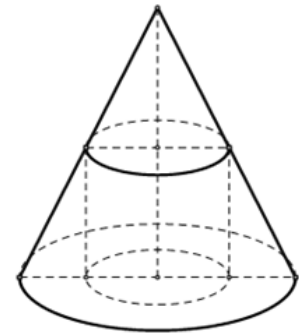
- A. 0,8 m. B. 1,2 m.
C. 2 m. D. 2,4 m.

Câu 100. Để chứa $7(\text{m}^3)$ nước ngọt người ta xây một bồn hình trụ có nắp. Hỏi bán kính r của đáy hình trụ nhận giá trị nào sau đây để tiết kiệm vật liệu nhất.

- A. $r = \sqrt[3]{2\pi}$. B. $r = \sqrt[3]{\frac{7}{2\pi}}$.
C. $r = \sqrt[3]{\frac{8}{3\pi}}$. D. $r = \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}}$.

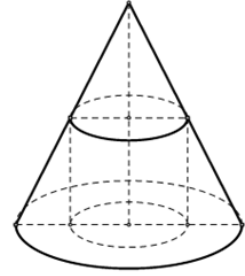
Câu 101. Một khúc gỗ có dạng khối nón có bán kính đáy $r = 50\text{cm}$ chiều cao $h = 150\text{cm}$. Anh thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ dạng khối trụ có thể chế tác được. Tìm diện tích xung quanh của khối trụ có thể tích lớn nhất đó ?

- A. $\frac{\pi}{2} \text{ m}^2$. B. $\pi \text{ m}^2$.
C. $\frac{\pi}{3} \text{ m}^2$. D. $\frac{\pi}{4} \text{ m}^2$.



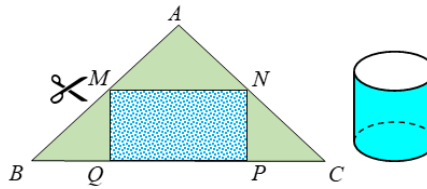
Câu 102. Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r = 20\text{cm}$ chiều cao $h = 60\text{cm}$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N). Thể tích của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất bằng

- A. $3000\pi\text{cm}^3$.
 B. $\frac{32000}{9}\pi\text{cm}^3$.
 C. $3600\pi\text{cm}^3$.
 D. $4000\pi\text{cm}^3$.



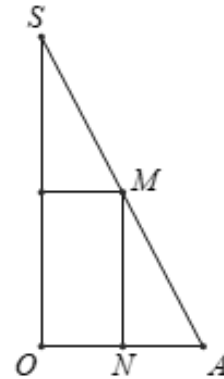
Câu 103. Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền BC bằng a . Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?

- A. $\frac{a^2}{2}$.
 B. $\frac{a^2}{4}$.
 C. $\frac{a^2}{12}$.
 D. $\frac{a^2}{8}$.



Câu 104. Cho tam giác SOA vuông tại O có $MN \parallel SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA như hình vẽ bên dưới. Đặt $SO = h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R = OA$. Tìm độ dài của MN theo h để thể tích khối trụ là lớn nhất.

- A. $MN = \frac{h}{2}$.
 B. $MN = \frac{h}{3}$.
 C. $MN = \frac{h}{4}$.
 D. $MN = \frac{h}{6}$.



Câu 105. Một cơ sở sản xuất đồ gia dụng được đặt hàng làm các chiếc hộp kín hình trụ bằng nhôm để đựng rượu có thể tích là $V = 28\pi a^3$ ($a > 0$). Với mục đích tiết kiệm sản xuất và mang lại lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sẽ sản xuất những chiếc hộp hình trụ có bán kính đáy R sao cho diện tích nhôm cần dùng là ít nhất. Tìm R .

- A. $R = a\sqrt[3]{7}$.
 B. $R = 2a\sqrt[3]{7}$.
 C. $R = 2a\sqrt[3]{14}$.
 D. $R = a\sqrt[3]{14}$.

Hướng dẫn giải:

Nhận xét: Diện tích nhôm cần dùng để sản xuất chính là diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ.

Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h = 28\pi a^3 \Rightarrow h = \frac{28a^3}{R^2}$ (với h là chiều cao chiếc hộp hình trụ).

Ta có: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \frac{28a^3}{R} + 2\pi R^2$; $S'_{tp} = 2\pi \left(-\frac{28a^3}{R^2} + 2R \right) = 0 \Rightarrow R = a\sqrt[3]{14}$.

Bảng biến thiên:

R	0	$a\sqrt[3]{14}$	$+\infty$
S'		0	
S		$S_{\min}$	

Vậy khi diện tích nhôm được dùng ít nhất thì bán kính đáy của hộp hình trụ là $R = a\sqrt[3]{14}$.

Câu 106. Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao 18cm và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính 1cm. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}$ cm, giá thành 540 đồng/cm³. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng/cm³. Tính gần đúng giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm 15,58% giá thành sản phẩm.

- A. 10000 đồng. B. 8000 đồng.
C. 5000 đồng. D. 3000 đồng.

Hướng dẫn giải

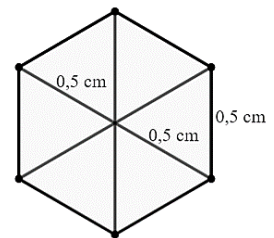
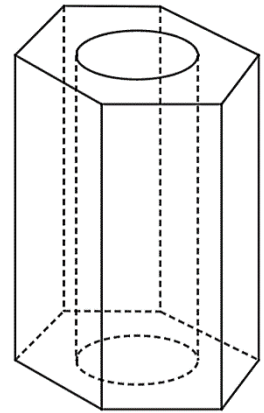
Chọn A.

Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều và bán kính của lõi than chì. Ta có $2R = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$ cm và $r = \frac{1}{8}$ cm.

Suy ra diện tích của lục giác đều là $S = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi V là thể tích của khối lăng trụ lục giác đều. V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của khối than chì và bột gỗ dùng để làm ra một cây bút chì.

Ta có $V = S \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 18 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm³; $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{1}{64} \cdot 18 = \frac{9\pi}{32}$ cm³ $\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32}$ cm³.

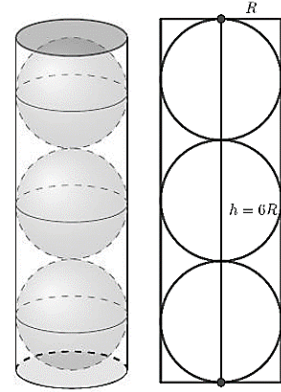


Do đó, giá nguyên vật liệu dùng để làm một cây bút chì là $540V_1 + 100V_2$.

$$\text{Giá bán một cây bút chì là: } (540V_1 + 100V_2) \cdot \frac{100}{15,58} = \left[540 \cdot \frac{9\pi}{32} + 100 \left(\frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32} \right) \right] \cdot \frac{100}{15,58} \approx 10000.$$

Câu 107. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

- A. 50.
- B. 66.
- C. 30.
- D. 33.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình đường tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.

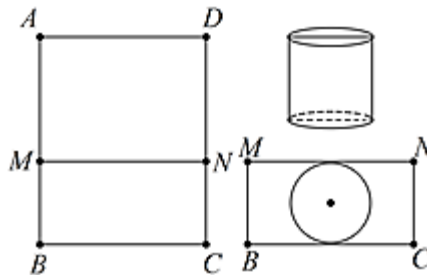
Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp và $h = 6R$.

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$. Thể tích của hộp là $V_0 = \pi R^2 h = 6\pi R^3$;

Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2 = V_0 - V_1 = 2\pi R^3$.

Tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $a = \frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33 = 33\%$.

Câu 108. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1m^2 và cạnh $BC = x$ (m) để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành hai hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM ; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên. Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất.



A. 1,37 m.

B. 1,02 m.

C. 0,97 m.

D. 1 m.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } AB \cdot BC = 1 \Rightarrow AB = \frac{1}{BC} = \frac{1}{x} \text{ (m)}.$$

Gọi R là bán kính đáy hình trụ gò được, chu vi hình tròn đáy là $BC = x$ (m).

$$\text{Do đó } 2\pi R = x \Leftrightarrow R = \frac{x}{2\pi} \text{ (m)}; BM = 2R = \frac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \frac{1}{x} - \frac{x}{\pi} \text{ (m)}.$$

$$\text{Thể tích khối trụ inox gò được là } V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi^2} x (\pi - x^2).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x(\pi - x^2) = \pi x - x^3, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \pi - 3x^2; f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

$$\text{Ta tìm được } \max_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}. \text{ Khi đó đó: } x = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 1,02 \text{ (m)}.$$

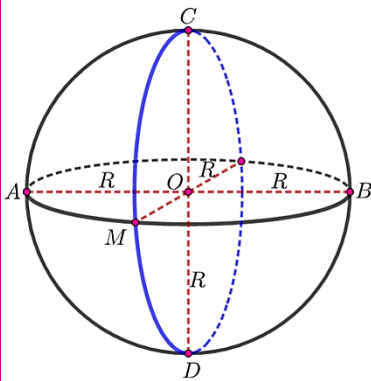
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2: MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ

1A	2B	3B	4B	5D	6A	7B	8C	9B	10D
11A	12D	13B	14C	15D	16A	17D	18A	19A	20A
21B	22B	23A	24A	25C	26C	27C	28B	29D	30D
31C	32D	33A	34D	35A	36D	37C	38D	39A	40A
41A	42C	43C	44B	45D	46B	47C	48B	49D	50D
51D	52C	53B	54C	55A	56C	57D	58D	59D	60A
61A	62C	63B	64B	65D	66B	67A	68B	69D	70B
71B	72B	73C	74B	75C	76A	77C	78B	79B	80C
81C	82B	83B	84D	85C	86A	87C	88A	89C	90C
91A	92C	93D	94D	95B	96C	97D	98D	99C	100B
101C	102A	103D	104B	105D	106A	107D	108B		

BÀI 3. MẶT CẦU VÀ KHỐI CẦU

LÍ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP TOÁN

✪ Mặt cầu và các công thức liên quan ✪



✪ **Mặt cầu:** Tập hợp tất cả điểm M trong không gian cách điểm O cho trước một khoảng R không đổi ($R > 0$) được gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R .

✪ **Ký hiệu:** $S(O; R)$ hay mặt cầu (S) .

✪ **Từ hình vẽ,** ta có mặt cầu $S(O; R)$ với các đường kính $AB = CD = 2R$.

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Ví dụ minh họa

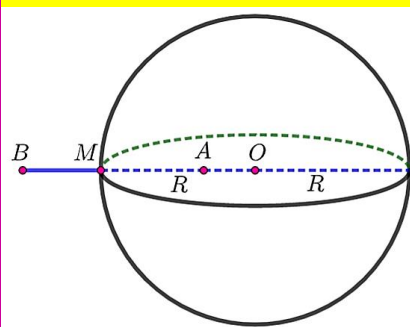
Ví dụ 1. Cho mặt cầu (S) có đường kính là $4a$. Tìm diện tích của mặt cầu (S) và thể tích khối cầu tương ứng.

✪ **Lời giải:** Bán kính của (S) : $R = \frac{4a}{2} = 2a$.

Diện tích mặt cầu (S) là:
 $S_{(S)} = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

Thể tích khối cầu (S) :
 $V_{(S)} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{32\pi a^3}{3}$.

