

CHUYÊN ĐỀ DẪY SỐ**ÔN DỰ TUYỂN 2020 – 2021****LẦN 1****Nội dung:**

1. Tính giới hạn theo định nghĩa, định lý kẹp, định lý Weierstrass, dùng công thức tổng quát...
2. Các tính chất, đánh giá xung quanh dãy số.

Bài 1: Cho dãy số (a_n) thỏa $a_1 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$. Tính $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Lời giải:

Từ giả thiết, ta có (a_n) là dãy dương và tăng ngặt, suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_n < na_n$ và điều này suy

$$\text{ra } a_{n+1} > a_n + \frac{1}{na_n} \Rightarrow a_{n+1} > a_1 + \frac{1}{a_n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Giả sử dãy (a_n) bị chặn trên bởi M , suy ra $1 + \frac{1}{a_n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ cũng bị chặn, hay

$$1 + \frac{1}{M} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \text{ cũng bị chặn và điều này vô lý.}$$

Vậy $\lim a_n = +\infty$ và từ trên ta có đánh giá: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n(a_1 + \dots + a_n)} \rightarrow 1$ hay $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Bài 2: Cho dãy số (x_n) thỏa $x_{n+2} = \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{2x_n - x_{n+1}}, x_1 > x_2 > 0$. Tính $\lim \left(n\sqrt{n}(\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n})\right)$.

Lời giải: Từ đề cho, đặt $y_n = \frac{1}{x_n}$ ta suy ra công thức tổng quát cho y_n và suy ra công

thức cho $x_n = \frac{x_1 \cdot x_2}{(x_1 - x_2)n + 2x_1 - x_2}$ và suy ra kết quả.

Bài 3: Cho dãy số (x_n) thỏa $x_1, x_2 > 0$ và $x_{n+2} = \frac{4^{n+1}}{2^n + x_n} + 2^{n+1}$, tính $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Lời giải: Đặt $y_n = \frac{x_n}{2^n}$ và từ giả thiết suy ra $y_{n+2} = \frac{1}{1+y_n} + \frac{1}{2}$. Từ đây cho ta

$$|y_{n+2} - 1| = |y_n - 1| \frac{1}{y_n + 1} < |y_n - 1| \frac{2}{3}, \forall n = 1; 2; 3; \dots \text{ do } y_n > \frac{1}{2} \text{ với mọi giá trị } n \text{ (dãy dương)}. \text{ Từ đây}$$

$$\text{suy ra } \lim y_n = 1 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{2^n} = 1 \text{ và } \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \left(\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x_n} \cdot 2 \right) = 2.$$

Bài 4: Cho hàm số $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, nghịch biến trên D và dãy (x_n) xác định bởi $x_{n+1} = f(x_n)$ và thỏa điều kiện:

$$1/ \ x_1 < x_3, x_1 < x_2 \text{ và } (x_1; x_2) \subset D$$

$$2/ \begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất } a = b = l \text{ trên } (x_1; x_2).$$

Chứng minh dãy đã cho có giới hạn.

Lời giải:

Đầu tiên, ta chứng minh $x_n \in (x_1; x_2) \subset D, \forall n$. Thật vậy, có thể xét quy nạp không hoàn toàn như sau

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 > x_3 \Rightarrow x_3 \in (x_1; x_2) \Rightarrow x_3 < x_4 \text{ và } x_1 < x_3 \Rightarrow x_2 > x_4 \Rightarrow x_4 \in (x_1; x_2) \Rightarrow x_3 < x_5.$$

Từ đó, ta có $x_3 < x_5, x_3 < x_4$. Quá trình này tiếp diễn liên tục cho ta điều phải chứng minh.

Xét dãy $x_{2n} = f(f(x_{2n-2})), x_{2n+1} = f(f(x_{2n-1}))$. Từ chứng minh trên ta có (x_{2n-1}) là dãy tăng và (x_{2n}) là dãy giảm. Đồng thời $(x_{2n-1}) \subset (x_1; x_2), (x_{2n}) \subset (x_1; x_2)$ nên hai dãy đã cho hội tụ.

Đặt $a = \lim x_{2n}, b = \lim x_{2n-1}$. Lấy lim hai vế của $x_{n+1} = f(x_n)$ ta có hệ

$$\begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases}$$

Vậy, theo giả thiết, hệ có nghiệm duy nhất $a = b = l$ nên $\lim x_n = l$.

Bài 5: Tìm giới hạn của dãy số (x_n) biết

$$x_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}}$$

Lời giải:

Với $1 \leq m \leq n-1$, đặt $a_m = \sqrt{1+m\sqrt{1+(1+m)\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$ ta có

$$\begin{aligned} a_m^2 &= 1 + ma_{m+1} \Leftrightarrow a_m^2 - (m+1)^2 = ma_{m+1} - m^2 - 2m \\ &\Leftrightarrow a_m^2 - (m+1)^2 = m(a_{m+1} - (m+2)) \end{aligned}$$

Suy ra

$$|a_m - (m+1)| \leq \frac{m|a_{m+1} - a_{m+2}|}{|a_m + (m+1)|} \leq \frac{m}{m+2} |a_{m+1} - m+2|.$$

Từ đó $|a_2 - 3| \leq \frac{n-1}{n+1} |a_{n-1} - n| < \frac{n-1}{n+1} |\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}} - n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

Bài 6: Cho dãy $u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{2}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2}$.

a. Tính giới hạn của dãy đã cho.

b. Chứng minh $\sqrt{n+2} - 2 < \frac{1}{2} \sum_{i=3}^n \frac{1}{\sqrt{iu_i}} < \sqrt{n-1} - 1$, với mọi giá trị n nguyên dương lớn hơn 3.

Lời giải:

a.

Cách 1: Quy nạp kết quả $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ và đánh giá

$$|u_{n+2} - 1| \leq |u_n - 1| \frac{1}{u_n + 2} + |u_{n+1} - 1| \frac{1}{u_{n+1} + 2} \leq \frac{2}{5} |u_n - 1| + \frac{2}{5} |u_{n+1} - 1|$$

Sử dụng bổ đề và suy ra kết quả.

Cách 2: Từ biến đổi $|u_{n+2} - 1| = |u_{n+1} - u_n| \cdot \frac{1}{u_n + 2}$ ta quy nạp $1 - \frac{1}{n} < u_n < 1 + \frac{1}{n}, \forall n > 2$ ta có kết quả.

b. Thực hiện đánh giá: $\sqrt{n-1} < \sqrt{nu_n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{nu_n}} < \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$ với mọi n nguyên

dương lớn hơn 2. Lại chú ý: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ và tương tự ta có kết quả.

Câu 7: Cho dãy $S_1 = 1, S_{n+1} = \frac{(2 + S_n)^2}{4 + S_n}$. Biết rằng $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ với (a_n) là một dãy nào đó,

hãy chứng minh $a_n \geq \frac{4}{\sqrt{9n+7}}$.

(China Girl MO 2016 day 2)

Lời giải: Ta có $a_1 = S_1 = 1, a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{4}{4 + S_n}$. Vậy $\frac{4}{a_{n+1}} - \frac{4}{a_n} = S_n - S_{n-1} = a_n$ hay có công

thức tính là

$$\frac{4}{a_{n+1}} = a_n + \frac{4}{a_n}$$

Bình phương 2 vế và cộng lại, đồng thời dùng AM – GM để có $a_n \leq 1, \forall n = 1, 2, 3, \dots$. Ta có kết quả

$$\frac{16}{a_{n+1}^2} = \frac{16}{a_1^2} + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 8n \leq 9(n+1) + 7$$

Từ đây có kết quả.

Câu 8: Dãy số thực (u_n) thỏa $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Đặt dãy $y_n = x_{n+1} - x_n$, chứng minh dãy

đã cho có giới hạn hữu hạn.

Lời giải:

Ta có CTTQ: $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)x_n$ và đánh giá

$$x_{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots\right)x_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}x_n = \frac{n}{n-1}x_n$$

Và đánh giá $x_n < 4(n-1)$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3} x_{n+1} - \frac{n^2 + n + 1}{n^3} x_n \\
&= \frac{n^2 + 3n + 3}{(n+1)^3} \cdot \frac{(n+1)(n^2 + 1)}{n^3} x_n - \frac{n^2 + n + 1}{n^3} x_n \\
&= \frac{x_n}{n^3} \left[\frac{(n^2 + 3n + 3)(n^2 + 1)}{(n+1)^2} - (n^2 + n + 1) \right] \\
&= \frac{x_n}{n^3} \left[\frac{n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 3 - (n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^2} \right] \\
&= \frac{x_n}{n^3} \left[\frac{2}{(n+1)^2} \right] > 0
\end{aligned}$$

Hay (y_n) là một dãy tăng và bị chặn trên bởi 4 nên có giới hạn hữu hạn.

Bài 9: Cho dãy (a_n) thỏa $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{n}{a_n} \right)$. Tính $[a_{2017}]$ và $\lim \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

(Kỳ yếu Olympic sinh viên 2017).

Lời giải:

Cách 1: Quy nạp $\sqrt{n} \geq a_n \geq \sqrt{n-1}, \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Cách 2: Ta có chặn dưới: $a_{n+1} \geq \sqrt{n}$ theo AM – GM.

Từ đây có đánh giá: $a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{n-1}}$ và ta đặt dãy $b_n = \frac{n}{\sqrt{n-1}}$ thì đây là dãy tăng (xét n từ 2 trở lên)

$$\text{Khi đó: } a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n \leq \frac{1}{2^2} a_{n-1} + \frac{1}{2^2} b_{n-1} + \frac{1}{2} b_n \dots \leq \frac{1}{2^{n-1}} a_2 + b_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

Hay $a_{n+1} \leq \frac{a_2}{2^{n-1}} + b_n = \frac{a_2}{2^{n-1}} + \frac{n}{\sqrt{n-1}}$. Đến đây tính được phần nguyên và giới hạn.

Nhận xét: Từ cách 2, ta có một bài toán mở rộng sau

Cho hai dãy $(a_n), (b_n)$ thỏa $b_n < a_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n + b_n), \forall n = 1; 2; 3; \dots$ và (b_n) là dãy tăng. Tính $\lim(a_{n+1} - b_n)$.

Từ cách 2, ta đánh giá kết quả $b_n \leq a_{n+1} \leq \frac{a_2}{2^{n-1}} + b_n$.

Bài 10: Dãy số (x_n) thỏa $x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}, x_1 > 0$. Tính $\lim \frac{x_n}{n}, \lim (x_n - n)$.

Lời giải:

Quy nạp cho ta $x_n \geq n$ với mọi giá trị $n > 1$. Từ đây suy ra $x_{n+1} \leq x_n + n - 2$

$$\text{Và } 1 \leq \frac{x_{n+1}}{n+1} \leq \frac{x_n + n - 2}{n+1}.$$

$$\text{Xét: } x_{n+1} - (n+1) = (x_n - n) \left(\frac{x_n - 1}{x_n} \right) \leq (x_n - n) \frac{x_{n-1}}{x_n} \text{ do } x_n = x_{n-1} + \frac{n-1}{x_{n-1}} \leq x_{n-1} - 1.$$

Từ đây suy ra $0 \leq x_{n+1} - (n+1) \leq \frac{x_1(x_2 - 2)}{n}$ và suy ra kết quả.

Bài 11: Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{3x_{n-1} + 2}{10x_n + 2x_{n-1} + 2}, n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Lời giải: Đề xuất DHBTB 2019 – Thái Nguyên

$$\text{Xét hàm số } f(x, y) = \frac{3x+2}{10y+2x+2}; x > 0, y > 0.$$

$$\text{Ta có } f'_y = \frac{-10(3x+2)}{(10y+2x+2)^2} < 0; f'_x = \frac{30y+2}{(10y+2x+2)^2} > 0; \forall x > 0, \forall y > 0. \text{ Nên hàm số này đồng biến}$$

theo x và nghịch biến theo y .

$$2 - x_{n+1} = \frac{20x_n + x_{n-1} + 2}{10x_n + 2x_{n-1} + 2} > 0, \forall n \geq 2.$$

Vậy $0 < x_n < 2, \forall n \geq 1$. Vậy dãy đã cho bị chặn.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp (x_{2n+1}) tăng và dãy (x_{2n}) giảm.

$$\text{Thật vậy, } x = \frac{1}{6} > x_1 > x_3; x_4 = \frac{15}{17} < x_2.$$

$$\text{Giả sử } x_{2n+1} > x_{2n-1}.$$

Ta có $x_{2n+3} = f(x_{2n+1}, x_{2n+2}) > f(x_{2n-1}, x_{2n+2}) > f(x_{2n-1}, x_{2n}) = x_{2n+1}$.

$x_{2n+2} = f(x_{2n}, x_{2n+1}) < f(x_{2n}, x_{2n-1}) < f(x_{2n-2}, x_{2n-1}) = x_{2n}$.

Vậy tồn tại $\lim x_{2n+1} = a, \lim x_{2n} = b$. Ta có
$$\begin{cases} a = \frac{3a+2}{10b+2a+2} \\ b = \frac{3b+2}{10a+2b+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1+\sqrt{97}}{24} \\ a+b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nếu $a+b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} - a$.

Khi đó $4a^2 - 2a + 1 = 0$ vô nghiệm, vậy $\lim x_n = \frac{1+\sqrt{97}}{24}$.

Bài 12: Cho các dãy số thực $(a_n), (b_n), (c_n)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0$,

ii) $a_n = a_{n-1} + \frac{c_{n-1}}{n}, b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n}, c_n = c_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n}$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng $\lim \sqrt{n} (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - a_n)^2 = 0$.

Lời giải: Đề đề nghị DHBTB 2019 – chuyên Bình Long, Bình Phước.

Đặt $u_n = (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - a_n)^2, \forall n$. Ta sẽ ước lượng giá trị của u_n . Từ công thức đã cho, ta có

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= a_{n-1} - b_{n-1} + \frac{c_{n-1} - a_{n-1}}{n} \\ \Rightarrow (a_n - b_n)^2 &= (a_{n-1} - b_{n-1})^2 + \frac{(c_{n-1} - a_{n-1})^2}{n^2} + \frac{2(a_{n-1} - b_{n-1})(c_{n-1} - a_{n-1})}{n} \end{aligned}$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự với $(b_n - c_n)^2, (c_n - a_n)^2$ rồi cộng lại, chú ý rằng

$$\begin{aligned} (x-y)(z-x) + (y-z)(x-y) + (z-x)(y-z) \\ = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]. \end{aligned}$$

Suy ra $u_n = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) u_{n-1} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2} u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Từ đây dùng đánh giá làm trội

$$\frac{n^2 - n + 1}{n^2} \leq \frac{n+1}{n+2}, \forall n \geq 2, \text{ ta có } u_n \leq \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{3}{4} u_3 = \frac{3u_3}{n+2} \text{ với } n \geq 3.$$

Do đó $0 \leq \sqrt{n} u_n \leq \sqrt{n} \left(\frac{3u_3}{n+2} \right)$. Dễ thấy $\lim \sqrt{n} \left(\frac{3u_3}{n+2} \right) = 0$ nên theo nguyên lý kẹp, ta có

$$\lim d_n \sqrt[3]{n} = 0.$$

Bài 13: Cho số thực $\alpha \in (1; 2)$, xét dãy số dương (u_n) thỏa $u_n^\alpha \geq u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ với mọi $n > 1$.

Chứng minh tồn tại hằng số C dương sao cho $u_n \geq Cn, \forall n$.

Lời giải: TST Nghệ An 2021

Nếu dùng ý tưởng quy nạp, ta đưa đến kết quả $\frac{n-1}{2n^{\alpha-1}} \geq C^{\alpha-1}$, bằng cách xét hàm số ta có

$$\frac{n-1}{2n^{\alpha-1}} \geq \frac{1}{2^\alpha} \text{ và cần chọn } C \text{ sao cho } C \leq \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

Và để hoàn tất giả thiết đầu của quy nạp, ta chọn $C = \min \left\{ u_1, \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \right\}$.

Bài 14: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi:

$$a_1 = \frac{1}{2}, (a_{n+1} + a_n)(2 - a_n) = 1, \forall n \geq 1.$$

a) Tìm giới hạn của dãy (a_n) khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Chứng minh rằng $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$

Lời giải: Đề đề nghị DHTB Quảng Nam.

a. + Biến đổi $(a_{n+1} + a_n)(2 - a_n) = 1$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + a_n = \frac{1}{2 - a_n}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} - a_n = \frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{2-a_n} = \frac{(a_n-1)^2}{2-a_n}, \forall n \geq 1$$

$$+ a_1 = \frac{1}{2} \in [0,1], a_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1/4}{3/2} = \frac{1}{6} \in [0,1]$$

+ Nhận xét: $a_n \in [0,1]$. Ta chứng minh bằng quy nạp

$$\text{Giả sử } a_n \in [0,1], \text{ ta có: } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{(a_n-1)^2}{2-a_n} \geq 0 \\ a_{n+1} = \frac{(a_n-1)^2}{2-a_n} \leq \frac{1}{2-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} \in [0,1]$$

Vậy $a_n \in [0,1], \forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} + \text{ Với } a_n \in [0,1], \text{ ta có: } & \left| a_{n+1} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{(a_n-1)^2}{2-a_n} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right| \\ & = \left| \frac{2a_n^2 - (2+\sqrt{2})a_n + (2\sqrt{2}-2)}{2(2-a_n)} \right| = \left| \frac{1}{2(2-a_n)} [2a_n^2 - (2+\sqrt{2})a_n + 2\sqrt{2}-2] \right| \\ & = \left| \frac{1}{2(2-a_n)} \cdot 2 \left(a_n - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) \left(a_n - \sqrt{2} \right) \right| = \left| \left(\frac{a_n - \sqrt{2}}{2-a_n} \right) \left(a_n - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) \right| \\ & = \left| \frac{\sqrt{2}-a_n}{2-a_n} \right| \left| a_n - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \left| a_n - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right| < \dots < \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left| a_1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right| \\ & = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left| \frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{aligned}$$

Mà $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0$, vậy $\lim a_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ là giới hạn cần tìm.

b. Ta lại có: $(a_{n+1} + a_n)(2 - a_n) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1} + a_n} = 2 - a_n \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1} + a_n} - 1 = 1 - a_n$

Suy ra: $\sum_{k=1}^n (1 - a_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1} + a_k} - n$

$$\Leftrightarrow n - \sum_{k=1}^n a_k \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1})} - n = \frac{n^2}{a_1 + a_{n+1} + 2 \sum_{k=2}^n a_k} - n =$$

$$= \frac{n^2}{a_{n+1} - a_1 + 2 \sum_{k=1}^n a_k} - n \geq \frac{n^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k} - n \quad (\text{vì } a_1 \geq a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} - a_1 < 0)$$

$$n - \sum_{k=1}^n a_k \geq \frac{n^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k} - n$$

Đặt $x = \sum_{k=1}^n a_k$, khi đó: $(*) \Leftrightarrow n - x \geq \frac{n^2}{2x} - n$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4nx + n^2 \leq 0 \Leftrightarrow n \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq x \leq n \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{n} \geq \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \geq \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ (đpcm).

Bài 15: Cho hàm số $f_n(t) = t^3 + 3t^2 - \frac{12}{n^2}$

a) Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương, phương trình $f_n(t) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n dương

b) Tìm $\lim nx_n$ và $\lim (nx_n - 2)$

Lời giải

Xét hàm $f_n(t) = t^3 + 3t^2 - \frac{12}{n^2}$ liên tục trên $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow f'_n(t) = 3t^2 + 6t > 0 \Rightarrow f_n(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty); \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Mà } f_n(0) = \frac{-12}{n^2} < 0; f_n(2) = 20 - \frac{12}{n^2} > 0;$$

$$\Rightarrow f_n(0).f_n(2) < 0; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Mà $f_n(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow f_n(t) \text{ có nghiệm duy nhất } \in (0; +\infty); \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Từ cách chứng minh trên

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x_n < 2 \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\ x_n^3 + 3x_n^2 - \frac{12}{n^2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Mà } f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{8}{n^3} + \frac{12}{n^2} - \frac{12}{n^2} > 0 = f_n(x_n) \Rightarrow \frac{2}{n+1} < x_n$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n+1} < x_n < \frac{2}{n}; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{n+1} < n.x_n < 2; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \text{ nên áp dụng nguyên lý kẹp } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n.a_n = 2$$

$$\text{Đặt } a_n = n.x_n - 2; \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{a_n + 2}{n}; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
 x_n^3 + 3x_n^2 - \frac{12}{n^2} &= 0; \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \left(\frac{a_n+2}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{a_n+2}{n}\right)^2 - \frac{12}{n^2} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\
 \Leftrightarrow (a_n+2)^3 + 3n(a_n+2)^2 &= 12n \Leftrightarrow (a_n+2)^3 + 3n(a_n^2 + 4a_n) = 0 \\
 \Leftrightarrow na_n &= \frac{-(a_n+2)^3}{3(a_n+4)}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\
 \Rightarrow \lim na_n &= \lim \frac{-(a_n+2)^3}{3(a_n+4)} = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3} (\lim a_n = 0) \\
 \Rightarrow \lim n(nx_n - 2) &= \frac{-2}{3}
 \end{aligned}$$

Bài 16: Cho hai dãy $(u_n), (v_n)$ thỏa
$$\begin{cases} u_1 = a, v_1 = b \ (0 < a < b) \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n + u_n v_n}{v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1 + v_n + u_n v_n}{u_n} \end{cases}$$
, chứng minh dãy (u_n) hội tụ và

$$\lim v_n = +\infty.$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta xây dựng $\frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{v_{n+1}+1} = \frac{1}{u_1+1} - \frac{1}{v_1+1}$ và điều này suy ra dãy (u_n) bị chặn trên. Mặt khác, ta có hai dãy $(u_n), (v_n)$ đều là dãy tăng nên tồn tại giới hạn cho dãy (u_n) . Nếu (v_n) bị chặn trên thì tồn tại $\lim u_n = u, \lim v_n = v$ và điều này suy ra vô lý.

Bài 17: Cho dãy số (x_n) thỏa
$$\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{x_n^2 + 2}{x_n} \end{cases}$$
, tính giới hạn dãy đã cho.

Lời giải

Quy nạp cho ta, (x_n) dương

$$x_{n+1} = \frac{n}{2n-1} \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = \sqrt{2}; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\Rightarrow (x_n)$ bị chặn dưới bởi $\sqrt{2}$

Vậy ta cần chứng minh dãy đã cho là dãy giảm

Thật vậy, ta cần $x_{n+1} - x_n < 0$ hay

$$x_n > \sqrt{\frac{2n}{n-1}} \Leftrightarrow x_{n+1} > \sqrt{\frac{2n+2}{n}}$$

Mà $x_{n+1} > \frac{n}{2n-1} \cdot 2\sqrt{2}$ hay ta cần $4n^3 > (2n-1)^2(n+1) \Leftrightarrow 3n-1 > 0$ (đúng)

Vậy $\begin{cases} x_{n+1} < x_n \\ x_n > \sqrt{2}; \forall n \end{cases}$ nên dãy đã cho hội tụ

Từ đó lấy lim 2 vế ta được $\lim x_n = \sqrt{2}$

Bài 18: Dãy số (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_2 = 2; x_{n+2} = \frac{3x_{n+1} - x_n}{2} + \frac{4}{n^2}$. Chứng minh dãy đã cho có giới hạn.

