

Câu 1. (6,0 điểm)

a) Giải phương trình $(1-4x)\sqrt{x^2+16}+2x^2+2x+31=0$.

b) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x} \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=m+\sqrt{y+3-x^2} \end{cases}$$
 (m là tham số). Tìm tất cả

các giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình trên có nghiệm.**Câu 2. (4,0 điểm)**

Trong hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A , gốc tọa độ O là trung điểm của cạnh BC . Đường phân giác trong góc B có phương trình $(d): x+2y-5=0$, đường thẳng AC đi qua điểm $I(6;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($BC=a, CA=b, AB=c$), đường cao AH , I là điểm thuộc đoạn AH sao cho $AI=2IH$.

a) Chứng minh rằng $a^2\overline{IA}+2b^2\overline{IB}+2c^2\overline{IC}=\vec{0}$

b) Biết góc $\angle ACB=30^\circ$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $k=2MA+3MB+\sqrt{7}MC$, với M là điểm bất kỳ trong mặt phẳng chứa tam giác.

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x^2+x+1}$ (m là tham số). Tìm m để với mọi a,b,c thì

$f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2-mxy+y^2+1=0$ có nghiệm nguyên dương.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^4-a^2+2ab+4}}+\frac{1}{\sqrt{b^4-b^2+2bc+4}}+\frac{1}{\sqrt{c^4-c^2+2ca+4}}$$

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

NHÓM TOÁN VDC

Câu 1 a: Đặt $t = \sqrt{x^2 + 16} \geq 4$, ta có phương trình: $2t^2 + (1 - 4x)t + 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)(t - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2x - 1 \end{cases} \quad (l)$$

Với $t = 2x - 1$, thì: $\sqrt{x^2 + 16} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Câu 1b: Đk $0 \leq x \leq 3; y \geq 0$.

Nếu $x = y = 0$, khi đó: $1 + \sqrt{3} = m + \sqrt{3} \Leftrightarrow m = 1 \in \mathbb{Z}$, thỏa mãn.

Nếu $x, y \neq 0$, PT một được viết lại: $\sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{y^2 + 3} + 2(\sqrt{2x} - \sqrt{y}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - y^2}{\sqrt{4x^2 + 3} + \sqrt{y^2 + 3}} + \frac{2(2x - y)}{\sqrt{2x} + \sqrt{y}} = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = m + \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = m (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \geq 4 \Rightarrow t \geq 2$$

$$\text{Mặt khác: } t^2 = 4 + 2\sqrt{4 - (x-1)^2} \leq 8 \Rightarrow t \leq 2\sqrt{2}. \text{ Hay: } 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó ta có } t - \frac{t^2 - 4}{2} = m \Leftrightarrow 2m = -t^2 + 2t + 4 (**), \text{ với } 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = -t^2 + 2t + 4, t \in [2; 2\sqrt{2}]$$

Lập bảng biến thiên, phương trình (**) có nghiệm khi:

$$4\sqrt{2} - 4 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2.$$

Câu 2: Đường thẳng qua O vuông góc với phân giác góc B có phương trình tổng quát: $(\Delta): 2x - y = 0$.

Gọi H là giao điểm của (Δ) và (d) , thì tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình: $\Rightarrow H(1; 2)$.

Đường thẳng (Δ) cắt AB tại K , khi đó O, K đối xứng nhau qua H , do đó: $K(2; 4)$

+ Gọi điểm $B(5 - 2b; b)$, do O là trung điểm BC nên $C(2b - 5; -b)$.

+ $\overline{KB}(3 - 2b; b - 4)$ vuông góc với $\overline{IC}(2b - 11; -b - 2)$, khi đó:

$$\overline{KB} \cdot \overline{IC} = 0 \Leftrightarrow (3 - 2b)(2b - 11) + (b - 4)(-b - 2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$

+ Với $b = 1 \Rightarrow B(3; 1); C(-3; -1)$.

- Đường thẳng AB đi qua B, K nên có phương trình tổng quát: $3x + y - 10 = 0$.

- Đường thẳng AC đi qua C, I nên có phương trình tổng quát: $x - 3y = 0$.

+ A là giao điểm của hai đường thẳng AB, AC nên có tọa độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3; 1)$

loại do trùng với điểm B

+ Với $b = 5 \Rightarrow B(-5; 5); C(5; -5)$.