✪ Điểm đối với mặt cầu ✪



✪ **Xét mặt cầu $S(O; R)$ hay (S) và các điểm A, B, M (hình vẽ).** Ta có:

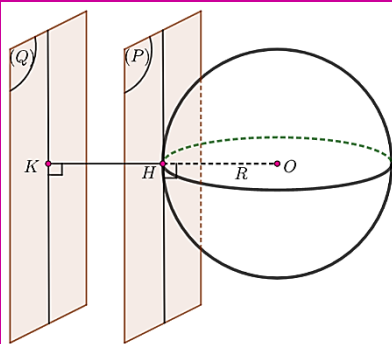
- $OA < R \Leftrightarrow A$ nằm bên trong (S) .
- $OM = R \Leftrightarrow M \in (S)$.
- $OB > R \Leftrightarrow B$ nằm ngoài (S) .

Ví dụ minh họa

Ví dụ 2. Cho mặt cầu $S(O; 3)$ và các điểm A, B thỏa mãn $OA = 1$, $OB = 4,5$. Tìm M thuộc mặt cầu (S) sao cho $MA + MB$ bé nhất.

✪ **Lời giải:** Vì $OA = 1 < 3 = R$, $OB = 4,5 > 3 = R$ nên A nằm trong (S) , B nằm ngoài S .
 $M \in (S)$, $MA + MB$ bé nhất
 $\Leftrightarrow M = AB \cap (S)$ và M nằm giữa đoạn AB .

✪ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng ✪



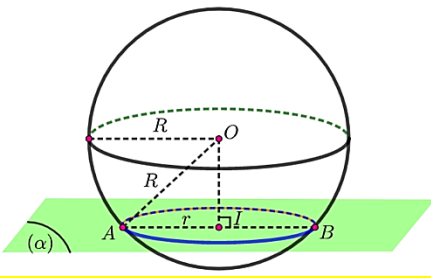
✪ **Xét mặt cầu $S(O; R)$ và các mặt phẳng $(P), (Q), (\alpha)$.** Ta có:

- $d(O, (P)) = R \Leftrightarrow$ Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S) ; (P) được gọi là **tiếp diện của (S)** .
- $d(O, (Q)) > R \Leftrightarrow$ Mặt phẳng (Q) không cắt mặt cầu (S) .

Ví dụ minh họa

Ví dụ 3. Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) , biết khoảng cách từ tâm của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng a . Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có

- $d(O, (\alpha)) < R \Leftrightarrow$ Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) .



Đường tròn (C) có tâm I là hình chiếu của O trên (α) , có bán kính r thỏa mãn $r^2 + OI^2 = R^2$ với $OI = d(O, (\alpha))$.

Đường tròn (C) có bán kính

lớn nhất khi mặt phẳng (α) đi qua tâm của mặt cầu (S) , khi đó $r = R$ và $OI = 0$ hay $O \equiv I$.

chu vi $2\sqrt{3}\pi a$. Diện tích mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Bán kính đường tròn:

$$r = \frac{2\sqrt{3}\pi a}{2\pi} = a\sqrt{3}; \quad IO = a.$$

(S) có bán kính:

$$R = \sqrt{r^2 + IO^2} = 2a.$$

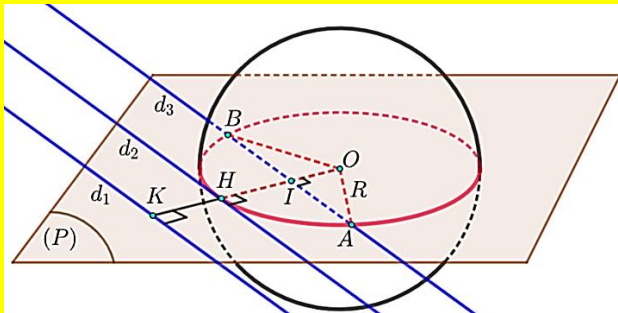
Diện tích mặt cầu (S) :

$$S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2.$$

✪ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng ✪

Xét mặt cầu $S(O; R)$ và ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 .

Gọi K, H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên



d_1, d_2, d_3 .

- $d(O, d_1) = OK > R \Leftrightarrow d_1$ không cắt mặt cầu (S) .

- $d(O, d_2) = OH = R \Leftrightarrow d_2$ tiếp xúc mặt cầu (S) .

Đường thẳng d_2 còn được gọi là tiếp tuyến của (S) ; H là tiếp điểm của d_2 và (S) .

- $d(O, d_3) = OI < R \Leftrightarrow d_3$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm

phân biệt (giả sử là A, B). Khi đó: $OI^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2$

với $OI = d(O, d_3)$.

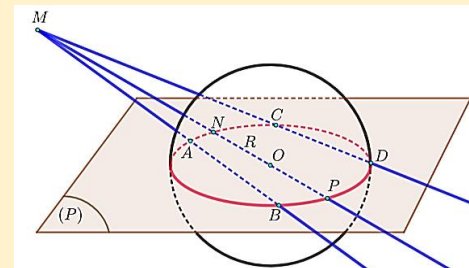
Đặc biệt: Nếu d_3 đi qua tâm O của mặt cầu thì đoạn AB lớn nhất và bằng $2R$ (đường kính mặt cầu).

Ví dụ minh họa

Ví dụ 4. Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu $(O; R)$, vẽ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D .

a) Chứng minh $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

b) Gọi $MO = d$. Tính $MA \cdot MB$ theo R và d .



Lời giải: **a)** Xét một mặt phẳng chứa hai đường thẳng MA, MB cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) ngoại tiếp tứ giác $ABDC$.

Xét $\triangle MAD, \triangle MCB$ có: M chung;

$\angle MDA = \angle MBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC của đường tròn (C)).

Suy ra $\triangle MAD, \triangle MCB$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

b) Gọi N, P là giao điểm của MO với mặt cầu (S) , N nằm giữa M, O .

Khi đó: $MA \cdot MB = MN \cdot MP$ (theo **a**).

$$MN \cdot MP = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2.$$

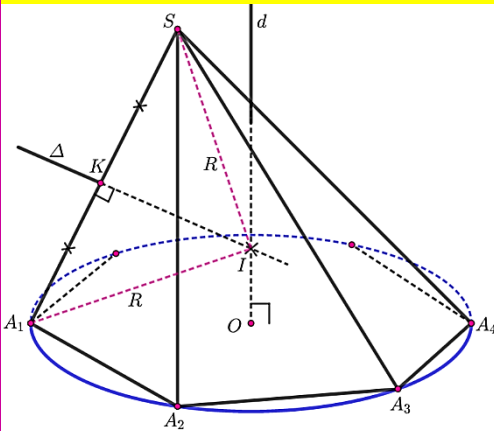
Vậy: $MA \cdot MB = d^2 - R^2$.

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ★

☞ **Mặt cầu ngoại tiếp một hình đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện đó.

☞ **Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp** là đa giác đáy của hình chóp đó nội tiếp một đường tròn.

☞ **Phương pháp chung xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:** Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$



có đáy là đa giác $A_1A_2...A_n$ nội tiếp một đường tròn.

Bước 1: Xác định O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Bước 2: Kẻ

đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt đáy (d được gọi là trục của đa giác đáy).

Bước 3: Dựng mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên hình chóp cắt d tại điểm I . Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

Giải thích phương pháp

• Vì d là trục của đa giác đáy $A_1A_2...A_n$ nên bất kỳ điểm nào thuộc d sẽ cách đều các đỉnh đa giác đáy. Hay: $I \in d \Rightarrow IA_1 = IA_2 = ... = IA_n$ (1).

• Vì $I \in (P) \Rightarrow IA = IS$ (2).

• Từ (1) và (2) suy ra $IS = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n$.

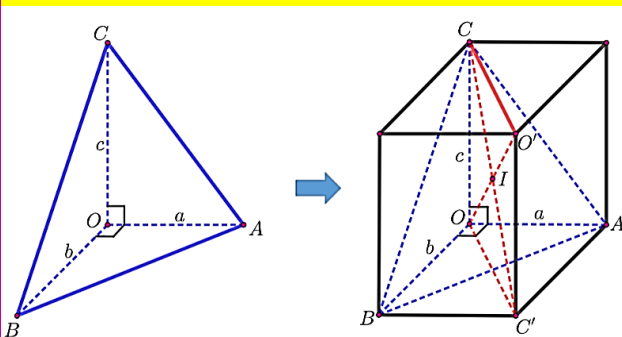
Vì vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

☞ **Đặc biệt:**

- **Trục của tam giác vuông** là đường thẳng qua trung điểm cạnh huyền và vuông góc mặt phẳng chứa tam giác đó.
- **Trục của tam giác đều** là đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác và vuông góc mặt phẳng chứa tam giác đó.
- **Trục của hình vuông (hình chữ nhật)** là đường thẳng đi qua tâm của hình vuông (hình chữ nhật) và vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông (hình chữ nhật) đó.

★ Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có ba cạnh đôi một vuông góc ★

Ví dụ minh họa



☞ **Xét tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau.**

Vẽ hình hộp chữ nhật như hình bên. Mặt cầu (S)

đi qua bốn đỉnh O, A, B, C cũng chính là mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật. Vì vậy (S) có tâm I là trung điểm hai đường chéo OO', CC' ; (S) có bán kính:

Ví dụ 5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 2, OB = 3, OC = 5$. Tìm diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đã cho.

☞ **Lời giải:** Ta có:

$$R = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

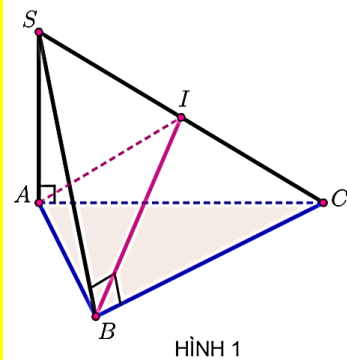
Diện tích mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{38}{4} = 38\pi.$$

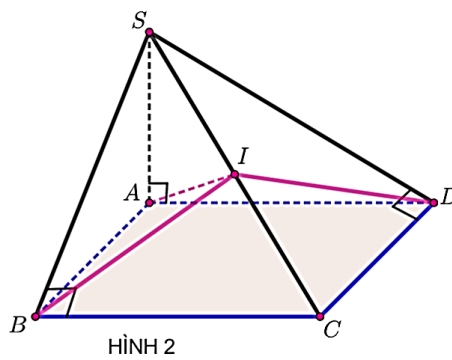
$$R = \frac{OO'}{2} = \frac{\sqrt{OC^2 + OC'^2}}{2} = \frac{\sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2}}{2} \text{ hay } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có các đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới một góc vuông ★

Ví dụ minh họa



HÌNH 1



HÌNH 2

☞ Hình 1: Xét hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$.

Ta có: $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Vậy các đỉnh A, B cùng nhìn cạnh SC dưới một góc vuông, nên **mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có tâm I là trung điểm của SC , bán kính $R = \frac{SC}{2}$.**

☞ Hình 2: Xét hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông (hình chữ nhật).

Ta có: $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $CD \perp SD$. Vậy các đỉnh A, B, D cùng nhìn cạnh SC dưới một góc vuông, nên **mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**

$S.ABCD$ có tâm I là trung điểm của SC , bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

Ví dụ 6. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc mặt đáy và $ABCD$ là hình vuông cạnh 2, $SA = 2\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ấy bằng bao nhiêu?

☞ **Lời giải:**

Ta có: $AC = 2\sqrt{2}$,

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4$.

Ta chứng minh được các đỉnh A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc 90° nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm là trung điểm I của đoạn SC , có bán kính

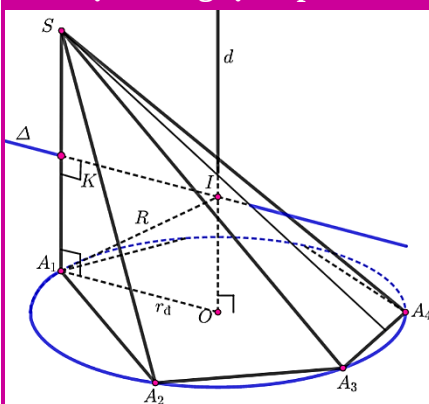
$$R = \frac{SC}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Diện tích mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 = 16\pi.$$

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc mặt đáy ★

Công thức bán kính



☞ Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn tâm O ; SA_1 vuông góc với mặt phẳng đáy.