Lời giải:

Quy nạp cho ta dãy tăng. Đặt $s_n = x_1 + \dots + x_n$ và cộng theo vế để có đánh giá

$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{2} - \frac{x_1}{2} + 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$ và lưu ý $x_{n+1} < x_{n+2}$ nên suy ra $x_{n+2} < 3 + 8\left(1 + 1 - \frac{1}{n}\right) < 19$ và suy ra kết quả.

Bài 19: Dãy (x_n) thỏa $x_1 = 1, x_n = \frac{2n-3}{2n} x_{n-1}$. Đặt $b_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, tìm $\lim b_n$.

Lời giải: Từ giả thiết cho ta $b_n = -2(n+1)a_{n-1} + 2a_1$ và sử dụng đánh giá

$$\sqrt{2n-1}\sqrt{2n-3} < \frac{1}{2}(2n-1+2n-3) = (2n-2) \text{ để suy ra } 0 < (n+1)a_n < (n+1)\frac{\sqrt{2n-1}\sqrt{3}}{(2n+2).(2n)} \text{ và}$$

$$\lim((n+1)a_n) = 0.$$

Bài 20: Cho dãy (x_n) thỏa $x_{n+1} = \frac{n}{x_n} + \frac{x_n}{n}$, tính $\lim(x_n - \sqrt{n})$.

Lời giải: Chú ý nghiệm phương trình $x = \frac{n}{x} + \frac{x}{n}$ là $\frac{n}{\sqrt{n-1}}$ đồng thời hàm số $f_n(x)$

nghịch biến trên $(0; n)$. Ta quy nạp $\frac{n}{\sqrt{n-1}} > x_n > \sqrt{n-2} + \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ và chú ý rằng từ đây thì

$n > x_n > \sqrt{n}$ nên $x_{n+1} = f_n(x_n) < f_n(\sqrt{n}) = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$ và đồng thời

$x_{n+1} = f_n(x_n) > f_n\left(\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right) = \frac{n}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ nên giả thiết quy nạp đúng.

Bài 19:

1. Dãy số (x_n) dương thỏa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$, đặt $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, chứng minh rằng $\lim S_n$ tồn tại.

2. Cho các dãy dương $(a_n), (b_n), (c_n)$ được xác định bởi

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{b_n c_n}}, b_{n+1} = b_n + \frac{1}{\sqrt{c_n a_n}}, c_{n+1} = c_n + \frac{1}{\sqrt{a_n b_n}}$$

Có dãy nào trong ba dãy trên hội tụ không?

Lời giải: Vì các dãy trên đều là dãy tăng nên

$a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{\sqrt{b_0 c_0}}, b_{n+1} \leq b_n + \frac{1}{\sqrt{a_0 c_0}}, c_{n+1} \leq c_n + \frac{1}{\sqrt{a_0 b_0}}$ và điều này suy ra $a_{n+1} \leq \frac{n+1}{\sqrt{b_0 c_0}} + a_0$, tương

tự cho các dãy kia. Từ đây cho ta $a_{n+1} > a_n + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{\sqrt{a_0 b_0}} + c_0\right)\left(\frac{n}{\sqrt{a_0 c_0}} + b_0\right)}} > a_n + \frac{\alpha}{n}, \forall n = 1; 2; 3; \dots$

với α là một hằng số có thể chọn được. Từ đây suy ra kết quả là cả ba dãy đều có giới hạn là vô cùng.

3. Dãy số (x_n) bị chặn dưới thỏa $x_1 = 3; x_2 = 1; x_{n+2} + x_n < 2x_{n+1} + \frac{1}{n^2}, \forall n = 1; 2; 3; \dots$ đồng thời bị chặn trên. Chứng minh dãy đã cho hội tụ.

CHUYÊN ĐỀ Dãy Số

ÔN DỰ TUYỂN 2020 – 2021

LẦN 2

Nội dung:

Định nghĩa giới hạn, tiêu chuẩn Cauchy và bài tập lý thuyết.

Định nghĩa: Dãy (x_n) gọi là có giới hạn hữu hạn L nếu $\forall \varepsilon > 0; \exists N : |x_n - L| < \varepsilon, \forall n > N$.

Phủ định mệnh đề này, dãy (x_n) không hội tụ về L nếu $\exists \varepsilon > 0; \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists n > N : |x_n - L| \geq \varepsilon$.

Dãy Cauchy: Dãy (x_n) được gọi là một dãy Cauchy nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N : |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m > N$.

Định lý: Dãy Cauchy thì hội tụ và dãy hội tụ là dãy Cauchy.

Bài 1: Dãy (x_n) dương có $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3}$, tính $\lim nx_n$

Lời giải: Do $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3}$ nên $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{2}, \forall n \geq N_0$ và điều này suy ra

$x_{N_0+n} < \frac{1}{2^n} x_{N_0}, \forall n > N_0$ và khi đó, $0 < (n + N_0)x_{n+N_0} < \frac{n + N_0}{2^n} x_{N_0}$ và $\lim \frac{n}{2^n} = 0$ nên suy ra kết quả.

Bài 2: Dãy số (x_n) thỏa $\lim (x_n - x_{n-2}) = 0$, chứng minh $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$

Lời giải: lấy giá trị $\varepsilon > 0$ bất kì thì tồn tại n_0 để $|x_n - x_{n-2}| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ từ đây suy ra

$|x_n - x_{n-1}| = |x_n - x_{n-2} - (x_{n-1} - x_{n-3}) + (x_{n-2} - x_{n-4}) - (x_{n-3} - x_{n-1}) \dots - (x_{n_0+1} - x_{n_0-1})|$ và có đánh giá

$|x_n - x_{n-1}| < (n - n_0)\varepsilon + |x_{n_0+1} - x_{n_0-1}|$.

Vậy $\frac{|x_n - x_{n-1}|}{n} < \varepsilon + \frac{|x_{n_0+1} - x_{n_0-1}|}{n}, \forall n > n_0$, từ đây suy ra kết quả.

Bài 3: Dãy số (u_n) dương thỏa $\lim \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) = 0$, chứng minh $\lim u_n = 0$.

Lời giải: Tham khảo “Chuyên Khảo dãy số - Nguyễn Tài Chung”, tr.106

Bài 4: Dãy số (u_n) bị chặn thỏa $u_{n+2} \geq \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{3}{4}u_n$, chứng minh dãy đã cho hội tụ.

Lời giải: Tham khảo “Chuyên Khảo dãy số - Nguyễn Tài Chung”, tr.103

Bài 5: Dãy số (u_n) bị chặn thỏa $2u_{n+2} \leq u_{n+1} + u_n, \forall n = 1; 2; 3; \dots$, chứng minh dãy đã cho hội tụ.

Lời giải: Tham khảo “Chuyên Khảo dãy số - Nguyễn Tài Chung”, tr.104

Bài 6: Dãy số dương (u_n) và dãy dương (x_n) thỏa $\lim x_n = 0$ đồng thời tồn tại số q thuộc $(0; 1)$ sao cho $u_{n+1} < qu_n + x_n, \forall n = 1; 2; 3; \dots$ thì $\lim u_n = 0$.

Lời giải:

Lấy $\varepsilon > 0$, ta chứng minh tồn tại N để $0 < u_n < \varepsilon; \forall n > N$

Vì $\lim x_n = 0$ nên tồn tại N_1 sao cho $x_n < \beta = \frac{1}{2}(1-q)\varepsilon; \forall n \geq n_1$. Khi đó, ta có

$u_{n_1+1} < qu_{n_1} + x_{n_1} < qu_{n_1} + \beta; u_{n_1+2} < qu_{n_1+1} + x_{n_1+1} < q^2u_{n_1} + q\beta + \beta; \dots$ Thực hiện tương tự cho

ta đánh giá: $u_{n_1+n} < q^n u_{n_1} + \beta \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, với mọi $n = 1; 2; 3; \dots$

Vì $\lim q^n = 0$ do $q \in (0; 1)$ nên tồn tại $n_2 : q^n u_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}; \forall n \geq n_2$. Từ đó ta có

$$u_{n_1+n} < q^n u_{n_1} + \beta \cdot \frac{1-q^n}{1-q} < \frac{\varepsilon}{2} + \beta \frac{1}{1-q} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon; \forall n \geq n_2$$

Hay, tồn tại $N = n_1 + n_2$ thì $0 < u_n < \varepsilon; \forall n > N$ nên $\lim u_n = 0$.

Áp dụng:

Bài 6.1: Dãy số (x_n) thỏa $x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{n}{2n+1}(x_n + 1)$. Tính giới hạn dãy đã cho

(Xem lời giải khác sách Huỳnh Kim Linh – tr40)

Bài 6.2: Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), n \geq 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng

dãy số có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn cách dùng Weierstrass

+ Ta có $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Ta sẽ chứng minh kể từ số hạng thứ hai, dãy số đã cho là giảm, tức là chứng minh

$$x_n - x_{n-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2[(n+2) - (n-1)x_{n-1}]}{3n} < 0 \Leftrightarrow (n+2) - (n-1)x_{n-1} < 0 \Leftrightarrow x_{n-1} > \frac{n+2}{n-1}, \forall n \geq 3 (*) \text{ bằng}$$

phương pháp quy nạp. Thật vậy,

- $n=3$: $x_2 = \frac{10}{3}$ nên (*) đúng.
- Giả sử với $n \geq 3$ ta có $x_{n-1} > \frac{n+2}{n-1}$, khi đó $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) > \frac{n+2}{3n}\left(\frac{n+2}{n-1} + 2\right) = \frac{n+2}{n-1} > \frac{n+3}{n}$

Như vậy, (x_n) giảm kể từ số hạng thứ hai mà (x_n) bị chặn dưới bởi 0 nên theo tính chất của dãy

đơn điệu, tồn tại giới hạn $\lim x_n = a$, ta có $a = \frac{1}{3}(a+2), a \geq 0$ nên $a=1$.

$$\text{Bài 6.3: Dãy số } (x_n) \text{ thỏa } \begin{cases} u_1 = \frac{15}{8}, u_2 = 2 \\ u_{n+2} + \frac{1}{2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n + \frac{n^2}{4n^2 - 1}}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} . \text{ Tính giới hạn dãy đã}$$

cho

(Kỷ yếu hậu gặp gỡ toán học 2016)

$$\text{Bài 6.4: Đặt } S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}, \text{ tính } \lim S_n$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \right) + \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} (S_n + 1) \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề suy ra $\lim S_n = 1$

Bài 6.5: Dãy (u_n) dương và dãy (x_n) có lim là 0. Biết tồn tại các số $p, q \in (0; 1)$ có tổng <

1 sao cho $u_{n+2} < pu_n + qu_{n+1} + x_n; \forall n = 1; 2; 3; \dots$ Chứng minh $\lim u_n = 0$

Lời giải:

Xét hệ phương trình $\begin{cases} a - b = q \\ ab = p \end{cases}$ suy ra $a^2 - qa - p = 0$.

Xét nghiệm dương của phương trình $f(x) = x^2 - qx - p = 0$, vì $f(0).f(1) < 0$ nên phương trình có nghiệm $x = a \in (0;1)$ và chọn $b = a - q \in (0;1)$ (chú ý $ab = p > 0$).

Ta viết lại: $u_{n+2} < (a - b)u_{n+1} + abu_n + x_n; \forall n = 1; 2; 3; \dots \Leftrightarrow y_{n+1} < ay_n + x_n; n = 1; 2; 3; \dots$ với $y_n = u_{n+1} + bu_n$. Nhận xét rằng dãy (y_n) thỏa bổ đề nên $\lim y_n = 0$ hay $\lim(u_{n+1} + bu_n) = 0$.

Mà dãy (u_n) dương nên $0 < u_{n+1} < u_{n+1} + bu_n \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim u_n = 0$.

Bài 7: Dãy (u_n) thỏa điều kiện $|u_{n+2} - u_{n+1}| < q|u_{n+1} - u_n|, \forall n = 1; 2; 3; \dots$, chứng minh dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. (q là số dương bé hơn 1)

(Xem lời giải sách Huỳnh Kinh Linh trang 64)

Áp dụng: Cho dãy (x_n) thỏa $x_1; x_2 > 0, 4nx_n = (6n-1)x_{n-1} - (2n-1)x_{n-2}$. Chứng minh dãy đã cho hội tụ.

Lời giải:

Từ giả thiết cho ta $|x_n - x_{n-1}| = \frac{2n-1}{4n}|x_{n-1} - x_{n-2}| < \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_{n-2}|$ và suy ra kết quả.

Bài 8: Cho dãy số (u_n) dương và dãy (S_n) thỏa $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ hội tụ. Chứng minh

$\lim u_n = 0$. Nếu $\lim \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ tồn tại hữu hạn thì kết luận $\lim u_n = 0$ còn đúng không?

Bài 8.1: (HSG Lào Cai 12, 2015 – 2016) Dãy số dương (u_n) và đặt $S_n = \sum_{i=1}^n u_i^3$ với mọi $n =$

$1, 2, 3, \dots$. Biết $u_{n+1} \leq \frac{(S_n - 1)u_n + u_{n-1}}{S_{n+1}}, n = 1; 2; 3; \dots$. Tính $\lim u_n$.

Lời giải: Sách Huỳnh Kim Linh tr113

Giả sử (S_n) bị chặn trên thì $\lim u_n = 0$ do dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn. Từ đây suy ra

$$\lim u_n^3 = \lim (S_{n+1} - S_n) = 0.$$

Nếu $\lim S_n = +\infty$ thì từ giả thiết cho ta $S_{n+1}u_{n+1} + u_n \leq S_n u_n + u_{n-1}, \forall n = 2; 3; \dots$ và từ đây suy ra

$$S_n u_n + u_{n-1} \leq S_2 u_2 + u_1, \forall n = 1; 2; 3; \dots \text{ Do đó } 0 < u_n < \frac{S_2 u_2 + u_1}{S_n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \text{ và điều này suy ra kết}$$

quả.

Bài 9: Dãy (a_n) là một hoán vị của tập số nguyên dương, đặt $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}; i = 1; 2; 3; \dots$ Chứng

minh $\lim S_n = +\infty$.

Lời giải: Ta dùng tiêu chuẩn Cauchy

Nhận xét: Lấy số tự nhiên N bất kì thì $a_{N+1}; a_{N+2}; \dots; a_{3N}$ có ít nhất N số lớn hơn N (Vì nếu có ít hơn N số lớn hơn N thì có nhiều hơn N số nhỏ hơn $N+1$ và điều này suy ra vô lý). Khi đó,

$$S_{3N} - S_N = \sum_{i=N+1}^{3N} \frac{a_i}{i} \geq \frac{N}{9N^2} = \frac{1}{9}. \text{ Từ đây áp dụng tiêu chuẩn Cauchy suy ra dãy } (S_n) \text{ không có}$$

giới hạn hữu hạn.

CHUYÊN ĐỀ DÃY SỐ

ÔN DỰ TUYỂN 2020 – 2021

LẦN 3

Nội dung: Các bài toán về giới hạn và đánh giá trên dãy số

Bài 1: Cho trước số nguyên dương $m > 1$ và dãy số (a_n) có các phần tử $a_0; a_1; \dots; a_n$ thỏa

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n + \frac{1}{m} a_n^2 \quad (0 \leq n < m). \text{ Chứng minh } 1 - \frac{1}{m+2} < a_m < 1$$

Lời giải: Xây dựng đẳng thức $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{m + a_{k-1}}, k = 1; 2; \dots; n$. Làm tương tự và cộng

theo vế, chú ý đây là dãy số tăng nên $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n < 1$. Từ đây ta đánh giá

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{m + a_{k-1}} > \frac{1}{m+1}, k = 1; 2; \dots; n \text{ và cộng theo vế suy ra } \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_m} > \frac{m}{m+1} \Rightarrow a_m > 1 - \frac{1}{m+2}$$

. Và từ đây suy ra kết quả.

Bài 2: Cho dãy (a_n) là dãy các số nguyên lớn hơn 1 và tăng ngặt thỏa $(a_i; a_j) = 1, \forall i \neq j$ và

$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2 a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n a_{n+1}}} \right) = +\infty. \text{ Chứng minh dãy đã cho chứa vô hạn số nguyên tố.}$$

Lời giải: Giả sử dãy đã cho có hữu hạn số nguyên tố thì tồn tại số nguyên dương m để a_n là hợp số với mọi $n \geq m$. Gọi p_i là ước nguyên tố bé nhất của a_i thì các p_i phân biệt đồng thời $a_n \geq p_i^2$ nếu a_n là hợp số.

Khi ấy, với mọi $n > 1$ ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} + \sum_{i=m}^n \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} \leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} + \sum_{i=m}^n \frac{1}{p_i p_{i+1}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m}^n \left(\frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_{i+1}^2} \right) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} + \sum_{i=m}^n \frac{1}{p_i^2} \leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ dãy tổng bị chặn trên nên vô lý.

Bài 3: Cho c là hằng số dương và dãy (a_n) thỏa $a_1 > 0, a_{n+1} = ca_n^2 + a_n$

a. Chứng minh $a_n \geq \sqrt{c^{n-1} n^n a_1^{n+1}}$

b. Chứng minh $a_1 + a_2 + \dots + a_n > n \left(na_1 - \frac{1}{c} \right)$.

Lời giải:

a. Từ đẳng thức $\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{ca_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{ca_i}{a_{i+1}} \geq n \sqrt{c^{n-1} \frac{a_1}{a_n^2}}$ và suy ra $a_n \geq \sqrt{c^{n-1} n^n a_1^{n+1}}$.

b. Sử dụng $\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{ca_{n-1}}{ca_{n-1}^2 + a_{n-1}} = \frac{c}{ca_{n-1} + 1} \Rightarrow \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{cn^2}{c(a_1 + \dots + a_n) + n}$ hay

$\frac{1}{a_1} \geq \frac{cn^2}{c(a_1 + \dots + a_n) + n}$ và suy ra kết quả.

Bài 4: Dãy (x_n) thỏa $x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3x_n^2 + n^2} + 2)$.

a. Tính $\lim \frac{x_n}{n}, \lim (x_n - n)$

b. Cho $\varepsilon \in (0; 1)$, chứng minh tồn tại N để $\sum_{i=1}^n i \cdot x_i \geq \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 4\varepsilon, \forall n > N$

Lời giải:

a. Quy nạp cho ta $n \leq x_n \leq n+1$. Chú ý $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{4n^2 + 6n + 3} + 2)$ và ta cần chứng minh

$\frac{1}{2}(\sqrt{4n^2 + 6n + 3} + 2) \leq n+2 \Leftrightarrow \sqrt{4n^2 + 6n + 3} \leq 2n+2 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 0$ và đánh giá này đúng. Điều

này suy ra $\lim \frac{x_n}{n} = 1$.

Lại xét $x_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{2}(x_n - n) \cdot \frac{x_n + n}{\sqrt{3x_n^2 + n^2} + 2n} < \frac{3}{2}(x_n - n) \cdot \frac{2n+1}{4n} < \frac{3}{4} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot (x_n - n)$ và từ đây

suy ra $0 < x_{n+1} - (n+1) < \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot (n+1) \Rightarrow \lim (x_n - n) = 0$.

b. Xét

$$\begin{aligned}x_{n+1} - (n+1) &= \frac{3}{2}(x_n - n) \frac{x_n + n}{\sqrt{3x_n^2 + n^2} + 2n} > \frac{3}{2}(x_n - n) \frac{2n}{\sqrt{3(n+1)^2 + n^2} + 2n} \\&> \frac{3}{2}(x_n - n) \frac{2n}{4n+2} > \frac{3}{4}(x_n - n) \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Và từ đây suy ra $x_{n+1} - (n+1) > \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$ hay $nx_n \geq n^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $\forall n = 1; 2; 3; \dots$ và cộng theo vế

$$\text{cho ta } \sum_{i=1}^n ix_i \geq \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right). \text{ Mặt khác, do}$$

$$\lim \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1 \Rightarrow \exists N : 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > \varepsilon, \forall n > N. \text{ Từ đây suy ra kết quả.}$$

Bài 5: Dãy (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + 2\sqrt{x_n} + \frac{n}{x_n}$.

a. Chứng minh $\lim \frac{n}{x_n} = 0$.

b. Tìm $\lim \frac{n^2}{x_n}$.

Lời giải:

a. Quy nạp ta có $x_n \geq 1, \forall n = 1; 2; 3; \dots$ và

$$x_{n+1} > x_n + 2\sqrt{x_n} > \left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{x_n} + \frac{1}{2}, \forall n = 1; 2; 3; \dots$$

$$\text{Kết quả này suy ra } \sqrt{x_n} > \sqrt{x_1} + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow x_n > \frac{(n+1)^2}{4} \Rightarrow \lim \frac{n}{x_n} = 0.$$

b. Xét $\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} = \frac{2\sqrt{x_n} + \frac{n}{x_n}}{\sqrt{x_n + 2\sqrt{x_n} + \frac{n}{x_n}} + \sqrt{x_n}} = \frac{2 + \frac{n}{x_n\sqrt{x_n}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{x_n}} + \frac{n}{x_n^2}} + 1} \rightarrow 1$. Áp dụng Cesaro ta có

$$\lim \frac{\sqrt{x_n}}{n} = 1 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{n^2} = 1.$$

Bài 6: Dãy số (a_n) thỏa $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1 + (n+1)a_n}$. Đặt $b_n = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tính $\lim b_n$

Lời giải: Quảng Nam TST, 2018 - 2019

$$\text{Ta có } a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} \cdot a_n = na_n^2 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = na_n - (n+1)a_{n+1} \Rightarrow b_n = \frac{3}{2} - (n+1)a_{n+1}$$

Chú ý (a_n) là dãy giảm dương nên dãy (b_n) tăng và bị chặn trên nên có lim và

$$\lim(b_n - b_{n-1}) = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0. \text{ Do } \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \Rightarrow \exists n_0 : a_{n_0+k} < \frac{1}{2^k} a_{n_0}, \forall k = 1; 2; 3; \dots \text{ và do}$$

$$\lim \frac{n}{2^n} a_{n_0} = 0 \text{ nên } \lim na_n = 0. \text{ Từ đây suy ra } \lim b_n = \frac{3}{2}.$$

Nhận xét: bằng quy nạp, ta chứng minh được $x_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$ và suy ra $\lim b_n = \frac{3}{2}$.