- Đường thẳng AB đi qua B, K nên có phương trình tổng quát: $x + 7y - 30 = 0$.

- Đường thẳng AC đi qua C, I nên có phương trình tổng quát: $7x - y - 40 = 0$.

+ A là giao điểm của hai đường thẳng AB, AC nên có tọa độ là nghiệm của hệ: $\Rightarrow A\left(\frac{31}{5}; \frac{17}{5}\right)$.

Câu 3. Ta có: $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AH} = \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{BH})$.

$$\text{Mặt khác } \overline{BH} \cdot \overline{BC} = \overline{BA}^2 \Leftrightarrow \overline{BH} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BH} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2} \cdot \overline{BC} = \frac{c^2}{a^2} \overline{BC}$$

$$\text{Do đó: } \overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AH} = \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{BH}) = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{2c^2}{3a^2} \cdot \overline{BC} = \frac{2}{3}(\overline{IB} - \overline{IA}) + \frac{2c^2}{3a^2}(\overline{IC} - \overline{IB})$$

$$\Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{2(a^2 - c^2)}{3a^2} \overline{IB} + \frac{2c^2}{3a^2} \overline{IC} - \frac{2a^2}{3a^2} \overline{IA}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2a^2}{3a^2}\right) \overline{IA} + \frac{2b^2}{3a^2} \overline{IB} + \frac{2c^2}{3a^2} \overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a^2 \overline{IA} + 2b^2 \overline{IB} + 2c^2 \overline{IC} = \vec{0} \text{ (đpcm)}$$

Do $\widehat{ACB} = 30^\circ$ nên $BC = 2c; CA = c\sqrt{3}$. Khi đó:

$$AH^2 = \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \frac{3c^4}{4c^2} \Rightarrow AH = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{3}; IH = \frac{1}{3}AH = \frac{c\sqrt{3}}{6}$$

Ngoài ra: $\overline{BH} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2 \Rightarrow \overline{BH} = \frac{c}{2} \Rightarrow \overline{CH} = \frac{3c}{2}$. Theo định lý Pitago thì:

$$\overline{IB} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{IH}^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{36}} = \frac{c\sqrt{3}}{3}; \overline{IC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{IH}^2} = \sqrt{\frac{9c^2}{4} + \frac{3c^2}{36}} = \frac{c\sqrt{21}}{3}$$

Ta thấy:

$$a^2.IA.MA + 2b^2.IB.MB + 2c^2.IC.MC \geq a^2.\overline{IA}.\overline{MA} + 2b^2.\overline{IB}.\overline{MB} + 2c^2.\overline{IC}.\overline{MC}$$

Lại có:

$$\begin{aligned} a^2.\overline{IA}.\overline{MA} + 2b^2.\overline{IB}.\overline{MB} + 2c^2.\overline{IC}.\overline{MC} &= \\ &= a^2.\overline{IA}.\left(\overline{IA} - \overline{IM}\right) + 2b^2.\overline{IB}.\left(\overline{IB} - \overline{IM}\right) + 2c^2.\overline{IC}.\left(\overline{IC} - \overline{IM}\right) \\ &= a^2.IA^2 + 2b^2.IB^2 + 2c^2.IC^2 - \overline{IM}\left(a^2.\overline{IA} + 2b^2.\overline{IB} + 2c^2.\overline{IC}\right) \\ &= a^2.IA^2 + 2b^2.IB^2 + 2c^2.IC^2 \quad (\text{Theo câu a}) \end{aligned}$$

$$\text{Hay: } 4c^2 \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3} \cdot MA + 2 \cdot 3c^2 \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3} \cdot MB + 2c^2 \cdot \frac{c\sqrt{21}}{3} \cdot MC \geq 4c^2 \cdot \frac{3c^2}{9} + 2 \cdot 3c^2 \cdot \frac{3c^2}{9} + 2c^2 \cdot \frac{21c^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2MA + 3MB + \sqrt{7}MC \geq 4\sqrt{3}c$$

Dấu bằng xảy ra khi M trùng I. Vậy $\min k = 4\sqrt{3}c$.

Câu 4a. Đặt $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1}$.