Bước 1: Dựng trục d của đa giác $A_1A_2...A_n$.

Bước 2: Trong mặt phẳng (SA_1, d) , dựng đường trung trực Δ của đoạn

Đặt $h = SA_1$, $r_d = OA_1$.

Ta có: $R = IA_1$

$$= \sqrt{KA_1^2 + IK^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{SA_1}{2}\right)^2 + OA_1^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_d^2}.$$

SA_1 cắt d tại I (K là trung điểm SA_1). Vì $I \in d \Rightarrow IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n$;
 $I \in \Delta \Rightarrow IS = IA_1$. Vậy $IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n = IS$ nên I là tâm mặt cầu
 ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$.

Vậy:

$$R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_d^2} \quad .$$

Ví dụ 7. Tìm thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tam giác ABC có $AC = a$ và $\angle ABC = 30^\circ$.

Lời giải: Gọi r_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC , theo **định lí Sin (Xem trang 01)**, ta có:

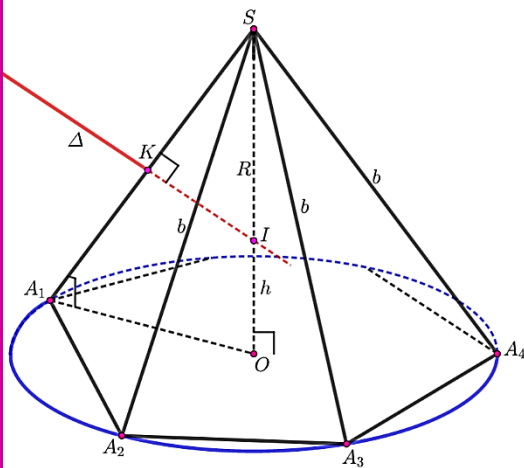
$$\frac{AC}{\sin ABC} = 2r_d \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2r_d \Leftrightarrow r_d = a.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ (với SA vuông góc mặt phẳng đáy) là:

$$R = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r_d^2} = \sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \text{ Thể tích khối cầu trên là: } V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều ★

Công thức bán kính



Xét hình chóp đều
 $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa
giác đều $A_1A_2...A_n$ nội
tiếp đường tròn tâm O . Ta
có SO vuông góc với mặt
phẳng đáy.

Bước 1: Nối SO , do $S.A_1A_2...A_n$ là hình chóp đều nên SO cũng là trục của đá giác đáy $A_1A_2...A_n$.

Bước 2: Trong mặt phẳng

(SA_1O) , dựng đường trung trực Δ của đoạn SA_1 cắt SO tại I (K là trung điểm SA_1).

$$\forall i \ I \in d \Rightarrow IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n; \ I \in \Delta \Rightarrow IS = IA_1.$$

Vậy $IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2\dots A_n$.

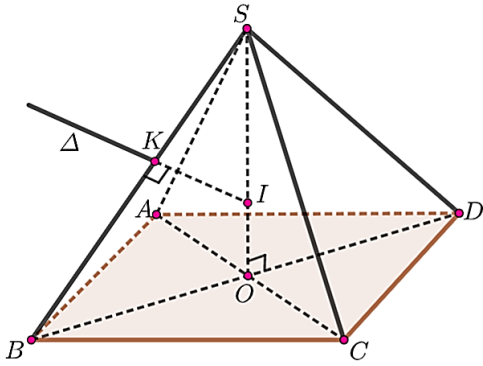
Đặt $h = SO$ và
 $b = SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$.
 Ta thấy hai tam giác
 SKI, SOA_1 đồng dạng

$$\Rightarrow SI = \frac{SK.SA_1}{SO}$$

$$= \frac{\frac{SA_1}{2} \cdot SA_1}{SO} = \frac{SA_1^2}{2SO} = \frac{b^2}{2h}.$$

Vậy $R = \frac{b^2}{2h}$

Ví dụ 8. Tìm diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$ và cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$.



Lời giải: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Ta có:

$$AC = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a \Rightarrow OA = a.$$

Cạnh bên hình chóp: $b = 2a$.

Đường cao hình chóp:

$$h = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

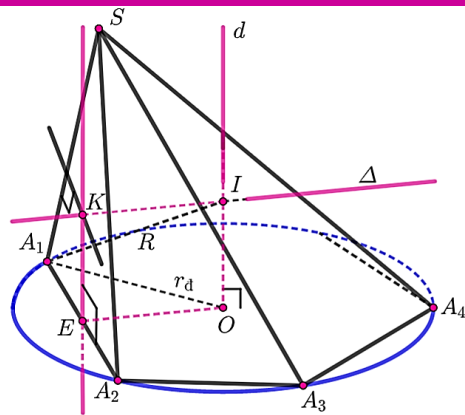
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

$$R = \frac{b^2}{2h} = \frac{(2a)^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{16\pi a^2}{3}$.

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy và đa giác đáy nội tiếp đường tròn ★

Công thức bán kính



Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$
có đáy là đa giác $A_1A_2...A_n$
nội tiếp đường tròn tâm O và
mặt bên (SA_1A_2) vuông góc
mặt đáy.

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SA_1A_2 , E là trung điểm A_1A_2 nên $KE \perp A_1A_2$ hay $KE \perp (A_1A_2 \dots A_n)$.

Bước 1: Dựng trục d của đa giác $A_1A_2...A_n$.

Bước 2: Dựng trục Δ của ΔSA_1A_2 cắt d tại I trong mặt phẳng (d, KE) .

$$\forall i \ I \in d \Rightarrow IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n; \ I \in \Delta \Rightarrow IS = IA_1 = IA_2.$$

Vậy $IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2\dots A_n$.

Đặt $d = AB$ với
 $AB = (SA_1A_2) \cap (A_1A_2 \dots A_n),$
 $r_b = KA_1, r_d = OA_1.$

Ta có:

$$\begin{aligned} R &= IA_1 = \sqrt{OA_1^2 + OI^2} \\ &= \sqrt{OA_1^2 + EK^2} \\ &= \sqrt{OA_1^2 + KA_1^2 - EA_1^2} \\ &= \sqrt{r_b^2 + r_d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Vậy

$$R = \sqrt{r_b^2 + r_d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Ví dụ 9. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và $ASB = 45^\circ$.

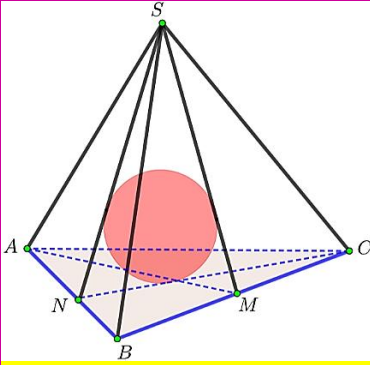
Lời giải: Gọi r_b là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , ta có:

$$\frac{AB}{\sin \angle ASB} = 2r_b \Rightarrow r_b = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ} = a. \text{ Gọi } r_d \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông } ABCD,$$

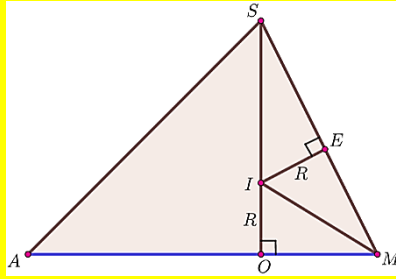
suy ra: $r_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = a$. Gọi $d = AB = a\sqrt{2}$ (với $AB = (SAB) \cap (ABCD)$). Bán kính mặt

cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $R = \sqrt{r_b^2 + r_d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

★ Mặt cầu nội tiếp hình chóp tam giác đều ★



☞ Xét mặt cầu (S) nội tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng b và cạnh đáy bằng a . Gọi M là trung điểm BC và O là trọng tâm tam giác đều ABC .



Ta có SO là trục của ΔABC nên tất cả điểm thuộc SO sẽ cách đều các mặt bên hình chóp.

Xét tam giác SAM , kẻ tia phân giác trong góc M cắt SO tại I . Gọi E là hình chiếu của I trên SM , khi đó $IO = IE$ hay I cách đều

mặt đáy và mặt bên (SBC) của hình chóp. Vậy I là tâm mặt cầu (S).

☞ Hai tính chất cần biết để tìm bán kính R :

• **Tính chất 1:** IM là phân giác trong góc M của ΔSOM nên

$$\frac{SI}{SM} = \frac{IO}{OM} = \frac{SI + IO}{SM + OM} = \frac{SO}{SM + OM} \Rightarrow IO = \frac{OM \cdot SO}{SM + OM} = R.$$

• **Tính chất 2:** Hai tam giác SEI , SOM đồng dạng nên

$$\frac{SI}{SM} = \frac{IE}{OM} \Leftrightarrow \frac{SO - R}{SM} = \frac{R}{OM} \Rightarrow SO \cdot OM - R \cdot OM = R \cdot SM \Rightarrow R = \frac{SO \cdot OM}{OM + SM}.$$

☞ Công thức đặc biệt tìm bán kính R của mặt cầu nội tiếp hình chóp đều:

• Ta có:

$$V_{S.ABC} = V_{I.SAB} + V_{I.SAC} + V_{I.SBC} + V_{I.ABC} \Leftrightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} R \cdot S_{\Delta SAB} + \frac{1}{3} R \cdot S_{\Delta SAC} + \frac{1}{3} R \cdot S_{\Delta SBC} + \frac{1}{3} R \cdot S_{\Delta ABC}$$

$$\Leftrightarrow 3V_{S.ABC} = R(S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta ABC}) \Leftrightarrow R = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta ABC}}.$$

• **Tổng quát:** Hình chóp đều luôn có mặt cầu nội tiếp, và bán kính của mặt cầu này là:

$$R = \frac{3V}{S_{tp}}, \text{ trong đó: } V \text{ là thể tích khối chóp đều, } S_{tp} \text{ là tổng diện tích tất cả các mặt hình chóp}$$

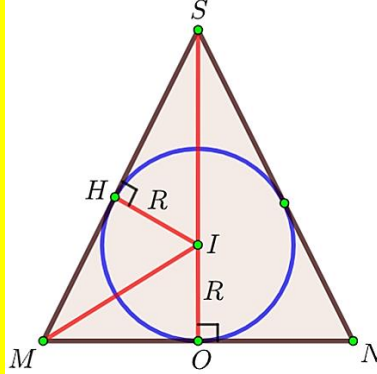
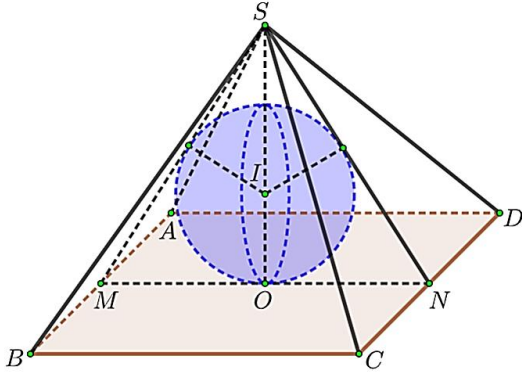
đó.

Ví dụ 10. Tìm bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a .

☞ **Lời giải:** Gọi bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp là R , ta có: $R = \frac{3V}{S_{tp}}$ với $V = V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$;

$$S_{tp} = 4S_{\triangle ABC} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}. \text{ Suy ra: } R = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

★ Mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều ★



☞ Xét mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . Ta có SO là trục của hình vuông $ABCD$. Trong tam giác SMN , kẻ tia phân giác trong góc M cắt SO tại I .