Bài 7: Cho dãy (x_n) có $\lim x_n = L$, đặt $y_n = \frac{x_n}{1} + \frac{x_{n-1}}{2} + \dots + \frac{x_2}{2^{n-1}} + \frac{x_1}{2^n}$. Chứng minh $\lim y_n = 2L$

Lời giải: Lấy $\varepsilon > 0$, ta chứng minh $\exists N : |y_n - 2L| < \varepsilon, \forall n > N$

Do $\lim x_n = L$ nên $a = \frac{\varepsilon}{4} > 0$ thì $\exists n_1 \in \mathbb{Z}^+ : |x_n - L| < a, \forall n > n_1$. Xét

$$|y_n - 2L| = \left| \frac{x_n}{1} + \frac{x_{n-1}}{2} + \dots + \frac{x_2}{2^{n-1}} + \frac{x_1}{2^n} - 2L \right| \leq \frac{|x_n - L|}{1} + \dots + \frac{|x_{n_1} - L|}{2^{n-n_1+1}} + \frac{|x_{n_1-1} - L|}{2^{n-n_1}} + \dots + \frac{|x_1 - L|}{2^n} + \frac{|L|}{2^n}$$

Lại có: $\frac{|x_n - L|}{1} + \dots + \frac{|x_{n_1} - L|}{2^{n-n_1+1}} \leq 2a, \frac{|x_{n_1-1} - L|}{2^{n-n_1}} + \dots + \frac{|x_1 - L|}{2^n} \leq \frac{M}{2^{n-n_1-1}}$ với M là chặn trên của dãy

$|x_n - L|$. Do $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-n_1-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ nên tồn tại $n_2 : \frac{M}{2^{n-n_1-1}} < a, \frac{|L|}{2^n} < a; \forall n > n_2$. Vậy, chọn

$N = \max\{n_1, n_2\}$ thì ta có $\exists N : |y_n - 2L| < \varepsilon, \forall n > N$.

Bài 8: Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau:
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2016}, \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x_{2016} < \frac{1}{2} < x_{2015}$.

Lời giải: Đề xuất DHTB 2017 – chuyên Hạ Long, Quảng Ninh

Trước hết, ta chứng minh $0 < x_n < 1, \forall n \geq 1$.

+ Với $n=1$ ta có $0 < x_1 = 1 - \frac{1}{2016} < 1$.

+ Giả sử $0 < x_k < 1$. Ta đi chứng minh $0 < x_{k+1} < 1$. Thật vậy

$$x_{k+1} = \frac{x_k(2016 - x_k)}{2016} > 0 \text{ vì } 0 < x_k < 1 \text{ và } x_{k+1} - x_k = -\frac{x_k^2}{2016} < 0 \Rightarrow x_{k+1} < x_k < 1.$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{2016}{x_n(2016 - x_n)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2016 - x_n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2015} \quad (*)$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{x_{2015}} < \frac{1}{x_{2014}} + \frac{1}{2015}$$

$$\frac{1}{x_{2014}} < \frac{1}{x_{2013}} + \frac{1}{2015}$$

...

$$\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2015}$$

$$\frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2015}$$

Cộng về các bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{2015}} + \frac{1}{x_{2014}} + \dots + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} &< \frac{1}{x_{2014}} + \dots + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} + 1 + \frac{2015}{2015} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_{2015}} &< 1 + \frac{2015}{2015} = 2 \\ \Rightarrow x_{2015} &> \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cũng từ $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2016 - x_n}$ ta có $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{2016 - x_i}$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} &\geq \frac{k^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)} \quad \text{với } a_1, a_2, \dots, a_k > 0 \text{ ta có} \\ \frac{1}{x_{n+1}} &= 1 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{2016 - x_i} \geq 1 + \frac{(n+1)^2}{2016(n+1) - \sum_{i=0}^{2016} x_i} > 1 + \frac{(n+1)^2}{2016(n+1)} \end{aligned}$$

Cho $n = 2015$ ta được $\frac{1}{x_{2016}} > 2 \Rightarrow x_{2016} < \frac{1}{2}$.

Vậy $x_{2016} < \frac{1}{2} < x_{2015}$.

Bài 9: Cho dãy $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_{n+4} = \frac{1}{3}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt[3]{2u_{n+2} - 1} + \sqrt[4]{3u_{n+3} - 2})$. Tính giới hạn của dãy đã cho.

Lời giải:

Dễ chứng minh: $u_n > 1$ với mọi giá trị $n > 1$.

Đặt dãy phụ $x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{1}{3}(\sqrt{x_n} + \sqrt[3]{2x_n - 1} + \sqrt[4]{3x_n - 2})$. Khi đó, ta chứng minh được đây là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn và tính được giới hạn là 1.

Lại chứng minh được: $u_1, u_2, u_3 \leq x_1; u_4, u_5, u_6 \leq x_2; \dots$ quá trình này tiếp diễn và dùng định lý kẹp cho ta điều cần chứng minh.

Bài 10: Cho dãy $u_0 = a \in (-2; 2), u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$. Chứng minh $\lim(u_n \cdot \sqrt{n}) = 0$

Lời giải:

Ta chứng minh luôn tồn tại $u_k \in [-1; 1]$. Thật vậy, nếu $u_n \notin [-1; 1], \forall n$ thì $u_n > 1, \forall n$ do từ cách định nghĩa ta có $u_n > 0$ và kết hợp giả thiết phản chứng.

Từ giả thiết, ta có $nu_n = u_{n-1}^2 - 1 \Leftrightarrow n(u_n - (n+2)) = u_{n-1}^2 - (n+1)^2 \Rightarrow \frac{n+2-u_n}{n+1-u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}+n+1}{n} > \frac{n+2}{n}$

Cho $n = 1, 2, \dots$ và nhân theo vế ta có

$$\frac{n+2-u_n}{2-u_0} > \frac{(n+1)(n+2)(2+u_0)}{6} \Leftrightarrow u_n < (n+2)(n+1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{4-u_0^2}{6} \right)$$

Rõ ràng, nếu n đủ lớn thì vế phải âm trong khi vế trái dương. Dẫn đến điều vô lý, vậy phải tồn tại $u_k \in [-1; 1]$ từ đó suy ra $u_n \in [-1; 1], \forall n > k \Rightarrow -\frac{1}{n} < u_n < 0, \forall n > k$. Từ đây có kết quả.

Bài 11: Cho hai dãy số $(a_n), (b_n)$ được xác định như sau: $a_0, a_1 > 1; b_0, b_1 < 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ thì a_n, b_n lần lượt là nghiệm dương và nghiệm âm của phương trình

$$x^2 + a_{n-1}x + b_{n-1} = 0.$$

Chứng minh rằng hai dãy $(a_n), (b_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm các giới hạn đó.

Lời giải:

(Đề đề nghị DH ĐBBB chuyên Tuyên Quang 2018)

Theo Viet ta có $a_n = -(a_{n+1} + b_{n+1}) = a_{n+2} + b_{n+2} - a_{n+2}b_{n+2}$. Suy ra

$$a_n - a_{n+2} = b_{n+2}(1 - a_{n+2}); \forall n \in \mathbb{N} (*).$$

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $1 - a_{2(n_0+1)} \geq 0$ thì (*) cùng với $b_{2(n_0+1)} < 0$ suy ra

$$a_{2n_0} \leq a_{2n_0+2} \leq 1 \Rightarrow 1 - a_{2n_0} \geq 0. \text{ Lặp lại lí luận trên suy ra } a_0 \leq 1, \text{ điều này là vô lí. Vậy}$$

$a_{2n} > 1 \Rightarrow 1 - a_{2n} < 0 \Rightarrow a_{2n} > a_{2(n+1)} > 1; \forall n \in \mathbb{N}$. Do đó dãy (a_{2n}) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn, $\lim a_{2n} = A \geq 1$.

Tương tự cho dãy (a_{2n+1}) cũng có giới hạn hữu hạn $\lim a_{2n+1} = A_1 \geq 1$.

$$\text{Vì } \begin{cases} b_{2n} + a_{2n} = -a_{2n-1} \\ b_{2n+1} + a_{2n+1} = -a_{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{2n} = -(a_{2n-1} + a_{2n}) \\ b_{2n+1} = -(a_{2n} + a_{2n+1}) \end{cases} \text{ nên}$$

$$\begin{cases} \lim b_{2n} = -(A + A_1) \\ \lim b_{2n+1} = -(A + A_1) \end{cases} \Rightarrow \exists \lim b_n = -(A + A_1).$$

$$\text{Thay vào hệ thức } \begin{cases} a_{2n}b_{2n} = b_{2n-1} \\ a_{2n+1}b_{2n+1} = b_{2n} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} A(A + A_1) = A + A_1 \\ A_1(A + A_1) = A + A_1 \end{cases} \Rightarrow A = A_1 = 1.$$

Vậy $\lim a_n = 1, \lim b_n = -2$.

Bài 12: Cho dãy (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 1} - x_n$

1. Chứng minh dãy đã cho hội tụ và tính $\lim x_n$.

2. Đặt $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, chứng minh $S_n > \frac{n}{\sqrt{3}}$

Lời giải:

1. Dãy đã cho bị chặn trên vùng $(0;1)$ và $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ là hàm nghịch biến nên chia làm hai dãy, từ đó có kết quả.

Hoặc đặt $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, áp dụng định lý Lagrange để có: $|f(x_n) - f(a)| = |f'(c_n)| \cdot |x_n - a|$. Với giá trị

$c_n \in (x_n; a)$ hoặc $c_n \in (a; x_n)$. Lại có $x_n \geq 1$ nên $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + 1} + x_n} \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} > \frac{1}{3}$ nên $c_n > \frac{1}{3}$.

Từ đó: $|f'(c_n)| = \left| \frac{c_n}{\sqrt{1 + c_n^2}} - 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + c_n^2}(\sqrt{1 + c_n^2} + c_n)} < \frac{3}{\sqrt{10}}$ nên từ đây sẽ có kết quả.

2. Cộng theo vế ta có đẳng thức $S_{n+1} + S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + 1} + x_1 \geq \sqrt{S_n^2 + n^2} + 1$. Mà $x_{n+1} \leq 1, \forall n$ nên

có đánh giá: $2S_n \geq \sqrt{S_n^2 + n^2} \Leftrightarrow S_n \geq \frac{n}{\sqrt{3}}$. Chú ý dấu bằng không xảy ra nên chỉ có $S_n > \frac{n}{\sqrt{3}}$.

Bài 13: Cho các số thực $a, b > 0$ và $1 < a^2 - 4b < 4$, xét dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = a, \\ u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n \end{cases}$. Tiếp tục xét dãy số (v_n) được xác định bởi

$$v_n = C_n^0 u_n + C_n^1 u_{n-1} \alpha + C_n^2 u_{n-2} \alpha^2 + \dots + C_n^n u_0 \alpha^n.$$

a) Chứng minh rằng tồn tại số thực α để $\lim v_n = 0$.

b) Với α ở trên, đặt $\lim(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = L$. Chứng minh rằng $L \neq 1$.

Lời giải: Đề xuất DHB TB 2019 – Lào Cai

a) Phương trình đặc trưng $x^2 = ax - b$ có $0 < \Delta < 4$ nên có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 và $|x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} < 2$.

Từ đó dễ dàng tìm được công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = x_1^n + x_2^n$.

Thay vào v_n được tổng của 2 nhị thức Newton nên

$$v_n = (x_1 + \alpha)^n + (x_2 + \alpha)^n.$$

Chỉ cần chọn α để $-1 < x_1 + \alpha < x_2 + \alpha < 1$, điều này thực hiện được vì khoảng cách giữa 2 nghiệm nhỏ hơn 2, ta có thể chọn trực tiếp $\alpha = -\frac{a}{2}$.

b) Do $\lim((\alpha + x_1)^n + (\alpha + x_2)^n) = 0$

Từ công thức, thay vào tính tổng cấp số nhân, ta có

$$\lim(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \lim\left(\frac{1 - (\alpha + x_1)^{n+1}}{1 - (\alpha + x_1)} + \frac{1 - (\alpha + x_2)^{n+1}}{1 - (\alpha + x_2)}\right) = \frac{1}{1 - (\alpha + x_1)} + \frac{1}{1 - (\alpha + x_2)}$$

$$\text{Hay: } L = \frac{1}{1 - (x_1 + \alpha)} + \frac{1}{1 - (x_2 + \alpha)}.$$

Giả sử $L = 1$ thì quy đồng biến đổi, ta có $\alpha^2 - a\alpha + b = 1$. Phương trình này có nghiệm là

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2}.$$

Chú ý rằng $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ nên nếu $\alpha = \alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2}$ thì

$$x_1 + \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 4a} + \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2} > 1; x_2 + \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 4a} - \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2} \in (-1; 1).$$

Điều này suy ra $\lim v_n = +\infty$ do $\lim (x_1 + \alpha)^n = +\infty; \lim (x_2 + \alpha)^n = 0$

Tương tự nếu $\alpha = \alpha_2$ thì $x_2 + \alpha < -1$, không thỏa.

Vậy điều giả sử là sai và ta luôn có $L \neq 1$.

Bài 14: Cho dãy các số dương (x_n) thỏa $x_1 = 2; x_n^n = x_{n-1}^n + n$. Chứng minh rằng dãy đã cho có giới hạn hữu hạn là L và $L \leq 3$.

Lời giải:

Dễ có đây là dãy tăng.

Lại xét: $n = x_n^n - x_{n-1}^n = (x_n - x_{n-1})(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1}) > n \cdot 2^{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1})$ hay suy ra

$$x_n - x_{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Cộng theo vế để có: $x_n - x_1 < \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2} < 1$ hay suy ra $x_n < 3, \forall n = 1; 2; \dots$

Vậy đây là dãy tăng, bị chặn trên bởi 3 nên có giới hạn là L và $L \leq 3$

Bài 15:

1. Cho dãy số $(x_n): x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, chứng minh với bất kì giá trị $a > 0$, luôn tồn tại n_0 khác 1 để $\{x_{n_0}\} < a$.

2. Cho dãy số $x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{n}}{2x_n}$, chứng minh với bất kì giá trị $a > 0$, luôn tồn tại n_0 khác 1 để $\{x_{n_0}\} < a$.

Lời giải:

Ta chỉ cần chứng minh một dãy có hai tính chất: $\lim x_n = +\infty, \lim (x_{n+1} - x_n) = 0$ thì bài toán vẫn đúng.

Do $\lim x_n = +\infty$ nên với mọi số tự nhiên m luôn tồn tại n để $x_{n-1} < m < x_n$ và đồng thời do $x_{n+1} - x_n < 1$ nên $x_{n-1} < m < x_n < m+1 \Rightarrow \{x_n\} = x_n - m < x_n - x_{n-1}$ và với $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ ta suy ra kết quả.

Bài 16: Dãy số (a_n) thỏa $a_n = \left[\sqrt{n^2 + (n+1)^2} \right]$, chứng minh rằng tồn tại vô số n sao cho

$$a_n - a_{n-1} > 1 = a_{n+1} - a_n.$$

Lời giải: Đặt $b_n = \sqrt{n^2 + (n+1)^2}$ thì

$$\lim(b_{n+1} - b_n) = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N: \sqrt{2} - 1 - \varepsilon < a_{n+1} - a_n < \sqrt{2} + 1 + \varepsilon \text{ và chọn } \varepsilon \text{ đủ nhỏ để}$$

$$\sqrt{2} + 1 + \varepsilon < 3, \sqrt{2} - 1 - \varepsilon > 0 \text{ thì tồn tại } n_0 \text{ để } 0 < a_{n+1} - a_n < 3; \forall n > n_0 \text{ hay } a_{n+1} - a_n \in \{1; 2\}, \forall n > n_0.$$

Nếu $a_{n+1} - a_n = 1$; với mọi $n > n_1 > n_0$ thì $\{b_{n+1}\} - \{b_n\} > \sqrt{2} - \varepsilon - 1$ và từ cách chọn ở đầu bài ta có

$$\sqrt{2} - 1 - \varepsilon > 0 \text{ thì } \{b_{n+1}\} - \{b_n\} > \sqrt{2} - \varepsilon - 1, \forall n > n_1 \text{ lập sai phân suy ra vô lý.}$$

Nếu $a_{n+1} - a_n = 2$; với mọi $n > n_2 > n_0$ thì $\{b_n\} - \{b_{n+1}\} > 2 - \sqrt{2} - \varepsilon, \forall n > n_2$ và lập sai phân cũng suy ra vô lý. Vậy có vô hạn giá trị n để $a_{n+1} - a_n = 1, a_{n+1} - a_n = 2$.

Bài 17 : (IMO shortlist 2015) Cho dãy số dương $a_1; a_2; \dots; a_n; \dots$ thỏa

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n, \forall n = 2; 3; 4; \dots$

Lời giải : Từ giả thiết ta có

$$a_k \geq \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$$

Ta chứng minh quy nạp, $n = 2$ thì mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = 2; 3 \dots k$, ta có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n, n = 2; 3; 4; \dots; k$$

Nếu $0 < a_{k+1} \leq 1$ thì kết quả quy nạp đúng, nếu $0 < a_{k+1} \leq 1$ thì tách

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} \geq \frac{k}{a_{k+1}} + a_{k+1} \geq k+1 \text{ do } 0 < a_{k+1} \leq 1.$$

Bài 18 : Cho $2k$ số thực $a_1; a_2; \dots; a_k; b_1; b_2; \dots; b_k$, xác định dãy số (X_n) thỏa $X_n = \sum_{i=1}^k [a_i n + b_i]$.

Chứng minh rằng nếu dãy (X_n) là cấp số cộng công sai nguyên thì $\sum_{i=1}^k a_i$ nguyên.

Lời giải :

Đặt $A = \sum_{i=1}^k a_i, B = \sum_{i=1}^k b_i$. Ta có : $a_i n + b_i - 1 \leq [a_i n + b_i] < a_i n + b_i$

Suy ra $An + B - k \leq X_n < An + B$.

Giả sử $\{X_n\}$ là cấp số cộng với công sai d , khi đó $nd = X_n - X_1$ và $A + B - k \leq X_1 < A + B$

Vì $X_{n+1} = X_1 + nd$ nên ta có :

$$A(n+1) + B - k < X_1 + nd < A(n+1) + B \Leftrightarrow An + A + B - k - X_1 < nd < An + A + B - X_1$$

$$d - \frac{A + B - X_1}{n} < A < d + \frac{X_1 + k - A - B}{n}; \forall n, \text{ cho } n \text{ tiến ra vô cùng và lưu ý}$$

$$A + B - X_1; X_1 + k - A - B \text{ là hằng số nên } d \leq A \leq d \Rightarrow A = d$$

Mà d nguyên nên A nguyên.

Bài 19: Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi công thức:

$$x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng:

$$a) n \leq \sqrt{n} x_n < n + \frac{1}{6} H_n, \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots \text{ trong đó } H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$b) [9x_{81}] = 81 \text{ (kí hiệu } [x] \text{ là phần nguyên của số thực } x).$$

Lời giải: TST Hà Tĩnh 2017

a. Do $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{4x_n^2} + 1, x_1^2 = 1$ nên ta chứng minh quy nạp $x_n^2 \geq n$.

Với $n = 1$ thì mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến n , tức là $x_n^2 \geq n$. Suy ra

$$x_{n+1}^2 \geq n + 1 + \frac{1}{4x_n^2} > n + 1 \text{ đúng. Từ đó ta có } \sqrt{n} x_n \geq n.$$

$$\text{Lại có } x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{4x_{n-1}^2} + 1 = \dots = x_1^2 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4x_k^2} \leq n + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$< n + \frac{1}{4}H_n < \left(\sqrt{n} + \frac{1}{6\sqrt{n}}H_n \right)^2 \Rightarrow \sqrt{n}x_n \leq n + \frac{1}{6}H_n.$$

b. Ta chứng minh $H_{81} < 6$.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: $H_n \leq 1 + \ln n$.

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad \forall x > 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0 \text{ nên hàm số } f(x) \text{ giảm trên khoảng } (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0, \text{ hay } \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x \quad (*)$$

Áp dụng BĐT trên ta có :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{81} < 1 + \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln 81 - \ln 80 = 1 + \ln 81 < 6$$

$$\text{Từ đó : } 81 \leq \sqrt{81}x_{81} < 81 + \frac{1}{6}H_{81} < 82 \Rightarrow [9x_{81}] = 81.$$

Bài 20: Dãy (x_n) dương thỏa mãn $(8x_2 - 7x_1)x_1^7 = 8$; $x_{k+1}x_{k-1} - x_k^2 = \frac{x_{k-1}^8 - x_k^8}{x_k^7 \cdot x_{k-1}^7}, k = 2; 3; 4; \dots$

Xác định điều kiện cho x_1 để dãy đã cho hội tụ.

Lời giải: Ta cần thu gọn dãy đã cho, gọi ý rằng $(8x_{k+1} - 7x_k)x_k^7 = 8$. Biến đổi từ giả thiết

$$8x_{k+1}x_k^7 - 7x_k^8 = 8 \Rightarrow \frac{x_k^9}{x_{k-1}} - 7x_k^8 + 8 \frac{x_{k-1}^8 - x_k^8}{x_{k-1}^8}$$

$$\Leftrightarrow 8x_{k+1}x_k^7 - 7x_k^8 = \frac{x_k^8}{x_{k-1}}(8x_k - 7x_{k-1}) + 8 - 8 \frac{x_k^8}{x_{k-1}^8}$$

$$\Leftrightarrow (8x_{k+1} - 7x_k)x_k^7 = 8 + \frac{x_k^8}{x_{k-1}^8}((8x_k - 7x_{k-1})x_{k-1}^7 - 8)$$

Từ đây suy ra $(8x_2 - 7x_1)x_1^7 = 8 : (8x_{k+1} - 7x_k)x_k^7 = 8$ hay $x_{k+1} = \frac{7}{8}x_k + \frac{1}{x_k^7}$. Từ đây ta suy ra dãy đã cho

luôn hội tụ với mọi giá trị x_1 .

Bài 21: Dãy (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_n + i^2} \right)$, tính $\lim \frac{x_n}{n}$

Quy nạp: $n < x_n < n + 2\sqrt{n}$

Ta chứng minh theo quy nạp, chú ý đánh giá

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_n + i^2} \right) &< \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{n + 2\sqrt{n} + i^2} \\ &< \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n (\sqrt{n} + i) \right) = \frac{2}{n} \left(n\sqrt{n} + \frac{n(n+1)}{2} \right) < n + 1 + 2\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Bài 22: Dãy (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{n}{x_n} \right); \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Chứng minh $x_n < \sqrt{n}$ và tính $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải:

Câu a, chỉ cần quy nạp $\sqrt{n-1} < x_n < \sqrt{n}$.

Bài 23: Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n + \frac{2n}{\sqrt{x_n}} \right)$

1) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{(n-1)^2} < x_n < \sqrt[3]{n^2}, \forall n = 3; 4; \dots$

2) Tính $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt[3]{n^2} - x_n}$

Lời giải:

1/ Dễ thấy, các phân tử của dãy đều dương.