$f(a); f(b); f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác với $\forall a, b, c$ thì

$$y > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

+ $f(a); f(b); f(c)$ là độ dài ba cạnh tam giác nên điều kiện tương đương với: $\min y + \min y > \max y$

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow y(x^2 + x + 1) = x^2 + mx + 1$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x^2 + (y-m)x + y-1 = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $y = 1$ thỏa mãn

+ Nếu $y \neq 1$, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$(y-m)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y+m-2)(3y-m-2) \leq 0 \quad (2)$$

+ Trường hợp 1: $\frac{m+2}{3} \geq 2-m \Leftrightarrow m \geq 1$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow -m+2 \leq y \leq \frac{m+2}{3} \Rightarrow \max y = \frac{m+2}{3}; \min y = -m+2$$

$$\text{Vậy (*) } -2m+4 > \frac{m+2}{3} \Leftrightarrow m < \frac{10}{7} \Rightarrow 1 \leq m < \frac{10}{7}$$

+ Trường hợp 2: $\frac{m+2}{3} < 2-m \Leftrightarrow m < 1$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{m+2}{3} \leq y \leq -m+2 \Rightarrow \max y = -m+2; \min y = \frac{m+2}{3}$$

$$\text{Vậy (*) } \frac{2m+4}{3} > -m+2 \Leftrightarrow m > \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} < m < 1$$

Kết hợp hai trường hợp, các giá trị tham số m thỏa mãn là: $\frac{2}{5} < m < \frac{10}{7}$

Câu 4b. Trong tất cả các nghiệm của phương trình, giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình và thỏa mãn: $(x_0 + y_0)$ nhỏ nhất với $x_0 \leq y_0$ (do vai trò bình đẳng của x, y) (1)

+ Xét phương trình bậc hai ẩn y : $y^2 - mx_0y + 1 + x_0^2 = 0$ (2)

Ta thấy y_0 là một nghiệm, gọi y_1 là nghiệm còn lại. Khi đó theo định lý Viet:

$$\begin{cases} y_0 + y_1 = mx_0 \\ y_0 \cdot y_1 = x_0^2 + 1 \end{cases} \text{ ta thấy } y_1 \text{ nguyên dương, từ (1) suy ra: } y_0 \leq y_1$$

+ Nếu $y_0 = x_0$ thì từ phương trình ban đầu ta có $m = 2 + \frac{1}{x_0^2}$.

Do $m \in \mathbb{N}^*$ nên $x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow m = 3$.

Ngược lại với $m = 3$ thì phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

+ Nếu $y_0 = y_1$ (PT (2) có nghiệm kép), khi đó:

$$y_0 \cdot y_1 = y_0^2 = x_0^2 + 1 \Rightarrow (y_0 - x_0)(y_0 + x_0) = 1$$

Do $0 < x_0 \leq y_0$, nên $y_0 - x_0 = y_0 + x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 0; y_0 = 1$, loại do $x \in \mathbb{N}^*$

+ Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ thì $y_0 \geq x_0 + 1; y_1 \geq x_0 + 2$

Suy ra: $x_0^2 + 1 = y_0 \cdot y_1 \geq (x_0 + 1)(x_0 + 2) \Rightarrow x_0^2 + 1 \geq x_0^2 + 3x_0 + 2 \Leftrightarrow 3x_0 + 1 \leq 0$, không xảy ra.

Vậy : $m = 3$

Câu 5. Xét: $a^4 - a^2 - 2a + 2 = a^2(a^2 - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)^2(a^2 + 2a + 2) \geq 0$

Dấu = xảy ra khi $a = 1$.

Nên: $a^4 - a^2 - 2a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - a^2 + 4 \geq 2(a + 1) \Leftrightarrow a^4 - a^2 + 2ab + 4 \geq 2(ab + a + 1)$

Do đó: $\frac{1}{\sqrt{a^4 - a^2 + 2ab + 4}} \leq \frac{1}{\sqrt{2(ab + a + 1)}}$

Tương tự, suy ra: $P \leq \frac{1}{\sqrt{2(ab + a + 1)}} + \frac{1}{\sqrt{2(bc + b + 1)}} + \frac{1}{\sqrt{2(ca + c + 1)}}$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$P \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3 \left(\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} \right)}.$$

Lại có $abc = 1$ nên: $P \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3 \left(\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{abc}{bc + ab^2c + abc} + \frac{abc}{ca + c + abc} \right)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3 \left(\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{a}{1 + ab + a} + \frac{ab}{a + 1 + ab} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3 \left(\frac{1 + a + ab}{ab + a + 1} \right)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a = b = c = 1$. Vậy: $P_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.