Gọi H là hình chiếu của I trên cạnh SM , khi đó $IH = IO$ hay khoảng cách từ I đến mặt bên và mặt đáy bằng nhau. Vậy I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp đều $S.ABCD$, I cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SMN .

☞ Tính chất cần biết để tìm bán kính R :

• Hai tam giác SHI, SOM đồng dạng, suy ra $\frac{SI}{SM} = \frac{IH}{OM} \Leftrightarrow \frac{SO - R}{SM} = \frac{R}{OM}$

$$\Leftrightarrow SO \cdot OM - R \cdot OM = R \cdot SM \Leftrightarrow R = \frac{SO \cdot OM}{OM + SM}.$$

☞ Công thức đặc biệt tìm bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đều:

• $R = \frac{3V}{S_{tp}}$ với $V = V_{S.ABCD}$; $S_{tp} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SAD} + S_{ABCD}$.

Ví dụ 11. Tìm diện tích mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả cạnh bằng a .

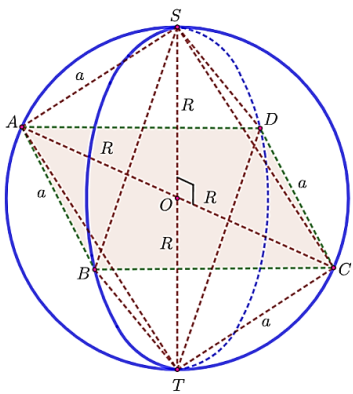
☞ **Lời giải:** Ta có: $V = V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$;

$$S_{tp} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SAD} + S_{ABCD} = 4S_{\triangle SAB} + S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2 = a^2(\sqrt{3} + 1).$$

Bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $R = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{6}}{a^2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}.$

Diện tích mặt cầu này là: $S = 4\pi R^2 = (2 - \sqrt{3})\pi a^2.$

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình bát diện đều ★



☞ Xét mặt cầu ngoại tiếp bát diện đều $SABCDT$ có cạnh bằng a . Tâm O của mặt cầu cũng là tâm hình vuông $ABCD$ cạnh a , vì vậy bán kính mặt cầu là

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ minh họa

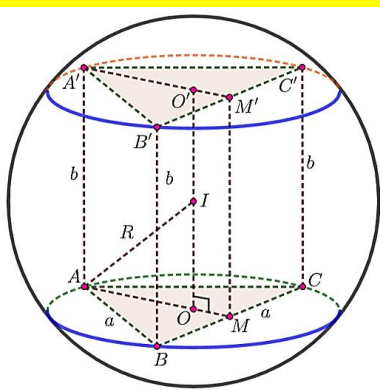
Ví dụ 12. Tìm thể tích khối cầu ngoại tiếp hình bát diện đều $SABCDT$ có cạnh bằng $4\sqrt{2}$.

☞ **Lời giải:**

Bán kính mặt cầu là: $R = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 4$.

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{256\pi}{3}$.

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều ★



☞ Xét mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b . Kẻ trục OO' của hai tam giác đáy, khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ chính là trung điểm đoạn OO' .

Bán kính mặt cầu:

$$R = IA = \sqrt{OA^2 + OI^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + \frac{b^2}{4}} \text{ hay } R = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 13. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đều có cạnh bên bằng 4 và cạnh đáy bằng 3.

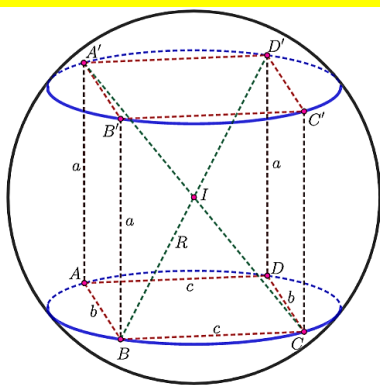
☞ **Lời giải:** Bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ:

$$R = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6} = \frac{\sqrt{12 \cdot 3^2 + 9 \cdot 4^2}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Diện tích mặt cầu là:

$$S = 4\pi R^2 = \frac{7}{9}.$$

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật ★



☞ Xét mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước a, b, c .

• Đường chéo hình hộp chữ nhật

là: $d = AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

• Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có tâm I là trung điểm đường chéo AC' , có bán kính:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 14. Tìm thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{6}$.

☞ **Lời giải:** Đường chéo hình hộp chữ nhật (cũng là đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đó):

$$d = \sqrt{a^2 + 2a^2 + 6a^2} = 3a.$$

Bán kính mặt cầu là:

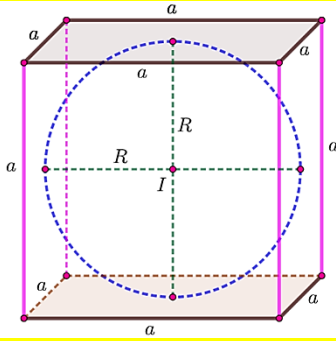
$$R = \frac{d}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đặc biệt: Khi $a = b = c$ thì hình hộp chữ nhật trở thành hình lập phương, có đường chéo $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối cầu:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} = \frac{9\pi}{2}.$$

★ Mặt cầu nội tiếp hình lập phương ★



Xét mặt cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng a . Khi đó tâm I của mặt cầu là trung điểm một đường chéo bất kỳ của lập phương, bán kính $R = \frac{a}{2}$.

Ví dụ minh họa

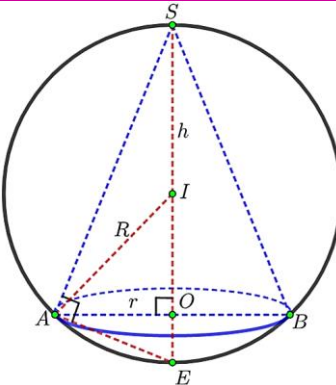
Ví dụ 15. Tính thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng $2a\sqrt{2}$.

Lời giải: Bán kính mặt cầu:

$$R = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3}.$

★ Mặt cầu ngoại tiếp hình nón ★



Xét mặt cầu ngoại tiếp hình nón có bán kính đáy r và chiều cao h . Gọi S là đỉnh và O là tâm đường tròn đáy hình nón, ΔSAB là thiết diện qua trục. Kẻ đường kính SE của mặt cầu thì tam giác SAE vuông tại A . Ta có: $IA^2 = OA^2 + IO^2$
 $\Leftrightarrow R^2 = r^2 + (h - R)^2$

$$\Leftrightarrow r^2 + h^2 = 2hR \Leftrightarrow R = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 16. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón có đường sinh bằng 10, đường kính đáy bằng 16.

Lời giải:

Ta có: $l = 10, 2r = 16 \Rightarrow r = 8$.

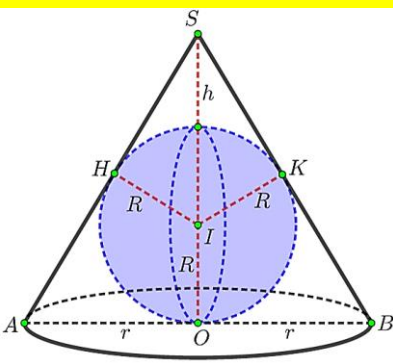
Chiều cao hình nón:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = 6.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình

nón: $R = \frac{r^2 + h^2}{2h} = \frac{8^2 + 6^2}{2 \cdot 6} = \frac{25}{3}.$

★ Mặt cầu nội tiếp hình nón ★



Xét mặt cầu (S) nội tiếp hình nón có bán kính đáy là r , đường cao h .

Gọi S là đỉnh hình nón và O là tâm đường tròn đáy, thiết diện qua trục là tam giác SAB . Bán kính R của mặt cầu (S) cũng là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB .

Ví dụ minh họa

Ví dụ 17. Tìm thể tích khối cầu nội tiếp hình nón có chiều cao bằng 4, bán kính đáy bằng 3.

Lời giải:

Bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón trên:

$$R = \frac{3 \cdot 4}{3 + \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{2}.$$

Ta có hai tam giác SHI , SOA đồng dạng nên

$$\frac{SI}{SA} = \frac{IH}{OA} \Leftrightarrow \frac{h-R}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{R}{r} \Leftrightarrow rh - Rr = R\sqrt{r^2+h^2} \Leftrightarrow R = \frac{rh}{r+\sqrt{r^2+h^2}}$$

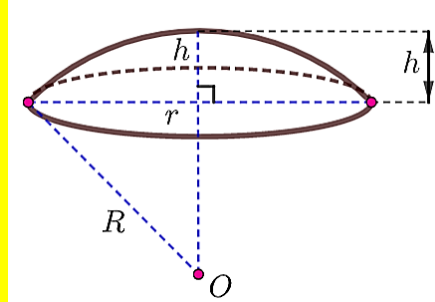
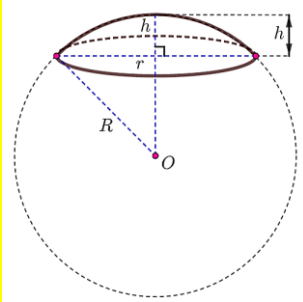
Thể tích khối cầu là:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{9\pi}{2}.$$

✪ Công thức liên quan đến Chòm cầu ✪

Ví dụ minh họa

✪ **Cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng bất kỳ, ta thu được hai hình chòm cầu** với đường tròn đáy là giao tuyến giữa mặt phẳng và mặt cầu đó.



✪ **Xét hình chòm cầu có bán kính đường tròn đáy là r , chiều cao h , thuộc mặt cầu bán kính R .** Khi đó:

- Diện tích chòm cầu: $S = 2\pi Rh = \pi(h^2 + r^2)$.
- Thể tích khối cầu: $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2)$.

Ví dụ 18. Tìm diện tích và thể tích chòm cầu khi cắt mặt cầu (S) bởi một mặt phẳng, biết rằng chòm cầu có chiều cao bằng 1 và đường kính đáy bằng 3.

Lời giải:

Bán kính đáy chòm cầu:

$$2r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}.$$

Diện tích chòm cầu:

$$S = \pi \left[1^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] = \frac{13\pi}{4}.$$

Thể tích chòm cầu:

$$V = \frac{\pi \cdot 1}{6} \left[1^2 + 3 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] = \frac{31\pi}{24}.$$

BÀI TẬP MINH HỌA VÀ RÈN LUYỆN

Dạng 1. Mặt cầu, khối cầu và các yếu tố cơ bản

Câu 1. Cho mặt cầu có diện tích bằng $16\pi a^2$. Khi đó, bán kính mặt cầu bằng

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $\sqrt{2}a$. C. $2a$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$. Bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{\frac{16\pi a^2}{4\pi}} = 2a$. **Chọn C.**

Câu 2. Cho khối cầu (S) có thể tích bằng $36\pi \text{ cm}^3$. Diện tích mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

- A. $64\pi \text{ cm}^2$. B. $18\pi \text{ cm}^2$. C. $36\pi \text{ cm}^2$. D. $27\pi \text{ cm}^2$.

Hướng dẫn giải:

Thể tích khối cầu $V = 36\pi \Rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3$.

Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$. Chọn C

Câu 3. Diện tích mặt cầu bán kính $2a$ là

- A. $4\pi a^2$. B. $16\pi a^2$.
C. $16a^2$. D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 4. Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π

- A. $S = 32\pi$. B. $S = 16\pi$.
C. $S = 64\pi$. D. $S = 8\pi$.