Ta chứng minh bằng quy nạp

- $n = 3$ thì mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k \geq 3$, ta chứng minh mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3} \left(x + \frac{2k}{\sqrt{x}} \right)$ thì $f'(x) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{x^3}} \right) < 0, \forall x \in \left(\sqrt[3]{(k-1)^2}; \sqrt[3]{k^2} \right)$ từ đó suy ra

$f(x) \geq f(\sqrt[3]{k^2}) = \sqrt[3]{k^2}$ và $f(x) \leq f(\sqrt[3]{(k-1)^2}) < \sqrt[3]{(k+1)^2}$. Mà $\sqrt[3]{(k-1)^2} < x_k < \sqrt[3]{k^2}$ nên ta có

$\sqrt[3]{k^2} < x_{k+1} < \sqrt[3]{(k+1)^2}$ hay mệnh đề đúng khi $n = k + 1$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2/ Từ câu a và áp dụng định lý kẹp, suy ra $\lim \frac{x_n}{\sqrt[3]{n^2}} = 1$. Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \frac{2}{3} \left(\frac{n}{\sqrt{x_n}} - x_n \right) = \frac{2}{3} \frac{(\sqrt[3]{n} - \sqrt{x_n})(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n}\sqrt{x_n} + x_n)}{\sqrt{x_n}} \\
 \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt[3]{n^2} - x_n} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n}\sqrt{x_n} + x_n}{\sqrt{x_n}(\sqrt{x_n} + \sqrt[3]{n})} \\
 \text{Mà } \lim \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n}\sqrt{x_n} + x_n}{\sqrt{x_n}(\sqrt{x_n} + \sqrt[3]{n})} &= \lim \frac{1 + \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt[3]{n}} + \frac{x_n}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt[3]{n}} + 1 \right)} = \frac{3}{2} \text{ hay có kết quả } \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt[3]{n^2} - x_n} = 1.
 \end{aligned}$$

CHỦ ĐỀ DÃY SỐ 2021 – 2022

DÃY SỐ SINH BỞI NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Với mỗi số nguyên dương n , ta đặt x_n là nghiệm thuộc $(0;1)$ của phương trình $\cos x = nx$ (đã chứng minh đây là nghiệm duy nhất trên vùng $(0;1)$ của phương trình này).

a. Đặt $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, chứng minh $\lim S_n = +\infty$.

b. Tìm số thực a để $\lim(n^a \cdot (nx_n - 1))$ là một số thực khác 0.

c. Chứng minh rằng $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} > n + \ln \frac{n+1}{2}; \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Lời giải:

a. Ta có $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}; \forall x \in (0;1) \Rightarrow nx_n = \cos x_n \geq 1 - \frac{x_n^2}{2} \Rightarrow x_n \geq \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$ và từ đây suy ra câu

a.

b. Ta cũng có $nx_n = \cos x_n < 1 \Rightarrow x_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim x_n = 0 \Rightarrow \lim nx_n = \lim \cos x_n = 1$.

Lại có đánh giá:

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Rightarrow -\frac{x_n^2}{2} \leq nx_n - 1 \leq -\frac{x_n^2}{2} + \frac{x_n^4}{24} \Leftrightarrow -\frac{n^2 x_n^2}{2} \leq n^2 (nx_n - 1) \leq -\frac{n^2 x_n^2}{2} + \frac{n^2 x_n^4}{24}$$

Mà $\lim nx_n = 1; \lim n^2 x_n^4 = 0$ nên suy ra $\lim n^2 (nx_n - 1) = -\frac{1}{2}$. Từ đây suy ra

$$\lim n^2 (nx_n - 1) = -\frac{1}{2} \text{ hay } a = 2.$$

c. Theo định lý Lagrange và lưu ý dãy (x_n) giảm thì

$$\begin{aligned} -\sin \varepsilon \cdot (x_n - x_{n+1}) &= \cos x_n - \cos x_{n+1} = n(x_n - x_{n+1}) - x_{n+1} \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= (n + \sin \varepsilon)(x_n - x_{n+1}) \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{n + \sin \varepsilon} + 1 > \frac{1}{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Cộng theo vế và lưu ý: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{2}$ và suy ra kết quả.

Bài 2: Với mỗi số nguyên dương n , xét phương trình $x = \sqrt[3]{nx^2 + 1}$.

a. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm dương duy nhất và kí hiệu là x_n .

b. Tính $\lim \frac{x_n}{n}; \lim (x_n - n)$.

c. Tìm số thực k để $\lim n^k \left(\frac{x_n}{n} - 1 \right)$ là một số thực khác 0.

Lời giải:

a. Tự làm, cần lũy thừa 3 hai vế để xét hàm số cho dễ.

b. Từ bảng biến thiên và kết hợp $f(n) < 0; f\left(n + \frac{1}{n}\right) > 0 \Rightarrow n < x_n < n + \frac{1}{n}, \forall n = 1; 2; 3; \dots$

c. Từ giả thiết ta có $\left(\frac{x_n}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \lim \left[\left(\frac{x_n}{n}\right)^3 \cdot n^3 \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) \right] = 1 \Rightarrow \lim n^3 \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = 1$ do

$$\lim \frac{x_n}{n} = 1.$$

Nếu $k > 3$ thì $\lim n^k \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = \lim \left(n^{k-3} \cdot n^3 \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) \right) = +\infty$ vì $\lim n^3 \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = 1; \lim n^{k-3} = +\infty$.

Nếu $k < 3$ thì $\lim n^k \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = \lim \left(\frac{1}{n^{3-k}} \cdot n^3 \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) \right) = 0$ vì $\lim n^3 \left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = 1; \lim \frac{1}{n^{3-k}} = 0$.

Vậy, $k = 3$ là giá trị cần tìm duy nhất.

Bài 3: Với mỗi số nguyên dương n , xét phương trình $\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-n-1} = x$

a. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm phân biệt $a_n < b_n < c_n$.

b. Tính $\lim a_n; \lim \frac{b_n}{n}; \lim \frac{c_n}{n}$.

c. Tính $\lim n(b_n - n)$.

d. $\{b_n\} < \frac{2}{\sqrt{4+(n+1)^2} + n+1}, \forall n = 2; 3; 4; \dots$ (Kí hiệu $\{..\}$ là phần lẻ)

Lời giải:

c. Từ bảng biến thiên, ta đã có b_n là nghiệm duy nhất của phương trình trên $(n; n+1)$.

Sử dụng bảng biến thiên và xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-n-1} - x$ có

$f\left(n + \frac{1}{n+2}\right) = n+2 - \frac{n+2}{n+1} - n - \frac{1}{n+2} > 0; f\left(n + \frac{1}{n+1}\right) = n+1 - \frac{n+1}{n} - n - \frac{1}{n+1} < 0$ và điều này suy

ra $n + \frac{1}{n+2} < b_n < n + \frac{1}{n+1}$ hay suy ra $\frac{n}{n+2} < n(b_n - n) < \frac{n}{n+1}; \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Theo định lý kẹp ta có: $\lim n(b_n - n) = 1$.

d. Ta nhận xét rằng **câu d** chặn bất đẳng thức chặt hơn **câu c** ($b_n < n + \frac{1}{n+1}$)

Do $n < b_n < n+1 \Rightarrow [b_n] = n$

Đặt $y_n = b_n - n \Rightarrow y_n = \{b_n\}$ và từ giả thiết cho ta: $y_n + n = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{1-y_n} < \frac{1}{y_n} - 1$ và từ đây giải bất

phương trình suy ra kết quả.

Bài 4: Với mỗi n nguyên dương lớn hơn 1, xét phương trình $x = \sqrt[n]{x+1} + \sqrt[n]{x+2}$

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm dương duy nhất x_n .

b. Tìm $\lim x_n$.

c. Chứng minh: $x_n > 2 + \frac{22}{20n-9}, \forall n = 2; 3; \dots$

Lời giải:

a. Tự làm.

b. Xét $n > 2$, theo bất đẳng thức Bernoulli ta có:

$$x_n = \sqrt[n]{x_n+1} + \sqrt[n]{x_n+2} < 1 + \frac{x_n}{n} + 1 + \frac{1+x_n}{n} \Rightarrow x_n \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 2 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow x_n < \frac{2n+1}{n-2}.$$

Mặt khác, từ bảng biến thiên cho ta $x_n > 2$ nên $2 < x_n < \frac{2n+1}{n-2} \Rightarrow \lim x_n = 2$ theo định lý kẹp.

c. Với $n=2; n=3$ thì $x_2; x_3 > 3$ nên kiểm tra bất đẳng thức đúng. Ta xét $n \geq 4$ thì từ bảng biến thiên ta có $f(3) = 3 - (\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{5}) > 3 - (\sqrt{4} + \sqrt[4]{5}) > 0$ nên $2 < x_n < 3$.

$$x_n - 2 = \frac{x_n}{\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt[n]{(x_n+1)^i}} + \frac{x_n+1}{\sum_{i=0}^n \sqrt[n]{(x_n+2)^i}} > \frac{x_n}{n \cdot \sqrt[n]{(x_n+1)^{n-1}}} + \frac{x_n+1}{n \cdot \sqrt[n]{(x_n+2)^{n-1}}} > \frac{x_n}{4n} + \frac{x_n+1}{5n} \quad (\text{Do } 2 < x_n < 3)$$

$$\text{Và điều này suy ra } x_n > 2 + \frac{22}{20n-9}.$$

Bài 5: Với mỗi số nguyên dương n , xét phương trình $\cos^n x = x$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.

a. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất và kí hiệu là x_n . Tìm $\lim x_n$.

b. Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{n+1}; \forall n=1;2;3;\dots$

c. Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}; \forall n=1;2;3;\dots$

Lời giải:

a. Xét hàm số $f_n(x) = x - \cos^n x \Rightarrow f'_n(x) = 1 + n \sin x \cdot \cos^{n-1} x > 0; \forall x \in (0;1)$ nên đây là hàm số đồng biến trên $(0;1)$. Mặt khác $f_n(0) = -1; f_n(1) = 1 - \cos^n 1 > 0 \Rightarrow f_n(x) = 0$ có nghiệm trên $(0;1)$ và đây là nghiệm duy nhất.

Lại có: $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} - \cos^n x_{n+1} = x_{n+1} \left(1 - \frac{1}{\cos x_{n+1}}\right) < 0 = f(x_n) \Rightarrow x_{n+1} < x_n$ hay đây là dãy giảm.

Mà lại bị chặn dưới nên tồn tại $\lim$, đặt $\lim x_n = L \in [0;1)$. Nếu $L > 0$ thì $\lim \cos^n x_n = 0$ do tồn

tại giá trị M để $M < x_n < 1; \forall n = 1; 2; 3 \dots \Rightarrow 0 < \cos^n x_n < \cos^n M < 1; \lim \cos^n M = 0$. Trong khi đó, $\lim \cos^n x_n = \lim x_n = L > 0$ nên vô lý. Vậy $L = 0$.

b. Sử dụng định lý Lagrange ta có $x_n - 1 = \cos^n x_n - \cos^n 0 = -n \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos^{n-1} \varepsilon \cdot x_n, \varepsilon \in (0; x_n)$ hay

$$\text{suy ra } 1 - x_n = nx_n \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos^{n-1} \varepsilon < nx_n \Rightarrow x_n > \frac{1}{n+1}.$$

c. Cũng từ câu trên, lại có $\sin \varepsilon < \sin x_n < x_n \Rightarrow 1 - x_n < nx_n^2 \Rightarrow x_n > \frac{2}{\sqrt{1+4n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+1+1}}$.

Bài 6: Với mỗi số nguyên dương n , xét phương trình $\sum_{i=1}^n \cos^i \frac{x}{i} = nx$.

a. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm dương duy nhất và kí hiệu là x_n .

b. Chứng minh $\cos^n x \geq 1 - \frac{1}{2}nx^2; \forall x \in (0; 1)$.

c. Tính $\lim x_n$.

Lời giải:

a. Tự chứng minh, ngoài ra ta còn có $x_n \in (0; 1)$.

b. Xét hàm số $f(x) = \cos^n x$ và dùng định lý Lagrange.

c. Sử dụng câu b đưa đến đánh giá: $1 > x_n \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{2i}\right) = 1 - x_n^2 \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. Đồng thời

dùng định lý Stolz suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{n} = 0$ và dùng định lý kẹp ta có $\lim x_n = 1$.

Bài 7: Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, xét phương trình $x^n = 2x + 1$.

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm dương duy nhất và kí hiệu x_n .

b. Tính $\lim x_n$ theo hai cách (định lý Weierstrass và kẹp).

c. Tính $\lim n(x_n - 1)$.

d. Tìm số thực k để $\lim n^k (x_n - x_{n+1})$ là một số thực khác 0.

Lời giải:

Bài 8: Với mỗi số nguyên dương n xét phương trình $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$

a. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n .

b. Tính $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

c. Chứng minh $\sqrt{n+\sqrt{n}} < x_n; \forall n$ và tính $\lim (x_n - \sqrt{n})$.

Lời giải:

a. Tự làm.

b.

Cách 1: Đánh giá $\sqrt{n} < x_n < \sqrt{n+1} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$.

Cách 2: Đánh giá: $x_n < \sqrt{n+1} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{2x_n}{\sqrt{n}} = \lim \left(\sqrt{\frac{x_n}{n} + 1} + \sqrt{\frac{x_n}{n} + 1 + \frac{1}{n}} \right) = 2$ và suy ra

kết quả.

c. $f_n(x) = 2x - \sqrt{x+n} - \sqrt{x+n+1}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và có

$f_n(\sqrt{n+\sqrt{n}}) < 0; f_n(\sqrt{n+\sqrt{n}+2}) > 0 \Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} < x_n - \sqrt{n} < \sqrt{n+\sqrt{n}+1} - \sqrt{n}$ và điều này

suy ra $\lim (x_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Bài 9: Với mỗi n nguyên dương, xét phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n} = 0$$

thuộc khoảng $(0, 1)$

a. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất là x_n thuộc khoảng $(0, 1)$

b. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ; hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải:

Xét hàm số $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$ liên tục trên $(0;1)$ và nghịch biến trên $(0;1)$ đồng thời $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = -\infty$ nên phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x_n \in (0;1)$.

Ta có $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{1}{(x_n - n - 1)} = \frac{1}{(x_n - n - 1)} < 0$, trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1} . Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số $\{x_n\}$ giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n)$$

(Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá $\ln(1+1/n) < 1/n$)

Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy số giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n .

Do $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$ nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1/a$.

Khi đó với $n \geq N$ ta có

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \dots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\lim x_n = 0$.

Bài 9.1: Với mỗi n nguyên dương thì phương trình $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{x-n}} = 0$ cũng có nghiệm duy nhất $x_n \in (0;1)$. Tính $\lim x_n$.

Bài 10: Cho phương trình $x^n = nx + 1$, n là số nguyên dương lớn hơn 1.

a. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm dương duy nhất và kí hiệu là x_n .

b. Tính $\lim x_n$.

c. Chứng minh $(n+1)(x_n - x_{n+1}) \geq x_n - 1 - \frac{1}{nx_n}; \forall n \geq 2$ và từ đó suy ra

$$x_n \leq 1 + \frac{3}{2n} + \frac{H_n}{n}; \forall n > 2 \text{ với } H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Lời giải:

a. Tự làm, ngoài ra còn chỉ ra được $x_n > 1$.

b. Đặt $f_n(x) = x^n - nx - 1$ là hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi $n > 1$.

Xét $n=2, n=3$ dễ dàng kiểm tra $x_n > 1 + \frac{1}{n}$ và

$$f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-n\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<3-n-1-1<0; \forall n>3$$

Kết hợp sự đồng biến cho ta kết quả: $x_n > 1 + \frac{1}{n}$.

Ta có $f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n-n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)-1 \geq 1+2\sqrt{n}+2(n-1)-n-2\sqrt{n}-1 > 0$, với mọi $n > 1$.

Từ đây ta có: $1+\frac{1}{n} < x_n < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$ và suy ra kết quả.

c. Ta chứng minh được (x_n) là dãy giảm và theo Lagrange

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) &= (n+1)(\varepsilon_n^n - 1)(x_n - x_{n+1}); \varepsilon_n \in (x_{n+1}; x_n) \\ \Leftrightarrow x_n^{n+1} - (n+1)x_n - 1 &\leq (n+1)(x_n^n - 1)(x_n - x_{n+1}) = (n+1)nx_n(x_n - x_{n+1}) \end{aligned}$$

Từ đây suy ra kết quả.

Lại sử dụng kết quả này ta có: $(n+1)x_{n+1} \leq nx_n + 1 + \frac{1}{nx_n} \leq nx_n + 1 + \frac{1}{n+1}$; $n=2;3;4;\dots$ cộng theo

vế suy ra $(n+1)x_{n+1} < 2x_2 + n - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1}$ và suy ra kết quả. Lưu ý là $x_2 < \frac{5}{2}$.

Bài 11: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì phương trình $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 2$ luôn có một nghiệm dương duy nhất. Ký hiệu nghiệm dương đó là x_n , chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải: Quảng Nam TST 2019 – 2020

Đặt $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 2, n \in \mathbb{N}^*$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $f_n(x)$ là hàm số liên tục, đồng biến trên $[0; +\infty)$. Lại có $f_n(0) = -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ nên phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n \in (0; +\infty)$. Với $n=1$ thì ta có $x_1 = 2$. Với $n=2$ ta có $x_2 = 1$. Với $n \geq 3$ thì $f_n(1) = n - 2 > 0$ suy ra $x_n < 1$. Do đó $x_n \in (0; 1), \forall n \geq 3$.

Hơn nữa với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \dots + x_{n+1} - 2 = -x_{n+1}^{n+1} < 0$

Suy ra $x_{n+1} < x_n$ hay (x_n) là dãy số đơn điệu giảm, vì vậy dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt

$$L = \lim x_n, L \in [0; 1). \text{ Từ giả thiết, với } n \geq 3 \text{ thì } x_n^n + x_n^{n-1} + \dots + x_n - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_n^{n+1} - 1}{x_n - 1} = 3$$

Lấy giới hạn, kết hợp với $\lim x_n^{n+1} = 0$ ta được $\frac{-1}{L-1} = 3 \Leftrightarrow L = \frac{2}{3}$.

Vậy $\lim x_n = \frac{2}{3}$.

Bài 12: Cho số thực $a > 2$. Đặt $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1 (n=1, 2, \dots)$. Chứng minh rằng với mỗi n phương trình $f_n(x) = a$ có đúng một nghiệm $x_n \in (0; +\infty)$. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tính giới hạn này.

Lời giải:

Với mỗi n , đặt $g_n(x) = f_n(x) - a$; khi đó $g_n(x)$ là hàm liên tục, tăng trên $[0; +\infty)$. Ta có $g_n(0) = 1 - a < 0$; $g_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0$ nên $g_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n trên $(0; +\infty)$. Để chứng minh tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, ta chứng minh dãy (x_n) tăng và bị chặn.

$$\text{Ta có } g_n\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a^{10}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a}} - a = a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1} \left(a^9\left(1 - \frac{1}{a}\right)^9 - 1\right)$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1} \left((a-1)^9 - 1\right) > 0$$

$$\text{Suy ra } x_n < 1 - \frac{1}{a} \quad \forall n$$

Mặt khác, từ $g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \dots + 1 - a = 0$, suy ra

$$x_n g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + \dots + x_n - ax_n = 0$$

$$\Rightarrow g_{n+1}(x_n) = x_n g_n(x_n) + 1 + ax_n - a = ax_n + 1 - a < 0 \text{ do } x_n < 1 - \frac{1}{a}.$$

Do g_{n+1} là hàm tăng và $0 = g_{n+1}(x_{n+1}) > g_{n+1}(x_n)$ nên $x_n < x_{n+1}$. Vậy dãy (x_n) tăng và bị chặn nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Do $0 < x_n < 1 - \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n = 0$, từ giả thiết ta có $a^{10}x_n^{n+10} + \frac{1 - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = a$, lấy lim hai vế suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \frac{1}{a}.$$

Bài 13: Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét hàm số $f_n(x) = x^{2n} + \sin 2x$ với $x \in \mathbb{R}$.

1/ Chứng minh rằng hàm $f_n(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại 1 điểm x_n duy nhất.

2/ Gọi u_n là giá trị nhỏ nhất của hàm $f_n(x)$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải: Vinh TST 2019 - 2020

1/ Ta thấy $f_n(x) > 0$ với mọi $x \notin [-1, 0]$. Mặt khác $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\pi}{4}\right)^{2n} - 1 < 0$

nên $\min_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) < 0$. Do đó ta chỉ cần xét $f_n(x)$ trên $[-1, 0]$. Ta có

$$f_n'(x) = 2nx^{2n-1} + 2\cos 2x, \quad f_n''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} - 4\sin 2x > 0$$

với mọi $x \in [-1, 0]$. Suy ra $f_n'(x)$ đồng biến trên $[-1, 0]$. Mặt khác

$$f_n'(-1) = -2n + 2\cos(-2) < 0, \quad f_n'(0) = 2 > 0$$

và $f_n(x)$ liên tục nên phương trình $f_n'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n \in [-1, 0]$ đồng thời $f_n'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_n do đó hàm $f_n(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_n duy nhất.

2/ Ta có $u_n = \min_{[-1, 0]} f_n(x) = f_n(x_n)$. Với $x \in [-1, 0]$ ta có $f_{n+1}(x) = x^{2n+2} + \sin 2x \leq x^{2n} + \sin 2x = f_n(x)$.

Từ đó suy ra $u_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n) = u_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Do đó (u_n) là dãy giảm. Mặt khác $u_n = f_n(x_n) = x_n^{2n} + \sin 2x_n \geq -2$ với mọi n nên (u_n) bị chặn.

Vậy (u_n) là dãy giảm và bị chặn nên có giới hạn hữu hạn.

Bài 14: Cho phương trình $(x-1)^n + (x-2)^n = x$, với n là số nguyên dương lớn hơn 1

a. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm lớn hơn 2, kí hiệu là x_n , tìm $\lim x_n$.

b. Tính $\lim n(x_n - 2)$

Lời giải:

a. Xét $f_n(x) = (x-1)^n + (x-2)^n - x \Rightarrow f_n'(x) = n(x-1)^{n-1} + n(x-2)^{n-1} - 1 > 0; \forall x > 2$ nên hàm số này đồng biến trên $(2; +\infty)$. Đồng thời $f_n(2) < 0; f_n(3) = 2^n + 1 - 3 > 0$ nên phương trình luôn có nghiệm trên $(2; 3)$ và đây là nghiệm duy nhất.

Lại xét: $f_n\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n^n} - 2 - \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n^2}C_n^2 - 2 - \frac{1}{n} > 0; \forall n > 2$. Điều này

suy ra $2 < x_n < 2 + \frac{1}{n}$ và suy ra $\lim x_n = 2$.

b. Từ câu a, và do $\lim(x_n - 2) = 0 \Rightarrow \lim(x_n - 2)^n = 0$ nên $\lim(x_n - 1)^n = 2$

$$\Rightarrow \lim n \ln(x_n - 1) = \ln 2 \Rightarrow \lim \left(n(x_n - 2) \frac{\ln(x_n - 1)}{x_n - 2} \right) = \ln 2.$$

$$\text{Lại có } \lim(x_n - 2) = 0 \Rightarrow \lim \left(\frac{\ln(x_n - 1)}{x_n - 2} \right) = 1 \Rightarrow \lim n(x_n - 2) = \ln 2.$$

Bài 15: Với mỗi số tự nhiên $n > 0$, chứng minh rằng phương trình $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(x+i)} = \frac{1}{4}$ luôn có nghiệm duy nhất là x_n và tìm $\lim x_n$.

Lời giải:

Xét hàm số $f_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(x+i)} - \frac{1}{4} \Rightarrow f_n'(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(x+i)^2} < 0, \forall x > 0$ nên đây là

hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác

$$f_n(0) > 0; f_n(2) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) - \frac{1}{4} < 0$$

Vậy suy ra $f_n(x) = 0$ có nghiệm trên $(0; 2)$ và đây là nghiệm duy nhất.

Lại có: $f_n(2) - f_n(x_n) = f_n'(c)(2 - x_n); c \in (x_n; 2)$ nên

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(c+i)}(2 - x_n) > \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(2+i)}(2 - x_n) > \frac{1}{4}(2 - x_n)$$

$$\text{Vậy: } \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 2 - x_n > 0 \Rightarrow \lim x_n = 2.$$

Bài 16: Cho phương trình $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x+i-1)\sqrt{i+1} + (i+1)\sqrt{i}} = 1$, chứng minh rằng với mỗi $n > 23$,

phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất là x_n , tìm $\lim x_n$.

Lời giải: Tương tự bài 15.

ÔN TẬP Dãy Số Dự Tuyển**LẦN 1 – Ngày 26/7/2021**

Bài 1: Cho dãy số (u_n) thỏa $u_1 = 2; u_{n+1} = \frac{nu_n^2 + 1}{u_n(n+1)}; n = 1, 2, 3, \dots$

a. Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

b. Tính $\lim \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} - (n+1)u_{n+2} \right)$.

Lời giải:

a. Ta có $u_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n + \frac{1}{u_n(n+1)}$ và quy nạp suy ra $u_n < 1 + \frac{1}{n}; \forall n = 2; 3; \dots$ và lại có

$u_{n+1} - 1 = (u_n - 1) \frac{nu_n - 1}{u_n(n+1)} = (u_n - 1) \left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{u_n(n+1)} \right)$ và từ đây cũng suy ra $1 < u_n$.

Do đó: $\lim u_n = 1$.

b. Từ giả thiết ta có $(n+1)u_{n+1} - nu_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow (n+1)u_{n+1} - u_1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ và chú ý rằng

$\lim (n+1)(u_{n+1} - u_n) = 0$ nên suy ra kết quả.

Bài 2: Dãy số (u_n) xác định thỏa $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 3u_n + 2}{3u_n + 2}$.

a. Tính giới hạn dãy đã cho.

b. Tính $\lim \sqrt[n]{|u_n - 2|}$.

Lời giải:

a. Ta có: $|u_{n+1} - 2| = \left| \frac{2u_n + 1}{3u_n + 2} \right| \cdot |u_n - 2|$ và do $u_n > 0$ nên $\frac{2u_n + 1}{3u_n + 2} < \frac{2}{3}$, điều này suy ra

$$|u_{n+1} - 2| < \frac{2}{3} |u_n - 2| < \dots < \left(\frac{2}{3} \right)^n |u_1 - 2|, \forall n = 2; 3; \dots$$

Vậy $\lim u_n = 2$.

b. Áp dụng định lý Cesaro dạng nhân, ta có $\lim \frac{|u_{n+1}-2|}{|u_n-2|} = \frac{5}{7}$ nên $\lim \sqrt[n]{|u_n-2|} = \frac{5}{7}$.

Bài 3: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1}^3 - 3u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải:

Ta chứng minh quy nạp: $u_n > 2; \forall n = 1; 2; 3 \dots$ và chứng minh quy nạp đây là dãy giảm nên suy ra dãy đã cho có giới hạn hữu hạn là L. Lấy lim hai vế suy ra $L = 2$.

Bài 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 u_n + u_n^2 + 1} \forall n \in \mathbb{N}$.

a. Chứng minh dãy (S_n) xác định bởi $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ bị chặn trên.

b. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 u_n = ?$.

Lời giải:

a. Từ giả thiết $u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 u_n + u_n^2 + 1} \forall n \in \mathbb{N}$ ta có $u_{n+1} < \frac{u_n}{n^2 u_n} = \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (S_n) xác định bởi

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ bị chặn trên.

b. Cũng từ $u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 u_n + u_n^2 + 1} \forall n \in \mathbb{N}$ ta có $\frac{1}{u_{n+1}} = n^2 + u_n + \frac{1}{u_n} \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = n^2 + u_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Do đó $\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0} = 0^2 + u_0, \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = 1^2 + u_1$.

....

$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} = (n-1)^2 + u_{n-1}$.

Cộng theo vế ta được: $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

$\Rightarrow \frac{1}{n^3 u_n} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} + \frac{v_{n-1} + 1}{n^3}$.

Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+v_n}{n^3} = 0$ (do $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = c$) nên.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3 u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$ hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 u_n = 3$.

Bài 5: Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$. Chứng minh rằng $\lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ tồn tại và không vượt quá 1.

Lời giải:

Thu gọn $a_n = \frac{a_n}{1-a_n} - \frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}} \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1}{1-a_1} - \frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}} < 1$ và từ đây suy ra kết quả.

Ngoài ra, còn có thể chứng minh $\lim a_n = 0$ để suy ra $\lim$ của dãy đã cho là 1.

Bài 6: Cho dãy (x_n) biết $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{(x_1 + 1)(x_2 + \frac{1}{2})(x_3 + \frac{1}{3}) \dots (x_n + \frac{1}{n})}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Tính $\lim \frac{2018n\sqrt{n}}{x_n + 2019}$.

Lời giải:

Bằng qui nạp, ta chứng minh được $x_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{(x_1 + 1)(x_2 + \frac{1}{2})(x_3 + \frac{1}{3}) \dots (x_n + \frac{1}{n})} \\ &= \sqrt{(x_1 + 1)(x_2 + \frac{1}{2})(x_3 + \frac{1}{3}) \dots (x_{n-1} + \frac{1}{n-1})} \cdot \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \quad (n \geq 2) \quad (*)$$

• Ta chứng minh $x_n \geq \sqrt{n}$ bằng qui nạp.

Ta có: $x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2}$. Giả sử $x_k \geq \sqrt{k}$ ($k \geq 1$)

$$\text{Ta có: } x_{k+1} = x_k \sqrt{x_k + \frac{1}{k}} \geq \sqrt{k} \sqrt{\sqrt{k} + \frac{1}{k}} = \sqrt{k\sqrt{k} + 1} \geq \sqrt{k+1}$$

Vậy $x_n \geq \sqrt{n}, \forall n$.

Ta chứng minh được $(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} < 2\sqrt{n}$ (thực hiện biến đổi tương đương).

Ta có:

$$\begin{aligned}
0 < \frac{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}{x_{n+1} - x_n} &< \frac{2\sqrt{n}}{x_{n+1} - x_n} \\
&= \frac{2\sqrt{n}}{x_n(\sqrt{x_n + \frac{1}{n}} - 1)} \leq \frac{2}{\sqrt{x_n + \frac{1}{n}} - 1} \quad (\text{do } x_n \geq \sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{x_n} - 1}
\end{aligned}$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x_n} - 1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}{x_{n+1} - x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{x_n} = 0$ (định lý Stolz)

Ta có: $0 < \frac{2018n\sqrt{n}}{x_n + 2019} < 2018 \cdot \frac{n\sqrt{n}}{x_n}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2018n\sqrt{n}}{x_n + 2019} = 0$.

CHỦ ĐỀ DÃY SỐ 2021 – 2022

ÔN TẬP DÃY SỐ LẦN 4

Bài 1: Dãy (a_n) được định nghĩa như sau: Nếu $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các ước nguyên tố khác nhau của số nguyên dương n thì $a_n = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$. Chứng tỏ rằng với bất kì số nguyên dương $N \geq 2$

ta có: $\sum_{n=2}^N a_2 \cdot a_3 \dots a_n < 1$.

Lời giải:

Nhận thấy rằng $\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p} \right]$

Mặt khác chúng ta có bất đẳng thức

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p} \right] \leq \sum_{p \leq n} \frac{n}{p^2} < n \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) < \frac{n}{4} + \frac{n}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{2}.$$

Do đó $\sum_{k=2}^n a_k < \frac{n}{2}, \forall n \geq 2$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a_2 a_3 \dots a_n < \left(\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n-1} \right)^{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} < \frac{e}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^{n-1}}$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta có

$$\sum_{n=2}^N a_2 a_3 \dots a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + 3 \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \dots \right) = \frac{46}{60} + \frac{6}{32} < 1$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Cho dãy số $(u_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi

$$u_1 = a, u_{n+1} = u_n^2 + u_n + a^3 \quad (n \geq 1).$$

a. Chứng minh rằng, với dãy $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$, dãy số hội tụ và tìm giới hạn đó.

b. Cho $a = 2020$. Chứng minh rằng $u_n^2 + 2020^3$ luôn có ít nhất $n+4$ ước số nguyên tố khác nhau.

Lời giải: TST Bắc Giang 2020

a. Xét hàm số $f(x) = x^2 + x + a^3$. Ta có $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2}; \infty \right)$, và $u_{n+1} = f(u_n)$

+) Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right], \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1)

Thật vậy, $n=1$ đúng.

Giả sử (1) đúng với $n=k$, nghĩa là $u_k \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{k+1} = f(u_k) \in \left[f\left(-\frac{1}{2}\right); f(0)\right] = \left[-\frac{1}{4} + a^3; a^3\right] \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], \forall n \in \mathbb{N}$.

Như vậy (1) được chứng minh.

Mặt khác $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \Rightarrow a^2 + a^3 = a^2(a+1) > 0 \Rightarrow a^2 + a + a^3 > a \Rightarrow u_2 > u_1$.

Vì thế (u_n) tăng, bị chặn trên bởi 0 nên dãy (u_n) hội tụ.

Giả sử $\lim u_n = L$. Suy ra $L \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$. Chuyển qua giới hạn, ta tìm được $L = -\sqrt{-a^3}$.

b. Ta có $u_n^2 + a^3 = (u_{n-1}^2 + u_{n-1} + a^3)^2 + a^3 = (u_{n-1}^2 + a^3)((u_{n-1} + 1)^2 + a^3)$.

*) Chứng minh hai số $(u_k^2 + a^3), ((u_k + 1)^2 + a^3)$ nguyên tố cùng nhau với mọi số nguyên dương k .

+) Trước hết, Ta chứng minh MĐ (1): $4a^3 + 1$ và $2u_{n+1}$ nguyên tố cùng nhau với mọi số nguyên dương n , bằng quy nạp.

Với $n=1$, gọi d là UCLN của $4a^3 + 1$ và $2u_1+1=2a+1$.

Ta có $d \mid 2(4a^3 + 1) = (2a+1)(4a^2 - 2a + 1) + 1$. Suy ra $d \mid 1$. Suy ra $d=1$. Đúng.

Giả sử $(4a^3 + 1, 2u_{n+1})=1$, với n là số nguyên dương.

Gọi $q = (4a^3 + 1, 2u_{n+1}+1)$. Suy ra $q \mid 2(2u_{n+1}+1) = (2u_{n+1})^2 + 4a^3 + 1$.

Do đó $q \mid (2u_{n+1})^2$. Theo giả thiết quy nạp thì suy ra $q=1$. Như vậy, ta đã chứng minh được MĐ (1).

+) Gọi g là UCLN của $(u_k^2 + a^3), ((u_k + 1)^2 + a^3)$.

Khi đó $g \mid 2u_{k+1}(2)$ và

$$\begin{aligned} g \mid 2(u_k^2 + a^3) + 2((u_k + 1)^2 + a^3) &= (2u_k + 1)^2 + 4a^3 + 1 \\ \Rightarrow g \mid 4a^3 + 1, (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $g=1$.

Do đó ta được, với mọi số nguyên k :

$$\begin{aligned} & \left((u_k^2 + a^3), ((u_k + 1)^2 + a^3) \right) = 1 \\ & (u_{k-1}^2 + a^3) \cdot ((u_{k-1} + 1)^2 + a^3) = u_k^2 + a^3, \end{aligned}$$

Mỗi k thì $(u_k + 1)^2 + a^3$ có ít nhất một ước nguyên tố p_k , với $k = 1, \dots, n-1$.

Theo trên ta được, $n-1$ số nguyên tố p_k phân biệt.

$u_1^2 + a^3 = a^2 + a^3 = a^2(a+1) = 2020^2 \cdot 2021 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 101^2 \cdot 43 \cdot 47$ có 5 ước nguyên tố phân biệt là 2, 5, 101, 43, 47 khác với p_k , $k = 1, \dots, n-1$.

Như vậy, $u_n^2 + a^3 = (u_{n-1}^2 + a^3)((u_{n-1} + 1)^2 + a^3) = (u_1^2 + a^3) \prod_{k=1}^{n-1} ((u_k + 1)^2 + a^3)$

Có ít nhất $5 + (n-1) = n+4$ ước nguyên tố khác nhau. Điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2n}{3u_n}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

b. Tìm số thực k để $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \cdot \frac{\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}}{u_n - \sqrt{n}}$ là một số thực khác 0.

Lời giải:

Ta chứng minh quy nạp $\sqrt{n-1} \leq u_n \leq \sqrt{n}$, $\forall n$. (1)

+) Dễ thấy khẳng định đã đúng với $n = 1, 2$.

+) Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là ta có $\sqrt{k-1} \leq u_k \leq \sqrt{k}$, $\forall k \geq 2$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2k}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2k}{3x}$, $\forall x \in [\sqrt{k-1}, \sqrt{k}]$

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2k}{3x^2} = \frac{x^2 - 2k}{3x^2} < 0, \forall x \in [\sqrt{k-1}, \sqrt{k}]$$

$$\text{Nên } u_{k+1} = f(u_k) \geq f(\sqrt{k}) = \sqrt{k} \text{ và } u_{k+1} = f(u_k) \leq f(\sqrt{k-1}) = \frac{3k-1}{3\sqrt{k-1}}$$

$$\text{Do } \sqrt{n-1} \leq u_n \leq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ nên theo nguyên lý kẹp ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Bài 4: Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, xét số thực $u_n > 1$ sao cho phương trình $[u_n x] = x$ (ẩn x) có đúng n nghiệm nguyên ($[u_n x]$ là phần nguyên của $u_n x$).

1. Chứng minh rằng $[u_n] = 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
2. Với mỗi cách xác định của dãy (u_n) thỏa điều kiện trên. Chứng minh rằng dãy (u_n) luôn có giới hạn và tìm giới hạn ấy.

Lời giải:

1. Nếu x là nghiệm của phương trình trên thì $x \in \mathbb{Z}$. Vì $u_n > 1$ nên từ (1) suy ra $x \geq 0$. Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm. Suy ra phương trình trên có đúng $n-1$ nghiệm nguyên dương. Ta có:

$$[u_n x] = x \Leftrightarrow x \leq u_n x < x+1 \Leftrightarrow 1 \leq u_n < 1 + \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$$

Xét x là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho. Từ (1) ta được $[u_n] = 1, \forall n \geq 2$.

2. Với mỗi n nguyên dương ($n \geq 2$), gọi x_0 là nghiệm nguyên dương lớn nhất của phương trình đã cho.

Vì phương trình có đúng $n-1$ nghiệm nguyên dương nên $x_0 \geq n-1$.

$$\text{Suy ra } 1 < u_n < 1 + \frac{1}{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$, ta được $\lim u_n = 1$.

Bài 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{3}{2}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 - 4}}, n = 1, 2, \dots$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim u_n$.

b) Chứng minh rằng $u_1 + u_2 + \dots + u_{2019} > 4038$.

Lời giải: TST Vinh 2018 - 2019

a) Từ hệ thức truy hồi ta có $u_n > 0$ nên $u_{n+1} > 1 + \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có

$$|u_{n+1} - 2| = \left| \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 - 4}} - 1 \right| = \frac{|u_n - \sqrt{2u_n^2 - 4}|}{\sqrt{2u_n^2 - 4}} = \frac{|4 - u_n^2|}{(u_n + \sqrt{2u_n^2 - 4})\sqrt{2u_n^2 - 4}} = \frac{u_n + 2}{(u_n + \sqrt{2u_n^2 - 4})\sqrt{2u_n^2 - 4}} |u_n - 2|$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x+2}{2x^2 - 4 + x\sqrt{2x^2 - 4}}$ với $x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{-2x^2 - 8x - 4 - 2\sqrt{2x^2 - 4} - \frac{2x^2(x+2)}{\sqrt{2x^2 - 4}}}{(2x^2 - 4 + x\sqrt{2x^2 - 4})^2} < 0 \text{ với mọi } x > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ nên } g$$

nghịch biến trên $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$. Suy ra $0 < g(u_n) < g\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = q < 1$ với mọi $n \geq 2$.

Suy ra $|u_{n+1} - 2| < q|u_n - 2|$ với mọi $n \geq 2$. Suy ra $\lim u_n = 2$.

b) Từ Câu a), xét hàm số $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 4}}; x \geq \frac{3}{2}$ và $f'(x) = \frac{-4}{(2x^2 - 4)\sqrt{2x^2 - 4}} < 0$ nên là

hàm nghịch biến trên $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ và quy nạp ta suy ra $u_{2k} > 2$ với mọi $k \geq 1$.

Xét hàm $h(x) = x + 1 + \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 4}}$ trên $[2; +\infty)$. Ta có $h'(x) = 1 - \frac{4}{(2x^2 - 4)\sqrt{2x^2 - 4}} > 0$ với mọi $x > 2$

nên h đồng biến trên $[2; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } u_1 + u_2 + \dots + u_{2019} &= (u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + u_5) + \dots + (u_{2018} + u_{2019}) \\ &= \frac{3}{2} + u_2 + u_3 + h(u_4) + \dots + h(u_{2018}) \geq \frac{3}{2} + 3 + \frac{3}{2} + h(2) + \dots + h(2) = 4038 \end{aligned}$$

Bài 6: Cho số thực a và xét dãy số (x_n) thỏa mãn

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0, x_{n+3} = \frac{x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2}{6} + a, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

a) Chứng minh rằng với $a = 0$ thì dãy (x_n) hội tụ.

b) Tìm số thực a lớn nhất sao cho dãy (x_n) hội tụ.

Lời giải:

a. Chứng minh rằng với $a = 0$ thì dãy (x_n) hội tụ. Với $a = 0$ thì $x_{n+3} = \frac{x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2}{3}$.

Dùng quy nạp chứng minh được $x_n \in (0; 1), \forall n \geq 3$. Ta có $x_{n+8} = \frac{x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2}{3} \leq \frac{x_{n+2} + x_{n+1} + x_n}{3}$.

Sử dụng bổ đề: Cho k là số nguyên dương và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Xét dãy (u_n) bị chặn dưới thỏa mãn $u_{n+k+1} \leq \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \dots + \alpha_k u_{n+k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó dãy (u_n) hội tụ.

Áp dụng bổ đề trên ta suy ra điều phải chứng minh.

b. Tìm số thực a lớn nhất sao cho dãy (x_n) hội tụ.

Giả sử (x_n) hội tụ đến L . Khi đó L là nghiệm của phương trình $\frac{L^2}{2} - L + a = 0$. Phương trình

này có nghiệm khi $a \leq \frac{1}{2}$. Với $a = \frac{1}{2}$, ta có $x_{n+3} = \frac{x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2}{6} + \frac{1}{2}$.

Dùng quy nạp chứng minh được $x_n \in (0; 1), \forall n \geq 2$. Xét dãy $(u_n): u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dễ thấy (u_n) là dãy tăng, $u_n \in (0; 1)$ nên (u_n) hội tụ đến 1. Dùng quy nạp chứng minh được $u_n < \min\{x_{3n}, x_{3n-1}, x_{3n-2}\}$.

Thật vậy, với $n=1, (*)$ đúng. Giả sử $(*)$ đúng đến n .

Ta có

$$\begin{aligned} x_{3n+1} &= \frac{x_{3n}^2 + x_{3n-1}^2 + x_{3n-2}^2}{6} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_n^2 + 1}{2} = u_{n+1} \\ x_{3n+2} &= \frac{x_{3n+1}^2 + x_{3n}^2 + x_{3n-1}^2}{6} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_{n+1}^2 + 2u_n^2}{6} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_n^2 + 1}{2} = u_{n+1} \\ x_{3n+3} &= \frac{x_{3n+2}^2 + x_{3n+1}^2 + x_{3n}^2}{6} + \frac{1}{2} \geq \frac{2u_{n+1}^2 + u_n^2}{6} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_n^2 + 1}{2} = u_{n+1} \end{aligned}$$

Như vậy $(*)$ đúng đến $n+1$.

Như vậy $(*)$ được chứng minh.

Dùng nguyên lý kẹp suy ra $\lim x_n = 1$. Vậy $\max a = \frac{1}{2}$.

Bài 7: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 > 0; a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1 + 2020 \cdot a_n^2}}; n = 0; 1; 2; \dots$ Chứng minh

$$a_{2020} < \frac{1}{2020}$$

Lời giải: Baltic way 2020

Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n-1}^2} = 2020; n = 1; 2; 3; \dots \Rightarrow \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{a_1^2} + 2020(n-1)$.

Lại có: $a_1 = \frac{a_0}{\sqrt{1+2020 \cdot a_0^2}} < \frac{1}{\sqrt{2020}}$ ($a_0 > 0$) nên điều này suy ra $\frac{1}{a_n^2} > 2020n \Rightarrow a_{2020} < \frac{1}{2020}$.

Bài 8: Dãy số dương (a_n) , tồn tại số $A > 0$ sao cho $a_n - a_{n+1} \geq A \cdot a_n^2; \forall n = 1; 2; 3; \dots$ Chứng minh tồn tại số $B > 0$ thỏa $a_n \leq \frac{B}{n}; \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Lời giải: TST Hưng Yên ngày 1 – 2021

Từ giả thiết ta có: $0 < a_{n+1} \leq -Aa_n^2 + a_n; \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(x) = -Ax^2 + x$ ta có: $a_2; a_3; \dots; a_n; \dots \in \left(0; \frac{1}{4A}\right)$ và đồng thời

$f(x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{4A}\right)$.

Đặt dãy $(b_n): b_1 = a_1; b_{n+1} = -Ab_n^2 + b_n$. Ta có: $a_2 \leq f(a_1) = b_2; a_3 \leq f(a_2) \leq f(b_2) = b_3; \dots$ vậy từ quy nạp cho ta $a_n \leq b_n; \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Mặt khác: ta có $\lim b_n = 0$ và dùng Cesaro suy ra tồn tại $\lim nb_n \Rightarrow (nb_n)$ bị chặn trên bởi B

hay từ đây: $a_n \leq b_n \leq \frac{B}{n}; \forall n = 1; 2; 3; \dots$

Bài 9: 2. Chứng minh rằng tồn tại dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vô hạn các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) $0 < x_i < 2$ với mọi $i = 1, 2, 3, \dots$

ii) $|x_i - x_j| \geq \frac{1}{j}$ với mọi $1 \leq i < j$.