Câu 5. Một mặt cầu có diện tích xung quanh là π thì có bán kính bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$.
C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 6. Thể tích của khối cầu có bán kính là 1 bằng:

- A. 2π . B. $\frac{\pi}{3}$.
C. $\frac{4\pi}{3}$. D. 4π .

Câu 7. Thể tích khối cầu có đường kính $2a$ bằng

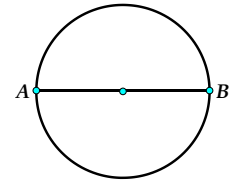
- A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. B. $4\pi a^3$.
C. $\frac{\pi a^3}{3}$. D. $2\pi a^3$.

Câu 8. Tính diện tích S của mặt cầu và thể tích V của khối cầu có bán kính bằng 3cm .

- A. $S = 36\pi (\text{cm}^2)$ và $V = 36\pi (\text{cm}^3)$.
B. $S = 18\pi (\text{cm}^2)$ và $V = 108\pi (\text{cm}^3)$.
C. $S = 36\pi (\text{cm}^2)$ và $V = 108\pi (\text{cm}^3)$.
D. $S = 18\pi (\text{cm}^2)$ và $V = 36\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 9. Cho hình tròn đường kính $AB = 4\text{cm}$ quay xung quanh AB . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

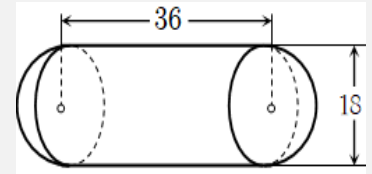
- A. $32\pi\text{cm}^3$. B. $16\pi\text{cm}^3$.
C. $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$. D. $\frac{32\pi}{3}\text{cm}^3$.



- Câu 10.** Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1 và mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1) bằng
- A. 2. B. 4.
C. $\frac{1}{2}$. D. 3.

Dạng 2. Mặt cầu và bài toán thực tế

- Câu 11.** Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ như hình vẽ bên. Các kích thước được ghi (cùng đơn vị dm). Thể tích của bồn chứa bằng
- A. 2888π . B. 9216π .
C. 3888π . D. 2169π .

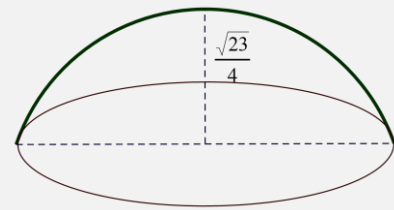


Hướng dẫn giải:

Ta xem thể tích hai nửa bán cầu (hai đầu bồn xăng) cùng bằng thể tích một khối cầu.

Vì vậy thể tích bồn chứa xăng là: $V = \frac{4\pi R^3}{3} + \pi R^2 h = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} + \pi \cdot 9^2 \cdot 36 = 3888\pi$. **Chọn C.**

- Câu 12.** Một cái chao đèn là một phần của mặt xung quanh của một mặt cầu có bán kính bằng 3dm như hình vẽ. Vật liệu làm chao đèn là thủy tinh có giá 350.000 (đồng/dm²). Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) để làm chao đèn trên là bao nhiêu?
- A. 15.401.000 đồng.
B. 7.910.000 đồng.
C. 6.322.000 đồng.
D. 10.788.000 đồng.



Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức diện tích chòm cầu $S = 2\pi hR$.

Ta có diện tích chao đèn là : $S = 2\pi hR = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{23}}{4} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{23}}{2}\pi (\text{dm}^2)$.

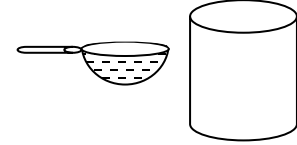
Số tiền làm chao đèn là : $\frac{3\sqrt{23}}{2}\pi \cdot 350000 \approx 7.910.000$ đồng. **Chọn B.**

Câu 13. Quả bóng rổ size 7 có đường kính 24.5 cm. Tính diện tích bề mặt quả bóng rổ đó

- A. 629 cm^2 . B. 1886 cm^2 .
C. 8171 cm^2 . D. 7700 cm^2 .

Câu 14. Một người dùng một cái ca hình bán cầu có bán kính là 3cm để mức nước đổ vào trong một thùng hình trụ chiều cao 10cm và bán kính đáy bằng 6cm. Hỏi người ấy sau bao nhiêu lần đổ thì nước đầy thùng ? (Biết mỗi lần đổ, nước trong ca luôn đầy).

- A. 20 lần. B. 10 lần.
C. 12 lần. D. 24 lần.

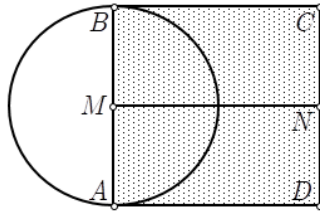


Câu 15. Một người dùng một cái ca hình bán cầu có bán kính là 3cm để mức nước đổ vào trong một thùng hình trụ chiều cao 3cm và bán kính đáy bằng 12cm. Hỏi người ấy sau bao nhiêu lần đổ thì nước đầy thùng ? (Biết mỗi lần đổ, nước trong ca luôn đầy).

- A. 10 lần. B. 12 lần.
C. 20 lần. D. 24 lần.

Câu 16. Trên cùng một mặt phẳng, cho mô hình gồm một hình vuông $ABCD$ có cạnh $2a$ và đường tròn có đường kính AB . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD . Diện tích toàn phần của khối tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục MN bằng

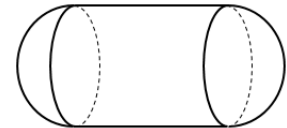
- A. $10\pi a^2$.
B. $7\pi a^2$.
C. $9\pi a^2$.
D. $8\pi a^2$.



Câu 17. Một cái bồn chứa nước gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ). Đường sinh của hình trụ bằng hai lần đường kính của hình cầu. Biết thể tích của bồn chứa nước là $\frac{128\pi}{3} (\text{m}^3)$.

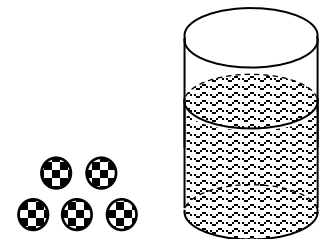
Diện tích xung quanh của cái bồn chứa nước bằng

- A. $50\pi \text{ m}^2$. B. $64\pi \text{ m}^2$.
C. $40\pi \text{ m}^2$. D. $48\pi \text{ m}^2$.



Câu 18. Một cốc nước có dạng hình trụ chiều cao là 15cm, đường kính đáy là 6cm, lượng nước ban đầu trong cốc cao 10cm. Thả vào cốc nước 5 viên bi hình cầu có cùng đường kính là 2cm. Hỏi sau khi thả 5 viên bi, mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu cm ? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

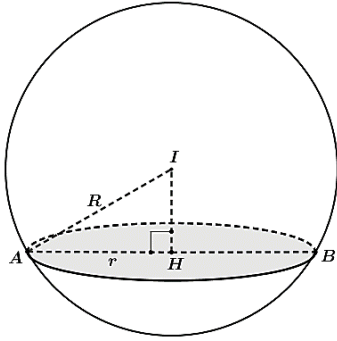
- A. 4,25cm.
B. 4,81cm.
C. 4,26cm.
D. 3,52cm.



Dạng 3. Giao tuyến giữa mặt cầu với mặt phẳng

- Câu 19.** Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) , biết khoảng cách từ tâm của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng a . Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi $2\sqrt{3}\pi a$. Diện tích mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?
- A. $12\pi a^2$. B. $16\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $8\pi a^2$.

Hướng dẫn giải:



Xét mặt cầu (S) tâm I bán kính R như hình vẽ, mặt phẳng (P) cắt (S) theo đường tròn tâm H , đường kính AB .

$$\text{Chu vi đường tròn } C = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{C}{2\pi} = \frac{2\sqrt{3}\pi a}{2\pi} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Khoảng cách từ } I \text{ đến } (P): d(I, (P)) = IH = a.$$

$$\text{Suy ra } R = \sqrt{r^2 + IH^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi (2a)^2 = 16\pi a^2$. **Chọn B.**

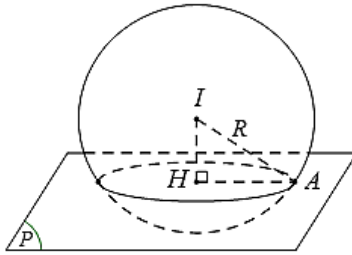
- Câu 20.** Cho hình cầu đường kính $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) .

A. a .

B. $\frac{a}{2}$.

C. $a\sqrt{10}$.

D. $2a\sqrt{5}$.



- Câu 21.** Mặt phẳng (P) cắt khối cầu tâm O theo đường tròn có bán kính bằng 4cm và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) bằng 3cm. Bán kính R của mặt cầu bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm.

B. 5cm.

C. $3\sqrt{2}$ cm.

D. 6cm.

- Câu 22.** Cho mặt cầu (S) tâm I . Một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi 8π , biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 3. Tính diện tích S của mặt cầu đã cho.

A. $S = 25\pi$.

B. $S = 100\pi$.

C. $S = 75\pi$.

D. $S = 50\pi$.

Câu 23. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu tâm O theo đường tròn có diện tích bằng 9π . Biết rằng chu vi hình tròn lớn nhất của hình cầu bằng 10π . Khoảng cách từ điểm O đến (P) bằng

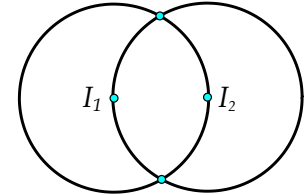
- A. 3. B. 4.
C. 5. D. 8.

Câu 24. Một khối cầu có thể tích bằng $\frac{32\pi a^3}{3}$. Mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có chu vi bằng $2,4\pi a$. Tính khoảng cách d từ tâm mặt cầu đến (P) ?

- A. $d = 1,4a$. B. $d = 1,5a$.
C. $d = 1,6a$. D. $d = 1,7a$.

Câu 25. Hai khối cầu có cùng bán kính R giao nhau sao cho tâm mặt cầu này nằm trên mặt cầu kia. Tính bán kính r của đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu ?

- A. $r = R\sqrt{2}$. B. $r = R\sqrt{3}$.
C. $r = \frac{2R}{3}$. D. $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.



Dạng 4. Mặt cầu ngoại tiếp (nội tiếp) hình chóp và lăng trụ

Bài toán 1. Hình chóp có các đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới một góc vuông

Cách tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có các đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới một góc 90° được thực hiện trong phần lý thuyết trang 04.

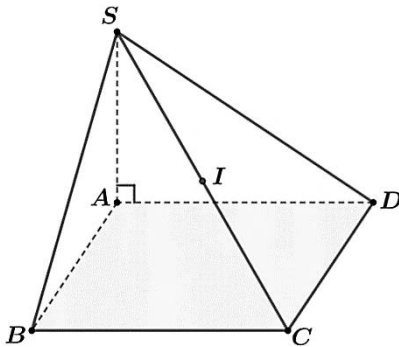
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta chứng minh được các tam giác SBC , SDC vuông lần lượt tại B và D nên các đỉnh A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc 90° . Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm của SC và bán

$$kính R = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{4a^2 + 2a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ Chọn A.}$$



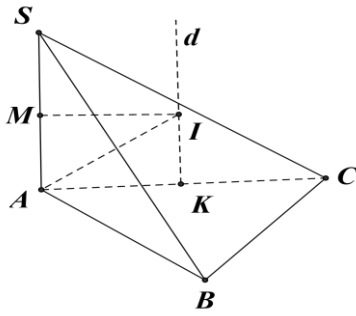
Bài toán 2. Hình chóp có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy

Cách tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy được thực hiện trong **phần lí thuyết trang 04, trang 05**.