Lời giải: Trường Đông miền Nam 2014 – ngày 1

Ta sẽ xây dựng dãy số này bằng quy nạp như sau.

Với $n=1$, ta chọn $a_1 = 1$.

Giả sử ta đã xây dựng được $n \geq 1$ số hạng đầu của dãy số này thỏa mãn điều kiện đề bài, tức là

với mọi $1 \leq i < j \leq n$, ta đều có $|a_i - a_j| \geq \frac{1}{j}$.

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số a_{n+1} thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases} 0 < a_{n+1} < 2 \\ |a_i - a_{n+1}| \geq \frac{1}{n+1}, i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

Thật vậy,

Xét hoán vị $(i, i_2, \dots, i_n)$ của bộ số $(1, 2, \dots, n)$ sao cho $0 < a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_n} < 2$.

Các số này chia đoạn $[0; 2]$ thành $n+1$ phần rời nhau nên phải tồn tại một đoạn nào đó, giả sử là $[a_i, a_{i_{j+1}}]$ có độ dài không nhỏ hơn $\frac{2}{n+1}$ (để đơn giản, ta xét $a_{i_0} = 0, a_{i_{n+2}} = 2$).

Khi đó, ta chọn $a_{n+1} = \frac{a_i + a_{i_{j+1}}}{2}$ thì ta dễ dàng thấy rằng với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ta có

$$|a_i - a_{n+1}| \geq |a_{i_j} - a_{n+1}| \geq \frac{1}{2} \frac{2}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Do đó, ta luôn xây dựng được số hạng tiếp theo khi đã có các số hạng trước đó của dãy.

Vậy tồn tại dãy số thỏa mãn đề bài. Ta có đpcm.

Bài 10: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1} + H_{n+2} + \dots + H_{2n}}{nH_n}$

Với $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, n \geq 1$.

Lời giải: Crux - 4608

Với mỗi số tự nhiên n, m ta có $H_{n+m} = H_n + \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k}$

$$\text{Do đó: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1} + H_{n+2} + \dots + H_{2n}}{nH_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nH_n + \frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}{nH_n}$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{n-k+1}{n+k} < 1 \text{ với mọi } 1 \leq k \leq n, \text{ ta có } 1 < \frac{nH_n + \frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}{nH_n} < 1 + \frac{n}{nH_n} = 1 + \frac{1}{H_n}.$$

Sử dụng định lý kẹp và $\lim H_n = +\infty$ suy ra kết quả.

Bài 11: Với a, b, c là các số thực xét dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ được định nghĩa bởi

$$x_n = \frac{a}{3n-2} + \frac{b}{3n-1} + \frac{c}{3n} \quad \forall n \geq 1.$$

Đặt $y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $a + b + c = 0$.

Lời giải: Đề xuất DHBTTB 2019 – Quảng Trị

Đặt $d = \frac{a+b+c}{3}$. Khi đó

$$x_n - \frac{d}{n} = a \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n} \right) + b \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \right) = 2a \cdot \frac{1}{(3n-2)3n} + b \cdot \frac{1}{(3n-1)3n}.$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k - \frac{d}{k}\right) = 2a \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)3k} + b \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)3k} = 2a \cdot u_n + b \cdot v_n \quad (1)$$

(trong đó $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)3k}$ và $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)3k}$).

Dễ thấy (u_n) là dãy tăng, và

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)3k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k-1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k-1}\right) = 1 - \frac{1}{3n-1} < 1$$

nên dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn, giả sử là u_0 . Tương tự, dãy (v_n) cũng có giới hạn hữu hạn, giả sử là v_0 .

Do đó, từ (1), ta suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \frac{d}{k}\right) = 2au_0 + bv_0$, hay

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_n - d \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = 2au_0 + bv_0.$$

Từ đây, do $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ nên (y_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $d = 0$. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 12: Xét dãy số thực vô hạn $x_1; x_2; \dots; x_n$ thỏa mãn $|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}$ với mọi số nguyên

dương m, n . Chứng minh rằng (x_n) là cấp số cộng.

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned} |(x_{a+1} - x_a) - (x_{b+1} - x_b)| &= |(x_{a+b+1} - x_a - x_{b+1}) - (x_{a+b+1} - x_b - x_{a+1})| \\ &\leq |x_{a+b+1} - x_a - x_{b+1}| + |x_{a+b+1} - x_b - x_{a+1}| < \frac{2}{a+b+1} \end{aligned}$$

Do đó: với mọi giá trị m, n

$$|(x_{m+1} - x_m) - (x_{n+1} - x_n)| = |(x_{m+1} - x_m) - (x_{a+1} - x_a) + (x_{a+1} - x_a) - (x_{n+1} - x_n)| < \frac{2}{a+m+1} + \frac{2}{a+n+1}$$

Cho a tiến ra vô cùng ta suy ra $x_{m+1} - x_m = x_n - x_{n+1} = d, \forall n$ hay đây là một cấp số cộng.

Bài 13: Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn $0 < x_0 < x_1$ và

$$\sqrt{1+x_n} \left(1 + \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}\right) = \sqrt{1+x_{n-1}} \left(1 + \sqrt{x_n \cdot x_{n+1}}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải: Đề xuất DHBTVB Quảng Nam

- $0 < x_0 < x_1$ nên tồn tại $\alpha_1, \alpha_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho :

$$x_0 = \tan^2 \alpha_0, \quad x_1 = \tan^2 \alpha_1$$

- Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x_1} \left(1 + \sqrt{x_0 x_2}\right) &= \sqrt{1+x_0} \left(1 + \sqrt{x_1 x_2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \alpha_1} \left(1 + \sqrt{x_2} \cdot \tan \alpha_0\right) &= \frac{1}{\cos \alpha_0} \left(1 + \sqrt{x_2} \cdot \tan \alpha_1\right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x_2} &= \frac{\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0} = \tan \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \Leftrightarrow x_2 = \tan^2 \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}. \end{aligned}$$

- Xét dãy số $\{\alpha_n\}$ như sau:

$$\begin{cases} \alpha_0, \alpha_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1}) \end{cases}.$$

Phương trình sai phân này cho ta

$$\alpha_n = \frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{3} + \frac{2}{3}(\alpha_0 - \alpha_1) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Do đó mà

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{3}.$$

- Ta chứng minh bằng quy nạp

$$x_{n+1} = \tan^2 \alpha_{n+1}.$$

Từ đó ta được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\tan^2 \alpha_n) = \tan^2 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \right) = \tan^2 \left(\frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{3} \right).$$

Bài 14: Cho dãy số thực (x_n) là dãy đơn điệu giảm và $\lim x_n = 0$. Dãy (y_n) được xác định như

sau $y_n = \sum_{k=1}^n ((-1)^k x_k)$, $n=1, 2, 3, \dots$. Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải: Đề xuất DHBTTB 2017 – Vĩnh Phúc

Do (x_n) là dãy đơn điệu giảm và $\lim x_n = 0 \Rightarrow x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có

$$y_{2n} = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \dots - x_{2n-1} + x_{2n} = y_{2n-2} + x_{2n} - x_{2n-1} < y_{2n-2}$$

$$y_{2n} = -x_1 + (x_2 - x_3) + (x_4 - x_5) + \dots + (x_{2n-2} - x_{2n-1}) + x_{2n} \geq -x_1 + x_{2n} \geq -x_1$$

Do đó (y_{2n}) là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim y_{2n} = a$

Ta có

$$y_{2n+1} = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \dots - x_{2n-1} + x_{2n} - x_{2n+1} = y_{2n-1} + x_{2n} - x_{2n+1} > y_{2n-1}$$

$$y_{2n+1} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \dots + (x_{2n-1} - x_{2n}) + x_{2n+1} \leq x_{2n+1} < x_1$$

Do đó (y_{2n+1}) là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên nên tồn tại $\lim y_{2n+1} = b$

Mặt khác ta có

$$y_{2n+1} = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \dots - x_{2n-1} + x_{2n} - x_{2n+1} = y_{2n} - x_{2n+1}$$

Chuyển qua giới hạn ta được

$$\lim y_{2n+1} = \lim (y_{2n} - x_{2n+1}) \Rightarrow b = a. \text{ Do đó dãy số } (y_n) \text{ có giới hạn hữu hạn.}$$

Bài 15: Cho trước k số khác không $a_1; a_2; \dots; a_k$ thoả mãn với mọi số tự nhiên n lẻ ta có $a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n = 0$. Chứng minh rằng k chẵn và giả sử $k = 2m$ thì các số $a_1; a_2; \dots; a_k$ có thể phân chia thành m cặp sao cho tổng của 2 số trong mỗi cặp bằng 0.

Lời giải: Đề xuất DHBTTB Hưng Yên 2017

Do k hữu hạn nên trong k số $a_1; a_2; \dots; a_k$ ta chọn được số có giá trị tuyệt đối lớn nhất. Giả sử số đó là a_1 .

Theo giả thiết, với mọi n lẻ ta có: $1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^n = 0$ (1)

Do a_1 có giá trị tuyệt đối lớn nhất nên $\left|\frac{a_i}{a_1}\right| \leq 1, \forall i = 2, 3, \dots, k$

Ta chứng minh, tồn tại i để $\frac{a_i}{a_1} = -1$

Giả sử không có số nào trong các số $\frac{a_i}{a_1}$ bằng -1.

Giả sử $i = 2, 3, \dots, t$ thì $\frac{a_i}{a_1} = 1$ và với $i = t + 1, \dots, k$ thì $\left|\frac{a_i}{a_1}\right| < 1$.

Khi đó, từ (1) $\Rightarrow S = \left(\frac{a_{t+1}}{a_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^n = -t \Rightarrow |S| = t$ với mọi n lẻ

Do $\left|\frac{a_i}{a_1}\right| < 1$ với $i = t + 1, \dots, k$. Chọn n lẻ đủ lớn để $\left|\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n\right| < \frac{t}{k-t}$ với $i = t + 1, \dots, k$.

$\Rightarrow |S| = \left|\left(\frac{a_{t+1}}{a_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^n\right| < t$ (mâu thuẫn)

Do đó, trong các số $\frac{a_i}{a_1}$ có ít nhất 1 số bằng -1.

Giả sử $\frac{a_2}{a_1} = -1 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0$.

Còn lại $k - 2$ số: $a_3; a_4; \dots; a_k$.

Nếu k chẵn lặp lại lập luận trên $\Rightarrow$ đpcm

Nếu k lẻ thì phải có 1 số trong các số đã cho mà mọi lũy thừa lẻ của nó đều bằng 0 $\Rightarrow$ số đó bằng 0 (mâu thuẫn)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 15: Cho hai dãy số dương a_n, b_n xác định như sau:
$$\begin{cases} a_1 = b_1 = 1 \\ b_n = a_n \cdot b_{n-1} - 2018 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2017$, đặt $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k}$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Lời giải:

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2017$, $b_n > 0 \forall n$ suy ra dãy b_n bị chặn. Nên tồn tại số dương M sao cho $0 < b_n < M \quad \forall n$.

Có $a_n = \frac{b_n + 2018}{b_{n-1}}$ và $1 = \frac{a_n b_{n-1} - b_n}{2018}$ suy ra :

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} \cdot \frac{b_{n-1} a_n - b_n}{2018} = \frac{b_{n-1}}{2018 a_1 a_2 \dots a_{n-1}} - \frac{b_n}{2018 a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\text{Suy ra } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{b_1}{2018 a_1} - \frac{b_n}{2018 a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\text{Lại có } \frac{b_n}{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{b_2}{b_2 + 2018} \cdot \frac{b_3}{b_3 + 2018} \dots \frac{b_n}{b_n + 2018}$$

Do hàm số $f(t) = \frac{t}{t + 2018}$ đồng biến trên $0; +\infty$ nên $\frac{b_k}{b_k + 2018} < \frac{M}{M + 2018} \quad \forall k$

$$\text{Suy ra } \frac{b_n}{a_1 a_2 \dots a_n} < \left(\frac{M}{M + 2018} \right)^{n-1} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ do } \frac{M}{M + 2018} < 1.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2019}{2018}.$$

Bài 16: Cho dãy số (u_n) giảm và $\lim u_n = 0$, với mỗi số nguyên dương n , đặt

$$v_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n - n u_{n+1}, \quad z_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Chứng minh nếu (v_n) bị chặn thì (z_n) hội tụ.

Lời giải: Chọn đội tuyển năng khiếu 2012

Vì (u_n) giảm và $\lim u_n = 0$ nên dãy (u_n) là dãy dương.

Giả sử dãy (v_n) có chặn trên là L ; ta thấy dãy (z_n) tăng nên chỉ cần chứng minh dãy này cũng bị chặn trên.

Ta có: $v_n = z_n - nu_{n+1} \leq L \Rightarrow z_n \leq nu_{n+1} + L$

$$z_n - nu_{n+2} = u_1 + u_2 + \dots + u_n - nu_{n+2} = u_1 + \dots + u_{n+1} - (n+1)u_{n+2} + u_{n+2} - u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq L$$

và làm tương tự ta suy ra $z_n \leq nu_{n+m} + L; \forall n; m \in \mathbb{Z}^+$.

Cố định n ; cho m ra vô cùng thì $\lim u_{n+m} = 0$ và suy ra $\lim n.u_{n+m} = 0$

ta có: $z_n \leq L; \forall n = 1; 2; 3 \dots$ và suy ra dãy đã cho bị chặn trên.

Hay dãy đã cho hội tụ.

Bài 17:

Các số thực dương x sao cho biểu thức $x^2 - \frac{1}{2^x}$ là số chính phương được viết thành một dãy số tăng $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

a) Với $n = 1, 2, 3, \dots$ ký hiệu tổng $s_n = \frac{1}{a_1^2 - a_0^2} + \frac{1}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{1}{a_3^2 - a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2 - a_{n-1}^2}$. Chứng minh rằng dãy số (s_n) không bị chặn trên khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Chứng minh rằng a_{2018} và a_{2019} có 3 chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy là giống nhau.

Lời giải:

a) Đặt $f(x) = x^2 - 2^{-x}$ với $x > 0$. Dễ thấy f liên tục và $f'(x) = 2x + 2^{-x} \ln 2 > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Với $n \geq 0$, xét phương trình $f(x) = n^2$

Ta thấy $f(n) = n^2 - 2^{-n} < n^2$ và $f(n+1) = (n+1)^2 - 2^{-(n+1)} > (n+1)^2 - 1 > n^2$ nên phương trình $f(x) = n^2$ có nghiệm duy nhất thuộc $(n; n+1)$. Do đó $a_k \in (k; k+1)$ với mọi $k = 0, 1, 2, \dots$

Từ đó ta có đánh giá $0 < a_k^2 - a_{k-1}^2 = (a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1}) < 2(k+1+k) \leq 6k$ nên

$$s_n > \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

Ta có bổ đề quen thuộc $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nên $s_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

b/ Ta sẽ chứng minh rằng $a_n < n + \frac{1}{1000}$ với mọi $n \geq 10$. Thật vậy,

$$f\left(n + \frac{1}{1000}\right) = \left(n + \frac{1}{1000}\right)^2 - 2^{\left(n + \frac{1}{1000}\right)} > n^2 + \frac{n}{500} + \frac{1}{10^6} - 2^{-10} > n^2$$

Do đó, ta có đánh giá chặt hơn là $n < a_n < n + \frac{1}{1000}$ nên a_{2018}, a_{2019} đều có cùng ba chữ số thập phân đầu tiên là 000.

Bài 18: Cho dãy (x_n) bị chặn và dãy (y_n) thỏa (y_n) là cấp số nhân công bội $\geq 1; y_1 > 0$.

Biết $x_n y_n + x_{n+2} \geq (1 + y_n) x_{n+1}; n = 1; 2; 3 \dots$ Chứng minh (x_n) hội tụ.

Lời giải:

Từ giả thiết: $x_{n+1} - x_{n+2} \leq y_n (x_{n+1} - x_n) \leq y_n \cdot y_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1}) \leq \dots \leq y_k^{n+1-k} q^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}} (x_k - x_{k+1})$.

Từ đây làm tương tự và cộng theo vế cho ta:

$$x_{k+1} - x_{n+2} \leq \sum_{i=k}^n y_k^{n+1-i} q^{\frac{1}{2}(n-i)(n-i+1)} (x_k - x_{k+1}); \forall n, k \in \mathbb{Z}^+$$

Vì (y_n) có công bội lớn hơn 1 nên tồn tại k_0 để $y_k > 1; \forall k > k_0$. Khi đó, xét $k, n > k_0$ thì

$$\frac{x_{k+1} - x_{n+2}}{\sum_{i=k}^n y_k^{n+1-i} q^{\frac{1}{2}(n-i)(n-i+1)}} \leq (x_k - x_{k+1}) \text{ và do } (x_n) \text{ bị chặn nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - x_{n+2}}{\sum_{i=k}^n y_k^{n+1-i} q^{\frac{1}{2}(n-i)(n-i+1)}} = 0. \text{ Vậy, cố}$$

định $k > k_0$ và cho $n \rightarrow +\infty$ ta có $x_k - x_{k+1} \geq 0; \forall k > k_0$ hay dãy (x_n) giảm từ k_0 trở đi. Từ đây suy ra dãy đã cho có giới hạn.

Bài 19: Cho dãy số (a_n) xác định bởi công thức
$$\begin{cases} a_1 = \frac{2019}{2018}, \\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + \frac{n^2}{a_n}, n \geq 1 \end{cases}.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Xét dãy số (c_n) được xác định bởi $c_n = \left[\sum_{i=1}^n \frac{i}{a_i} \right]$, kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x .

Chứng minh rằng mỗi số nguyên dương đều có xuất hiện trong dãy (c_n) .

Lời giải: Đề xuất DHBTTB Lào Cai 2018

a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $n^2 < a_n < (n+1)^2$ với mọi n .

$$\text{Xét hiệu } a_{n+1} - (n+1)^2 = a_n - n^2 + 2(\sqrt{a_n} - n) + \frac{n^2}{a_n} - 1 = (a_n - n^2) \left(\frac{a_n - 1}{a_n} + \frac{2}{\sqrt{a_n} + n} \right) \quad (1)$$

Ngoài ra, $a_1 = \frac{2019}{2018} > 1^2$ nên từ (1) bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được rằng $a_n > n^2$ với mọi n .

Khi đó $a_{n+1} < a_n + 2\sqrt{a_n} + 1 \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{a_n} + 1$ (2)

Ta cũng có $a_1 = \frac{2019}{2018} < 2^2$ nên từ (2) bằng quy nạp, ta chứng minh được $a_n < (n+1)^2$ với mọi $n \geq 1$.

Từ đó, với mỗi n nguyên dương, ta có $n^2 < a_n < (n+1)^2$ nên

$$b_n < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Suy ra (b_n) bị chặn trên, mà dãy số (b_n) tăng thực sự nên nó có giới hạn hữu hạn.

Trước hết ta chứng minh kết quả quen thuộc sau: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Thật vậy, ta có $e^x > x+1$ với $x > 0$ nên $x > \ln(x+1), \forall x > 0$.

Thay x bởi $\frac{1}{i}$, ta có $\frac{1}{i} > \ln\left(\frac{i+1}{i}\right) = \ln(i+1) - \ln i$.

Suy ra $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \sum_{i=1}^n [\ln(i+1) - \ln i] = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Theo câu a, ta cũng có $\frac{1}{n} > \frac{n}{a_n} > \frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{4n}$ với mọi n .

Đặt $s_n = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n}$ thì $s_n > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ nên $s_n \rightarrow +\infty$.

Khi đó, với mỗi số nguyên dương m thì tồn tại n để $s_n \geq m$.

Gọi n_0 là chỉ số đầu tiên để $s_{n_0} \geq m$ thì $s_{n_0-1} < m$. Ta phải có $s_{n_0} < m+1$ vì nếu không thì

$\frac{n_0}{a_{n_0}} = s_{n_0} - s_{n_0-1} > 1$, mâu thuẫn. Điều này cho thấy rằng $c_{n_0} = [s_{n_0}] = m$.

Vậy mỗi số nguyên dương đều có xuất hiện trong dãy (c_n) .

Bài 20: Cho dãy số (a_n) với $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh

rằng

(a) Dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn

(b) $a_1 + \dots + a_n > \sqrt{2n+1} - 1$ với mọi số nguyên dương n .

Lời giải: Đề xuất DHBTVB 2018 – ĐHSPT Hà Nội

(a) Từ công thức xác định dãy ta suy ra (a_n) là dãy dương. Với mỗi số nguyên dương n ta có

$$a_{n+2} = \frac{1}{(2n+3)a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3} a_n$$

Vậy $a_{n+2} < a_n$ với mọi số nguyên dương n . Từ đây ta suy ra hai dãy con (a_{2n}) và (a_{2n+1}) cùng giảm. Thành thử từng dãy đều có giới hạn hữu hạn là $a, b \geq 0$. Từ giả thiết

$$a_{n+1}a_n = \frac{1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

cho $n \rightarrow \infty$ ta được $ab = 0$. Vậy $a = 0$ hoặc $b = 0$. Lưu ý rằng $a_{2n+1} = \frac{4n-1}{4n+1}a_{2n-1} = \dots = \frac{4n-1}{4n+1} \dots \frac{3}{5}$

$$\text{Và } a_{2n} = \frac{4n-3}{4n-1}a_{2n-2} = \dots = \frac{4n-3}{4n-1} \dots \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3}.$$

Do $\frac{4k-1}{4k+1} > \frac{4k-3}{4k-1} \quad \forall k = \overline{1, n}$ nên $a_{2n+1} \geq a_{2n}$ với mọi n . Suy ra $a \leq b$. Vậy $a = 0$.

Mặt khác $\frac{4k-1}{4k+1} < \frac{4k+1}{4k+3} \quad \forall k = \overline{1, n}$ nên $a_{2n+1} < \frac{3(4n+1)}{4n+3}a_{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}_+$.

Thành thử cho $n \rightarrow \infty$ ta được ngay $b = 0$. Tóm lại $a = b = 0$ nên dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và giới hạn đó bằng 0.

(b) Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Đầu tiên ta thấy bất đẳng thức đúng với $n = 1, 2$. Giả sử rằng khẳng định đã đúng tới $n \geq 2$. Khi đó theo giả thiết quy nạp và bất đẳng thức Cauchy

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_{n+1} &= (a_1 + \dots + a_{n-1}) + (a_n + a_{n+1}) \geq \sqrt{2n-1} - 1 + 2\sqrt{a_n a_{n+1}} \\ &= \sqrt{2n-1} - 1 + \frac{2}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{2n+3} - 1 + \frac{2}{\sqrt{2n+1}} - \frac{4}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+3}} \\ &\geq \sqrt{2n+3} - 1 \quad (\text{lưu ý } \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}, a, b \geq 0) \end{aligned}$$

Bài 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại các số $p > 0$ và $q \in (0; 1)$ sao cho $|f(x)| \leq p, |f'(x)| \leq q, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 0; x_{n+1} = f(x_n)$ có giới hạn hữu hạn.

Lời giải: Đề xuất THHV chuyên Hùng Vương 2019

Vì $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, theo định lí

Lagrange tồn tại $z \in (x; y)$ sao cho $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y|$

Do $|f'(x)| \leq q, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$. Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $g(-p) = f(-p) + p \geq 0$ và $g(p) = f(p) - p \leq 0$ (do $|f(x)| \leq p, \forall x \in \mathbb{R}$) nên $g(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[-p; p]$.

Giả sử phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt $a < b$ thì theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $|f(a) - f(b)| = |f'(c)||a - b| \Leftrightarrow |a - b| = |f'(c)||a - b| \Leftrightarrow |f'(c)| = 1$, mâu thuẫn với giả thiết $|f'(x)| \leq q, q \in (0; 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất, giả sử là α . Ta có $f(\alpha) = \alpha$.

Khi đó ta có $|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq q|x_{n-1} - \alpha| \leq \dots \leq q^n|x_0 - \alpha|$.

Do $q \in (0; 1)$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, theo nguyên lý kẹp ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$.

Bài 22: Xét dãy $\{f_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) các hàm số xác định trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f_0(x) = 0$ và

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - (f_n(x))^2) \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng $\frac{nx}{2 + n\sqrt{x}} \leq f_n(x) \leq \sqrt{x}$ với $n \in \mathbb{N}, x \in [0; 1]$

Lời giải: Đề xuất THHV 2019 – Yên Bái

Với $x \in [0; 1]$ đã được xác định, để đơn giản trong trình bày ta kí hiệu $x = a^2, a \in [0; 1]$ và

$x_n = f_n(x), n \in \mathbb{N}$, (Bài toán chuyển về bài toán dãy quen thuộc). Như vậy ta có:

$$a \in [0; 1], x_0 = 0, x_{n+1} = x_n + \frac{a^2 - x_n^2}{2} \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots$$

Ta cần phải chứng minh: $\frac{na^2}{2 + na} \leq x_n \leq a$ với $n \in \mathbb{N}$

Ta chứng minh BĐT (1) bằng quy nạp theo n .

Với $n = 0$ thì (1) đúng vì $x_0 = 0$.

Giả sử (1) đã đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$), ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$

Ta có $x_{k+1} = x_k + \frac{a^2 - x_k^2}{2}$.

$$\text{Suy ra } a - x_{k+1} = a - x_k - \frac{a^2 - x_k^2}{2} = (a - x_k) \left(1 - \frac{a + x_k}{2} \right) \quad (2)$$

Chú ý: Theo giả thiết quy nạp $x_k \leq a \Rightarrow a - x_k \geq 0$ và $1 - \frac{a + x_k}{2} \geq 1 - \frac{a + a}{2} = 1 - a \geq 0$

Do đó từ (2) ta nhận được $a - x_{k+1} \geq 0$, tức là $x_{k+1} \leq a$ (3)

Lại theo giả thiết quy nạp $\frac{k \cdot a^2}{2 + k \cdot a} \leq x_k \leq a$, suy ra:

$$(a - x_k) \left(1 - \frac{a + x_k}{2} \right) \leq \left(a - \frac{k \cdot a^2}{2 + k \cdot a} \right) \left(1 - \frac{a}{2} \right) = \frac{2a}{2 + ka} \left(1 - \frac{a}{2} \right) \leq \frac{2a}{2 + (k+1)a}$$

vì $2(2 + ka) - (2 - a)(2 + (k+1)a) = a(2 + (k+1)a) - 2a = (k+1)a^2 \geq 0$.

$$\text{Hệ quả là } x_{k+1} \geq a - \frac{2a}{2 + (k+1)a} = \frac{(k+1)a^2}{2 + (k+1)a} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$\frac{(k+1)a^2}{2 + (k+1)a} \leq x_{k+1} \leq a \text{ suy ra điều cần chứng minh.}$$

Bài 23: Cho dãy số (a_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3} \\ \frac{(1 + a_n)(1 + a_{n+2})}{(1 + a_{n+1})^2} = \frac{a_n \cdot a_{n+2}}{a_{n+1}^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{34}{21}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải: Đề xuất THHV 2018 – Lai Châu

Biến đổi công thức truy hồi về dạng

$$\frac{(a_{n+2} + 1)a_{n+1}}{(a_{n+1} + 1)a_{n+2}} = \frac{(a_{n+1} + 1)a_n}{(a_n + 1)a_{n+1}} = \dots = \frac{(a_2 + 1)a_1}{(a_1 + 1)a_2} = 2$$

Và đưa về $\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_n+1}{a_n}, \forall n \in N^*$, từ đây rút ra

$$\frac{a_n+1}{a_n} = 2^{n-1} \cdot \frac{a_1+1}{a_1} = 2^n, \forall n \in N^*$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \forall n \in N^*.$$

$$\text{Tách } \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i - 1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \sum_{i=4}^n \frac{1}{2^i - 1}$$

$$\forall i \frac{1}{2^i - 1} < \frac{2^{i-1}}{2^i - 1} = \frac{1}{2^{i-1} - 1} - \frac{1}{2^i - 1}, \forall i \geq 4 \text{ nên}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i - 1} < \frac{31}{21} + \sum_{i=4}^n \left(\frac{1}{2^{i-1} - 1} - \frac{1}{2^i - 1} \right) = \frac{31}{21} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2^n - 1} < \frac{34}{21} \text{ đpcm.}$$

Bài 24: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + 1}, \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$.

Lời giải: TST Hà Nội 2020

Dễ thấy $a_n > 0, \forall n \geq 1$ và dãy (a_n) giảm thực sự. Ta chứng minh bằng quy nạp với mọi $n \geq 1$ thì

$$a_n \leq \frac{1}{n} \quad (*)$$

Dễ thấy điều này đúng với $n=1$. Giả sử nó đúng với n , khi đó ta có

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}}} \leq \frac{1}{n + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+1}$$

vì $n \geq 1$. Vì thế khẳng định $(*)$ cũng đúng với $n+1$, nên nó đúng với mọi n .

Vậy khi cho $n \rightarrow +\infty$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Do đó dãy (y_n) xác định bởi $y_n = \frac{1}{a_n}, \forall n \geq 1$

là dãy tăng thực sự (vì dãy (a_n) giảm thực sự) và $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.

Bây giờ đặt $x_n = n, \forall n \geq 1$ thì theo định lí Stolz ta thấy:

$$\text{Vi: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

Bài 25: Cho $(a_n)_{n \geq 0}$ là một dãy số thực thỏa mãn $a_0 = 1$ và $a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2 a_n + a_n^2 + 1}$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n$.

Lời giải:

Nhận thấy $a_{n+1} < \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$, do vậy dãy $y_n = \sum_{i=0}^n a_i$ là dãy dương bị chặn trên bởi L

Ta có $\frac{1}{a_{n+1}} = n^2 + a_n + \frac{1}{a_n}$, lần lượt cho $n = 0; 1; 2; \dots$ và cộng theo vế cho ta

$$\frac{1}{a_n} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k + 1; \forall n = 1; 2; 3; \dots \text{ Suy ra, } \frac{1}{n^3 a_n} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k + 1}{n^3}$$

$$\text{Vi } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k + 1}{n^3} = 0 \text{ theo định lý kẹp nên suy ra}$$

$$\text{Nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}. \text{ Do vậy, } \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n = 3.$$

Bài 26: Cho $(x_n)_{n \geq 1}$ là dãy số tăng và tồn tại số $a > 2$ thỏa mãn $x_{n+1} \geq ax_n - (a-1)x_{n-1}$, với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ có lim là $+\infty$.

Lời giải:

Ta có $x_{n+1} - x_{n-1} \geq a(x_n - x_{n-1}) > 2(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1}$, với mọi $n = 2; 3; 4; \dots$

Đặt $y_n = x_{n+1} - x_n$ thì rõ ràng dãy $(y_n)_{n \geq 1}$ là dãy số dương tăng ngặt nên $y_n > y_1; \forall n = 2; 3; \dots$ và

suy ra $x_2 - x_1 = y_1; x_3 - x_2 > y_1; x_4 - x_3 > y_1; \dots; x_n - x_{n-1} > y_1$ và cộng theo vế suy ra

$$x_n - x_1 > (n-1)y_1 \Rightarrow \lim x_n = +\infty.$$

Bài 27:

a. Dãy số (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_n = \frac{2n-5}{2n}x_{n-1}, n = 2; 3; 4...$ Đặt $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, tính $\lim S_n$.

b. Dãy số (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_n = \frac{2n-3}{2n}x_{n-1}, n = 2; 3; 4...$ Đặt $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, tính $\lim S_n$.

Lời giải:

a. Từ giả thiết ta có

$$2nx_n = (2n-5)x_{n-1} \Leftrightarrow 2nx_n - 2(n-1)x_{n-1} = -3x_{n-1} \Rightarrow 3S_n = 2x_1 - 2(n+1)x_{n+1}$$

Mà lại có: $x_n = \frac{2n-5}{2n}x_{n-1} < \frac{2(n-2)}{2n}x_{n-1} = \frac{n-2}{n}x_{n-1} < \dots < \frac{2}{n(n-1)}x_2$ và điều này suy ra

$$0 < nx_n < \frac{2}{n-1}x_2; n = 2; 3; 4; \dots \Rightarrow \lim nx_n = \lim (n+1)x_{n+1} = 0. \text{ Vậy } \lim S_n = \frac{2}{3}.$$

b. Tương tự như câu a, ta có $S_n = 2x_1 - 2(n+1)x_{n+1}$.

Cần chứng minh $\lim (n+1)x_n = 0$

$$\text{Ta có: } x_{n+1} = \frac{2n-1}{2(n+1)}x_n = \dots = \frac{2n-1}{2(n+1)} \cdot \frac{2n-3}{2n} \cdot \frac{2n-5}{2(n-1)} \dots \frac{3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}x_1.$$

Lại có: $\sqrt{(2n-1)(2n-3)} \leq 2(n-1); \sqrt{(2n-3)(2n-5)} \leq 2(n-2) \dots; \sqrt{3 \cdot 1} \leq 2$ nên

$$(n+1)x_{n+1} \leq \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} \cdot \frac{2(n-1)}{2(n-1)} \cdot \frac{2(n-2)}{2(n-2)} \dots \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2}x_1 = \frac{\sqrt{2n-1}}{n}x_2; \forall n = 2; 3; \dots$$

Mà $0 < (n+1)x_{n+1}; \forall n = 1; 2; 3; \dots$ nên $\lim (n+1)x_n = 0$ suy ra $\lim S_n = 2$

Bài 28: Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định bởi $x_0 = a, y_0 = b; a > 2, b > 0$ và

$$\begin{cases} x_{n+1}y_{n+1} - y_n = 0 \\ y_{n+1}^2 + 2 = x_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b dương, hai dãy số $(x_n), (y_n)$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Lời giải: Đề xuất DHBTB 2019 – Lê Quý Đôn

Từ công thức xác định dãy, ta có:

$$x_n = y_{n+1}^2 + 2 \geq 2, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Từ (1) và kết hợp với giả thiết: $x_{n+1}y_{n+1} = y_n \Rightarrow y_{n+1} & y_n$ cùng dấu, với mọi giá trị n .

$$\text{nhưng } y_0 = b > 0 \Rightarrow y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x_n > 2, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Áp dụng (3) và từ công thức truy hồi của dãy, ta có:

$$y_n = x_{n+1}y_{n+1} > 2y_{n+1} \Rightarrow 0 < y_{n+1} < \frac{1}{2}y_n < \frac{1}{2^2}y_{n-1} < \dots < \frac{1}{2^{n+1}}y_0 = \frac{b}{2^{n+1}}.$$

$$\text{Mà } \lim \left(\frac{b}{2^{n+1}} \right) = 0 \Rightarrow \lim y_n = 0 \text{ và}$$

$$\lim x_n = \lim (y_{n+1}^2 + 2) = 2$$

Bài 29: Dãy (x_n) thỏa $x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + \frac{n+1}{nx_n}; n = 1; 2; 3; \dots$. Tính $\lim \frac{x_n^2}{2n+1}$

Lời giải: TST Nam Định 2021

Dễ thấy dãy (x_n) dương

Từ giả thiết, ta bình phương hai vế:

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 \cdot \frac{n+1}{n} + \left(\frac{n+1}{n \cdot x_n} \right)^2 \Rightarrow x_{n+1}^2 - x_n^2 > 2; \forall n = 1; 2; 3 \dots \text{ và cho } n = 1; 2; 3; \dots; n \text{ và cộng}$$

theo vế ta có $x_{n+1}^2 - x_1^2 > 2n; \forall n = 1; 2; 3 \dots$ và suy ra $x_{n+1} > \sqrt{2n+1}; \forall n = 1; 2; 3 \dots$ và suy ra

$$\lim x_n = +\infty$$

$$\text{Ta có: } \lim (x_{n+1}^2 - x_n^2) = \lim \left(2 \cdot \frac{n+1}{n} + \left(\frac{n+1}{n \cdot x_n} \right)^2 \right) = 2 \text{ do } \lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{n+1}{n x_n} = 0.$$

$$\text{Theo Cesaro suy ra } \lim \frac{x_n^2}{n} = 2 \Rightarrow \lim \frac{x_n^2}{2n+1} = \lim \frac{x_n^2}{n} \cdot \frac{n}{2n+1} = 1.$$

Nhận xét: Ta thấy $x_{n+1} - x_n > 0; \forall n \Rightarrow (x_n)$ là dãy tăng và dương; giả sử (x_n) bị chặn trên thì tồn tại $\lim x_n = L > 0$ và chú ý rằng: $\lim \frac{n+1}{n.x_n} = \frac{1}{L}$. Từ đề bài, lấy lim hai vế thì

$L = L + \frac{1}{L}$ (Vô nghiệm). Vậy, $\lim x_n = +\infty$.

BÀI TẬP ÔN THI ĐỘI TUYỂN 2021 – 2022

LẦN I

Ngày soạn: 29/09/2021

Bài 1: Cho $P(x) = x^2 + mx + n$; $m, n \in \mathbb{Z}^+$, ta kí hiệu $F(n)$ là tập các giá trị m sao cho

$P(x) = 0$ có nghiệm nguyên và $S = \{n_1; n_2; \dots\}$ là tập các giá trị n sao cho $F(n)$ chứa hai giá trị

liên tiếp. Chứng minh tập S là vô hạn và $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \leq 1$.

Lời giải:

Các phương trình $x^2 - mx + n = 0$; $x^2 - (m+1)x + n = 0$ đều có nghiệm nguyên nên

$$m^2 - 4n = p^2; (m+1)^2 - 4n = q^2 \text{ với } p, q \text{ là các số nguyên và } q > p \geq 0$$

Từ đây suy ra $2m+1 = q^2 - p^2$, và có thể $q-p = 2x+1, q+p = 2y+1$, với $y \geq x \geq 0$ là các số nguyên. Điều này suy ra

$$\begin{aligned} 4n = m^2 - p^2 &= \left(\frac{q^2 - p^2 - 1}{2} \right)^2 - p^2 = \left(\frac{q^2 - p^2 - 1}{2} - p \right) \left(\frac{q^2 - p^2 - 1}{2} + p \right) \\ &= \frac{q^2 - (p^2 + 2p + 1)}{2} \cdot \frac{q^2 - (p^2 - 2p + 1)}{2} = \frac{1}{4} (q-p-1)(q-p+1)(q+p-1)(q+p+1) \\ &= \frac{1}{4} (2x)(2x+2)(2y)(2y+2) \Rightarrow n = x(x+1)y(y+1) \end{aligned}$$

Vì $n > 0$ ta có $x, y > 0$. Ngược lại, nếu $n = x(x+1)y(y+1)$ với các số nguyên dương x và y thì

$$m = \sqrt{p^2 + 4n} = \sqrt{(y-x)^2 + 4n} = 2xy + x + y = x(y+1) + (x+1)y \text{ và}$$

$m+1 = 2xy + x + y + 1 = xy + (x+1)(y+1)$. Nên tập S là vô hạn vì các phần tử dạng

$$n = x(x+1)y(y+1).$$

Khi đó, $\sum_{n \in S} \frac{1}{n} \leq \left(\sum_{x \geq 1} \frac{1}{x(x+1)} \right) \left(\sum_{y \geq 1} \frac{1}{y(y+1)} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$ tồn tại và $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \leq 1$.

Bài 2: Let $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ be two sequences of strictly positive numbers, such that

$$x_{n+1} \geq \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} \geq \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}}, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}^*$$

a) Show that the limits of the sequences $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$ and $(x_n y_n)_{n \geq 1}$ exist.

b) Show that the limits of the sequences $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ exist and are equal.

Lời giải: RMC 2008, Tr 53

Define the sequences s_n, p_n by $s_n = x_n + y_n, p_n = x_n y_n$ for all $n \geq 1$

a) we have $x_{n+1} \geq \frac{1}{2} s_n \geq \sqrt{p_n}, y_{n+1} \geq \frac{1}{2} s_n \geq \sqrt{p_n}$, whence $s_{n+1} \geq s_n, p_{n+1} \geq p_n$. It follows that the sequences

$(s_n)_{n \geq 1}$ and $(p_n)_{n \geq 1}$ are nondecreasing and therefore have a limit.

b) if $s_n \rightarrow \infty$, we get, using the above inequalities, that $x_n \rightarrow \infty$ and $y_n \rightarrow \infty$

If $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$, then the sequence $(p_n)_{n \geq 1}$ is bounded above by $\frac{1}{4} s^2$, so it converges to some

$p \leq \frac{1}{4} s^2$. We also have $p_{n+1} = x_{n+1} y_{n+1} \geq \frac{1}{4} s_n^2$ whence, passing to the limit, we obtain the reverse

inequality.

Since $x_n, y_n \in \left\{ \frac{1}{2} (s_n \pm \sqrt{s_n^2 - 4p_n}) \right\}$, it follows that $\left| x_n - \frac{1}{2} s_n \right| = \left| y_n - \frac{1}{2} s_n \right| = \frac{1}{2} \left| \sqrt{s_n^2 - 4p_n} \right| \rightarrow 0$

so $x_n \rightarrow \frac{1}{2} s$ and $y_n \rightarrow \frac{1}{2} s$.

BÀI TẬP ÔN THI DỰ TUYỂN 2021 – 2022

LẦN II

Ngày soạn: 5/10/2021

Chủ đề: Dãy số và công thức tổng quát.

Bài 1: Cho dãy số $u_1 = a; u_n = \frac{u_{n-1}^3 + 9u_{n-1} - 6}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7}$. Tìm các giá trị của a để dãy đã cho có giới

hạn hữu hạn và tính giới hạn trong các trường hợp đó.

Lời giải:

Nếu $a = -1$ thì $u_n = -1; \forall n \Rightarrow \lim u_n = -1$.

Xét $a \neq -1$ ta có $u_n + 1 = \frac{(u_{n-1} + 1)^3}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7}; u_n - 3 = \frac{(u_{n-1} - 3)^2}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7}$ và các điều này suy ra

$$\frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \left(\frac{u_{n-1} - 3}{u_{n-1} + 1} \right)^3 = \dots = \left(\frac{a - 3}{a + 1} \right)^{3^{n-1}} = b_n \Rightarrow u_n = \frac{3 + b_n}{1 - b_n}$$

Xét các TH:

1/ $\lim |b_n| = +\infty$ nếu $\left| \frac{a - 3}{a + 1} \right| > 1$ nên suy ra $\lim u_n = -1$. Vậy $a < 1; a \neq -1 \Rightarrow \lim u_n = -1$. Kết

hợp trường hợp đã xét ta suy ra $a < 1 \Rightarrow \lim u_n = -1$.

2/ $\lim |b_n| = 0$ nếu $\left| \frac{a - 3}{a + 1} \right| < 1$ nên suy ra $\lim u_n = 3$. Vậy $a > 1 \Rightarrow \lim u_n = 3$.

3/ Nếu $\frac{a - 3}{a + 1} = 1$ thì không tồn tại a .

4/ Nếu $\frac{a - 3}{a + 1} = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow u_n = 1; \forall n$ hay suy ra $\lim u_n = 1$.

Bài 2: Cho dãy số (u_n) thỏa

$$u_1 = 1; u_2 = 4; u_{n+2} = \frac{2(n+2)^2 \cdot u_{n+1} - (n^3 + 4n^2 + 5n + 2)u_n}{n+3}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+11) \cdot u_i} < \frac{1}{8}; \forall n = 1; 2; 3 \dots$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $(n+3)u_{n+2} = 2(n+2)^2 u_{n+1} - (n+2)(n+1)^2 u_n$ (1)

Đặt $u_n = n! \cdot v_n$; $v_2 = 2; v_1 = 1$ thì (1) suy ra $(n+3)v_{n+2} = 2(n+2)v_{n+1} - (n+1)v_n$ và có thể viết thành

$$(n+3)v_{n+2} - (n+2)v_{n+1} = (n+2)v_{n+1} - (n+1)v_n; n = 1; 2; 3; \dots$$

Vậy làm tương tự cho ta: $(n+3)v_{n+2} - (n+2)v_{n+1} = 3v_2 - 2v_1 = 4; n = 1; 2; 3; \dots$ và tiếp tục suy

$$\text{ra } (n+1)v_n - 2v_1 = 4(n-1) \Rightarrow v_n = \frac{4n-2}{n+1} \Rightarrow u_n = n! \cdot \frac{2(2n-1)}{n+1}$$

$$\text{Lại có: } \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+11)u_i} = \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{2(i+11)(2i-1) \cdot i!} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i! \cdot (i+2)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(i+1)!} - \frac{1}{(i+2)!} \right) < \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{i+1}{(i+11)(2i-1)} \leq \frac{1}{2(i+2)} \Leftrightarrow 2i^2 + 6i + 4 \leq 2i^2 + 21i - 11 \Leftrightarrow 15 \leq 15i \text{ (đúng)}$$

Bài 3: Cho dãy số (x_n) thỏa $x_0 = 2; x_1 = 3; x_2 = 7; x_3 = 18; x_{n+4} = \frac{x_{n+2}^2 + 45}{x_n}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i \cdot x_{i+2}}$

Lời giải:

Nhận xét: dãy (x_n) với cách xác định như trên là duy nhất. Lại chú ý rằng khi tính thêm vài giá trị nữa $x_3 = 18; x_4 = 47$ nên ta dự đoán $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$ hay chứng minh $x_n = a^n + b^n$ với a, b là nghiệm phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Mệnh đề đã cho đúng với $n = 0; 1; 2; 3$ và giả sử mệnh đề đúng với mọi giá trị $n = 0; 1; 2; 3; \dots; k+3$ và ta chứng minh mệnh đề đúng khi $n = k+4$. Xét

$$\frac{(a^{k+2} + b^{k+2})^2 + 45}{a^k + b^k} = \frac{a^{2k+4} + b^{2k+4} + 47}{a^k + b^k} = \frac{(a^k + b^k)(a^{k+4} + b^{k+4})}{a^k + b^k} = a^{k+4} + b^{k+4}$$

Điều này suy ra $x_{k+4} = a^{k+4} + b^{k+4}$ nên mệnh đề đúng khi $n = k+4$ hay ta có $x_n = a^n + b^n$.