Câu 27. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $SABC$

- A. $8a^2\pi$. B. $\frac{32a^2}{3}\pi$. C. $\frac{8a^2\pi}{3}$. D. $4a^2\pi$.

Hướng dẫn giải:



Bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r_d^2}$, trong đó bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác (tam giác) đáy là $r_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$.

Vậy $R = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu (S) là

$$S = 4\pi R^2 = 8a^2\pi.$$

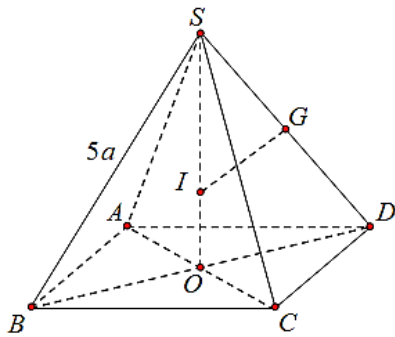
Bài toán 3. Hình chóp đều

Cách tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều được thực hiện trong **phần lí thuyết trang 05 và trang 06**.

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \sqrt{3}a$. B. $R = \sqrt{2}a$. C. $R = \frac{25a}{8}$. D. $R = 2a$.

Hướng dẫn giải:



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều được tính theo công thức

$R = \frac{b^2}{2h}$ trong đó b là cạnh bên và h là chiều cao của hình chóp.

Ta có $AC = 3a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6a \Rightarrow OA = 3a$.

Khi đó: $b = 5a$, $h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a$.

Vậy bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp là

$$R = \frac{b^2}{2h} = \frac{25a^2}{2 \cdot 4a} = \frac{25a}{8}. \text{ Chọn C.}$$

Bài toán 4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy

Cách tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy được thực hiện trong **phần lý thuyết trang 06, trang 07**.

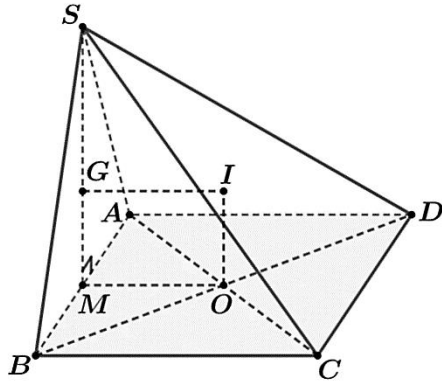
Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

B. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$.

D. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.



Hướng dẫn giải:

Bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ được tính theo công thức $R = \sqrt{r_b^2 + r_d^2 - \frac{d^2}{4}}$; trong đó r_b là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB và

$$r_b = SG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

r_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ với

$$r_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad d = AB = a.$$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Thể tích khối cầu (S) là $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}$. **Chọn A.**

Câu 30. Tính đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

A. $3a$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $6a$.

D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 31. Cho khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của một hình lập phương. Gọi V_1 ; V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu và khối lập phương đó. Tính $k = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $k = \frac{2\pi}{3}$.

B. $k = \frac{\pi}{6}$.

C. $k = \frac{\pi}{3}$.

D. $k = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 32. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c nội tiếp một mặt cầu. Tính diện tích S của mặt cầu đó

A. $S = 16(a^2 + b^2 + c^2)\pi$. B. $S = (a^2 + b^2 + c^2)\pi$.

C. $S = 4(a^2 + b^2 + c^2)\pi$. D. $S = 8(a^2 + b^2 + c^2)\pi$.

Câu 33. Một mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 4a$, $AD = 5a$, $AA' = 3a$. Mặt cầu trên có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{2}a}{2}$.

B. $6a$.

C. $2\sqrt{3}a$.

D. $\frac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 34. Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ.

A. $\frac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$. B. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.

C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2 + b^2)^3}$. D. $\frac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.

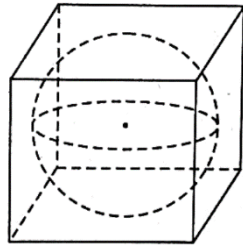
Câu 35. Một vật thể đựng đầy nước hình lập phương không có nắp. Khi thả một khối cầu kim loại đặc vào trong hình lập phương thì thấy khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương đó. Tính bán kính của khối cầu, biết thể tích nước còn lại trong hình lập phương là 10. Giả sử các mặt của hình lập phương có độ dày không đáng kể

A. $\sqrt[3]{\frac{15}{12 - 2\pi}}$.

B. $\sqrt[3]{\frac{9}{24 - 4\pi}}$.

C. $\sqrt[3]{\frac{15}{24 - 4\pi}}$.

D. $\sqrt[3]{\frac{9}{12 - 2\pi}}$.



Câu 36. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lăng trụ theo a .

A. $R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

B. $R = \frac{a}{2}$.

C. $R = 2a$.

D. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

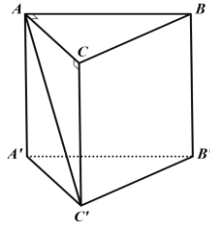
Câu 37. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho?

A. $S = 24\pi a^2$.

B. $S = 6\pi a^2$.

C. $S = 4\pi a^2$.

D. $S = 3\pi a^2$.



Câu 38. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, AB = b, BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$.

B. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

C. $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi a^2$.

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. $2\pi a^2$.

D. $2a^2$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$.

B. $\frac{19\pi a^2}{3}$.

C. $\frac{19\pi a^2}{9}$.

D. $13\pi a^2$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{172\pi a^2}{3}$.

B. $\frac{76\pi a^2}{3}$.

C. $84\pi a^2$.

D. $\frac{172\pi a^2}{9}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{13a}{2}$.

B. $R = 6a$.

C. $R = \frac{5a}{2}$.

D. $R = \frac{17a}{2}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = 5$, $AB = 3$, $BC = 4$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

B. $R = 5$.

C. $R = \frac{5}{2}$.

D. $R = 5\sqrt{2}$.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) , $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$.

B. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$.

C. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 45. Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 46. Hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng a . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $4\pi a^2$.

B. πa^2 .

C. $\sqrt{2}\pi a^2$.

D. $2\pi a^2$.

Câu 47. Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\frac{12}{5}a$.

B. $2a$.

C. $\frac{3}{2}a$.

D. $\frac{9}{4}a$.

Câu 48. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB = a$, góc giữa mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $S.ABC$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{7a}{12}$.

C. $\frac{7a}{16}$.

D. $\frac{a}{2}$.

Câu 49. Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $BAC = 30^\circ$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a .

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$.

B. $V = \frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

D. $V = \frac{15\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $ACB = 30^\circ$. Biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Tính diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{mc} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

B. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{3}$.

C. $S_{mc} = \frac{7\pi a^2}{12}$.

D. $S_{mc} = 4\pi a^2$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. $S = 3\pi a^2$.

B. $S = \frac{4\pi a^2}{3}$.

C. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$.

D. $S = 7\pi a^2$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

B. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$.

D. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a$, $AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{64\pi a^2}{27}$.

B. $\frac{4\pi a^2}{27}$.

C. $\frac{16\pi a^2}{9}$.

D. $\frac{64\pi a^2}{9}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $ASB = 60^\circ$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$.

B. $S = \frac{13\pi a^2}{3}$.

C. $S = \frac{11\pi a^2}{2}$.

D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

B. $R = \frac{a}{3}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là trung điểm đoạn BC . Vì các tam giác SBC , ABC đều cạnh a nên $SM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra giác SAM đều.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (O cũng là trọng tâm tam giác ABC).

Kẻ trục Ox của tam giác ABC (Ox qua O và vuông với (ABC)). Trong tam giác SAM , kẻ trung trực Ey của cạnh SA (E là trung điểm SA); Ey cắt Ox tại I .

Do tam giác SAM đều nên Ey trùng với trung tuyến ME .

Ta có: $I \in Oy \Rightarrow IA = IB = IC$; $I \in Ey \Rightarrow IA = IS$.

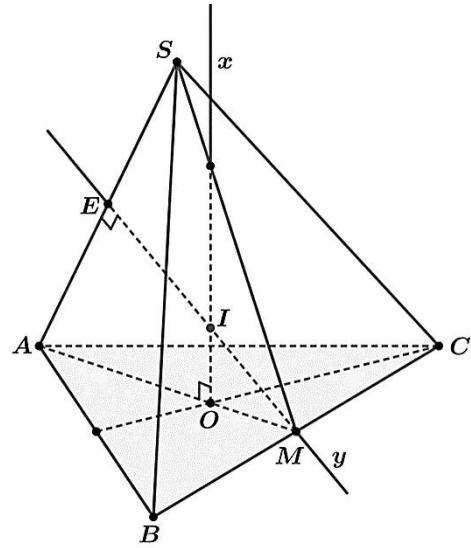
Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Gọi R là bán kính mặt cầu này.

Xét tam giác AME có $\angle AME = 30^\circ$ nên

$$\tan 30^\circ = \frac{OI}{OM} = \frac{AE}{ME}$$

$$\Rightarrow OI = \frac{OM \cdot AE}{ME} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{6}.$$

$$\text{Khi đó } R = IA = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$



Dạng 5. Mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp mặt nón, mặt trụ

Câu 56. Cho mặt cầu bán kính bằng 5cm, cắt mặt cầu này bằng một mặt phẳng sao cho thiết diện tạo thành là một đường tròn đường kính 4cm. Tính thể tích khối nón có đáy là thiết diện vừa tạo và đỉnh là tâm của hình cầu đã cho.

A. $\approx 19,18\text{cm}^3$.

B. $\approx 19,20\text{cm}^3$.

C. $\approx 19,21\text{cm}^3$.

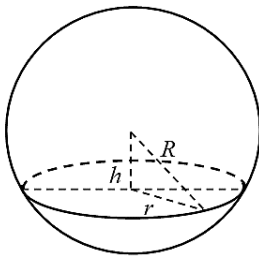
D. $\approx 19,19\text{cm}^3$.

Hướng dẫn giải:

Bán kính mặt cầu $R = 5\text{cm}$, bán kính đường tròn giao tuyến là $r = 2\text{cm}$.

Chiều cao khối nón: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{21}$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{4\sqrt{21}}{3}\pi \approx 19,20\text{ cm}^3$. **Chọn B.**



Câu 57. Cho khối cầu tâm O bán kính R . Mặt phẳng (P) cách O một khoảng x cắt khối cầu theo một hình tròn (C) . Một khối nón (N) có đỉnh thuộc mặt cầu, đáy là hình tròn (C) . Biết khối nón (N) có thể tích lớn nhất, khi đó giá trị của x bằng

A. $x = \frac{R}{3}$.

B. $x = \frac{R}{2}$.

C. $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

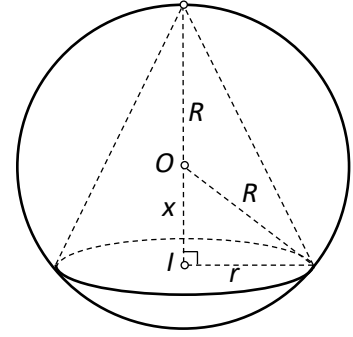
D. $x = \frac{3R}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Ghi nhớ: Với a, b, c là các số không âm thì

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2; abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.



Đặt $IO = x$ thì $r^2 = R^2 - x^2$ và $h = x + R$.

$$\Rightarrow V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2) \cdot (x + R)$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \underbrace{(2R - 2x)}_a \cdot \underbrace{(R + x)}_b \cdot \underbrace{(R + x)}_c \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{32\pi R^3}{81} \Rightarrow V_{(N)\max} = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow 2R - 2x = R + x \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$. **Chọn A.**

Câu 58. Cho mặt cầu (S) bán kính R không đổi. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất?

A. $h = R\sqrt{2}$.

B. $h = \frac{3R}{2}$.

C. $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

D. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm của OO' thì I là tâm mặt cầu (S).

$$\Delta IOA \text{ có } r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - h^2}.$$

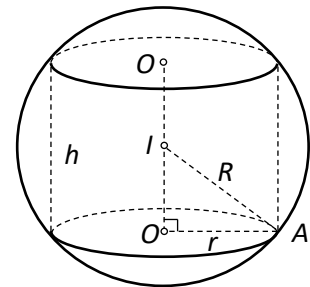
Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq(T)} = 2\pi rh = \pi h \sqrt{4R^2 - h^2}$

$$= \pi \sqrt{\underbrace{h^2}_a \cdot \underbrace{(4R^2 - h^2)}_b} \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \pi \frac{h^2 + (4R^2 - h^2)}{2}$$

$$\Rightarrow S_{xq(T)} \leq 2\pi R^2 \Rightarrow \boxed{S_{xq(T)\max} = 2\pi R^2}.$$

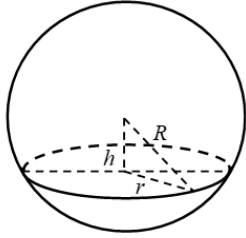
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow \boxed{h = R\sqrt{2}}$.

Chọn A.



Câu 59. Cho hình cầu bán kính bằng 10cm, cắt hình cầu này bằng một mặt phẳng sao cho thiết diện tạo thành là một đường tròn có chu 16 π . Tính thể tích khối nón có đáy là thiết diện vừa tạo và đỉnh là tâm của hình cầu đã cho.

- A. 128 π cm³.
B. 126 π cm³.
C. 136 π cm³.
D. 132 π cm³.

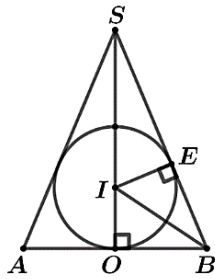


Câu 60. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S). Tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

- A. $V = \frac{32\pi}{3}$.
B. $V = 16\pi$.
C. $V = 32\pi$.
D. $V = \frac{16\pi}{3}$.

Câu 61. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 6, chiều cao bằng 8. Biết rằng có một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón, đồng thời tiếp xúc với mặt đáy của hình nón. Tính bán kính mặt cầu đó.

- A. $\frac{10}{3}$.
B. $\frac{7}{4}$.
C. $\frac{17}{4}$.
D. 3.



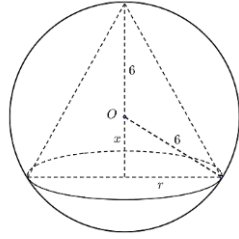
Mặt cắt qua trục

Câu 62. Cho hình nón có bán kính đáy $R=5a$, độ dài đường sinh $\ell=13a$. Thể tích khối cầu nội tiếp hình nón bằng

- A. $\frac{40\pi a^3}{9}$.
B. $\frac{400\pi a^3}{27}$.
C. $\frac{4000\pi a^3}{27}$.
D. $\frac{4000\pi a^3}{81}$.

Câu 63. Cho khối cầu tâm O bán kính 6. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng x cắt khối cầu theo một hình tròn (C). Một khối nón có đỉnh thuộc mặt cầu, đáy là hình tròn (C). Biết khối nón có thể tích lớn nhất, khi đó giá trị của x bằng

- A. $x = 2$.
 B. $x = 1$.
 C. $x = 3\sqrt{2}$.
 D. $x = 6\sqrt{2}$.



Câu 64. Cho mặt cầu tâm O , bán kính R . Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là h với $h > R$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất ?

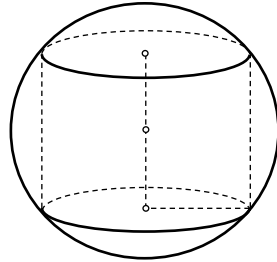
- A. $h = R\sqrt{3}$. B. $h = R\sqrt{2}$.
 C. $h = \frac{4R}{3}$. D. $h = \frac{3R}{2}$.

Câu 65. Trong các hình nón nội tiếp hình cầu có bán kính bằng 9, tính bán kính đường tròn đáy r của hình nón có thể tích lớn nhất ?

- A. $r = 4\sqrt{2}$. B. $r = 5\sqrt{2}$.
 C. $r = 6\sqrt{2}$. D. $x = 3\sqrt{2}$.

Câu 66. Cho hình trụ có chiều cao bằng 4 nội tiếp trong hình cầu bán kính bằng 3. Tính thể tích V của khối trụ này.

- A. $V = 40\pi$.
 B. $V = 20\pi$.
 C. $V = 36\pi$.
 D. $V = \frac{20\pi}{3}$.



Câu 67. Một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao và nội tiếp trong mặt cầu bán kính R . Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

- A. $4\pi R^2$. B. $2\pi R^2$.
 C. $2\sqrt{2}\pi R^2$. D. $\sqrt{2}\pi R^2$.

Câu 68. Hình trụ (T) bán kính đáy bằng $3R$, chiều cao bằng $8R$ có hai đáy nằm trên mặt cầu (S) . Thể tích của khối cầu bằng

- A. $125\pi R^3$. B. $25\pi R^3$.
 C. $\frac{500\pi R^3}{3}$. D. $\frac{375\pi R^3}{4}$.

Câu 69. Cho mặt cầu (S) bán kính $R = \sqrt{2}$. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Diện tích xung quanh lớn nhất của khối trụ bằng

- A. 2π . B. 4π .
C. 6π . D. 8π .

Câu 70. Cho mặt cầu (S) bán kính $R=5$. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Tính chiều cao h để diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất ?

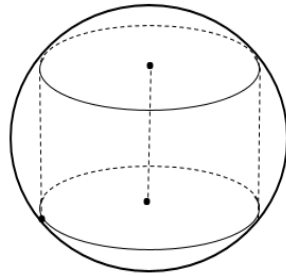
- A. $h=2\sqrt{2}$. B. $h=4\sqrt{2}$.
C. $h=5\sqrt{2}$. D. $h=3\sqrt{2}$.

Câu 71. Cho mặt cầu (S) bán kính $R=4$. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Diện tích xung quanh lớn nhất của khối trụ bằng

- A. 8π . B. 64π .
C. 32π . D. 16π .

Câu 72. Cho khối cầu (S) tâm I , bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích khối trụ lớn nhất.

- A. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.
B. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.
C. $h = R\sqrt{2}$.
D. $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.



MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO MẶT CẦU

Câu 73. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

- A. $V=576\sqrt{2}$. B. $V=144\sqrt{6}$. C. $V=144$. D. $V=576$.

Hướng dẫn giải:

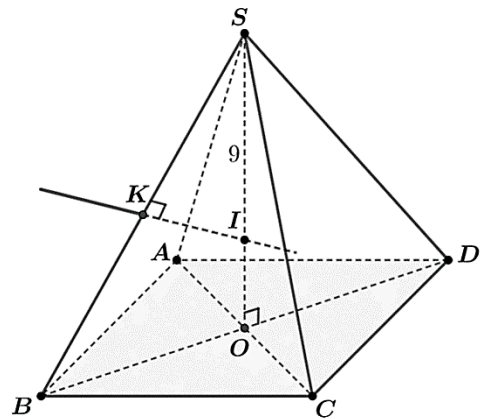
Chọn D.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ như hình vẽ nội tiếp mặt cầu tâm I (hình vẽ).

Đặt cạnh hình vuông đáy bằng x và $SO=h$ ($x>0, h>0$).

Ta có : $OB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{\frac{x^2}{2} + h^2}$.

Xét các tam giác vuông SOB , SKI có : $\cos S = \frac{SK}{SI} = \frac{SO}{SB}$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}SB^2 = SO.SI \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + h^2 \right) = 9h \Rightarrow x^2 = 36h - 2h^2.$$

Thể tích khối chóp : $V = \frac{1}{3}h.x^2 = \frac{1}{3}h(36h - 2h^2).$

Ta có : $\frac{1}{3}h.(36h - 2h^2) = \frac{1}{3}.h.h(36 - 2h) \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h+h+36-2h}{3} \right)^3 = 576 \Rightarrow V \leq 576$ hay $V_{\max} = 576.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $h = 36 - 2h \Rightarrow h = 12; x = 12.$ Vậy $V_{\max} = 576.$

Câu 74. Cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$. Khối tứ diện ABCD có tất cả các đỉnh thay đổi và cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$. Biết thể tích lớn nhất của khối tứ diện ABCD là $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính $a + b$.

A. $a + b = 1173.$

B. $a + b = 4081.$

C. $a + b = 128.$

D. $a + b = 5035.$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi H là trung điểm của AC. Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$ nên $DH \perp (ABC)$ và tâm I của mặt cầu (S) thuộc DH.

Đặt $DH = h$ và $AH = x$ ($0 < x \leq 5; 5 \leq h \leq 10$). Ta có $ID = IA = 5$ và $IH = |h - 5|$.

Xét tam giác vuông AIH có $AH^2 = AI^2 - IH^2 = 25 - (h - 5)^2 = 10h - h^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = 10h - h^2}.$

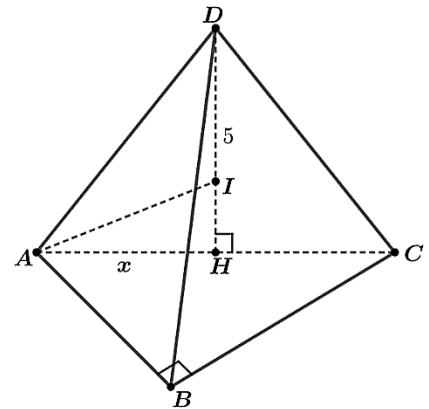
Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH = x^2 = 10h - h^2.$

Thể tích khối tứ diện ABCD là: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}(10h - h^2)h$

$$= \frac{1}{3}h.h.(10 - h) = \frac{1}{6}h.h.(20 - 2h) \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{h+h+20-2h}{3} \right)^3 = \frac{4000}{81}.$$

Vậy $V_{\max} = \frac{4000}{81} = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{a + b = 4081}$; khi đó

$h = 20 - h \Rightarrow h = 10.$



Câu 75. Trên mặt phẳng (P) cho góc $xOy = 60^\circ$. Đoạn $SO = a$ và SO vuông góc với mặt phẳng (P) . Các điểm M, N chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có: $OM + ON = a$. Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$.

- A. $\frac{4\pi a^2}{3}$. B. $\frac{\pi a^2}{3}$. C. $\frac{8\pi a^2}{3}$. D. $\frac{16\pi a^2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi H, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN$

$$\Rightarrow R^2 = OH^2 + IH^2 = \frac{a^2}{4} + OH^2.$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác OMN ta có:

$$\frac{MN}{\sin 60^\circ} = 2OH \Rightarrow OH = \frac{MN}{\sqrt{3}}.$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác OMN ta có

$$\begin{aligned} MN^2 &= OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cos 60^\circ \\ &= OM^2 + ON^2 - OM \cdot ON = (OM + ON)^2 - 3OM \cdot ON \\ &= a^2 - 3OM \cdot ON \geq a^2 - 3 \frac{(OM + ON)^2}{4} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

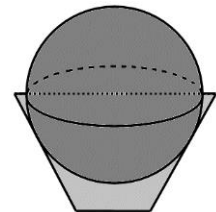
$$\text{Ta có: } MN^2 \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 3OH^2 \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow OH^2 \geq \frac{a^2}{12}. \text{ Khi đó: } R^2 = \frac{a^2}{4} + OH^2 \geq \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3}.$$

Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN$ bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Diện tích của mặt cầu } (S) \text{ tương ứng là } S_{(S)} = 4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{3}.$$

Câu 76. Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường

kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đứng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước. Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



- A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. B. $18\sqrt{3}\pi \text{ (dm}^3\text{)}$.
C. $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. D. $18\pi \text{ (dm}^3\text{)}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Xét một thiết diện qua trục của hình nón như hình vẽ. Hình thang cân $ABCD$ (IJ là trục đối xứng) là thiết diện của cái thùng nước, hình tròn tâm I bán kính IH là thiết diện của khối cầu. Các đường thẳng AD , BC , IJ đồng qui tại E .

Đặt bán kính của khối cầu là $IH = R$, bán kính mặt đáy của thùng là $JD = r \Rightarrow IB = 3r$, chiều cao của thùng là $IJ = h$. Ta có

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 54\sqrt{3}\pi \Rightarrow R = 3\sqrt{3}; \quad \frac{3}{2}h = 2R = 6\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}.$$

Xét hai tam giác đồng dạng EIB và EJC :

$$\frac{EJ}{EI} = \frac{JC}{IB} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow EJ = \frac{1}{3}IJ = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \text{ suy ra } IE = 6\sqrt{3}.$$

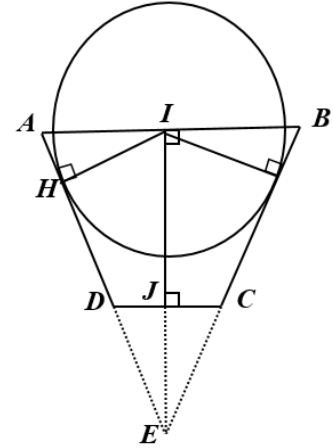
$$\text{Tam giác } IAE \text{ vuông tại } I \text{ có: } \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{27} = \frac{1}{9r^2} + \frac{1}{108} \Leftrightarrow r = 2.$$

$$\text{Thể tích của thùng nước là: } V_1 = \frac{1}{3}\pi IA^2 \cdot IE - \frac{1}{3}\pi JD^2 \cdot JE \Rightarrow V_1 = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích nước còn lại trong thùng là } V = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}.$$

- Câu 77.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \geq b$, $a \geq c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là
- A. $1 + \sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $3 + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC .

$$\text{Vì } \begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH.$$

Tam giác OBC vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Tam giác AOH vuông tại O có:

$$AH^2 = OA^2 + OH^2 = a^2 + \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

$$\text{Tam giác } OBC \text{ có } BC = \sqrt{b^2 + c^2} \text{ nên } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

Diện tích toàn phần của hình chóp $O.ABC$ là:

$$S_{tp} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} + S_{ABC} = \frac{1}{2} (ab + bc + ca + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}).$$

$$\text{Dễ thấy thể tích khối chóp } O.ABC \text{ là } V = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{a}{r} &= \frac{2S_{tp}}{bc} = \frac{ab + bc + ca + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{bc} \\ &= \frac{a}{c} + 1 + \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + 1 + \frac{a^2}{b^2}} \geq 1 + 1 + 1 + \sqrt{1 + 1 + 1} = 3 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

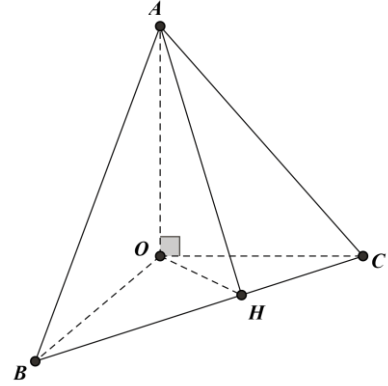
Câu 78. Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cùng tâm O , có bán kính lần lượt là $R_1 = 2$ và $R_2 = \sqrt{10}$.

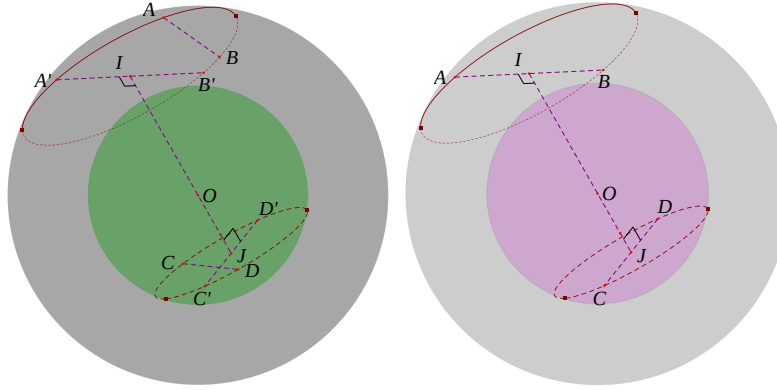
Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C, D nằm trên (S_2) . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $7\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.





Dựng mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD , cắt $(O; R_1)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm I . Dựng mặt phẳng (Q) chứa CD và song song với AB , cắt $(O; R_2)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm J .

Dựng hai đường kính $A'B', C'D'$ lần lượt của hai đường tròn sao cho $A'B' \perp C'D'$ (Xem hình 1).

Khi đó $IJ = d(AB, CD) = d(A'B', C'D')$.

Xét tất cả các tứ diện có cạnh AB nằm trên (P) và CD nằm trên (Q) thì ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot IJ \cdot \sin(AB, CD) \leq \frac{1}{6} A'B' \cdot C'D' \cdot IJ \cdot 1 = V_{A'B'C'D'}.$$

Do đó ta chỉ cần xét các tứ diện có cặp cạnh đối $AB \perp CD$ và chúng có trung điểm I, J thẳng hàng với O (Xem hình 2).

Đặt $IA = x$, $0 < x \leq \sqrt{10}$; đặt $JC = y$, $0 < y \leq 2$. Ta có: $OI = \sqrt{10 - x^2}$, $OJ = \sqrt{4 - y^2}$.

Khi đó: $d(AB, CD) = IJ = OI + OJ = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot IJ = \frac{1}{6} \cdot 2x \cdot 2y \cdot (\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}) = \frac{2}{3} xy (\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2})$$

$$\text{Trong đó: } \sqrt{10 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{10 - x^2} \leq \frac{14 - x^2}{4}; 1 \cdot \sqrt{4 - y^2} \leq \frac{5 - y^2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} \leq \frac{24 - x^2 - 2y^2}{4} \leq \frac{24 - 2\sqrt{2}xy}{4} = \frac{12 - \sqrt{2}xy}{2}.$$

$$\text{Ta được: } V_{ABCD} \leq \frac{2}{3} xy \cdot \frac{12 - \sqrt{2}xy}{2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (\sqrt{2}xy)(12 - \sqrt{2}xy) \leq \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}xy + 12 - \sqrt{2}xy}{2} \right)^2 = 6\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} 0 < x \leq \sqrt{10}, & 0 < y \leq 2 \\ \sqrt{10 - x^2} = 2 \\ \sqrt{4 - y^2} = 1 \\ x^2 = 2y^2 \\ \sqrt{2}xy = 12 - \sqrt{2}xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}. \text{ Vậy } \boxed{\max V_{ABCD} = 6\sqrt{2}}.$$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3: MẶT CẦU, KHỐI CẦU

1C	2C	3B	4B	5C	6C	7A	8A	9D	10B
11C	12B	13B	14A	15D	16B	17D	18C	19B	20A
21B	22B	23B	24C	25D	26A	27A	28C	29A	30A
31B	32B	33A	34B	35A	36A	37B	38D	39A	40B
41A	42A	43A	44C	45C	46D	47A	48B	49B	50B
51C	52A	53D	54B	55D	56B	57A	58A	59A	60A
61D	62D	63A	64C	65C	66B	67B	68C	69B	70C
71C	72B	73D	74B	75A	76C	77D	78D		

HÌNH HỌC 12

MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

MỤC LỤC

BÀI 1. MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN.....	trang 01
PHẦN I. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	trang 01
Mặt nón, hình nón và các yếu tố liên quan	trang 01
Hình nón cắt và khối nón cắt.....	trang 02
Khối ghép được tạo bởi hai hình nón chung đáy.....	trang 02
Thiết diện qua trục của hình nón.....	trang 03
Thiết diện vuông góc với trục hình nón	trang 04
Thiết diện qua đỉnh hình nón và không qua trục hình nón	trang 04
Hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp đều.....	trang 05
PHẦN II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ BÀI TẬP.....	trang 07
Dạng 1. Mặt nón và các yếu tố liên quan.....	trang 07
Dạng 2. Sự hình thành của mặt nón, hình nón	trang 10
Dạng 3. Thiết diện qua trục của hình nón.....	trang 13
Dạng 4. Thiết diện qua đỉnh và không chứa trục của hình nón	trang 15
Dạng 5. Thiết diện vuông góc với trục của hình nón	trang 19
Dạng 6. Hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình đa diện	trang 22
Dạng 7. Max-min và bài toán thực tế	trang 26
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1: MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN	trang 29
BÀI 2. MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ.....	trang 30
PHẦN I. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	trang 30
Mặt trụ và các yếu tố liên quan	trang 30
Thiết diện vuông góc với trục hình trụ.....	trang 30
Thiết diện qua trục hình trụ.....	trang 31
Hình trụ cắt (hay phần trụ)	trang 31
Hình nêm.....	trang 32
Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều.....	trang 32
Hình trụ nội tiếp lăng trụ tam giác đều.....	trang 32
Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tứ giác đều.....	trang 33
Hình trụ nội tiếp lăng trụ tứ giác đều	trang 33
Hình trụ ngoại tiếp hình nón.....	trang 33
Hình trụ nội tiếp hình nón.....	trang 34
PHẦN II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ BÀI TẬP.....	trang 34
Dạng 1. Hình trụ và các yếu tố cơ bản	trang 34
Dạng 2. Sự hình thành mặt trụ, khối trụ	trang 37
Dạng 3. Thiết diện qua trục của hình trụ	trang 40
Dạng 4. Thiết diện song song với trục hình trụ.....	trang 42

Dạng 5. Thiết diện nghiêng so với trục hình trụ	trang 45
Dạng 6. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp hình đa diện, hình nón	trang 49
Dạng 7. Hình đa diện có tất cả cạnh chứa trong hình trụ	trang 55
Dạng 8. Max-min và bài toán thực tế	trang 56
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2: MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ	trang 63
BÀI 3. MẶT CẦU, KHỐI CẦU	trang 64
PHẦN I. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	trang 64
Mặt cầu và các công thức liên quan	trang 64
Điểm đối với mặt cầu	trang 64
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng	trang 64
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng	trang 65
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp	trang 66
Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có ba cạnh đôi một vuông góc	trang 66
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có các đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới một góc vuông.....	trang 67
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy	trang 67
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều	trang 68
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc mặt đáy	trang 69
Mặt cầu nội tiếp hình chóp tam giác đều	trang 70
Mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều	trang 71
Mặt cầu ngoại tiếp hình bát diện đều.....	trang 72
Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều.....	trang 72
Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật	trang 72
Mặt cầu nội tiếp hình lập phương	trang 73
Mặt cầu nội tiếp hình nón.....	trang 73
Công thức liên quan đến chòm cầu	trang 74
PHẦN II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ BÀI TẬP.....	trang 74
Dạng 1. Mặt cầu, khối cầu và các yếu tố cơ bản.....	trang 74
Dạng 2. Mặt cầu và bài toán thực tế.....	trang 76
Dạng 3. Giao tuyến giữa mặt cầu và mặt phẳng.....	trang 78
Dạng 4. Mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp và lăng trụ.....	trang 79
Dạng 5. Mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình nón, hình trụ	trang 87
MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO MẶT CẦU	trang 91
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3: MẶT CẦU, KHỐI CẦU.....	trang 97