Lại chú ý rằng: từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{x_n x_{n+2}} = \frac{1}{45} \left(\frac{x_{n+4}}{x_{n+2}} - \frac{x_{n+2}}{x_n} \right)$$

nên

$$\begin{aligned}\lim_{i=0}^n \frac{1}{x_i x_{i+2}} &= \lim \frac{1}{45} \left(\frac{x_{n+4}}{x_{n+2}} - \frac{x_{n+2}}{x_n} + \frac{x_{n+3}}{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}}{x_{n-1}} + \frac{x_{n+2}}{x_n} - \frac{x_n}{x_{n-1}} + \dots + \frac{x_4}{x_2} - \frac{x_2}{x_0} \right) \\ &= \lim \frac{1}{45} \left(\frac{x_{n+4}}{x_{n+2}} + \frac{x_{n+3}}{x_{n+1}} - \frac{x_3}{x_1} - \frac{x_2}{x_0} \right) = \frac{1}{45} \left(2a^2 - 6 - \frac{7}{2} \right)\end{aligned}$$

Bài 4: Cho $a_0 = 0, a_1 = 2$, and $a_{n+1} = \sqrt{2 - \frac{a_{n-1}}{a_n}}$ với $n \geq 1$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$.

Lời giải: Mathematical Reflection 2014 U297

Ta chứng minh quy nạp: $a_n = 2 \sin \frac{\pi}{2^n}$

Chú ý: $2 \sin \frac{\pi}{2^0} = 2 \sin 0 = 0 = a_0$; $2 \sin \frac{\pi}{2^1} = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 = a_1$

Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k - 1$; $n = k$ ta chứng minh mệnh đề đúng khi $n = k + 1$

$$\text{Ta có: } a_{k+1} = \sqrt{2 - \frac{a_{k-1}}{a_k}} = \sqrt{2 - \frac{2 \sin \frac{\pi}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^k}}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^k}} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\pi}{2^{k+1}}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Hay mệnh đề đúng khi $n = k + 1$ và suy ra điều cần chứng minh. Cuối cùng ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \right) = 2\pi$$

Bài 5: Cho dãy số $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}; u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 1} - 1}{u_n}; n = 1; 2; 3 \dots$ Chứng minh rằng

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} < 2^{n+1} - 2; n = 1; 2; 3 \dots$$

Lời giải: HSG Hà Nội 2019

Đặt $u_1 = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^1}$ và ta chứng minh quy nạp được $u_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}; n = 1; 2; 3 \dots$

Mặt khác, lại có đánh giá $\tan x > x; \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} < \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2}} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^2}} + \dots + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} < \frac{3 \cdot 2}{\pi} + \dots + \frac{3 \cdot 2^n}{\pi} = \frac{3}{\pi} (2^{n+1} - 2) < 2^{n+1} - 2$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Bài 6: Cho trước các số x, y, z khác 0 thỏa $xy + yz + xz = 0$ và đồng thời $|x + y + z| < 1$. Xét các

$$\text{dãy } (a_n); (b_n); (c_n) \text{ thỏa } \begin{cases} a_{n+1} = xa_n + yb_n + zc_n \\ b_{n+1} = za_n + xb_n + yc_n \\ c_{n+1} = ya_n + zb_n + xa_n \end{cases}. \text{ Tính } \lim a_n.$$

Lời giải: Ta xét $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2)$ và áp dụng liên tiếp quy tắc này để suy ra $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{n-1} \cdot (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$.

Lại có: $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 < 1$ nên suy ra $\lim (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2) = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0$ (Theo định lý kẹp).

Bài 7: Cho dãy số dương (a_n) thỏa $\lim \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = +\infty$. Đặt

$$x_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_{n+1} + 1)}, \text{ chứng minh dãy } (S_n) \text{ xác định bởi } S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ hội}$$

tụ và tính giới hạn.

Lời giải:

$$\text{Từ cách đặt cho ta } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2} + 1} \Leftrightarrow x_{n+1} = a_{n+1}x_n - a_{n+2}x_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Lấy tổng hay vế từ 1 đến } n-1, \text{ ta được } (S_n - x_1) = a_2x_1 - a_{n+1}x_n$$

Mặt khác lại xét đánh giá:

$$0 < a_{n+1}x_n = a_1 \frac{a_2 \dots a_n a_{n+1}}{(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_{n+1} + 1)} = \frac{a_1}{\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \left(1 + \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)} < \frac{a_1}{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{a_k}}$$

$$\text{Ta suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}x_n = 0 \text{ Vì vậy, ta được } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_2x_1 + x_1 = a_1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1.$$

Bài 8: Dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \alpha$; $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2}\right)x_n + \frac{8}{(n+1)^2}$; $n = 1; 2; 3; \dots$

Tìm α để dãy đã cho có giới hạn hữu hạn.

Lời giải:

Công thức truy hồi được viết lại

$$\frac{(n+1)x_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{nx_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{nx_n}{(n+1)(n+2)} &= \frac{x_1}{2.3} + \frac{8}{2.3.4} + \dots + \frac{8}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{\alpha}{6} + 4 \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{\alpha}{6} + 4 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3} - \frac{4}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x_n = \frac{(n+1)(n+2) \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3} \right) - 4}{n}$

Nếu $\frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3} \neq 0$ thì $\lim x_n = +\infty$ khi $\frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3} > 0$ và $\lim x_n = -\infty$ khi $\frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3} < 0$

Như vậy để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, buộc $\frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3} = 0$ hay $\alpha = -4$. Khi $\alpha = -4$ thì

$$x_n = \frac{-4}{n} \rightarrow 0$$

Vậy để dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn thì $\alpha = -4$.

Bài 9:

Cho k là số nguyên dương, đặt $a_n = \left[\left(k + \sqrt{k^2 + 1} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Xét dãy (s_n) thỏa mãn: $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{i-1}a_{i+1}}$, $\forall n \geq 1$

Chứng minh rằng dãy (s_n) hội tụ và tìm $\lim s_n$.

Lời giải:

Xét dãy (b_n) xác định bởi: $b_0 = 2, b_1 = 2k$ và $b_{n+1} = 2kb_n + b_{n-1}, \forall n \geq 1$

Khi đó $b_n = \left(k + \sqrt{k^2 + 1}\right)^n + \left(k - \sqrt{k^2 + 1}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $b_n < \left(k + \sqrt{k^2 + 1}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n < b_n + 1$ và $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $a_n = \left[\left(k + \sqrt{k^2 + 1}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Khi đó với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{i-1}a_{i+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_{i-1}b_{i+1}} = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^n \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{b_{i-1}b_i b_{i+1}} = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{b_{i-1}b_i} - \frac{1}{b_i b_{i+1}} \right) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{b_0 b_1} - \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right)$$

Từ đó suy ra $\lim s_n = \frac{1}{8k^2}$.

Bài 10: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + (n-1)u_{n-1}}{n(n^2 - 1)}, n > 1 \end{cases}$. Đặt $v_n = (n+1)(3n+2) \cdot u_n \cdot u_{n-1}$. Tìm

$\lim(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$.

Lời giải:

Với $n \geq 3$, ta có $u_1 + 2u_2 + \dots + (n-1)u_{n-1} + nu_n = n(n^2 - 1)u_n + nu_n = n^3 u_n$.

$$u_1 + 2u_2 + \dots + (n-2)u_{n-2} + (n-1)u_{n-1} = (n-1)^3 u_{n-1}.$$

$$\text{Suy ra } n^3 u_n = nu_n + (n-1)^3 u_{n-1} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n-1)^3}{n^3 - n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\frac{n}{n+1}\right) (*).$$

Từ (*) cho $n = 3, 4, 5, \dots$

$$\frac{u_n}{u_2} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_3}{u_2} = \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 \dots \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{3}{4}\right) = \frac{12}{n^2(n+1)}$$

Suy ra $u_n = \frac{4}{n^2(n+1)}$ và $v_n = 4 \cdot \frac{3n+2}{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)} = 4 \cdot \left(\frac{1}{n^2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2 \cdot (n+2)} \right)$ và khi đó

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \right) \Rightarrow \lim(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = 2.$$

Bài 11: Cho dãy số (a_n) thỏa

$$a_1 = \frac{2}{3}; a_{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}(a_n^2 + a_n) - \frac{1}{(n+1)(n+2)}(na_n - 2); n = 1; 2; 3; \dots$$

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n > H_n - \frac{2}{3}; n = 1; 2; 3; \dots$ Trong đó, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Lời giải: Đặt $b_n = na_n$ thì dãy đã cho trở thành

$$b_1 = \frac{2}{3}; b_{n+1} = \frac{a_n^2 + (n-1)a_n + 2}{n+2}; n = 1; 2; 3; \dots$$

Khi đó, xét $b_{n+1} - 1 = (b_n - 1) \cdot \frac{b_n + n}{n+2}$ và do $b_1 < 1$ nên quy nạp ta suy ra $b_n < 1; \forall n$

Từ đây: $|b_{n+1} - 1| = |b_n - 1| \cdot \frac{b_n + n}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} |b_n - 1|; \forall n = 1; 2; 3; \dots$ Áp dụng liên tiếp đánh giá này

cho ta $|b_{n+1} - 1| < \frac{2}{n+2} |b_n - 1| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n+2}; \forall n = 1; 2; 3; \dots$ Và điều này suy ra $b_{n+1} > 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n+2}$

với mọi giá trị n . Suy ra $a_n > \frac{1}{n} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{n(n+1)} \right); n = 1; 2; 3; \dots$ Và từ đây suy ra

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) > H_n - \frac{2}{3}$$

Bài 12: Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{n} + \left(1 + \frac{2}{n-1} \right) a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Tính $\lim \left(\frac{1}{3a_1} + \frac{1}{4a_2} + \dots + \frac{1}{(n+2)a_n} \right)$

Lời giải:

Ta viết lại $a_{n+1} = \frac{2a_n}{n} + \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)a_{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) + a_{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) + 2 \cdot \left(\frac{a_{n-2}}{n-2} + \frac{a_{n-3}}{n-3}\right) + a_{n-2} = \dots$

Vậy suy ra:

$$a_{2n+1} = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{i} \right) + a_1 = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{i} \right) + 1;$$

$$a_{2n} = 2 \cdot \left(\sum_{i=2}^{2n-1} \frac{a_i}{i} \right) + a_2 = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{a_i}{i} \right) + a_2 - 2a_1 = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{a_i}{i} \right) + 1$$

Vậy: $a_{n+1} = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \right) + 1$ và suy ra $a_{n+1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(a_n - 1) + \frac{a_n}{n} \right) + 1 = a_n + \frac{2a_n}{n} = \frac{n+2}{n} a_n$. Áp

dụng liên tiếp công thức này ta suy ra $a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Vậy

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{n+2} \right) &= \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \lim \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Bài 13: Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1} + (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^2, \forall n \geq 2$. Tìm

số thực M nhỏ nhất sao cho $\sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i} < M, \forall m \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

Ta viết lại giả thiết $a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1} + (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^2 = 1 + (1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_1 a_2 \dots a_{n-1}$

Ta tính thêm: $a_3 = 3; a_4 = 7 \dots$

Khi đó, ta chứng minh quy nạp $a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1 = a_n; \forall n \geq 2$. $n = 2; 3$ thì mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến n ta chứng minh mệnh đề với $n + 1$

Ta có: $a_{n+1} = 1 + (1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 1 + a_n \cdot a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 1 + a_1 a_2 \dots a_n$ hay mệnh đề đúng với $n + 1$ và suy ra mệnh đề đúng với mọi n và suy ra $a_n > 1$; $n = 2; 3; 4; \dots$

Từ đây suy ra: $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$; $n = 2; 3; 4; \dots$ (1) và hơn nữa có biến đổi

$$a_{n+1} - 1 = a_n (a_n - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}; n = 2; 3; 4; \dots$$

$$\text{suy ra } \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i} = 1 + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{m+1} - 1} = 2 - \frac{1}{a_{m+1} - 1} < M; \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Mặt khác, ta có dãy (a_n) tăng nên giả sử dãy bị chặn thì tồn tại $\lim a_n = L > 1$ do $a_n > 1$. Nhưng mặt khác lấy lim hai vế (1) lại có $L = 1$ và suy ra vô lý hay $\lim a_n = +\infty$.

Khi đó, từ (2) lấy lim hai vế cho ta $2 \leq M$. Và khi $M = 2$ thì bất đẳng thức đúng nên $M = 2$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Bài 14: Cho dãy (a_n) thỏa $a_{n+1} + a_n \cdot a_{n-1}^2 = 2(a_n^2 + a_n - 1)$, $n = 2; 3; 4; \dots$ Đặt

$$u_n = (a_n + a_{n-1})(a_{n-1} + a_{n-2}) \dots (a_2 + a_1), \text{ tính } \lim \left(\frac{u_n}{a_{n+1} \cdot a_n} + \frac{u_{n-1}}{a_n \cdot a_{n-1}} + \dots + \frac{u_2}{a_3 \cdot a_2} \right).$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra: $a_{n+1} + 2 - a_n^2 = a_n (a_n + 2 - a_{n-1}^2) = a_n a_{n-1} (a_{n-1} + 2 - a_{n-2}^2) = \dots = 0$ (vì $a_2 + 2 - a_1^2 = 0$). Và điều này suy ra: $a_{n+1} = a_n^2 - 2$; $n = 1; 2; 3; 4; \dots$

Khi đó, ta chứng minh quy nạp được $a_n > 2$, điều này suy ra (a_n) là dãy tăng và suy ra $\lim a_n = +\infty$.

Lại biến đổi: $a_{n+1} - a_n = (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$; $n = 2; 3; 4; \dots$ và nhân vế theo vế ta suy ra

$$u_n = \frac{1}{7}(a_{n+1} - a_n) \text{ và do đó: } \lim \left(\frac{u_n}{a_{n+1} \cdot a_n} + \frac{u_{n-1}}{a_n \cdot a_{n-1}} + \dots + \frac{u_2}{a_3 \cdot a_2} \right) = \lim \frac{1}{7} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{49}.$$

Bài 15: Cho dãy số (u_n) thỏa $u_1 = 1; u_2 = 42; u_{n+2} = 3u_n + \sqrt{8(u_{n+1}^2 + u_n^2)}$, $n = 1; 2; 3; \dots$ Tính

$$\lim \frac{u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n+1}}{u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $u_{n+2}^2 - 6u_{n+2}.u_n + u_n^2 = 8u_{n+1}^2$ và tương tự cũng có $u_{n+1}^2 - 6u_{n+1}.u_{n-1} + u_{n-1}^2 = 8u_{n-2}^2$.

Trừ vế theo vế ta có $(u_{n+2} - 3u_n)^2 = (3u_{n+1} - u_{n-1})^2, n = 2; 3; 4...$

Từ giả thiết ta có: $u_{n+2} - 3u_n > 0 \Rightarrow 3u_{n+1} - u_{n-1} > 0$ nên suy ra

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 3u_n - u_{n-1}, n = 2; 3; 4...$$

Phương trình đặc trưng là $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ có các nghiệm $-1; x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{3}$ và suy ra

công thức tổng quát của dãy là: $u_n = a.(-1)^n + b(2 + \sqrt{3})^n + c(2 - \sqrt{3})^n$ và suy ra

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n+1} = -7(n+1) + b.x_1 \frac{x_1^{2(n+1)} - 1}{x_1^2 - 1} + c.x_2 \frac{x_2^{2(n+1)} - 1}{x_2^2 - 1}$$

$$u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n} = 7n + b.x_1^2 \frac{x_1^{2n} - 1}{x_1^2 - 1} + c.x_2^2 \frac{x_2^{2n} - 1}{x_2^2 - 1}. \text{ Từ đây suy ra}$$

$$\lim \frac{u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n+1}}{u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}} = \lim \frac{-7(n+1) + b.x_1 \frac{x_1^{2(n+1)} - 1}{x_1^2 - 1} + c.x_2 \frac{x_2^{2(n+1)} - 1}{x_2^2 - 1}}{7n + b.x_1^2 \frac{x_1^{2n} - 1}{x_1^2 - 1} + c.x_2^2 \frac{x_2^{2n} - 1}{x_2^2 - 1}} = x_1$$

$$\text{Chú ý: } \lim \frac{n+1}{x_1^{2n+2}} = \lim \frac{n}{x_1^{2n+2}} = 0$$

Bài 16: Cho dãy (x_n) thỏa $x_1 = 2; x_2 = 4; x_{n+1} = \frac{x_{n-1}.x_n^2}{x_n + x_{n-1}^2 - x_{n-1}}; n = 2; 3; 4...$ Tính

$$\lim \left((x_n - 1) \left(1 - \frac{1}{x_{n-1}} \right) \left(1 - \frac{1}{x_{n-2}} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{x_1} \right) \right).$$

Lời giải:

Ta biến đổi giả thiết:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}.x_n^2}{x_n + x_{n-1}^2 - x_{n-1}} \Leftrightarrow x_{n+1}(x_n + x_{n-1}^2) = x_{n-1}(x_{n+1} + x_n^2) \Leftrightarrow \frac{x_n + x_{n-1}^2}{x_{n-1}.x_n} = \frac{x_{n+1} + x_n^2}{x_{n+1}.x_n}$$

Khi đó, từ đẳng thức cuối suy ra:

$$\frac{x_n + x_{n-1}^2}{x_{n-1} \cdot x_n} = \frac{x_{n+1} + x_n^2}{x_{n+1} \cdot x_n} = \dots = \frac{x_2 + x_1^2}{x_2 \cdot x_1} = 1 \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n - 1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} \text{ và từ đây quy nạp ta}$$

có $x_n > 1; \forall n$ và suy ra (x_n) là dãy tăng, suy ra $\lim x_n = +\infty$.

$$\text{Lại có: } \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 - \frac{1}{x_n}, n = 1; 2; 3 \dots \Rightarrow \frac{x_1}{x_{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{x_1}\right)$$

Hay ta có:

$$\lim \left((x_n - 1) \left(1 - \frac{1}{x_{n-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{x_{n-2}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \right) = \lim \frac{x_1 \cdot x_n}{x_{n+1}} = 2$$

Bài 17: Dãy (x_n) thỏa $x_n = 0 \Leftrightarrow n = 0$; $x_{n+1} = x_{\left[\frac{n+3}{2}\right]}^2 + (-1)^n \cdot x_{\left[\frac{n}{2}\right]}^2$ khi $n \geq 0$. Tính

$$\lim \left(\left(\frac{(-1)^n}{x_n^2} + 1 \right) \left(\frac{(-1)^{n-1}}{x_{n-1}^2} + 1 \right) \dots \left(\frac{(-1)^2}{x_2^2} + 1 \right) \right).$$

Lời giải:

Thay $n=0$ và $n=1$ ta có $x_1 = x_1^2$ và $x_2 = x_2^2$, do đó $x_1 = x_2 = 1$. Từ điều kiện suy ra

$$x_{2n+1} = x_{n+1}^2 + x_n^2 \text{ and } x_{2n} = x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2$$

Trừ theo vế ta có: $x_{2n+1} - x_{2n} = x_n^2 + x_{n-1}^2 = x_{2n-1}$

Ta chứng minh quy nạp: $x_{2n} = x_{2n-1} + x_{2n-2}, n \geq 1$ (1)

Thật vậy, $x_2 = x_1 + x_0$ và giả sử (1) đúng đến n . Thì

$$x_{2n+2} - x_{2n} = x_{n+2}^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 + x_{n-1}^2 \stackrel{(*)}{=} (x_{n+1} + x_n)^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 + (x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 + x_n^2 = x_{2n+1}$$

Vậy từ các điều trên ta suy ra: $x_0 = 0; x_1 = 1; x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ và công thức tổng quát là

$$x_n = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Biến đổi: $\frac{x_{n+2} - x_n}{x_{n+1}} = 1 = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{x_n} \Leftrightarrow x_{n+2} \cdot x_n - x_{n+1}^2 = (-1) \cdot (x_{n+1} \cdot x_{n-1} - x_n^2) = \dots = (-1)^{n+1}$ và

điều này suy ra $\frac{x_{n+2} \cdot x_n}{x_{n+1}^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{x_{n+1}} + 1$ và khi đó ta có

$$\lim \left(\left(\frac{(-1)^n}{x_n^2} + 1 \right) \left(\frac{(-1)^{n-1}}{x_{n-1}^2} + 1 \right) \dots \left(\frac{(-1)^1}{x_2^2} + 1 \right) \right) = \lim \frac{x_{n+1} x_{n-1}}{x_n^2} \cdot \frac{x_n x_{n-2}}{x_{n-1}^2} \dots \frac{x_3 x_1}{x_2^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Bài 18: Cho dãy $(a_n)_{n \geq 0}$ thỏa $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6$ và

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n, n \geq 0.$$

Chứng minh rằng a_n chia hết cho n với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải:

Cách 1: Phương trình đặc trưng: $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ có nghiệm $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

(mỗi nghiệm đều là bội 2)

Suy ra công thức tổng quát: $a_n = (A_1 n + B_1) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + (A_2 n + B_2) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$. Lập hệ và giải ra

$$\text{công thức tổng quát suy ra } a_n = n \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Cách 2: Ta tính vài số $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 12, a_5 = 25, a_6 = 48$ xét

$$\frac{a_1}{1} = 1; \frac{a_2}{2} = 1; \frac{a_3}{3} = 2; \frac{a_4}{4} = 3; \frac{a_5}{5} = 5; \frac{a_6}{6} = 8 \dots \text{ Từ đây, ta chứng minh quy nạp}$$

$$\frac{a_n}{n} = F_n, n = 1; 2; 3 \dots$$

Giả sử mệnh đề đã cho đúng đến $n + 3$; ta chứng minh mệnh đề đúng với $n + 4$.

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - n(F_{n+2} - F_{n+1}) \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + 2F_{2n+2} - (n+2)F_{n+1} \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + 2F_{2n+2} - (n+2)(F_{n+3} - F_{n+2}) \\
&= (n+4)(F_{n+3} + F_{n+2}) = (n+4)F_{n+4}
\end{aligned}$$

Nếu làm cách 1 thì cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \in \mathbb{Z}$.

Nếu làm cách 2 thì hiển nhiên.

Bài 19: Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$, $a_n = \left\lfloor \sqrt{2a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1} \right\rfloor$; $n > 1$.

Tính $\lim \left(\frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_4 a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}} \right)$.

Lời giải:

